О вероятности успешного размещения частиц по ячейкам (общий случай)*

И. Р. КАЮМОВ
Казанский федеральный университет
e-mail: ikayumov@kpfu.ru

А. Н. ЧУПРУНОВ
Казанский федеральный университет
e-mail: Alexey.Chuprunov@ksu.ru

УДК 519.212.2+517.537

Ключевые слова: обобщённая схема размещения, интеграл Коши, код Хемминга.

Аннотация

Получена асимптотически точная оценка вероятности события, состоящего в том, что в обобщённой схеме размещения n независимых серий из m частиц по N ячейкам в каждой ячейке окажется не более r частиц из одной серии. Рассматриваются приложения этого результата к помехоустойчивому кодированию.

Abstract

I. R. Kayumov, A. N. Chuprunov, The probability of successful allocation of particles in cells (the general case), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 119—128.

Let p_{nN} be the probability of successful allocation of n groups of particles in N cells with the following assumptions: (a) each group contains m particles and has allocation as a general allocation scheme; (b) each cell contains at most r particles from the same group; (c) events connected with different groups are independent. We obtain an asymptotically exact bound of p_{nN} as $n, N \to \infty$ such that n/N is bounded. Applications to problems in error-correcting coding are considered.

1. Введение и основной результат

Рассмотрим обобщённую схему размещения n независимых серий частиц по N ячейкам (о такой схеме размещения см., например, [2]). Каждая серия состоит из m частиц. Обозначим через p_{nN} вероятность события, состоящего в том, что в каждой ячейке оказалось не более r частиц из одной серии, где r — фиксированное число. Вероятность p_{nN} в различных схемах размещения, таких,

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 12-01-97013-р-поволжье-а, 14-01-00351.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 119—128.

как схема размещения различимых частиц, схема размещения неразличимых частиц, схема размещения цветных частиц, имеет представление

$$p_{nN} = \left(\frac{a_m(S_r^N)}{a_m(S^N)}\right)^n,$$

где

$$S(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \,—$$

некоторая аналитическая в окрестности нуля функция, коэффициенты которой неотрицательны, S_r — частичная сумма ряда этой функции, т. е.

$$S_r(z) = 1 + \sum_{k=1}^{r} a_k z^k,$$

$a_m(S^N)$ — m-й коэффициент разложения функции S^N, $a_m = a_m(S_r^N)$ — m-й коэффициент разложения функции S_r^N.

Ввиду равенств

$$a_m(S^N) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{S(z)^N}{z^{m+1}}\,dz, \quad a_m(S_r^N) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{S_r(z)^N}{z^{m+1}}\,dz,$$

где C — замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, внутренность которого не содержит нулей функций S и S_r, имеем

$$p_{nN} = \left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{S_r(z)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{S(z)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n. \qquad (1)$$

В данной работе мы предполагаем, что $a_1 > 0$.

Используя представление (1), мы докажем, что

$$p_{nN} = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right]$$

при $n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^r)$, где α — отношение количества независимых серий частиц к числу ячеек, т. е.

$$\alpha = \alpha_{nN} = \frac{n}{N}.$$

Этот результат был анонсирован нами в [1].

Вероятность p_{nN} имеет следующее применение к теории помехоустойчивого кодирования. Рассмотрим код, который позволяет исправить в блоке не больше r ошибок типа замещения. Частным случаем такого кода является код Хемминга (о коде Хемминга см., например, [4]). Пусть имеется n сообщений. Каждое сообщение разбито на N блоков и содержит m ошибок. Мы предполагаем, что вероятности, связанные с различными сообщениями, независимы и ошибки распределяются по блокам сообщения согласно некоторой схеме размещения. Интерпретируя ошибки как частицы, а ячейки как блоки, замечаем, что p_{nN} — вероятность события, состоящего в том, что ошибки во всех n сообщениях будут исправлены.

