

Взвешенные деревья с примитивными группами вращений рёбер

Н. М. АДРИАНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nadrianov@gmail.com

А. К. ЗВОНКИН

Университет Бордо, Франция
e-mail: zvonkin@labri.fr

УДК 512.542.7

Ключевые слова: детские рисунки, взвешенные деревья, функции Белого, группы монодромии.

Аннотация

Пусть даны два взаимно простых многочлена $R, S \in \mathbb{C}[x]$ одинаковой степени с заданными кратностями корней. Классическая задача теории чисел, активно изучаемая последние полвека формулируется следующим образом: какова минимально возможная степень разности $T = R - S$? Из теории *детских рисунков* следует, что этот минимум достигается в том и только том случае, когда рациональная функция $f = R/T$ является функцией Белого двукрашенной плоской карты, все грани которой, кроме внешней, имеют степень 1. Такие карты называются *взвешенными деревьями*, поскольку их удобно представлять с помощью плоских деревьев, рёбрам которых приписаны положительные целые веса.

Хорошо известно, что абсолютная группа Галуа (группа автоморфизмов поля алгебраических чисел \mathbb{Q}) действует на детских рисунках. Важный инвариант этого действия — *группа вращений рёбер*, которая также является группой монодромии разветвлённого накрытия, соответствующего функции Белого. В настоящей работе классифицированы взвешенные деревья с примитивной группой вращений рёбер. С точностью до перемены цвета существует 184 таких дерева, они образуют (не менее) 85 орбит Галуа и порождают 34 примитивные группы (максимальной степени 32). Этот результат можно также рассматривать как вклад в классификацию накрытий рода 0 с примитивными группами монодромии в контексте гипотезы Гуральника—Томпсона.

Abstract

N. M. Adrianov, A. K. Zvonkin, Weighted trees with primitive edge rotation groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 5–50.

Let $R, S \in \mathbb{C}[x]$ be two coprime polynomials of the same degree with prescribed multiplicities of their roots. A classical problem of number theory actively studied during the last half-century is, what could be the minimum degree of the difference $T = R - S$. The theory of *dessins d'enfants* implies that such a minimum is attained if and only if the rational function $f = R/T$ is a Belyi function for a bicolored plane map all of whose faces except the outer one are of degree 1. Such maps are called *weighted trees*, since they

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 5–50.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

can be conveniently represented by plane trees whose edges are endowed with positive integral weights.

It is well known that the absolute Galois group (the automorphism group of the field $\overline{\mathbb{Q}}$ of algebraic numbers) acts on dessins. An important invariant of this action is the *edge rotation group*, which is also the monodromy group of a ramified covering corresponding to the Belyi function. In this paper, we classify all weighted trees with primitive edge rotation groups. There are, up to the color exchange, 184 such trees, which are subdivided into (at least) 85 Galois orbits and generate 34 primitive groups (the highest degree is 32). This result may also be considered as a contribution to the classification of covering of genus 0 with primitive monodromy groups in the framework of the Guralnick–Thompson conjecture.

1. Введение

Работа состоит из двух частей. В первой части мы даем мотивировку, основные определения и доказательство основного результата. Во второй части представлен полный список специальных взвешенных деревьев и их групп, а также иллюстрации.

1.1. Мотивировка

Пусть α, β — два разбиения целого числа n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и $R, S \in \mathbb{C}[x]$ — два взаимно простых многочлена степени n со следующим разложением на множители:

$$R(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{\alpha_i}, \quad S(x) = \prod_{j=1}^s (x - b_j)^{\beta_j}. \quad (1)$$

Здесь мы считаем кратности α_i и β_j , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, данными, а корни a_i и b_j нефиксированными, но требуем, чтобы они были различными. Обозначим $T = R - S$. Какова минимально возможная степень многочлена T ? Этот вопрос является далекоидущим обобщением вопроса, поставленного в 1965 году в [6]: какова минимально возможная степень разности $A^3 - B^2$ (при условии, что эта разность не равна тождественно нулю)?

Предположение 1 (условия на α и β). Предположим, что α и β удовлетворяют следующим условиям:

- наибольший общий делитель чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ равен 1;
- $r + s \leq n + 1$.

Случай, когда разбиения α, β не удовлетворяют указанным условиям, может быть легко сведён к ситуации, когда эти условия выполняются (см. [16]). В 1995 году У. Заньер [19] доказал следующую оценку.

Теорема 2 (граница Заньера). При выполнении предположения 1 справедливо следующее:

- 1) $\deg T \geq (n + 1) - (r + s)$;
- 2) при любых α и β указанная граница достижима.

Теория детских рисунков (см., например, [3, гл. 2] или другие работы в настоящем сборнике) влечёт следующее утверждение.

Предложение 3 (детские рисунки). Степень $t = \deg T$ достигает минимально возможного значения $t = (n + 1) - (r + s)$ в том и только том случае, когда рациональная функция $f = R/T$ является функцией Белого двукрашенной плоской карты, у которой:

- n рёбер;
- r чёрных вершин степеней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$;
- s белых вершин степеней β_1, \dots, β_s ;
- все грани карты, кроме внешней, имеют степень 1, где степень грани определяется как половина количества ограничивающих её рёбер;
- количество граней степени 1 равно $t = (n + 1) - (r + s)$.

Заметим, что согласно формуле Эйлера количество граней карты с n рёбрами и $r + s$ вершинами равно $t + 1$, где $t = (n + 1) - (r + s)$. Таким образом, разбиение, соответствующее степеням граней, имеет форму крюка:

$$\gamma = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{t \text{ раз}}, n - t \right) = 1^t (n - t)^1.$$

Определение 4 (паспорт). Тройка разбиений (α, β, γ) называется *паспортом* соответствующей карты. Множество всех карт с данным паспортом называется *комбинаторной орбитой*.

Предложение 3 объясняет особый интерес к картам с «внутренними» гранями степени 1. Специалистов по теории чисел также интересует арифметическая природа коэффициентов многочленов R, S, T : когда, например, эти коэффициенты рациональны? На эту тему см. работу [5] и ссылки в ней. Хорошо известно, что коэффициенты функций Белого — алгебраические числа и абсолютная группа Галуа $\Gamma = \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}} | \mathbb{Q})$ (группа автоморфизмов поля алгебраических чисел $\bar{\mathbb{Q}}$) действует на детских рисунках. Мы вернёмся к этому вопросу в разделе 1.4. Один из наиболее важных инвариантов этого действия — *группа вращений рёбер* (см. раздел 1.3), что объясняет наш интерес к этим группам.

1.2. Карты с внутренними гранями степени 1 и взвешенные деревья

Типичная двукрашенная карта, все грани которой, кроме внешней, имеют степень 1, приведена на рис. 1 слева. Такие карты имеют очевидную древовидную форму. Зачастую удобно представлять их в виде *взвешенных деревьев*, т. е. двукрашенных плоских деревьев, рёбрам которых приписаны положительные целые веса, как показано на рис. 1 справа. Степень вершины такого дерева определяется как сумма весов рёбер, инцидентных этой вершине.

