Прямые и обратные теоремы о приближении кусочно-полиномиальными функциями*

А. С. КОЧУРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kochurov@mech.math.msu.su

УДК 517.518.8

Ключевые слова: сплайн, обратная задача аппроксимации, наилучшее приближение, интегральная сумма, неравенство Харди.

Аннотация

В статье изучаются некоторые характеристики аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями с нефиксированными узлами в различных интегральных метриках $L_p[a,b]$, $0 < p \leqslant \infty$.

Abstract

A. S. Kochurov, Direct and inverse theorems on approximation by piecewise polynomial functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 129—144.

The paper is concerned with some characteristics of approximation by piecewise polynomial functions with nonfixed knots in various integral metrics $L_p[a,b]$, $0 < p \leqslant \infty$.

Прямым и обратным теоремам о приближении функций сплайнами (и, в частности, кусочно-полиномиальными функциями) посвящено большое число работ. По сути, каждый результат, в котором устанавливаются оценки скорости аппроксимации функций сплайнами, следует отнести к этой тематике. В данной статье изучаются некоторые характеристики такой аппроксимации (близкие к функционалам из [2]), а одной из предпосылок к появлению работы послужила задача о нахождении классов функций, которые характеризуются наилучшим приближением сплайн-функциями, поставленная С. Б. Стечкиным (см. [7]) на коллоквиуме по конструктивной теории функций в Будапеште в 1969 г. Полученные результаты в известном смысле близки к исследованиям Ю. А. Брудного и И. П. Иродовой [1].

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q < +\infty$, $a_+ = \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, $C^r_+[0,1)$ — класс функций, у которых r-я производная неубывающая и выпуклая (вниз) на $[0,1)$,

$$L_q[0,1] = \left\{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(\cdot) \text{ измерима}, \ |f|_q := \int\limits_0^1 |f(t)|^q\,dt < \infty \right\},$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00642 А, грант 14-01-00744 А).

$f \in L_q[0,1]$, $\mathcal{P}_r$ — класс полиномов степени не выше r, $J(\Delta)$ — неотрицательная функция интервала $\Delta \subset [0,1]$. В качестве примера такой функции можно рассматривать, например,

$$J_s(f,\Delta,q) = \int\limits_{\Delta} |f(t) - p_s(t)|^q\,dt, \quad s = 1,2,3,$$

$p_1(\cdot) \in \mathcal{P}_r$, — полином наилучшего приближения функции f в $L_q(\Delta)$:

$$p_1 = \arg\min \biggl\{ \int\limits_{\Delta} |f(t) - p(t)|^q\,dt \biggm| p \in \mathcal{P}_r \biggr\},$$

$p_2 \in \mathcal{P}_r$ — полином Тейлора в точке t_1 для функции f (здесь $\Delta = [t_1,t_2]$, $f \in C^r[0,1))$, $p_3 \in \mathcal{P}_r$ — интерполяционный полином Лагранжа, построенный по равномерному разбиению отрезка Δ (и при этом предполагаем $f \in C[0,1]$).

Нетрудно убедиться, что если $J(\Delta) = J_s(f,\Delta,q)$, $s = 1,2,3$, то при любом $t_1 \in [0,1)$

1) $J([t_1,t]) \to 0$, когда $t \to t_1$;
2) $J([t_1,t]) \in C(t_1,b)$.

Будем предполагать, что условия 1) и 2) выполнены для $J(\Delta)$. Пусть

$$E_n = \inf_{0=\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{n-1} \leqslant \tau_n = 1} \sum_{i=0}^{n-1} J([\tau_i,\tau_{i+1}]),$$

$$\beta > -1, \quad V_n(\beta) = \sup_{0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n \leqslant 1} \sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}])^{1/(\beta+1)},$$

$$\alpha > -1, \quad W_n(\alpha) = \inf_{0=\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{n-1} \leqslant \tau_n = 1} \sum_{i=0}^{n-1} J([\tau_i,\tau_{i+1}])^{1/(\alpha+1)},$$

так что $W_n(0) = E_n$; сходные с $V_n(\beta)$ величины были рассмотрены в [3].

Если $-1 < \beta_1 < \beta_2$, то по неравенству Гёльдера

$$n\left(\frac{V_n(\beta_2)}{n}\right)^{\beta_2+1} = n^{-\beta_2} V_n(\beta_2)^{\beta_2+1} \leqslant \leqslant n^{-\beta_2} V_n(\beta_1)^{\beta_1+1} n^{\beta_2-\beta_1} = n\left(\frac{V_n(\beta_1)}{n}\right)^{\beta_1+1}. \quad (1)$$

Аналогично если $-1 < \alpha_1 < \alpha_2$, то

$$\left(\frac{W_n(\alpha_2)}{n}\right)^{\alpha_2+1} \leqslant \left(\frac{W_n(\alpha_1)}{n}\right)^{\alpha_1+1}. \quad (2)$$

Замечание 1. Для $J(\Delta) = J_s(f,\Delta,q)$, $s = 1,2,3$, величина $E_n = E_n(f,q)^{1/q}$ является одной из большого набора характеристик, известных как наилучшие приближения функции f сплайнами порядка r с нефиксированными узлами.

Замечание 2. Для $J(\Delta) = J_2(f, \Delta, q)$ и $f \in C^{r+1}[0,1)$ суммы, с помощью которых определяются величины $V_n(\beta) = V_n(f, q, \beta)$ при $\beta = q(r+1)$, имеют специальный вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} J_s(f, [t_i, t_{i+1}], q)^{1/(\beta+1)} = (\beta+1)^{-1/(\beta+1)} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{|f^{(r+1)}(\xi_i)|}{(r+1)!} \right)^{q/(\beta+1)} (t_{i+1} - t_i),$$

$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, т. е. являются интегральными суммами для

$$\left(\frac{1}{(\beta+1)\big((r+1)!\big)^q} \right)^{1/(\beta+1)} \int_0^1 \left| f^{(r+1)}(x) \right|^{q/(\beta+1)} dx.$$

Интегралы такого вида присутствует во всех работах, в которых вычисляется асимптотически точное поведение величины наилучшего приближения гладкой функции сплайнами в функциональных пространствах L_q.