В [11] изучалась сходимость вероятности p_{nN} в случае схемы размещения различимых частиц по различным ячейкам. В [8—10] асимптотическое поведение вероятности p_{nN} изучалось для некоторых аналогов обобщённой схемы размещения. При этом преимущественно рассматривался случай $r = 1$. Для случайного количества частиц в сериях при $r = 1$ в [10] получены законы больших чисел, в терминах которых описывается асимптотическое поведение вероятности p_{nN}.

В настоящей работе, используя представление (1), мы получаем асимптотически точные оценки вероятности p_{nN} для любого $r \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь различные схемы размещения частиц.

Различные в каждой серии частицы

Эта схема размещения подробно рассмотрена в [3]. Количество всевозможных размещений частиц i-й серии равно N^m, количество размещений частиц i-й серии, таких что в любой ячейке содержится не более r частиц, равно

$$M_m(N, r) = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_N=m,\\ 0\leqslant l_1,\ldots,l_N\leqslant r}} \frac{m!}{l_1!\cdots l_N!}.$$

Поэтому вероятность события, состоящего в том, что при размещении частиц i-й серии в любой ячейке оказалось не более r частиц, равна

$$p_{Ni} = \frac{M_m(N, r)}{N^m}, \quad p_{nN} = \prod_{i=1}^{n} p_{Ni} = \left(\frac{M_m(N, r)}{N^m}\right)^n.$$

Из результатов, полученных в [7, с. 71] следует, что

$$p_{nN} = \left(\frac{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{(1+z/1!+\ldots+z^r/r!)^N}{z^{m+1}}\, dz}{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{(1+z/1!+\ldots+z^r/r!+\ldots)^N}{z^{m+1}}\, dz} \right)^n.$$

Поэтому для p_{nN} справедливо представление (1) с функцией $S(z) = e^z$.

Одинаковые в каждой серии частицы

Такая схема рассматривалась, например, в [5, с. 96; 6, с. 137; 7, с. 93]. В этом случае количество всевозможных размещений частиц i-й серии равно $N(N+1)\cdots(N+m-1)$, количество размещений частиц i-й серии, таких что в любой ячейке содержится не более r частиц, равно

$$M_m(N,r) = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_N=m,\\ 0\leqslant l_1,\ldots,l_N\leqslant r}} 1.$$

Поэтому вероятность события, состоящего в том, что при размещении частиц i-й серии в любой ячейке оказалось не более r частиц, равна

$$p_{Ni} = \frac{M_m(N,r)}{N(N+1)\cdots(N+m-1)},$$
$$p_{nN} = \prod_{i=1}^{n} p_{Ni} = \left(\frac{M_m(N,r)}{N(N+1)\cdots(N+m-1)}\right)^n.$$

Из формул, содержащихся в [7], следует, что

$$p_{nN} = \left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(1+z+\ldots+z^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(1+z+\ldots+z^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n.$$

Поэтому для p_{nN} справедливо представление (1) с функцией $S(z) = 1/(1-z)$.

Частицы одного из l цветов

Мы предполагаем, что частицы в каждой серии могут быть одного из l цветов и все цвета равновероятны. В этом случае можно считать, что при размещении серии частиц каждая ячейка состоит из l ячеек, которые содержат частицы одного цвета. Поэтому количество всевозможных размещений частиц i-ой серии равно $(N+1)(N+2)\cdots(N+ml-1)$, количество размещений частиц i-й серии, таких что в любой ячейке содержится не более p частиц, равно

$$M_m(N,r) = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_N=m,\\ 0<l_1,\ldots,l_N\leqslant r}} \prod_{j=1}^{N} (l_j+1)\cdots(l_j+l-1).$$

Поэтому вероятность события, состоящего в том, что при размещении частиц i-й серии в любой ячейке оказалось не более r частиц, равна

$$p_{Ni} = \frac{M_m(N,r)}{(N+1)(N+2)\cdots(N+ml-1)},$$
$$p_{nN} = \prod_{i=1}^{n} p_{Ni} = \left(\frac{M_m(N,r)}{(N+1)\cdots(N+ml-1)}\right)^n.$$