В настоящей работе мы не используем древесную структуру существенным образом. Тем не менее мы упоминаем эту модель по следующим причинам.

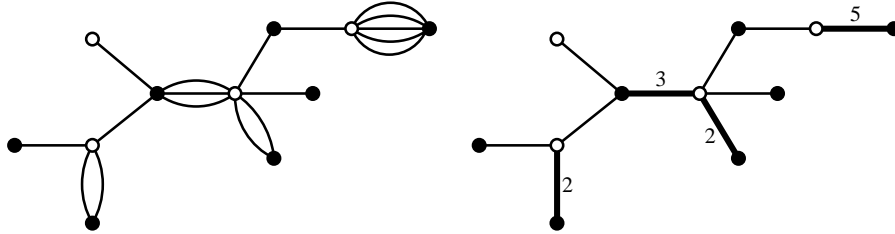


Рис. 1. Переход от карты с внутренними гранями степени 1 к взвешенному дереву. Рёбра, вес которых не указан явно, имеют вес 1; рёбра веса больше 1 нарисованы жирными

Во-первых, понятие взвешенного дерева представляется вполне естественным и определённо заслуживает изучения само по себе. Во-вторых, эта модель активно используется в других публикациях, посвящённых этой теме (см., например, [16, 17]). В-третьих, когда количество граней степени 1 равно нулю, мы имеем дело с *обычным деревом*; обычные деревья часто встречаются в настоящей работе.

Карты, у которых все внутренние грани имеют степень 1, далее будем называть иногда картами, а иногда взвешенными деревьями или просто деревьями для краткости.

1.3. Группы вращений рёбер

Определение 5 (группа вращений рёбер). Пометим n рёбер двукрашенной карты числами от 1 до n и запишем две перестановки a и b следующим образом. Циклы a описывают циклический порядок рёбер при обходе против часовой стрелки вокруг чёрных вершин, а циклы b — циклический порядок рёбер при обходе против часовой стрелки вокруг белых вершин. Тогда *группой вращений рёбер* карты называется группа перестановок $G = \langle a, b \rangle$ степени n . Эта группа определена с точностью до сопряжения внутри S_n .

Отметим следующие свойства группы вращений рёбер.

- Группа перестановок транзитивна, так как карта связна.
- Цикловые структуры перестановок a и b — это α и β соответственно.
- Грани карты определяются циклами перестановки $c = (ab)^{-1}$ (так что $abc = 1$). Цикловая структура c для взвешенных деревьев имеет вид $\gamma = 1^t(n-t)^1$.
- Группа вращений рёбер фактически является *группой монодромии* разветвлённого накрытия сферы, определяемого функцией Белого, соответствующей данной карте.

Пример 6 (разметка рёбер). На рис. 2 представлена карта с рис. 1, рёбра которой помечены числами от 1 до 18. Соответствующие перестановки имеют

вид

$$\begin{aligned}
 a &= (2, 9, 12, 13, 3)(4, 6)(5, 18, 17, 16, 15)(8, 14)(10, 11), \\
 b &= (1, 10, 11, 9)(3, 13, 12, 8, 14, 7, 6)(4, 5, 15, 16, 17, 18), \\
 c &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).
 \end{aligned}$$

Заметим, что единственный «длинный» цикл перестановки c может быть «считан» при обходе вокруг внешней грани карты; для этого следует помещать метку слева от ребра при движении от чёрной вершины к белой.

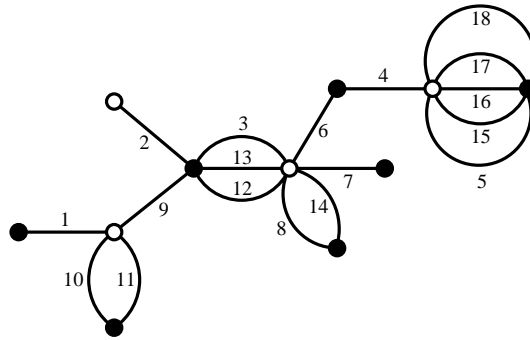


Рис. 2. Двукрашенная карта с помеченными рёбрами

Представляя двукрашенные карты тройками перестановок (a, b, c) , где $abc = 1$, мы можем ввести действие на них двух образующих группы кос:

$$\sigma_1: (a, b, c) \rightarrow (b, b^{-1}ab, c), \quad \sigma_2: (a, b, c) \rightarrow (a, c, c^{-1}bc).$$

Заметим, что эти операции сохраняют произведение тройки перестановок. Также они удовлетворяют соотношению группы кос $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. Очевидно, что все тройки, получаемые с помощью этих операций, порождают одну и ту же группу.

Естественно назвать операцию σ_1 *переменной цвета*, поскольку перестановка b становится первым элементом тройки и теперь соответствует чёрным вершинам, перестановка $b^{-1}ab$ сопряжена a и соответствует белым вершинам, а перестановка c , соответствующая граням, остаётся неизменной.

Операция σ_2 меняет ролями белые вершины и грани, сохраняя чёрные вершины. Операция $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ даёт тройку $(c, c^{-1}bc, a)$ и, таким образом, меняет ролями чёрные вершины и грани, сохраняя белые вершины. Естественно называть карты, получаемые при помощи этих двух операций, *двойственными* данной карте. Карта называется *самодвойственной*, если она изоморфна одной из двойственных ей карт.

Определение 7 (примитивные группы). Группа перестановок G степени n , действующая на множестве X , $|X| = n$, называется *импримитивной*, если множество X может быть разбито на m непересекающихся *блоков* X_1, \dots, X_m одного размера $|X_i| = n/m$, где $1 < m < n$, таким образом, что образ любого блока при действии произвольным элементом группы G также будет блоком. Группа перестановок, которая не является импримитивной, называется *примитивной*. Примитивная группа перестановок, отличная от S_n и A_n , называется *специальной*.

Теорема 8 (теорема Ритта). *Разветвлённое накрытие является композицией двух или более накрытий меньшей степени в том и только в том случае, когда его группа монодромии импримитивна.*

Замечание 9 (примитивных групп немного). Существует 301 транзитивная группа перестановок степени $n = 12$, но только шесть из них примитивны (включая S_n и A_n); существует (в точности) 25 000 транзитивных групп перестановок степени $n = 24$, но только пять из них примитивны [11]. Когда n просто, все группы степени n примитивны, но они по-прежнему немногочисленны. Для сравнения, существует 1854 транзитивных групп степени 28, только 8 групп степени 29 и 5712 групп степени 30. Помимо этого, вероятность того, что пара случайно выбранных перестановок порождает группу S_n или A_n , стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Поэтому специальные группы представляют особый интерес.