Приведём одно достаточно общее неравенство, связывающее $W_n(\alpha)$ и $V_n(\beta)$.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $J(\Delta)$ — *неотрицательная функция интервала* $\Delta \subset \subset [0,1]$, *удовлетворяющая условиям* 1) *и* 2), $\alpha, \beta > -1$. *Тогда*

$$\left(\frac{W_n(\alpha)}{n} \right)^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1}. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $E = W_n(\alpha)/n$ и по индукции определим последовательность точек $\{t_i\} \subset [0,1]$. Положим $t_0 = 0$. Если t_i уже определено и не равно 1, пусть

$$t_{i+1} = \arg\big\{ \min\{ t \in (t_i, 1] \mid J([t_i, t]) \geqslant E^{\alpha+1} \} \big\}$$

или $t_{i+1} = 1$, если минимум рассматривается по пустому множеству. Для $t_{i+1} < 1$ ввиду 1) и 2) выполняются неравенство $t_i < t_{i+1}$ и равенство $J([t_i, t_{i+1}]) = E^{\alpha+1}$; в случае $t_{i+1} = 1$ может оказаться, что $J([t_i, t_{i+1}]) < E^{\alpha+1}$.

Пусть $t_{k+1} = 1$ для $k \in \mathbb{Z}_+$ и $J([t_k, t_{k+1}]) < E^{\alpha+1}$. Тогда $k \geqslant n$, так как если $k < n$, то

$$(k+1)E > J([t_0, t_1])^{1/(\alpha+1)} + \ldots + J([t_k, t_{k+1}])^{1/(\alpha+1)} \geqslant W_n(\alpha).$$

Получили противоречие с определением величины E. Поэтому

$$nE^{(\alpha+1)/(\beta+1)} = J([t_0, t_1])^{1/(\beta+1)} + \ldots + J([t_{n-1}, t_n])^{1/(\beta+1)} \leqslant V_n(\beta), \tag{4}$$

и выполнено (3). Пусть теперь $t_{k+1} = 1$ и $J(f, [t_k, t_{k+1}], \varphi) = E^{\alpha+1}$. Тогда аналогично $k \geqslant n-1$ и выполняются (4) и (3). □

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$W_n(0) = E_n \leqslant n \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1}.$$

Предположим теперь, что, помимо предположений 1) и 2), при некоторых $-1 < \alpha_0 \leqslant \beta_0$, $C_0, C_1 \geqslant 1$ и всех $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ выполняются следующие условия:

3) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} J([t_i, t_{i+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant C_0^{1/(\beta_0+1)} n^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)} J([t_0, t_n])^{1/(\beta_0+1)}$;

4) $J([t_0, t_n])^{1/(\alpha_0+1)} \leqslant C_1^{1/(\alpha_0+1)} n^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)} \sum\limits_{i=0}^{n-1} J([t_i, t_{i+1}])^{1/(\alpha_0+1)}$.

Если $-1 < \alpha_1 < \alpha_0$, $\gamma(\alpha_1 + 1) = (\alpha_0 + 1)$, $\gamma > 1$, и условие 4) выполняется для пары α_0, β_0, то оно выполняется также и для пары α_1, β_0. Действительно, по неравенству Гёльдера

$$J([t_0, t_n])^{1/(\alpha_0+1)} \leqslant C_1^{1/(\alpha_0+1)} n^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)} \sum_{i=0}^{n-1} J([t_i, t_{i+1}])^{1/(\alpha_0+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1/(\alpha_0+1)} n^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)+1-1/\gamma} \left(\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i, t_{i+1}])^{\gamma/(\alpha_0+1)} \right)^{1/\gamma},$$

и значит,

$$J([t_0, t_n])^{1/(\alpha_1+1)} \leqslant C_1^{1/(\alpha_1+1)} n^{(\beta_0-\alpha_1)/(\alpha_1+1)} \sum_{i=0}^{n-1} J([t_i, t_{i+1}])^{1/(\alpha_1+1)}.$$

Аналогичное замечание справедливо и для условия 3).

Покажем, что при выполнении условий 3) и 4) оценка (3) является точной по порядку. При этом дополнительно предположим, что функция $J(\Delta)$ монотонна: $J([t_1, t_2]) \leqslant J([t_0, t_3])$ для всех $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$. Такое предположение не является существенным, и теорема 2 может быть доказана без него за счёт незначительного увеличения входящей в её формулировку константы.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J(\Delta)$ — неотрицательная монотонная функция интервала $\Delta \subset [0, 1]$, удовлетворяющая условиям 1)—4), $\alpha \in (-1, \alpha_0]$, $\beta \in [\beta_0, +\infty)$. Тогда*

$$\frac{1}{A} \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1} \leqslant \frac{1}{A} \left(\frac{V_n(\beta_0)}{n} \right)^{\beta_0+1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{W_n(\alpha_0)}{n} \right)^{\alpha_0+1} \leqslant \left(\frac{W_n(\alpha)}{n} \right)^{\alpha+1} \leqslant \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1}, \quad (5)$$

где $A = 2^{2\beta_0-\alpha_0+1} \max\{C_0, C_1\}$.