Используя производящую функцию, как это сделано в [7, с. 93], легко показать, что если в каждой серии частицы равновероятно могут быть одного из r цветов, то

$$p_{nN}=\left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{(1\cdot2\cdots(l-1)+2\cdot3\cdots(1+l-1)z+\ldots+(r+1)\cdot(r+2)\cdots(r+l-1)z^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{(1\cdot2\cdots(l-1)+2\cdot3\cdots(1+l-1))z+\ldots+((r+1)\cdot(r+2)\cdots(r+l-1)z^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{(1+lz+C_{l+1}^2z^2+\ldots+C_{r+l-1}^rz^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{(1+lz+C_{l+1}^2z^2+\ldots+C_{r+l-1}^rz^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n.$$

Поэтому для p_{nN} справедливо представление (1) с функцией

$$S(z)=1+lz+C_{l+1}^2z^2+\ldots+C_{r+l-1}^rz^r+\ldots.$$

Леса с корневыми деревьями

Количество лесов, содержащих N корневых и m некорневых вершин, равно $N(m+N)^{m-1}$ (формула Кэли). Поэтому количество лесов, имеющих N корневых и m некорневых вершин, таких что каждое дерево имеет не более r некорневых вершин, равно

$$M_m(N,r)=\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_N=m,\\ 0<l_1,\ldots,l_N\leqslant r}}(l_1+1)^{l_1-1}(l_2+1)^{l_2-1}\cdots(l_N+1)^{l_N-1}.$$

Поэтому вероятность события, состоящего в том, что в i-м лесе, содержащем N корневых и m некорневых вершин, каждое дерево имеет не более r некорневых вершин, равна

$$p_{Ni}=\frac{M_m(N,r)}{N(m+N)^{m-1}},\quad p_{nN}=\prod_{i=1}^n p_{Ni}=\left(\frac{M_m(N,r)}{N(m+N)^{m-1}}\right)^n.$$

Используя производящую функцию, с учётом формул, приведённых в [5, 6], легко показать, что

$$p_{nN}=\left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{((1^{1-1}/1!)z+(2^{2-1}/2!)z^2+\ldots+(r^{r-1}/r!)z^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{((1^{1-1}/1!)z+(2^{2-1}/2!)z^2+\ldots+(r^{r-1}/r!)z^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n.$$

Поэтому для p_{nN} справедливо представление (1) с функцией

$$S(z)=\frac{1^{1-1}}{1!}z+\frac{2^{2-1}}{2!}z^2+\ldots+\frac{r^{r-1}}{r!}z^r+\ldots.$$

Циклы в подстановках

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, с использованием формул из [6, с. 183] получаем, что вероятность события, состоящего в том, что в подстановке степени m, содержащей ровно N циклов, длина каждого цикла не больше чем r, равна

$$p_N = \frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(z+(1/2)z^2+\ldots+(1/r)z^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(z+(1/2)z^2+\ldots+(1/r)z^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}.$$

Поэтому

$$p_{nN} = \left(\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(z+(1/2)z^2+\ldots+(1/r)z^r)^N}{z^{m+1}}\,dz}{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{(z+(1/2)z^2+\ldots+(1/r)z^r+\ldots)^N}{z^{m+1}}\,dz}\right)^n,$$

и для p_{nN} справедливо представление (1) с функцией $S(z) = \ln(1-z)$.

Заметим, что две последние схемы соотвествуют случаю

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Этот случай будет рассмотрен в следующей работе.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r \geqslant 1$, $m > r$. Если $\alpha = o(N^r)$ при $n, N \to \infty$, то*

$$p_{nN} = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right].$$

Из теоремы 1 при $a_1 = 1$, $a_{r+1} = 1/(r+1)!$ получаем следствие 1.

Следствие 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $m > r$. Тогда в схеме размещения различных частиц при условии, что $\alpha = o(N^r)$ при $n, N \to \infty$, имеем*

$$p_{nN} = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\frac{1}{(r+1)!}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right].$$

Из теоремы 1 при $a_1 = 1$, $a_{r+1} = 1$ получаем следствие 2.