В 1990 году Р. Гуральник и Дж. Томпсон [10] предположили, что, за исключением циклических групп C_p и диэдральных групп D_{2p} для простых p , количество специальных групп, допускающих планарное представление, конечно. В 2001 году эту гипотезу доказали Д. Фрохардт и К. Магаард [9], причём не только для рода 0, но и для произвольного рода, предъявив оценку сверху на степень таких групп. Однако эта оценка сильно завышена, и полная классификация планарных специальных групп до сих пор не получена. В нашей работе мы даём классификацию этих групп для случая взвешенных деревьев.

1.4. Поля определения и действие Галуа

Хорошо известно, что функция Белого детского рисунка на плоскости определена однозначно с точностью до дробно-линейной замены аргумента. Эту замену можно выбрать так, что коэффициенты функции Белого будут алгебраическими числами. Каждому детскому рисунку соответствует определённое числовое поле, называемое его полем определения. Имеются некоторые тонкости, связанные с этим понятием, но в частном случае, который рассматривается в нашей работе, оно может быть определено простым образом.

Определение 10 (поле определения). Для детского рисунка на плоскости, все грани которого, кроме внешней, имеют степень 1, *полем определения* называется наименьшее числовое поле, содержащее все коэффициенты его функции Белого.

Группа Галуа $\Gamma = \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}} | \mathbb{Q})$ действует на функциях Белого алгебраическим сопряжением их коэффициентов. Это действие опускается до действия на детских рисунках.

Паспорт детского рисунка инвариантен относительно этого действия. Другим важным инвариантом действия Галуа является группа вращений рёбер. Таким образом, если в одной комбинаторной орбите существуют рисунки с различными группами вращений рёбер, то эта комбинаторная орбита распадается на несколько орбит Галуа. Более того, таблица характеров группы содержит важную информацию о поле определения. Эти соображения являются дополнительным стимулом изучения групп вращений рёбер.

Алгебраическое сопряжение, применённое к паре двойственных детских рисунков, даёт опять двойственные рисунки. То же самое верно относительно перемены цвета. Таким образом самодвойственность и инвариантность относительно перемены цвета являются дополнительными инвариантами действия Галуа.

2. Классификация специальных взвешенных деревьев

2.1. Классификация Г. Джонса

Группы вращений рёбер взвешенных деревьев, т. е. плоских карт, все грани которых, кроме внешней, имеют степень 1, содержат перестановку с цикловой структурой $1^t(n-t)^1$. Мотивированный нашим исследованием взвешенных деревьев, Г. Джонс классифицировал все специальные группы перестановок, содержащие такие перестановки [12]. В частности, он показал, что во всех таких случаях имеется не больше двух неподвижных точек. Доказательство этого факта основывается на двух результатах. Во-первых, это классическая теорема Жордана (1871) [13], утверждающая, что примитивная группа, содержащая перестановку с цикловой структурой $1^t(n-t)^1$, является $(t+1)$ -транзитивной. Во-вторых, это полная классификация кратно транзитивных групп, которая базируется на классификации конечных простых групп.

Классификация Г. Джонса выглядит следующим образом (мы используем стандартные обозначения для циклических, аффинных, проективных групп и групп Матье).

Теорема 11 (Г. Джонс). Пусть G — примитивная группа перестановок степени n , отличная от S_n и A_n . Предположим, что G содержит перестановку с цикловой структурой $1^t(n-t)^1$. Тогда $t \leq 2$ и имеет место один из следующих случаев.

0. $t = 0$ и

а) $C_p \leq G \leq \text{AGL}_1(p)$, где $n = p$ просто, или

- б) $\text{PGL}_d(q) \leq G \leq \text{P}\Gamma\text{L}_d(q)$, где $n = (q^d - 1)/(q - 1)$, $d \geq 2$ и $q = p^e$ — степень простого числа, или
- в) $G = \text{L}_2(11)$, M_{11} или M_{23} , где $n = 11$, 11 или 23 соответственно.
1. $t = 1$ и
- а) $\text{AGL}_d(q) \leq G \leq \text{A}\Gamma\text{L}_d(q)$, где $n = q^d$, $d \geq 1$ и $q = p^e$ — степень простого числа, или
- б) $G = \text{L}_2(p)$ или $\text{PGL}_2(p)$, где $n = p + 1$ для некоторого простого $p \geq 5$, или
- в) $G = \text{M}_{11}$, M_{12} или M_{24} , где $n = 12$, 12 или 24 соответственно.
2. $t = 2$ и $\text{PGL}_2(q) \leq G \leq \text{P}\Gamma\text{L}_2(q)$, где $n = q + 1$ и $q = p^e$ — степень простого числа.

Множество групп, перечисленных в формулировке теоремы, бесконечно. Однако если в дополнение к существованию элементов с цикловой структурой $1^t(n-t)^1$ наложить условие планарности, то мы получим конечный набор групп (с учётом двух исключений, рассмотренных ниже).

2.2. Две бесконечные серии

Для простого $n = p$ все транзитивные группы степени p примитивны. Согласно теореме 11 все группы G между циклической группой C_p и аффинной группой $\text{AGL}_1(p)$ содержат цикл длины p и, в принципе, могли бы быть группой вращений рёбер обычного дерева. Однако согласно [2] только два случая реализуются деревьями (рис. 3):

- циклическая группа C_p порядка p , которая является группой вращений рёбер «звёздочки» с p рёбрами;
- диэдральная группа D_{2p} порядка $2p$, которая является группой вращений рёбер «цепочки» с p рёбрами.

В дальнейшем мы не будем упоминать эти два исключительных случая.

Таким образом, среди подгрупп $\text{AGL}_1(p)$ только сама группа $\text{AGL}_1(p)$ может представлять для нас интерес, поскольку согласно случаю 1 а) теоремы 11 эта группа содержит перестановки с цикловой структурой $1^1(p-1)^1$ и может быть

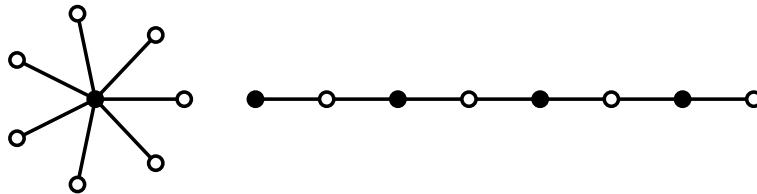


Рис. 3. Группа вращений рёбер «звёздочки» — циклическая группа C_p , «цепочки» — диэдральная группа D_{2p} . Если p простое, то обе группы примитивны

группой вращений рёбер карты с p рёбрами, одной гранью степени 1, и p вершинами. Однако легко показать, что это возможно только для $p = 5$ и $p = 7$. Действительно, все цикловые структуры элементов $AGL_1(p)$ имеют вид $l^k 1^1$, где $lk = p-1$. Это разбиение имеет $k+1$ частей, а пара таких разбиений будет иметь k_1+k_2+2 частей, где $k_1, k_2 \geq 1$ — делители $p-1$. Далее, если $k_1 = k_2 = (p-1)/2$, оба разбиения имеют вид 1^{12^k} , и мы имеем дело с цепочкой. В противном случае наибольшее возможное количество частей в двух разбиениях (что должно давать нам количество вершин) равно $m = (p-1)/2 + (p-1)/3 + 2$, и неравенство $m \geq p$ приводит к $p \leq 7$.