Доказательство. Пусть

$$T_n = \{\tau_i\}_{i=0}^n, \quad 0 = \tau_0 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n = 1, \quad T^n = \{t_i\}_{i=0}^n, \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1.$$

Предположим, что для некоторых $i < j$ и s выполняются неравенства

$$\tau_s \leqslant t_i \leqslant \ldots \leqslant t_j \leqslant \tau_{s+1}.$$

Тогда из 3) и неотрицательности J следует, что

$$\sum_{k=i}^{j-1} J([t_k, t_{k+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant C_0^{1/(\beta_0+1)} J([\tau_s, \tau_{s+1}])^{1/(\beta_0+1)} (j-i)^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)}. \quad (6)$$

Пусть

$$\tau_i \leqslant t_k \leqslant \tau_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{j-1} \leqslant t_{k+1} \leqslant \tau_j$$

для некоторых $i < j$ и k. Тогда

$$\begin{aligned} J([t_k, t_{k+1}])^{1/(\beta_0+1)} &\leqslant J([\tau_i, \tau_j])^{1/(\beta_0+1)} \\ &\leqslant C_1^{1/(\beta_0+1)} \left((j-i)^{(\beta_0-\alpha_0)/(\alpha_0+1)} \sum_{s=i}^{j-1} J([\tau_s, \tau_{s+1}])^{1/(\alpha_0+1)} \right)^{(\alpha_0+1)/(\beta_0+1)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Некоторые слагаемые $J([\tau_s, \tau_{s+1}])^{1/(\alpha_0+1)}$ в оценках (6) и (7) могут повторяться, однако такое слагаемое при любом фиксированном s в различных оценках (6), (7) может встретиться не более двух раз. Поэтому из (6), (7) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} J([t_k, t_{k+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant \\ &\leqslant C^{1/(\beta_0+1)} \sum_k (j_k - i_k)^{(\beta_0-\alpha_0)/(\beta_0+1)} \left(\sum_s J([\tau_s, \tau_{s+1}]^{1/(\alpha_0+1)} \right)^{(\alpha_0+1)/(\beta_0+1)} \leqslant \\ &\leqslant C^{1/(\beta_0+1)} \left(\sum_k (j_k - i_k) \right)^{(\beta_0-\alpha_0)/(\beta_0+1)} \times \\ &\times \left(2 \sum_{s=0}^{n-1} J([\tau_s, \tau_{s+1}])^{1/(\alpha_0+1)} \right)^{(\alpha_0+1)/(\beta_0+1)}, \quad C = \max\{C_0, C_1\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_k (j_k - i_k) \leqslant 4n,$$

то

$$V_n(\beta_0) \leqslant C^{1/(\beta_0+1)} (4n)^{(\beta_0-\alpha_0)/(\beta_0+1)} \big(2W_n(\alpha_0)\big)^{(\alpha_0+1)/(\beta_0+1)}.$$

Отсюда и из (1)—(3) следует заключение теоремы. □

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *при* $\alpha_0 \geqslant 0$

$$\frac{2^{-2\beta_0+\alpha_0-1}}{\max\{C_0, C_1\}} \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1} \leqslant \frac{E_n}{n} \leqslant \left(\frac{V_n(\beta)}{n} \right)^{\beta+1}, \quad \beta \geqslant \beta_0.$$

Рассмотрим вопрос о справедливости предположений 3) и 4) на примере функции $J_2(f, \Delta, q)$.

Теорема 3. *Пусть* $J(\Delta) = J_2(f, \Delta, q)$, $q \in (0, \infty)$, $f \in L_q[0,1]$, $f^{(r+1)}$ — *неотрицательная неубывающая функция и* $\beta_0 = (r+1)q$. *Тогда для* $\alpha_0 = \beta_0$ *выполнено условие* 4), *а для* $\alpha_0 = \beta_0^2/(2\beta_0+1)$ *выполнено условие* 3). *При этом*

$$C_0 = 1 \leqslant C_1 \leqslant \left(1 + \left(2(\beta_0+1)\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}, \quad \theta = \min\left\{1, \frac{1}{q}\right\}.$$

Доказательство. Чтобы установить справедливость 4), выберем

$$0 \leqslant t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1.$$

На отрезке $[t_0, t_n]$

$$J_2(f, [t_0, t_n], q) = \int\limits_{t_0}^{t_n} |f(t) - p_2(t)|^q\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_n} \left(\frac{1}{r!}\int\limits_{t_0}^{t} (t-u)^r f^{(r+1)}(u)\, du\right)^q dt.$$

Пусть $f^{(r+1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая неубывающая на $[0,1)$ функция, $0 \leqslant s < k < n$ и

$$g(z) = \int\limits_{t_s}^{z} (z-\tau)^r f^{(r+1)}(\tau)\, d\tau, \quad z \in [t_s, t_{s+1}].$$

Тогда $r!\, f^{(r+1)} = g^{(r+1)}$ во всех точках непрерывности $f^{(r+1)}$, $g(t_s) = \ldots = g^{(r)}(t_s) = 0$, $g^{(r+1)}(t_s) \geqslant 0$, $g^{(r+2)}(z) \geqslant 0$, $z \in [t_s, t_{s+1}]$.

Выберем $t \in [t_k, t_{k+1}]$. При $q \in (0, +\infty)$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} g^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\, d\tau \to \sup, \\ \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} g^q(\tau)\, d\tau \leqslant a^q, \quad g^{(r+2)}(\tau) \geqslant 0, \quad \tau \in [t_s, t_{s+1}], \end{gathered} \tag{8}$$

$g(t_s) = \ldots = g^{(r)}(t_s) = 0$, $g^{(r+1)}(t_s) \geqslant g_s \geqslant 0$, $g^{(r+1)}(t_{s+1}) \leqslant g_{s+1}$; при $0 < q < 1$ рассмотрим также задачу

$$\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} g^q(\tau)\, d\tau \to \inf, \quad \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} g^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\, d\tau = b, \tag{9}$$

$g(t_s) = \ldots = g^{(r)}(t_s) = 0$, $g^{(r+1)}(t_s) \geqslant g_s \geqslant 0$, $g^{(r+1)}(t_{s+1}) \leqslant g_{s+1}$, $g^{(r+1)}(\cdot)$ не убывает.

