Ряды из модулей блоков членов тригонометрического ряда (обзор)*

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyaltel@yandex.ru

УДК 517.518.4

Ключевые слова: блоки членов ряда, сходимость, интегрируемость, ряды по системе Уолша.

Аннотация

Дан обзор результатов о свойствах рядов из модулей блоков членов тригонометрических рядов: сходимости, равномерной сходимости, принадлежности суммы ряда пространствам L_p и пространствам L_p со степенным весом. Приведены также первые результаты, относящиеся к подобным рядам для системы Уолша.

Abstract

S. A. Telyakovskii, Series formed by the moduli of blocks of terms of trigonometric series. A survey, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 209—216.

This paper presents a survey of results on properties of series composed of the moduli of blocks of trigonometric series. The following questions are addressed: convergence, uniform convergence, and membership of the sum of series to L_p and to weighted L_p spaces. First results in this area pertaining to similar series for the Walsh system are put forward.

Для каждого сходящегося числового ряда $\sum a_k$ существует такая возрастающая последовательность номеров $\Lambda := \{n_j\}$, $n_1 = 1 < n_2 < \ldots$, что сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \right|.$$

При этом для каждого ряда $\sum a_k$ такая последовательность Λ, вообще говоря, своя.

Ставится задача о выделении таких классов рядов $\sum a_k$, что для всех рядов этого класса годится одна и та же последовательность Λ.

*Статья представляет собой дополненный вариант докладов, сделанных на зимней сессии МИАН—ПОМИ «Гармонический анализ и теория функций» в декабре 2013 г. и на 17-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» в январе 2014 г.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 209—216.

Для двух классов тригонометрических рядов найдены условия на последовательность Λ, необходимые и достаточные для того, чтобы для всех рядов этих классов ряды

$$F_\Lambda(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \tag{1}$$

сходились при всех x.

1. Ряды Фурье функций ограниченной вариации

В [5] было установлено, что если существует такое число A, что при всех i выполняется оценка

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{n_i}{n_j} \leqslant A, \tag{2}$$

то для каждой функции f ограниченной вариации ряд из (1), где a_k, b_k — коэффициенты Фурье f, сходится при всех x и справедлива оценка $F_\Lambda(x) \leqslant CAV(f)$, где C — абсолютная постоянная, $V(f)$ — вариация функции f.

Условие (2) равносильно представимости Λ в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей. В [6] показано, что в этом случае ряд (1) сходится равномерно, если дополнительно наложить естественное условие непрерывности функции f.

В [3] доказано, что, заменив (2) в приведённых утверждениях на менее ограничительное условие

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_i, n_{j+1} - n_j) \leqslant A, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

получим необходимое и достаточное условие сходимости (соответственно равномерной сходимости) рядов из (1) для всех функций ограниченной вариации. При этом условие (3) является необходимым и достаточным не только для всех функций ограниченной вариации, но и для функции

$$G(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right|. \tag{4}$$

В [15] рассмотрен аналог ряда (1), построенный из модулей отрезков преобразований Фурье. Показано, что если функция f на $(-\infty, +\infty)$ интегрируема и имеет ограниченную вариацию, а для чисел $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < \ldots$ справедлива оценка

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{u_i}{u_j} \leqslant A, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то при всех x сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(\int\limits_{-u_j}^{-u_{j-1}}+\int\limits_{u_{j-1}}^{u_j}\right)\hat{f}(t)e^{ixt}\,dt\right|$$

и сумма его ограниченная.

Здесь, как и как и в случае рядов (1), условие (5) можно заменить на

$$\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{u_j}\min(u_i,u_{j+1}-u_j)\leqslant A,\quad i=1,2,\dots.$$

В [16] результаты работы [5] перенесены на ряды Фурье функций двух переменных, имеющих ограниченную вариацию в смысле Харди.

2. Ряды по синусам и косинусам

Будем рассматривать ряды по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

коэффициенты которых стремятся к нулю и для них при каждом m выполняется условие

$$\sum_{k=m}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\leqslant\frac{B}{m}, \tag{6}$$

где B — некоторая абсолютная постоянная.

Л. Лейндлер [13, 14] установил, что в этом случае условие (2) является достаточным для ограниченности при всех x суммы ряда

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}b_k\sin kx\right|. \tag{7}$$

В [9] доказано, что, как и для рядов Фурье функций ограниченной вариации, условие (3) является в этом случае не только достаточным, но и необходимым.

В [9] приведены примеры, показывающие, что эти результаты о ряде (7) несравнимы со сформулированной выше теоремой из [3] о рядах Фурье функций ограниченной вариации. Именно, для коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации условие (6) может не выполняться. Вместе с тем, сумма ряда по синусам с монотонными коэффициентами может не иметь конечной производной ни в одной точке и, следовательно, не быть функцией ограниченной вариации, хотя для коэффициентов этого ряда справедлива оценка (6).