2.3. Основная теорема

Теорема 12 (классификация). *Полный список специальных взвешенных деревьев, исключая «звёздочки» и «цепочки», приведён в разделе 3. Он содержит (с точностью до перемены цвета) 184 дерева, образующих (не менее) 85 орбит Галуа и порождающих 34 различные группы вращений рёбер.*

Замечание 13 (перемена цвета). Следует быть аккуратным при подсчёте деревьев «с точностью до перемены цвета» в случае, когда $\alpha = \beta$, т. е. когда набор степеней вершин чёрного цвета совпадает с набором степеней вершин белого цвета. В нашем списке имеется несколько таких орбит: 6.7, 8.1, 8.7, 8.9, 9.7, 12.10, 12.12, 24.5 (см. образующие и иллюстрации ниже). Почти все они инвариантны относительно перемены цвета, за исключением деревьев в орбитах 8.1 и 9.7, для которых перемена цвета даёт другое дерево из той же орбиты (см. рис. 9 и рис. 16).

Замечание 14 (двойственность). В нашем списке имеется несколько двойственных и самодвойственных взвешенных деревьев:

- карты 5.1, 6.2, 6.9, 8.5, 8.14 и 10.3 самодвойственны;
- карты 6.3 и 6.4, 6.5 и 6.6, 6.7 и 6.8, 8.12 и 8.13, две карты в орбите 9.5 двойственны друг другу.

Замечание 15 (орбиты Галуа). Полный набор комбинаторных инвариантов Галуа неизвестен (и, вероятно, его не существует). Мы обнаружили пару комбинаторных орбит (9.5 и 9.7), в которых деревья с одинаковыми группами вращений рёбер образуют две разные орбиты Галуа. Орбита 9.7 состоит из четырёх деревьев, два из которых инвариантны относительно перемены цвета, а два других — нет; это даёт нам комбинаторное объяснение расщепления орбиты. В то же время у нас нет комбинаторного рассуждения, которое могло бы объяснить расщепление «орбиты» 9.5.

Мы вычислили все поля определения для $n \leq 12$, за исключением орбит 12.3, 12.8 и 12.9. Функции Белого для некоторых обычных деревьев с числом рёбер $n > 12$ были вычислены в [4] (для $n = 23$) и [8] (для $n = 21, 31$). Остаются несколько случаев $n > 12$, для которых мы не можем гарантировать, что «орбита» из нашего списка в действительности является одной орбитой

Галуа, а не распадается на несколько. По этой причине мы осторожно говорим «не менее 85 орбит Галуа».

2.4. Доказательство основной теоремы

Случай $t = 0$, т. е. случай *обычных деревьев*, был разобран в [2]; там же можно найти полный список 48 специальных деревьев (все они также присутствуют в нашем списке).

Все порождающие наборы рода 0 для *аффинных групп* (случай 1 а) теоремы 11 перечислены в [14] (см. также [18]). Выбирая порождающие наборы, состоящие из троек перестановок, одна из которых имеет цикловую структуру $1^1(n-1)^1$, мы получаем ответ для этого случая.

Случай 1 в) теоремы 11, т. е. случай групп Матье M_{11} , M_{12} и M_{24} , может быть легко изучен с использованием компьютерной системы GAP.

Все остальные группы (случаи 1 б) и 2 теоремы 11) являются подгруппами $\text{PGL}_2(q)$, где $q = p^e$ — степень простого числа, действующими на $n = q + 1$ точках. Обратим внимание на индекс 2: проективная геометрия в данном случае сводится к проективной *прямой*. Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [1, 15].

Лемма 16 (количество циклов). Пусть $q = p^e$ — степень простого числа, $e > 1$, и пусть $h > 1$ — наименьший простой делитель показателя e . Тогда нетождественная перестановка $g \in \text{PGL}_2(q)$ не может иметь более $l = p^{e/h} + 1$ неподвижных точек. Нетождественная перестановка $g \in \text{PGL}_2(p)$, где p простое, не может иметь более 2 неподвижных точек. Если ни один элемент группы перестановок степени n не имеет более l неподвижных точек, то элемент порядка k состоит из не более чем $(n-l)/k + l$ независимых циклов.

Карта с n рёбрами и не более чем двумя гранями степени 1 должна иметь по крайней мере $n-1 = q$ вершин. Если обе перестановки a и b — инволюции, то мы имеем дело с деревом-цепочкой. Если хотя бы одна из них имеет порядок $k \geq 3$ и, следовательно, имеет приблизительно n/k циклов, то, опять же по грубым прикидкам, мы не можем получить более чем $5n/6$ вершин, что недостаточно.

Рассуждая более аккуратно, для $q = p^e$, $e > 1$, обозначим $u = \sqrt{q}$, так что $q = u^2$. Согласно лемме 16 нетождественный элемент $\text{PGL}_2(q)$ не может иметь более $u + 1$ неподвижных точек, и следовательно, элемент порядка k не может иметь более $((q+1) - (u+1))/k + (u+1)$ циклов. Таким образом, общее количество циклов в двух перестановках не превосходит

$$\frac{q-u}{2} + (u+1) + \frac{q-u}{3} + (u+1) = \frac{5}{6}(u^2 - u) + 2(u+1).$$

Квадратное неравенство

$$\frac{5}{6}(u^2 - u) + 2(u+1) \geq u^2$$

приводит к соотношению

$$u \leq \frac{7 + \sqrt{97}}{2} < \frac{17}{2} = 8,5,$$

так что $q \leq 72,25$. Наибольшая степень простого числа, удовлетворяющая неравенству, равна 64.

Таким же способом, для группы $\text{PGL}_2(p)$, где p простое, мы получаем, что

$$\frac{(p+1)-2}{2} + 2 + \frac{(p+1)-2}{3} + 2 = \frac{5(p-1)}{6} + 4 \geq p,$$

что даёт $p \leq 19$.

Таким образом, остаётся конечный набор групп, которые необходимо рассмотреть. Некоторые из них можно исключить вручную, как продемонстрировано в примере 17 ниже. Остальные случаи разбираются при помощи GAP.