Будем считать, что ограничения в задачах (8) и (9) задают непустой класс функций $g(\cdot)$.

Лемма 1. *При* $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant s < k < n$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ *и* $q \in (0, +\infty)$ *решение в задаче* (8) *достигается на функции* $g(\cdot)$, *у которой* $(r+1)$*-я производная* *равна g_s на полуинтервале $[t_s, \tau_1)$ и g_{s+1} — на полуинтервале $(\tau_1, t_{s+1}]$, а значение τ_1 однозначно определяется из условия*

$$\int\limits_{[t_s,t_{s+1}]} g^q \, d\tau = a^q.$$

Таким образом, экстремальная функция $g(\cdot)$ не зависит от параметров t и k из (8).

Доказательство. Пусть $q \geqslant 1$. Тогда задача (8) выпукла, а её формализованный вид и необходимые условия для решения $\hat{x}_0$ можно записать в виде

$$-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} x_{r+1}(t-\tau)^r \, d\tau \to \inf,$$

$$\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} x_0^q \, d\tau \leqslant a^q, \quad \dot{x}_j = x_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, r+1, \quad x_{r+2} \geqslant 0,$$

$x_0(t_s) = \ldots = x_r(t_s) = 0$, $x_{r+1}(t_s) \geqslant g_s \geqslant 0$, $x_{r+1}(t_{s+1}) \leqslant g_{s+1}$,

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\lambda_0 x_{r+1}(t-\tau)^r + \lambda_1 x_0^q + \sum_{j=0}^{r+1} p_j(\dot{x}_j - x_{j+1}) \right) d\tau + \\ + \sum_{j=0}^{r+1} \mu_j x_j(t_s) + \mu_{r+2} x_{r+1}(t_{s+1}),$$

$\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\mu_{r+1} \leqslant 0$, $\mu_{r+2} \geqslant 0$,

$\lambda_1 q \hat{x}_0^{q-1} - \dot{p}_0 = 0$, $\; -\dot{p}_j - p_{j-1} = 0$, $\; j = 1, \ldots, r$, $\; -\dot{p}_{r+1}(\tau) - p_r(\tau) + \lambda_0 (t-\tau)^r = 0$,

$p_0(t_{s+1}) = \ldots = p_r(t_{s+1}) = 0$, $p_{r+1}(t_{s+1}) = -\mu_{r+2}$, $\mu_j = p_j(t_s)$, $j = 0, \ldots, r+1$,

$$\min_{u \geqslant 0} -p_{r+1}(\tau) u = -p_{r+1}(\tau) \hat{x}_{r+2}(\tau), \quad \tau \in [t_s, t_{s+1}].$$

Анализ необходимых условий показывает, что, за исключением вырожденных случаев, функция $\hat{x}_{r+1}$ не может быть непрерывной; $p_{r+1}(\tau) \leqslant 0$ при всех $\tau \in [t_s, t_{s+1}]$ и $\hat{x}_{r+2}(\tau) = 0$ всюду на $[t_s, t_{s+1}]$, кроме точек, где функция p_{r+1} обращается в ноль.

Проверим, что решение достигается на функции $\hat{x}_0$, для которой $\hat{x}_{r+1}$ равна g_s на полуинтервале $[t_s, \tau_1)$ и g_{s+1} — на полуинтервале $(\tau_1, t_{s+1}]$, а значение τ_1 однозначно определяется из условия

$$\int\limits_{[t_s,t_{s+1}]} \hat{x}_0^q \, d\tau = a^q.$$

Для этого необходимо, чтобы для функции p_{r+1}

$$\dot p_{r+1}(\tau) = -p_r(\tau) + \lambda_0 (t-\tau)^r, \quad p_r(\tau) = -\frac{\lambda_1 q}{r!} \int\limits_{\tau}^{t_{s+1}} \hat x_0^{q-1}(v)(v-\tau)^r\, dv, \quad \lambda_0 = -1$$

и точка $\tau_1 \in (t_s, t_{s+1})$, в которой функция p_{r+1} обращается в ноль, являлась бы точкой её глобального максимума ($\dot p_{r+1}(\tau_1) = 0$):

$$\frac{\lambda_1 q}{r!} = (t-\tau_1)^r \Biggl(\int\limits_{\tau_1}^{t_{s+1}} \hat x_0^{q-1}(v)(v-\tau_1)^r\, dv \Biggr)^{-1}.$$

Функция

$$(t-\tau)^{-r} \int\limits_{\tau}^{t_{s+1}} x(v)(v-\tau)^r\, dv$$

для любой монотонно неубывающей функции $x(\cdot)$ убывает по τ, и это свойство достаточно проверить для функций, равных нулю на $[t_s, \tau_2)$ и равных единице на $(\tau_2, t_{s+1}]$. В этом случае при $\tau_2 \leqslant \tau$

$$(t-\tau)^{-r} \int\limits_{\tau}^{t_{s+1}} x(v)(v-\tau)^r\, dv = \frac{(t_{s+1}-\tau)^{r+1}}{(r+1)(t-\tau)^r}, \quad t \geqslant t_{s+1},$$

убывает по τ; при $\tau_2 > \tau$

$$(t-\tau)^{-r} \int\limits_{\tau}^{t_{s+1}} x(v)(v-\tau)^r\, dv = \frac{(t_{s+1}-\tau)^{r+1} - (\tau_2-\tau)^{r+1}}{(r+1)(t-\tau)^r},$$