Следствие 2. *Пусть $p \geqslant 1$, $m > r$. Тогда в схеме размещения одинаковых частиц при условии, что $\alpha = o(N^r)$ при $n, N \to \infty$, имеем*

$$p_{nN} = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right].$$

Из теоремы 1 при $a_1 = l$, $a_{r+1} = C_{l+r}^{r+1}$ получаем следствие 3.

Следствие 3. *Пусть $r \geqslant 1$, $m > r$. Тогда в схеме размещения частиц, каждая из которых имеет равновероятно один из l цветов, при условии, что $\alpha = o(N^r)$ при $n, N \to \infty$,*

$$p_{nN} = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\frac{C_{r+1}^{r+l}}{l^{r+1}}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right].$$

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $r \geqslant 1$, $m > r$. Если*

$$\frac{\alpha}{N^{r-1}} \to \beta \quad \textit{при} \quad n, N \to \infty,$$

где $0 \leqslant \beta < \infty$, то

$$p_{nN} \to \exp\left[-m(m-1)\cdots(m-r)\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\beta\right] \quad \textit{при} \quad n, N \to \infty.$$

2. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $g(z) = 1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ — аналитическая в окрестности нуля функция, C — контур, внутренность которого не содержит нулей функции $g(z)$. Тогда*

$$\oint\limits_C \frac{g(z)^N\,dz}{N^m z^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k N^{-k},$$

где

$$c_k = \frac{1}{(m-k)!}\oint\limits_C \left(\frac{\log g(z)}{z}\right)^{m-k} \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

Здесь и ниже $\log g$ — однозначная ветвь аналитической функции $\operatorname{Log} g$, фиксированная условием $\log 1 = 0$ (существование такой ветви гарантируется классической теоремой о монодромии).

Доказательство. Разложим $g(z)^N$ по степеням N:

$$g(z)^N = e^{N\log g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}\log^k g(z).$$

Заметим, что разложение $\log^k g(z)$ начинается с z^k, поэтому

$$\oint\limits_C \frac{\log^k g(z)}{z^{m+1}}\,dz = 0, \quad k \geqslant m+1.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_C \frac{g(z)^N dz}{N^m z^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,N^{m-k}}\oint\limits_C \frac{\log^k g(z)}{z^{m+1}}\,dz = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,N^k}\oint\limits_C \frac{\log^{m-k} g(z)}{z^{m+1}}\,dz.$$

Последний член этой суммы равен нулю по теореме о вычетах. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 1$, т. е. $n = N$. Имеем

$$\log S_r(z) = \log\bigl(S(z) + S_r(z) - S(z)\bigr) = \log S(z) + \log\left(1 + \frac{S_r(z) - S(z)}{S(z)}\right) = \\ = \log S(z) - a_{r+1} z^{r+1} + O(z^{2r+2}),$$

т. е.

$$\frac{\log S_r(z)}{z} = \frac{\log S(z)}{z} - a_{r+1} z^r + O(z^{2r+1}).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\log S_r(z)}{z}\right)^{m-k} = \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k} - a_{r+1}(m-k) z^r \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k-1} + O(z^{2r}) = \\ = \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k} - (m-k) z^r a_{r+1} (a_1)^{m-k-1} + O(z^{r+1}).$$

Таким образом, при $k \leqslant r - 1$ имеем

$$c_k = \frac{1}{(m-k)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S_r(z)}{z}\right)^{m-k} \frac{dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{(m-k)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k} \frac{dz}{z^{k+1}}$$

и

$$c_r = \frac{1}{(m-r)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-r} \frac{dz}{z^{r+1}} - \frac{2\pi i a_{r+1}(m-r)(a_1)^{m-r-1}}{(m-r)!} = \\ = \frac{1}{(m-r)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-r} \frac{dz}{z^{r+1}} - \frac{2\pi i a_{r+1}(a_1)^{m-r-1}}{(m-r-1)!}.$$