Теорема 12 доказана. \square

Пример 17 (группы, исключаемые вручную). Возьмём $q = 64 = 2^6$. Согласно лемме 16 верхняя граница для количества неподвижных точек равна $2^3 + 1 = 9$. Следовательно, количество циклов в инволюции не превосходит $(64 - 8)/2 + 8 = 36$, а количество циклов в перестановке порядка 3 не превосходит $(64 - 7)/3 + 7 = 26$; для всех других перестановок количество оно ещё меньше. Однако $36 + 26 = 62$ вершин недостаточно для того, чтобы получить карту с $n = q + 1 = 65$ рёбрами и одной или двумя гранями степени 1.

Подобные рассуждения позволяют нам справиться и со случаем $q = 27 = 3^3$. Количество неподвижных точек не превосходит $3 + 1 = 4$, и общее количество циклов в двух перестановках, по крайней мере одна из которых не является инволюцией, не превосходит $(27 - 3)/2 + 3 + (27 - 3)/3 + 3 = 26$, что недостаточно для того, чтобы получить карту с 28 рёбрами и одной или двумя гранями степени 1.

Заметим, однако, что такой простой подход не срабатывает для $q = 49$. Количество неподвижных точек не превосходит $7 + 1 = 8$; общее количество циклов в двух перестановках не превосходит $(49 - 7)/2 + 7 + (49 - 7)/3 + 7 = 49$. Такого количества вершин априори достаточно для того, чтобы получить карту с 50 рёбрами и двумя гранями степени 1. Таким образом, чтобы исключить группу $\text{PGL}_2(49)$, нам приходится исследовать её с помощью GAP.

Замечание 18 (перекрёстная проверка). Как во всякой экспериментальной работе, для большей надёжности полезно использовать одновременно несколько разных подходов к задаче, чтобы убедиться, что они дают согласованные результаты. В нашем исследовании мы делали следующее.

- Мы просмотрели *все* (а не только перечисленные в теореме 11) примитивные группы до степени 127 с использованием системы GAP. Таким образом классификация Джонса также получила независимое экспериментальное подтверждение.
- Многие, хотя и не все из этих групп были исследованы с помощью пакета `group` системы Maple.

- Для групп степени не выше 11 мы также использовали каталог [7].
- Где было возможно, мы вычисляли функции Белого, чтобы проверить, что комбинаторная орбита расщепляется на несколько орбит Галуа. Например, существует 16 деревьев веса 10 с паспортом $(1^2 8^1, 1^2 2^4, 1^2 8^1)$. Они распадаются на четыре орбиты Галуа, и одна из них содержит только одно дерево, соответствующее группе $\mathrm{PGL}_2(9)$ (см. орбиту 10.3).
- Для данного паспорта количество различных решений, полученных с помощью Maple, сравнивалось с общим количеством деревьев в соответствующей комбинаторной орбите. Последнее было подсчитано с помощью GAP.

Мы признательны Гарету А. Джонсу; без его теоремы настоящая работа не могла бы быть выполнена.

3. Таблицы и иллюстрации

Система GAP содержит библиотеку всех примитивных групп перестановок степени меньше 2500. Команда `PrimitiveGroup(n,k)` возвращает k -й элемент списка примитивных групп степени n .

В нашем списке встречается несколько деревьев, которые являются единственной реализацией своего паспорта. Мы называем такие деревья *унидеревьями*; их полная классификация получена в [16].

Если существует пара зеркально симметричных друг другу деревьев, мы представляем только одно из них (как в виде перестановок, так и на рисунке). Такие деревья обязательно принадлежат одной орбите Галуа, так как они получаются друг из друга комплексным сопряжением, которое является элементом абсолютной группы Галуа Γ (фактически единственным элементом, для которого существует явное описание).

На каждом рисунке отмечено одно ребро: это *корневое ребро*, что означает, что оно помечено числом 1. Это позволяет легко установить соответствие между перестановками и рисунками. Выбор корневого ребра не всегда выглядит естественным с геометрической точки зрения, но это был не наш выбор: перестановки были порождены GAP.

Поля определения вычислены только для функций Белого степени $n \leq 12$, за исключением небольшого количества функций более высокой степени.

$\mathrm{AGL}_1(5)$ порядка 20

PrimitiveGroup(5,3)

5.1. $(1^1 2^2, 1^1 4^1, 1^1 4^1)$. Количество деревьев: **2**.

$a = (1, 5)(2, 3)$, $b = (2, 3, 4, 5)$.

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

$L_2(5)$ порядка 60**PrimitiveGroup(6,1)**

- 6.1.** $(1^2 2^2, 3^2, 1^1 5^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (3, 5)(4, 6)$, $b = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это унидерво серии D (см. [16]).
- 6.2.** $(1^2 2^2, 1^1 5^1, 1^1 5^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (3, 5)(4, 6)$, $b = (1, 5, 3, 2, 4)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё два дерева с таким паспортом, они определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$.

 $PGL_2(5)$ порядка 120**PrimitiveGroup(6,2)**

- 6.3.** $(1^2 2^2, 1^2 4^1, 6^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 5)(2, 6)$, $b = (3, 4, 5, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё одно дерево с таким паспортом, оно обладает симметрией порядка 2 и определено над \mathbb{Q} .
- 6.4.** $(1^2 2^2, 6^1, 1^2 4^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (3, 5)(4, 6)$, $b = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это дерево двойственно 6.3, поэтому здесь мы имеем такую же ситуацию.
- 6.5.** $(2^3, 1^2 4^1, 1^1 5^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 3)(2, 6)(4, 5)$, $b = (3, 4, 5, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это унидерво серии J (см. [16]).
- 6.6.** $(2^3, 1^1 5^1, 1^2 4^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$, $b = (2, 3, 4, 6, 5)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это унидерво серии E_2 (см. [16]).
- 6.7.** $(1^2 4^1, 1^2 4^1, 1^1 5^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 3, 6, 2)$, $b = (3, 4, 5, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это унидерво серии C (см. [16]).
- 6.8.** $(1^2 4^1, 1^1 5^1, 1^2 4^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (3, 4, 5, 6)$, $b = (1, 2, 4, 3, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это унидерво серии C (см. [16]).

6.9. $(3^2, 1^2 4^1, 1^2 4^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 3, 2)(4, 6, 5), b = (3, 4, 5, 6).$$

Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё одно дерево с таким паспортом, оно обладает симметрией порядка 2 и определено над \mathbb{Q} .

AGL₁(7) порядка 42

PrimitiveGroup(7,4)

7.1. $(1^1 2^3, 1^1 3^2, 1^1 6^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 4)(3, 5)(6, 7), b = (2, 4, 6)(3, 5, 7).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

L₃(2) порядка 168

PrimitiveGroup(7,5)

7.2. $(1^3 2^2, 1^1 3^2, 7^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 3)(4, 5), b = (2, 3, 5)(4, 7, 6).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

7.3. $(1^3 2^2, 1^1 2^1 4^1, 7^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 4)(6, 7), b = (2, 3, 4, 7)(5, 6).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Существует ещё два дерева с таким паспортом, они определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$.