так что знак производной по τ этого выражения совпадает со знаком

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}\Bigl(-(r+1)\bigl((t_{s+1}-\tau)^r - (\tau_2-\tau)^r\bigr)(t-\tau)^r + \\ &\quad + r(t-\tau)^{r-1}\bigl((t_{s+1}-\tau)^{r+1} - (\tau_2-\tau)^{r+1}\bigr)\Bigr) \\ &\quad = \operatorname{sgn}\Bigl((t_{s+1}-\tau)^r\bigl(rt_{s+1} + \tau - (r+1)t\bigr) - (\tau_2-\tau)^r\bigl(r\tau_2 + \tau - (r+1)t\bigr)\Bigr) \\ &\quad \leqslant \operatorname{sgn}\Bigl(-(t_{s+1}-\tau)^{r+1} - (\tau_2-\tau)^r\bigl(r\tau_2 + \tau - (r+1)t_{s+1}\bigr)\Bigr) = -1, \end{aligned}$$

так как производная по t_{s+1} выражения

$$(-(t_{s+1}-\tau)^{r+1} - \tau_2 - \tau)^r (r\tau_2 + \tau - (r+1)t_{s+1})$$

отрицательна при $t_{s+1} > \tau_2 > \tau$, а его значение при $t_{s+1} = \tau_2$ равно нулю. Поэтому

$$\dot p_{r+1}(\tau) = \frac{\lambda_1 q}{r!}(t-\tau)^r \left(\frac{\int_{\tau}^{t_{s+1}} \hat x_0^{q-1}(v)(v-\tau)^r\, dv}{(t-\tau)^r} - \frac{\int_{\tau_1}^{t_{s+1}} \hat x_0^{q-1}(v)(v-\tau_1)^r\, dv}{(t-\tau_1)^r} \right)$$

меняет знак при переходе через точку τ_1, $p_{r+1}(\tau_1) = 0$ и τ_1 является точкой глобального максимума p_{r+1}.

Пусть теперь $x(\cdot) \in C^{r+2}[0,1]$ — допустимая в задаче функция, $h = x - \hat{x}_0$. Тогда

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \hat{x}_0^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\,d\tau - \int_{t_s}^{t_{s+1}} x^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\,d\tau =$$

$$= \int_{t_s}^{t_{s+1}} h^{(r+1)}(\tau)\big(\dot{p}_{r+1}(\tau) + p_r(\tau)\big)\,d\tau$$

$$= p_{r+1}h^{(r+1)}\big|_{t_s}^{\tau_1} + p_{r+1}h^{(r+1)}\big|_{\tau_1}^{t_{s+1}} - \int_{t_s}^{\tau_1} h^{(r+2)}(\tau)p_{r+1}(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t_{s+1}} h^{(r+2)}(\tau)p_{r+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_s}^{t_{s+1}} h^{(r+1)}(\tau)p_r(\tau)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_s}^{t_{s+1}} h^{(r+1)}p_r\,d\tau = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \dot{h}p_0\,d\tau = -\lambda_1 q \int_{t_s}^{t_{s+1}} (x-\hat{x}_0)\hat{x}_0^{q-1}\,d\tau \geqslant 0,$$

т. е.

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \hat{x}_0^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\,d\tau \geqslant \int_{t_s}^{t_{s+1}} x^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\,d\tau. \tag{10}$$

Интеграл

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \hat{x}_0^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r\,d\tau$$

непрерывно зависит от параметров a, g_s, g_{s+1} задачи, и поэтому (10) выполнено также для функций $x(\cdot) \in C^{r+1}[0,1]$, удовлетворяющих краевым и изопериметрическим ограничениям задачи и условию неубывания $x^{(r+1)}(\cdot)$. По этой же причине неравенство (10) выполнено для функций $x(\cdot) \in C_+^r[0,1)$, удовлетворяющих краевым и изопериметрическим ограничениям задачи.

Для $0 < q < 1$ значение задачи (9) достигается также на семействе допустимых функций, у которых $(r+1)$-я производная — кусочно-постоянная функция с конечным числом интервалов постоянства.

Пусть $g(\cdot)$ — такая функция и у неё имеются два смежных невырожденных интервала постоянства $(r+1)$-й производной со значениями c_1 и c_2, $g_s < c_1 < c_2 < g_{s+1}$, этой производной. Пусть$\Delta_1, \Delta_2 \subset [t_0, t_n]$ — эти два интервала.

Тогда

$$g(\cdot) = \frac{g_1(\cdot) + g_2(\cdot)}{2}, \quad g_1(\cdot) := g(\cdot) + \alpha \cdot \varphi(\cdot), \quad g_2(\cdot) := g(\cdot) - \alpha \cdot \varphi(\cdot),$$

где $\varphi^{(r+1)}(\cdot)$ равна нулю всюду, кроме Δ_1 и Δ_2, постоянна на Δ_1 и постоянна на Δ_2,

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \varphi^{(r+1)}(\tau)(t-\tau)^r \, d\tau = 0, \quad \varphi(t_s) = \ldots = \varphi^{(r)}(t_s) = 0,$$

$\alpha > 0$ — достаточно малое число, для которого $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ — допустимые функции с такими же интервалами постоянства $(r+1)$-й производной, как у $g^{(r+1)}(\cdot)$. Из-за вогнутости минимизируемого функционала в (9) его значение хотя бы для одной из функций $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ меньше, чем для $g(\cdot)$.