В вопросе о равномерной сходимости ряда (7) условие (6) заменяется на

$$\sum_{k=m}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|=o\left(\frac{1}{m}\right),\quad m\to\infty.$$

В результате получаем, что если для последовательности Λ выполнено условие (3), то ряд (7) сходится равномерно. При условии (2) такое утверждение доказано Л. Лейндлером [14].

Для рядов по косинусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{8}$$

коэффициенты которых стремятся к нулю и при каждом m удовлетворяют условию

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leqslant \frac{B}{m},$$

где B — абсолютная постоянная, справедливо следующее утверждение.

Если частные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{9}$$

равномерно ограниченны и сходятся ряды (3) и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \right|,$$

то при $x \in (0, \pi]$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \cos kx \right|$$

сходится и его сумма является ограниченной функцией.

Наряду с вопросами ограниченности, изучалась интегрируемость функций $F_\Lambda(x)$. Установлено, что для всех рядов Фурье функций ограниченной вариации функции $F_\Lambda(x)$ принадлежат $L[0, \pi]$ в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \log \min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1),$$

и сходимость этого ряда равносильна сходимости ряда

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_{j+1}} \log(n_{j+1} - n_j + 1).$$

При этом ряды из (1), определяющие функции $F_\Lambda(x)$, сходятся в метрике L. Доказательство достаточности можно найти в [17], необходимости — в [18]. Необходимость легко вывести и из результата А. С. Белова [1, теорема 3], изучавшего функции F_Λ для рядов по синусам и рядов по косинусам в случае, когда коэффициенты исходных рядов монотонны.

Справедливо также следующее утверждение [10].

Если для стремящихся к нулю чисел b_k сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}|b_k-b_{k+1}|\log(k-n_j+2),$$

то функция (7) принадлежит $L[0,\pi]$ в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{n_{k+1}}|\log(n_{k+1}-n_k+1).$$

Такое же утверждение справедливо и для рядов по косинусам.

В [12] показано, что если для чисел b_k при всех $s\in[n_j,n_{j+1}-1)$ имеет место оценка

$$|b_s|+\sum_{k=s}^{n_{j+1}-1}|b_k-b_{k+1}|\leqslant\frac{B}{s}$$

с некоторой абсолютной постоянной B и сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}\min(n_j,n_{j+1}-n_j+1),$$

то функция (7) принадлежит $L[0,\pi]$. Аналогичное утверждение справедливо и для рядов по косинусам (8), если частные суммы ряда (9) ограниченные.

В задаче об интегрируемости функции $F_\Lambda(x)$ в степени p получены следующие результаты.

Если при $p\in(1,\infty)$ функция $G(x)$ (см. (4)) принадлежит $L_p[0,\pi]$, то $L_p[0,\pi]$ принадлежат и функции $F_\Lambda(x)$ для всех функций ограниченной вариации. Для справедливости принадлежности $G(x)\in L_p$ достаточно сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}m_j^{1-1/p},\tag{10}$$

где $m_j=\min(n_j,n_{j+1}-n_j)$.

При $p=2$ эти утверждения установлены в [7], при остальных $p\in(1,\infty)$ — в [4].

В работах А. С. Белова [1] и В. П. Заставного [4] получены некоторые варианты условий, необходимых для того, чтобы функция $G(x)$ принадлежала $L_p[0,\pi]$ при $p\in(1,\infty)$.

Так, из результатов А. С. Белова следует, что необходимым условием является сходимость ряда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\bigg(\sum_{k:\ n_k\geqslant q}\frac{1}{n_k}\min(n_{k+1}-n_k,q)\bigg)^p$$

(это условие является также и достаточным).

В. П. Заставный в качестве необходимого условия указал сходимость ряда

$$\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)^{p-2}\biggl(\sum_{k:\ n_{k+1}-n_k\geqslant q}\frac{1}{n_k+q}\biggr)^p.$$

К сожалению, эти условия непрозрачны и их трудно сравнить со сходимостью ряда (10).

Отметим, что в [1] задача рассматривалась в другой постановке. Искались условия на последовательность Λ и на коэффициенты b_k, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $F_\Lambda(x)$ принадлежала L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, для рядов по синусам (а также для рядов по косинусам) с монотонными коэффициентами. В [2] монотонность коэффициентов предполагалась только для k, принимающих значения от n_j до $n_{j+1}-1$.

Аналоги приведенных результатов об интегрируемости функций $F_\Lambda(x)$, построенных из рядов Фурье функций ограниченной вариации, имеют место и для рядов (7), если коэффициенты b_k стремятся к нулю и для них справедлива оценка (6).

Рассматривалась также задача об интегрируемости функции $G(x)$ со степенным весом. Показано, что для $p\in[1,\infty)$ функция $G(x)$ интегрируема в степени p с весом $x^{-\gamma}$ при $\gamma\in(1-p,1)$, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}m_j^{1-(1-\gamma)/p},$$

где, как и в (10), $m_j=\min(n_j,n_{j+1}-n_j)$. При $\gamma=1-p$ достаточным условием интегрируемости $G(x)$ в степени p с весом $x^{-\gamma}$ является сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}\log(m_j+1).$$

Для целых $p=1,2,\dots$ это доказано в [8].