AGL₁(8) порядка 168

PrimitiveGroup(8,2)

8.1. $(1^2 3^2, 1^2 3^2, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **4**.

$$a_1 = (1, 4, 8)(2, 7, 6), b_1 = (3, 5, 8)(4, 6, 7),$$

$$a_2 = (3, 5, 8)(4, 6, 7), b_2 = (1, 4, 8)(2, 7, 6).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{14 - 14\sqrt{-3}})$. Существует ещё одно дерево с таким паспортом, см. орбиту 8.9.

ASL₃(2) порядка 1 344

PrimitiveGroup(8,3)

8.2. $(2^4, 1^2 2^1 4^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 3)(2, 8)(4, 6)(5, 7), b = (3, 4)(5, 7, 6, 8).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

8.3. $(1^4 2^2, 4^2, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (2, 6)(4, 8), b = (1, 8, 4, 6)(2, 7, 3, 5).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

- 8.4.** $(1^4 2^2, 2^1 6^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (2, 3)(6, 7)$, $b = (1, 2)(3, 6, 7, 4, 5, 8)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Существует ещё два дерева с таким паспортом, они определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.
- 8.5.** $(1^4 2^2, 1^1 7^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 3)(6, 8)$, $b = (2, 3, 5, 4, 7, 8, 6)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Существует ещё три дерева с таким паспортом, они определены над полем разложения многочлена $a^3 + 2058a + 364952$.
- 8.6.** $(1^2 3^2, 1^2 2^1 4^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **4**.
 $a_1 = (3, 5, 7)(4, 6, 8)$, $b_1 = (1, 2, 7, 8)(4, 6)$,
 $a_2 = (3, 5, 7)(4, 6, 8)$, $b_2 = (1, 8)(2, 4, 7, 5)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-455 + 952\sqrt{-14}})$. Существует ещё шесть деревьев с таким паспортом, которые образуют одну орбиту Галуа степени 6.
- 8.7.** $(1^2 2^1 4^1, 1^2 2^1 4^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 7)(2, 4, 8, 6)$, $b = (3, 4)(5, 7, 6, 8)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Существует ещё 18 деревьев с таким паспортом, которые образуют одну орбиту Галуа степени 18.

$L_2(7)$ порядка 168

PrimitiveGroup(8,4)

- 8.8.** $(2^4, 1^2 3^2, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 3)(2, 8)(4, 5)(6, 7)$, $b = (3, 7, 8)(4, 6, 5)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это спорадическое унидереве K (см. [16]).
- 8.9.** $(1^2 3^2, 1^2 3^2, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 5, 2)(4, 8, 6)$, $b = (3, 7, 8)(4, 6, 5)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё четыре дерева с таким паспортом, см. орбиту 8.1.

$PGL_2(7)$ порядка 336

PrimitiveGroup(8,5)

- 8.10.** $(1^2 2^3, 4^2, 1^2 6^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (2, 6)(3, 8)(4, 7)$, $b = (1, 2, 3, 8)(4, 6, 5, 7)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё два дерева с таким паспортом, они оба обладают симметрией порядка 2 и определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

- 8.11.** $(2^4, 1^2 6^1, 1^2 6^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 3)(2, 6)(4, 8)(5, 7)$, $b = (3, 5, 7, 4, 8, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё одно дерево с таким паспортом, оно обладает симметрией порядка 2 и определено над \mathbb{Q} .
- 8.12.** $(1^2 2^3, 1^2 6^1, 1^1 7^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 6)(2, 7)(4, 8)$, $b = (3, 5, 7, 4, 8, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё пять деревьев с таким паспортом, они определены над полем разложения многочлена $a^5 + 22a^4 + 209a^3 + 1040a^2 + 2624a + 2560$.
- 8.13.** $(1^2 2^3, 1^1 7^1, 1^2 6^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 7)(4, 5)(6, 8)$, $b = (2, 3, 8, 6, 7, 5, 4)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это дерево двойственно 8.12, поэтому здесь мы имеем такую же ситуацию.
- 8.14.** $(1^2 3^2, 1^2 6^1, 1^2 6^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 2, 4)(3, 6, 5)$, $b = (3, 5, 7, 4, 8, 6)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё четыре дерева с таким паспортом. Одно из них обладает симметрией порядка 2 и поэтому определено над \mathbb{Q} . Три оставшихся дерева определены над полем разложения многочлена $a^3 - 6a + 16$.
- 8.15.** $(1^2 2^3, 1^2 3^2, 8^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a_1 = (1, 6)(2, 7)(4, 8)$, $b_1 = (3, 7, 8)(4, 6, 5)$,
 $a_2 = (1, 4)(2, 6)(5, 8)$, $b_2 = (3, 7, 8)(4, 6, 5)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Существует ещё два дерева с таким паспортом, они оба обладают симметрией порядка 2 и определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

AGL₁(9) порядка 144**PrimitiveGroup(9,5)**

- 9.1.** $(1^3 2^3, 1^1 4^2, 1^1 8^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 3)(5, 6)(7, 8)$, $b = (2, 4, 3, 7)(5, 6, 9, 8)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Существует ещё шесть деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 6.

AGL₂(3) порядка 432**PrimitiveGroup(9,7)**

- 9.2.** $(1^3 2^3, 3^3, 1^1 8^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (4, 7)(5, 8)(6, 9)$, $b = (1, 2, 4)(3, 9, 7)(5, 6, 8)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

- 9.3.** $(1^3 2^3, 1^1 2^1 6^1, 1^1 8^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 7)(3, 6)(5, 8)$, $b = (2, 3)(4, 8, 5, 7, 6, 9)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Существует ещё 14 деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 14.

 $L_2(8)$ порядка 504
PrimitiveGroup(9,8)

- 9.4.** $(1^1 2^4, 3^3, 1^2 7^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (2, 3)(4, 8)(5, 9)(6, 7)$, $b = (1, 2, 5)(3, 8, 4)(6, 9, 7)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Это спорадическое унидереве L (см. [16]).

- 9.5.** $(1^1 2^4, 1^2 7^1, 1^2 7^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a_1 = (1, 6)(2, 5)(3, 4)(8, 9)$, $b_1 = (3, 4, 9, 8, 6, 7, 5)$,
 $a_2 = (1, 9)(2, 4)(3, 5)(6, 8)$, $b_2 = (3, 4, 9, 8, 6, 7, 5)$.
 Поле: \mathbb{Q} . Эта орбита, состоящая из двух деревьев, расщепляется на две орбиты Галуа, определённые над \mathbb{Q} . У нас нет комбинаторного объяснения, объясняющего это расщепление. Существует ещё четыре дерева с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 4.