Значит, решение задачи (9) достигается на функциях $g(\cdot)$ с кусочно-постоянной $(r+1)$-й производной, имеющей не более трёх интервалов постоянства, причём не более чем одно значение этой производной на интервале постоянства отличается от g_s, g_{s+1}. На $[t_s, t_{s+1}]$ такие функции имеют вид

$$g(z) = \frac{g_s}{(r+1)!}(z-t_s)^{r+1} + \frac{c-g_s}{(r+1)!}(z-\xi_1)_+^{r+1} + \frac{g_{s+1}-c}{(r+1)!}(z-\xi_2)_+^{r+1}, \quad z \in [t_s, t_{s+1}],$$

$t_s \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant t_{s+1}$, $g_s \leqslant c \leqslant g_{s+1}$,

$$g_s \int_{t_s}^{\xi_1} (t-u)^r \, du + c \int_{\xi_1}^{\xi_2} (t-u)^r \, du + g_{s+1} \int_{\xi_2}^{t_{s+1}} (t-u)^r \, du = b(r+1).$$

Зафиксируем значение $c \in (g_s, g_{s+1})$ и будем считать, что последнее равенство определяет зависимость ξ_2 от ξ_1, так что

$$(g_s - c)(t-\xi_1)^r + (c - g_{s+1})(t-\xi_2)^r(\xi_2)' = 0.$$

Тогда производная по ξ_1 от

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} g^q(z) \, dz = \int_{t_s}^{\xi_1} g^q(z) \, dz + \int_{\xi_1}^{\xi_2} g^q(z) \, dz + \int_{\xi_2}^{t_{s+1}} g^q(z) \, dz$$

равна

$$-q\frac{c-g_s}{r!} \int_{\xi_1}^{\xi_2} g^{q-1}(z)(z-\xi_1)^r \, dz - \\ - q \int_{\xi_2}^{t_{s+1}} g^{q-1}(z) \left(\frac{c-g_s}{r!}(z-\xi_1)^r + \frac{g_{s+1}-c}{r!}(z-\xi_2)^r(\xi_2)' \right) dz,$$

а её знак совпадает со знаком

$$-\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} g^{q-1}(z)(z-\xi_1)^r\,dz - \int\limits_{\xi_2}^{t_{s+1}} g^{q-1}(z)\left((z-\xi_1)^r - \frac{(t-\xi_1)^r}{(t-\xi_2)^r}(z-\xi_2)^r\right)dz \leqslant 0,$$

так как подынтегральные выражения из левой части этого неравенства неотрицательны. Отсюда следует, что наименьшее значение в задаче (9) (а значит, и наибольшее значение в задаче (8) для $q<1$) достигается на функциях такого же вида, как те, что доставляют наибольшее значение в (8) при $q \geqslant 1$. Лемма доказана. □

Пусть

$$\theta = \min\left\{1, \frac{1}{q}\right\}.$$

Тогда

$$J(f,[t_0,t_n],q)^\theta = \left(\int\limits_{t_0}^{t_n}\left(\frac{1}{r!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du\right)^q dt\right)^\theta =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{r!}\int\limits_{t_k}^{t}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du + \frac{1}{r!}\int\limits_{t_0}^{t_k}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du\right)^q dt\right)^\theta \leqslant$$

$$\leqslant S_1^\theta + S_2^\theta, \tag{11}$$

где

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{r!}\int\limits_{t_k}^{t}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du\right)^q dt,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{r!}\int\limits_{t_0}^{t_k}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du\right)^q dt.$$

Неравенство

$$S_1^{1/(\beta_0+1)} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} J_2(f,[t_i,t_{i+1}],q)\right)^{1/(\beta_0+1)} \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} J_2(f,[t_i,t_{i+1}],q)^{1/(\beta_0+1)} \tag{12}$$

следует из того, что $\beta_0>0$. Если $n=1$, то $S_2=0$. Оценим S_2 при $n>1$:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{k}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}(t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du\right)^q dt.$$

Пусть для набора $\{t_k\}_{k=0}^n$ выбраны допустимые ограничения

$$J_2(f,[t_k,t_{k+1}],q) = a_k^q, \quad f^{(r+1)}(u) \in [g_k, g_{k+1}], \quad u \in [t_k,t_{k+1}], \quad k=0,\ldots,n-1,$$

$f^{(r+1)}(\cdot)$ не убывает. Тогда по лемме 1 интеграл

$$\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} (t-u)^r f^{(r+1)}(u)\,du, \quad t \geqslant t_s,$$

достигает наибольшего значения на функции $f(\cdot)$, у которой $(r+1)$-я производная принимает значение g_{s-1} на полуинтервале $[t_{s-1},\tau)$ и значение g_s на полуинтервале $(\tau,t_{s-1}]$, причём эта экстремальная функция не зависит от $t \geqslant t_s$. Поэтому наименьшая константа C_2 в неравенстве

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \biggl(\sum_{s=1}^{k} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} (t-u)^r \frac{f^{(r+1)}(u)}{r!}\,du\biggr)^q dt \leqslant \\ \leqslant C_2 \biggl(\sum_{k=0}^{n-1} J_2(f,[t_k,t_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)}\biggr)^{\beta_0+1} \tag{13}$$

достигается на функциях с кусочно-постоянной $(r+1)$-й производной с интервалами постоянства (τ_{s-1},τ_s), $s=1,\dots,n+1$, $\tau_0=t_0$, $\tau_s \in [t_{s-1},t_s]$, $s=1,\dots,n$, $\tau_{n+1}=t_n$. Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} (J_2(f,[t_k,\tau_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)} + J_2(f,[\tau_{k+1},t_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)}) \leqslant \\ \leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1} J_2(f,[t_k,t_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)},$$

то $C_2 \leqslant 2C_3$, где C_3 — наименьшая константа в неравенстве

$$S_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \biggl(\sum_{s=0}^{k-1} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{k+1}-u)^r \frac{f^{(r+1)}(u)}{r!}\,du\biggr)^q dt \leqslant \\ \leqslant C_3 \biggl(\sum_{k=0}^{n-1} J_2(f,[t_k,t_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)}\biggr)^{\beta_0+1} \tag{14}$$