В [10] показано, что если $\gamma\in(0,1)$ и для стремящихся к нулю чисел b_k сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}|b_k-b_{k+1}|\,(k-n_j+1)^{\gamma},$$

то интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}\sum_{j=i}^{\infty}\biggl|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}b_k\sin kx\biggr|\,dx$$

сходится в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}|b_{n_{j+1}}|(n_{j+1}-n_j)^{\gamma}.$$

Аналогичный результат справедлив и для рядов по косинусам.

Приведём далее совместные с Н. Н. Холщевниковой результаты [11], относящиеся не к тригонометрическим рядам, а к рядам по системе Уолша

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x). \tag{11}$$

Здесь, в отличие от рядов по тригонометрической системе, возникает дополнительный вопрос: в каком порядке располагать члены ряда (11). Довольно естественно члены ряда с номерами k из пачки от 2^j до $2^{j+1}-1$ располагать раньше, чем члены ряда с бо́льшими номерами. Но остаётся произвол в расположении членов ряда (11) с k от 2^j до $2^{j+1}-1$.

Пусть $S(n)$ обозначает число слагаемых в двоичном представлении числа n,

$$n = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_s}, \quad 0 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_s.$$

Понятно, что $S(1) = 1$ и $1 \leqslant S(n) \leqslant \log_2 n$.

Если ряд (11) является рядом Фурье—Уолша в нумерации Пэли функции ограниченной вариации и для последовательности Λ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{S(n_j)}{n_j},$$

то сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} c_k w_k(x) \right|$$

принадлежит $L[0,1]$ и этот ряд сходится в метрике L.

Пусть x_0 — точка, в которой все функции системы Уолша отличны от нуля. Выделим произвольный бесконечный набор натуральных чисел i, которые будем обозначать i^*.

Если (11) — ряд Фурье—Уолша характеристической функции отрезка $[0,1/3]$, то для каждого i^* члены ряда (11) из пачки с $k = 2^{i^*}, 2^{i^*}+1, \ldots, 2^{i^*}+2^{i^*}-1$ можно переставить так, что будет неограниченно расходиться ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \tilde{c}_k \tilde{w}_k(x_0) \right|,$$

где $\{n_j\}$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех чисел 2^j, к которым добавлены числа $2^{i^*} + 2^{i^*-1}$, $\tilde{c}_k \tilde{w}_k$ — члены ряда (11) после сделанной перестановки.

В заключение отметим, что хотя в подобного рода задачах накоплено уже немало результатов, многие естественные вопросы остаются без ответа.

Литература

[1] Белов А. С. О суммах модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. «Биология, химия, физика, математика». — 2006. — Вып. 3. — С. 107—121.

[2] Белов А. С. О свойствах суммы модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 6. — С. 35—62.

[3] Белов А. С., Теляковский С. А. Усиление теорем Дирихле—Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 6. — С. 25—40.

[4] Заставный В. П. Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 166—179.

[5] Теляковский С. А. О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. — 1997. — Т. 219. — С. 372—381.

[6] Теляковский С. А. О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 232. — С. 313—326.

[7] Теляковский С. А. Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2005. — Т. 11, № 2. — С. 168—174.

[8] Теляковский С. А. О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k}\sin kx$ // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 5. — С. 713—718.

[9] Теляковский С. А. Об ограниченности ряда из модулей блоков членов рядов по синусам // Тр. МИАН. — 2013. — Т. 283. — С. 252—256.

[10] Теляковский С. А. О ряде из модулей блоков членов тригонометрических рядов // Тр. МИАН. — 2014. — Т. 284. — С. 243—251.

[11] Теляковский С. А., Холщевникова Н. Н. О рядах из модулей блоков членов ряда по системе Уолша // Материалы 17-й междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Научная книга, 2014. — С. 257—258.

[12] Тихонов С. Ю. О равномерной сходимости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81. — С. 304—310.

[13] Leindler L. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. — 2001. — Vol. 27. — P. 279—285.

[14] Leindler L. A note on the uniform convergence and boundedness of a new class of sine series // Anal. Math. — 2005. — Vol. 31. — P. 269—275.

[15] Móricz F. Pointwise behavior of Fourier integrals of functions of bounded variation over $\mathbb{R}$ // Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 297. — P. 527—539.

[16] Móricz F. Pointwise behavior of double Fourier series of functions of bounded variation // Monatsh. Math. — 2006. — Vol. 148 — P. 51—59.

[17] Telyakovskii S. A. Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Appr. — 2004. — Vol. 10, no. 1-2. — P. 215—218.

[18] Trigub R. M. A note on the paper of Telyakovskii «Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation» // East J. Appr. — 2007. — Vol. 13, no. 1. — P. 1—6.