 $P\Gamma L_2(8)$ порядка 1 512
PrimitiveGroup(9,9)

- 9.6.** $(1^1 2^4, 1^3 3^2, 9^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 5)(2, 8)(3, 7)(6, 9)$, $b = (1, 7, 8)(3, 4, 9)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.
- 9.7.** $(1^3 3^2, 1^3 3^2, 9^1)$. Количество деревьев: **4**.
 $a_1 = (1, 6, 4)(2, 8, 5)$, $b_1 = (1, 7, 8)(3, 4, 9)$,
 $a_2 = (1, 4, 6)(2, 5, 8)$, $b_2 = (1, 7, 8)(3, 4, 9)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Эта орбита, состоящая из четырёх деревьев, расщепляется на две орбиты Галуа, определённые над $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Есть простая причина, объясняющая это расщепление: два дерева инварианты относительно перемены цвета, а два других — нет. Других деревьев с таким паспортом не существует.
- 9.8.** $(1^3 3^2, 1^1 2^1 6^1, 1^2 7^1)$. Количество деревьев: **4**.
 $a_1 = (1, 5, 6)(4, 9, 8)$, $b_1 = (1, 3, 7, 4, 8, 9)(2, 6)$,
 $a_2 = (1, 9, 5)(2, 4, 6)$, $b_2 = (1, 3, 7, 4, 8, 9)(2, 6)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{10 + 2\sqrt{-3}})$. Существует ещё девять деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 9.

$\mathrm{PGL}_2(9)$ порядка 720**PrimitiveGroup(10,4)****10.1.** $(2^5, 1^1 3^3, 1^2 8^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 2)(3, 4)(5, 10)(6, 7)(8, 9), \quad b = (2, 3, 10)(4, 9, 8)(5, 7, 6).$$

Поле: \mathbb{Q} . Это спорадическое унидериво M (см. [16]).**10.2.** $(2^5, 1^2 4^2, 1^2 8^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 3)(2, 7)(4, 8)(5, 6)(9, 10), \quad b = (3, 6, 10, 9)(4, 8, 5, 7).$$

Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё два дерева с таким паспортом, они обладают симметрией порядка 2 и определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.**10.3.** $(1^2 2^4, 1^2 8^1, 1^2 8^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 8)(2, 6)(4, 9)(7, 10), \quad b = (3, 4, 9, 7, 10, 5, 6, 8).$$

Поле: \mathbb{Q} . Этот пример богат различными комбинаторными инвариантами. Всего существует 16 деревьев с таким паспортом. Одно из них — наше специальное дерево. Два дерева обладают симметрией порядка 2; они определены над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Оставшиеся 13 деревьев распадаются на две орбиты размеров 5 и 8. Орбита размера 5 состоит из самодвойственных деревьев, а орбита размера 8 — из несамодвойственных. **$\mathrm{PGL}_2(9)$ порядка 1440****PrimitiveGroup(10,7)****10.4.** $(1^4 2^3, 2^1 8^1, 1^2 8^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 4)(2, 5)(3, 6), \quad b = (1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4)(5, 10).$$

Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё девять деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 9.**10.5.** $(1^4 2^3, 1^2 4^2, 10^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 4)(2, 5)(3, 6), \quad b = (1, 5, 6, 9)(2, 10, 7, 8).$$

Поле: \mathbb{Q} . Существует ещё восемь деревьев с таким паспортом. Три из них обладают симметрией порядка 2; они определены над полем разложения многочлена $a^3 - a^2 - 8a + 112$. Остальные деревья образуют одну орбиту Галуа степени 5. **$\mathrm{L}_2(11)$ порядка 660, действующая на 11 точках****PrimitiveGroup(11,5)****11.1.** $(1^3 2^4, 1^2 3^3, 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 7)(2, 8)(5, 10)(6, 9), \quad b = (3, 5, 11)(4, 9, 7)(6, 10, 8).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё восемь деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 8.

 M_{11} порядка 7 920 **PrimitiveGroup(11,6)**

11.2. $(1^3 2^4, 1^3 4^2, 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 7)(3, 10)(5, 11)(6, 8), \quad b = (2, 7, 9, 10)(3, 4, 8, 5).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё восемь деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 8.

 M_{11} порядка 7 920, действующая на 12 точках **PrimitiveGroup(12,1)**

12.1. $(1^4 2^4, 2^2 4^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 4)(2, 3)(5, 10)(6, 9), \quad b = (1, 11, 7, 2)(3, 5)(4, 12, 6, 9)(8, 10).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё 28 деревьев с таким паспортом, они образуют одну орбиту Галуа степени 28.

12.2. $(1^4 2^4, 1^2 5^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 10)(2, 12)(4, 7)(5, 11), \quad b = (1, 6, 11, 9, 8)(2, 12, 3, 5, 7).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Всего существует 45 деревьев с таким паспортом. Два из них образуют орбиту 12.2 с группой M_{11} , ещё два образуют орбиту 12.7 с группой M_{12} , обе орбиты определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Остальные деревья образуют одну орбиту Галуа степени 41.

12.3. $(1^4 2^4, 1^1 2^1 3^1 6^1, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **6**.

$$a_1 = (1, 10)(2, 11)(3, 6)(5, 12), \quad b_1 = (1, 5, 7, 6, 8, 4)(2, 11, 10)(9, 12),$$

$$a_2 = (1, 12)(2, 3)(6, 7)(8, 10), \quad b_2 = (1, 5, 7, 6, 8, 4)(2, 11, 10)(9, 12),$$

$$a_3 = (1, 3)(2, 12)(5, 9)(6, 7), \quad b_3 = (1, 5, 7, 6, 8, 4)(2, 11, 10)(9, 12).$$

Всего существует 150 деревьев с таким паспортом. Шесть из них образуют орбиту 12.3 с группой M_{11} , ещё два дерева образуют орбиту 12.8 с группой M_{12} . Вычисления для таких больших орбит провести сложно. Мы предполагаем, что орбита 12.8 определена над $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, а орбита 12.3 — над кубическим расширением поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Об остальных 142 деревьях мы ничего сказать не можем.

 M_{12} порядка 95 040 **PrimitiveGroup(12,2)**

12.4. $(1^4 2^4, 3^4, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 8)(3, 9)(6, 12)(10, 11), \quad b = (1, 5, 6)(2, 8, 3)(4, 12, 7)(9, 11, 10).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё три дерева с таким паспортом, они определены над полем разложения многочлена $a^3 - a^2 - 216a - 1296$.

12.5. $(2^6, 1^3 3^3, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 11)(2, 7)(3, 6)(4, 5)(8, 10)(9, 12), \quad b = (2, 7, 9)(3, 12, 10)(4, 11, 8).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.