для функций f, у которых $f^{(r+1)}(\cdot)$ постоянна на интервалах (t_k,t_{k+1}). Если f — такая функция и a_k — значение, которое принимает $f^{(r+1)}(\cdot)/r!$ на (t_k,t_{k+1}), $k=0,\dots,n-1$, то (14) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} (t_{k+1}-t_k) \biggl(\sum_{s=0}^{k-1} a_s \,\frac{(t_{k+1}-t_s)^{r+1}-(t_{k+1}-t_{s+1})^{r+1}}{r+1}\biggr)^q \leqslant \\ \leqslant C_3 \biggl(\sum_{k=0}^{n-1} J_2(f,[t_k,t_{k+1}],q)^{1/(\beta_0+1)}\biggr)^{\beta_0+1} = \\ = C_3 \biggl(\sum_{k=0}^{n-1} \biggl(\frac{a_k^q (t_{k+1}-t_k)^{\beta_0+1}}{((r+1)q+1)(r+1)^q}\biggr)^{1/(\beta_0+1)}\biggr)^{\beta_0+1}.$$

По теореме A наименьшая константа в этом неравенстве достигается на последовательностях $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$, равных нулю при $k < k_0$ и равных единице при $k \geqslant k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема A [4]. *Пусть* $0 < p \leqslant q < \infty$, $p \leqslant 1$, $b_n \geqslant 0$, $a_{nk} \geqslant 0$, $n, k \in \mathbb{N}$, $C > 0$. *Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n^p\right)^{1/p}$$

выполняется для всех неотрицательных невозрастающих последовательностей (x_n) *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right)^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{m} b_n\right)^{1/p}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Значит, константа C_3 является наименьшей константой в неравенстве

$$\sum_{k=k_0+1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\left(\frac{(t_{k+1}-t_{k_0})^{r+1}-(t_{k+1}-t_k)^{r+1}}{r+1}\right)^q \leqslant C_3\frac{(t_n-t_{k_0})^{\beta_0+1}}{((r+1)q+1)(r+1)^q}.$$

Так как

$$\sum_{k=k_0+1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\left(\frac{(t_{k+1}-t_{k_0})^{r+1}-(t_{k+1}-t_k)^{r+1}}{r+1}\right)^q \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=k_0+1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\left(\frac{(t_{k+1}-t_{k_0})^{r+1}}{r+1}\right)^q \leqslant \frac{(t_n-t_{k_0})^{\beta_0+1}}{(r+1)^q},$$

то $C_3 \leqslant (\beta_0+1)$, $C_2 \leqslant 2(\beta_0+1)$ и из (11)—(13) следует, что

$$C_1 \leqslant \bigl(1+\bigl(2(\beta_0+1)\bigr)^\theta\bigr)^{1/\theta}, \quad \theta = \min\left\{1, \frac{1}{q}\right\}.$$

Чтобы установить 3), воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant n^{\beta_0/(\beta_0+1)}\left(\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}])\right)^{1/(\beta_0+1)}.$$

Из определения следует, что для $J(\Delta) = J_2(f,\Delta,q)$, $f \in C_+^r[0,1)$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}]) \leqslant J([t_0,t_n]),$$

и значит, $C_0 = 1$,

$$\frac{\beta_0}{\beta_0+1} = \frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha_0+1}, \quad \alpha_0 = \frac{\beta_0^2}{2\beta_0+1}.$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие 3. *Пусть* $J(\Delta) = J_2(f,\Delta,q)$, $q \in (0,\infty)$, $f \in L_q[0,1]$, $f^{(r+1)}$ — *неотрицательная, неубывающая функция,* $\beta_0 = (r+1)q$, $\theta = \min\{1, 1/q\}$, $\gamma = \big(1 + \big(2(\beta_0+1)\big)^{\theta}\big)^{-1/\theta} 2^{-2\beta_0+\alpha_0-1}$, $\alpha_0 = \beta_0^2/(2\beta_0+1)$. *Тогда*

$$\gamma\left(\frac{V_n(\beta)}{n}\right)^{\beta+1} \leqslant \frac{E_n}{n} \leqslant \left(\frac{V_n(\beta)}{n}\right)^{\beta+1}, \quad \beta \geqslant \beta_0,$$

$$\gamma^{1/q} n^{-r-1}\big(V_n(\beta_0)\big)^{(\beta_0+1)/q} \leqslant (E_n)^{1/q} \leqslant n^{-r-1}\big(V_n(\beta_0)\big)^{(\beta_0+1)/q}. \qquad \square$$

Для $f \in C^r\big([t_1,t_2)\big)$ обозначим

$$J_2(f,[t_1,t_2],\infty) = \lim_{q\to\infty} J_2(f,[t_1,t_2],q)^{1/q}.$$

Тогда для $f \in C^r_+[0,1)$ и $[t_1,t_2] \subset [0,1)$ выполняется равенство $J_2(f,[t_1,t_2],\infty) = f(t_2) - p_2(t_2)$, где $p_2 \in \mathcal{P}_r$ — полином Тейлора в точке t_1, и

$$J_2(f,[t_1,1],\infty) = \lim_{t_2\to 1}\big(f(t_2) - p_2(t_2)\big).$$

Переходя к пределу при $q \to +\infty$ в следствии 3, получаем следствие 4.