Применяя лемму к $S_r(z)$, видим, что

$$\oint\limits_C \frac{S_r(z)^N dz}{N^m z^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k N^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} N^{-k} \frac{1}{(m-k)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k} \frac{dz}{z^{k+1}} - \\ - \frac{2\pi i a_{p+1}(a_1)^{m-r-1}}{(m-r-1)! N^r} + O(N^{-r-1}). \quad (2)$$

Заметим, что из леммы следует также, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} N^{-k} \frac{1}{(m-k)!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^{m-k} \frac{dz}{z^{k+1}} = \oint\limits_C \frac{S(z)^N dz}{N^m z^{m+1}}. \quad (3)$$

Таким образом, подставляя (3) в (2), получаем

$$\oint\limits_C \frac{S_r(z)^N\,dz}{N^m z^{m+1}} = \oint\limits_C \frac{S(z)^N\,dz}{N^m z^{m+1}} - 2\pi i \frac{a_{r+1}(a_1)^{m-r-1} m!\,(m-r)}{(m-r)!\,N^r} + O(N^{-r-1}) =$$

$$= 2\pi i \frac{a_m(S^N)}{N^m} - 2\pi i \frac{a_{r+1}(a_1)^{m-r-1}}{(m-r-1)!\,N^r} + O(N^{-r-1}).$$

Ещё раз применяя лемму к функции $g(z) = S(z)$ и устремляя N к бесконечности, получаем соотношение

$$\oint\limits_C \frac{S(z)^N dz}{N^m z^{m+1}} = c_0 + O(1/N), \quad N \to \infty,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{m!} \oint\limits_C \left(\frac{\log S(z)}{z}\right)^m \frac{dz}{z}.$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{a_m(S^N)}{N^m} = \frac{a_1^m}{m!}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad N \to \infty. \tag{4}$$

Итак,

$$p_{NN} = \left(\frac{N^m}{a_m(S^N)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{S_r(z)^N}{N^m z^{m+1}}\,dz\right)^N =$$

$$= \left(1 - \frac{N^m}{a_m(S^N)} \frac{a_{r+1}(a_1)^{m-r-1}}{(m-r-1)!\,N^r} + O(N^{-r-1})\right)^N.$$

В силу (4)

$$\begin{aligned} p_{NN} &= \left(1 - \frac{a_{r+1}(a_1)^{-r-1} m!}{(m-r-1)!\,N^r} + O(N^{-r-1})\right)^N = \\ &= \exp\left[N \log\left(1 - \frac{a_{r+1}(a_1)^{-r-1} m!}{(m-r-1)!\,N^r} + O(N^{-r-1})\right)\right] = \\ &= \exp\left[N\left(\frac{a_{r+1}(a_1)^{-r-1} m!}{(m-r-1)!\,N^r} + O(N^{-r-1})\right)\right] = \\ &= \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}} \frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right], \quad N \to \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана для случая $\alpha = 1$. Общий случай легко получается возведением в степень α вероятности p_{nN}. □

Литература

[1] Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Чупрунов А. Н. Исследование вероятности успешного размещения частиц по ячейкам методами комплексного анализа // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2003. — Т. 19. — С. 6—7.

[2] Колчин В. Ф. Случайные графы. — М.: Физматлит, 2000.

[3] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.

[4] Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. — Питер, 2004.

[5] Тимашев А. Н. Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике. — М.: ТВП, 2011.

[6] Тимашев А. Н. Большие уклонения в вероятностной комбинаторике. — М.: Академия, 2011.

[7] Тимашев А. Н. Обобщённая схема размещения в задачах вероятностной комбинаторики. — М.: Академия, 2011.

[8] Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок принадлежит некоторому конечному множеству // Информ. и её примен. — 2009. — Т. 3, № 3. — С. 52—59.

[9] Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, если число ошибок случайно // Дискрет. мат. — 2010. — Т. 22, № 2. — С. 41—50.

[10] Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок — случайное множество // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2010. — № 8. — С. 81—88.

[11] Avkhadiev F. G., Chuprunov A. N. The probability of a successful allocation of ball groups by boxes // Lobachevskii J. Math. — 2007. — Vol. 25. — P. 3—7.