Следствие 4. *Пусть* $f \in C[0,1] \cap C^r_+[0,1)$. *Тогда*

$$2^{-(3/2)(r+1)-1} n^{-r-1}\big(V_n(\infty)\big)^{r+1} \leqslant E_n(\infty) \leqslant n^{-r-1}\big(V_n(\infty)\big)^{r+1},$$

где

$$E_n(\infty) = \inf_{0=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_{n-1}\leqslant\tau_n=1}\ \max_{i=0,\ldots,n-1} J_2(f,[\tau_i,\tau_{i+1}],\infty),$$

$$V_n(\infty) = \sup_{0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_{n-1}\leqslant t_n\leqslant 1}\ \sum_{i=0}^{n-1} J_2(f,[t_i,t_{i+1}],\infty)^{1/(r+1)}. \qquad \square$$

Для $r = 0$ утверждение следствия 4 не является новым: этот результат для существенно более широкого класса функций $f \in C[0,1]$ с более точными константами получен в [6]. Следует, однако, отметить, что случай аппроксимации непрерывных функций кусочно-постоянными в метрике пространства L_∞ является скорее исключительным в этой тематике: представляется, что в остальных случаях требование $f \in C^r_+[0,1)$ является существенным для получения оценок снизу величины наилучшего приближения из следствия 3.

Замечание 3. Простые примеры функций $f(\cdot)$ показывают, что значение $\beta_0 = (r+1)q$ в теореме 3 и в следствии 3 для $J(\Delta) = J_2(f,\Delta,q)$, $f \in C^r_+[0,1)$, не может быть уменьшено.

Отметим ещё связь условий 3) и 4) с неравенствами Харди [5]: прямым

$$\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} k(t,\tau)g(\tau)\,d\tau\right)^{q} dt\right)^{1/q} \leqslant C_2\left(\int_{t_0}^{t_1} g(t)^p\,dt\right)^{1/p} \tag{15}$$

и обратным

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} g(t)^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant C_3\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} k(t,\tau)g(\tau)\,d\tau\right)^q dt\right)^{1/q} \tag{16}$$

с неотрицательным ядром $k(\cdot,\cdot)$, $p,q>0$, неотрицательными (или, дополнительно, монотонными) $g(\cdot)$. Пусть $g=f^{(r+1)}$, $f(\cdot)\in C^{r+1}[0,1)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $f^{(r+1)}$ неотрицательна, $J(\Delta)=J_2(f,\Delta,q)$, $q>0$, $k(t,\tau)=(t-\tau)^r$, $\beta_0=(r+1)q$, $p=q/(\beta_0+1)$.

Если $f(\cdot)$ удовлетворяет условию 4) с $\alpha_0=\beta_0$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant C_1^{1/(\beta_0+1)}\sum_j J([\xi_j,\xi_{j+1}])^{1/(\beta_0+1)},$$

где $\{\xi_j\}$ — произвольное измельчение разбиения $\{t_i\}_{i=0}^n$, и значит (см. замечание 2),

$$\sum_{i=0}^{n-1} J([t_i,t_{i+1}])^{1/(\beta_0+1)} \leqslant C_1^{1/(\beta_0+1)}\left(\frac{1}{(\beta_0+1)^{1/q}(r+1)!}\right)^p\int_{t_0}^{t_n}\left(f^{(r+1)}(t)\right)^p dt$$

(в частности, при любых t_0, t_1 выполнено (15) с $C_2=C_1^{1/q}(r+1)^{-1}(\beta_0+1)^{-1/q}$). Если, кроме того, при любых t_0, t_1 с константой $C_3>0$ выполнено (16), то для $\alpha_0=\beta_0$ выполняется и условие 3) с $C_0=C_1C_3^q(r+1)^{-q}(\beta_0+1)^{-1}$, и значит,

$$C_0^{-1/q} \leqslant (\beta_0+1)^{1/q}(r+1)!\left(V_n(\beta_0)\right)^{(\beta_0+1)/q}\left(\int_{t_0}^{t_n}\left(f^{(r+1)}(t)\right)^p dt\right)^{-1/p} \leqslant C_1^{1/q}.$$

Поэтому по следствию 2

$$\left(\frac{2^{-(\beta_0+1)}}{C_0\max\{C_0,C_1\}}\right)^{1/q} \leqslant \\ \leqslant (\beta_0+1)^{1/q}(r+1)!\,n^{r+1}E_n{}^{1/q}\left(\int_{t_0}^{t_n}\left(f^{(r+1)}(t)\right)^p dt\right)^{-1/p} \leqslant C_1^{1/q}. \tag{17}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда $f(\cdot)$ удовлетворяет условию 3) с $\alpha_0=\beta_0$ и (15) при любых t_0, t_1. При этом независимо от выполнимости (15) неравенство (16) оказывается выполненным при любых t_0, t_1 с $C_3=C_0^{1/q}(r+1)(\beta_0+1)^{1/q}$.

Верно также и обратное: если выполнены (15), (16), то выполнены и условия 3), 4) с $\alpha_0=\beta_0$.

Литература

[1] Брудный Ю. А. Адаптивная аппроксимация функций с особенностями // Тр. ММО. — 1994. — Т. 55. — С. 149—242.

[2] Стечкин С. Б. Одна оптимизационная задача // Numerische Methoden der Approximationtheorie. Vol. I. — Basel: Birkhäuser, 1972. — P. 205—208.

[3] Чантурия З. А. Модуль изменения функции и его применение в теории рядов Фурье // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 214, № 1. — С. 63—66.

[4] Bennett G., Grosse-Erdmann K.-G. Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions // Math. Ann. — 2006. — Vol. 334. — P. 489—531.

[5] Kufner A., Persson L.-E. Weighted Inequalities of Hardy Type. — World Scientific, 2003.

[6] Popov V. A. On the connection between rational and spline approximation // C. R. Acad. Bulgare Sci. — 1974. — Vol. 27, no. 5. — P. 623—626.

[7] Popov V. A., Sendov Bl. Kh. Classes characterized by best-possible approximation by spline functions // Math. Notes. — 1970. — Vol. 8, no. 2. — P. 550—557.