- 12.6.** $(2^6, 1^4 4^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 6)(2, 5)(3, 12)(4, 8)(7, 10)(9, 11)$, $b = (2, 10, 6, 4)(3, 9, 11, 7)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Других деревьев с таким паспортом не существует.
- 12.7.** $(1^4 2^4, 1^2 5^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 10)(3, 5)(6, 12)(7, 9)$, $b = (1, 8, 9, 12, 2)(3, 5, 6, 4, 11)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. См. комментарии к орбите 12.2.
- 12.8.** $(1^4 2^4, 1^1 2^1 3^1 6^1, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 12)(3, 8)(6, 9)(7, 10)$, $b = (2, 3, 9, 10, 7, 12)(4, 11, 8)(5, 6)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. См. комментарии к орбите 12.3.
- 12.9.** $(1^4 2^4, 1^2 2^1 8^1, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **4**.
 $a_1 = (1, 11)(3, 8)(5, 12)(9, 10)$, $b_1 = (1, 12)(2, 3, 10, 9, 6, 11, 4, 7)$,
 $a_2 = (1, 4)(3, 10)(5, 11)(6, 8)$, $b_2 = (1, 12)(2, 3, 10, 9, 6, 11, 4, 7)$.
 Всего существует **90** деревьев с таким паспортом. Мы предполагаем, что эта орбита определена над квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$.
- 12.10.** $(1^3 3^3, 1^3 3^3, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 9, 10)(3, 4, 12)(5, 8, 6)$, $b = (2, 7, 9)(3, 12, 10)(4, 11, 8)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё 34 дерева с таким паспортом.
- 12.11.** $(1^3 3^3, 1^4 4^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 6, 11)(3, 5, 9)(8, 10, 12)$, $b = (2, 10, 6, 4)(3, 9, 11, 7)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё 24 дерева с таким паспортом.
- 12.12.** $(1^4 4^2, 1^4 4^2, 1^1 11^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 12, 11, 5)(3, 10, 8, 9)$, $b = (2, 10, 6, 4)(3, 9, 11, 7)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Существует ещё 14 деревьев с таким паспортом.

 $\mathrm{PGL}_2(11)$ порядка 1 320**PrimitiveGroup(12,4)**

- 12.13.** $(1^2 2^5, 3^4, 1^2 10^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a_1 = (2, 9)(3, 7)(5, 10)(6, 11)(8, 12)$, $b_1 = (1, 7, 8)(2, 4, 12)(3, 6, 11)(5, 9, 10)$,
 $a_2 = (2, 4)(3, 11)(5, 7)(6, 9)(10, 12)$, $b_2 = (1, 7, 8)(2, 4, 12)(3, 6, 11)(5, 9, 10)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Существует ещё два дерева с таким паспортом, они оба обладают симметрией порядка 2 и определены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

12.14. $(1^2 2^5, 1^2 5^2, 1^2 10^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a_1 = (1, 7)(3, 10)(4, 8)(6, 11)(9, 12), \quad b_1 = (2, 12, 9, 7, 4)(3, 6, 11, 5, 8),$$

$$a_2 = (1, 9)(3, 4)(5, 6)(8, 11)(10, 12), \quad b_2 = (2, 7, 12, 4, 9)(3, 5, 6, 8, 11).$$

Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Существует ещё 34 дерева с таким паспортом. Шесть из них обладают симметрией порядка 2, но они распадаются на две орбиты Галуа, поскольку два дерева имеют группу вращений рёбер порядка 3840, а четыре других дерева имеют группу порядка 23040. Остальные деревья образуют одну орбиту Галуа степени 28.

$L_3(3)$ порядка 5616

PrimitiveGroup(13,7)

13.1. $(1^5 2^4, 1^1 3^4, 13^1)$. Количество деревьев: **4**.

$$a_1 = (1, 3)(2, 12)(5, 7)(6, 10), \quad b_1 = (1, 10, 12)(2, 9, 7)(3, 8, 13)(4, 5, 11),$$

$$a_2 = (1, 3)(2, 8)(4, 7)(6, 11), \quad b_2 = (1, 10, 12)(2, 9, 7)(3, 8, 13)(4, 5, 11).$$

13.2. $(1^5 2^4, 1^1 2^2 4^2, 13^1)$. Количество деревьев: **4**.

$$a_1 = (2, 4)(3, 9)(5, 8)(7, 12), \quad b_1 = (1, 11, 3, 8)(2, 10, 6, 12)(4, 13)(5, 7),$$

$$a_2 = (2, 4)(5, 6)(9, 13)(11, 12), \quad b_2 = (1, 11, 3, 8)(2, 10, 6, 12)(4, 13)(5, 7).$$

13.3. $(1^5 2^4, 1^2 2^1 3^1 6^1, 13^1)$. Количество деревьев: **4**.

$$a_1 = (1, 9)(2, 12)(4, 5)(6, 11), \quad b_1 = (1, 8, 5)(2, 7)(3, 11, 12, 13, 4, 10),$$

$$a_2 = (2, 8)(3, 9)(4, 5)(6, 10), \quad b_2 = (1, 8, 5)(2, 7)(3, 11, 12, 13, 4, 10).$$

$L_2(13)$ порядка 1092

PrimitiveGroup(14,1)

14.1. $(1^2 2^6, 1^2 3^4, 1^1 13^1)$. Количество деревьев: **1**.

$$a = (1, 10)(2, 12)(3, 14)(4, 6)(5, 11)(7, 8),$$

$$b = (2, 14, 12)(3, 7, 6)(4, 9, 10)(8, 11, 13).$$

$PGL_2(13)$ порядка 2184

PrimitiveGroup(14,2)

14.2. $(2^7, 1^2 3^4, 1^2 12^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a_1 = (1, 7)(2, 11)(3, 9)(4, 6)(5, 10)(8, 13)(12, 14),$$

$$b_1 = (1, 7, 14)(2, 11, 6)(3, 13, 4)(9, 12, 10),$$

$$a_2 = (1, 8)(2, 12)(3, 13)(4, 10)(5, 7)(6, 11)(9, 14),$$

$$b_2 = (1, 7, 14)(2, 11, 6)(3, 13, 4)(9, 12, 10).$$

14.3. $(1^2 2^6, 1^2 4^3, 1^2 12^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a_1 = (1, 13)(2, 14)(3, 10)(4, 7)(5, 12)(8, 11),$$

$$b_1 = (1, 13, 12, 2)(3, 9, 6, 14)(4, 10, 11, 7),$$

$$a_2 = (1, 2)(3, 9)(4, 8)(5, 7)(10, 14)(11, 13),$$

$$b_2 = (1, 13, 12, 2)(3, 9, 6, 14)(4, 10, 11, 7).$$

$L_4(2)$ порядка 20 160

PrimitiveGroup(15,4)

15.1. $(1^3 2^6, 1^3 2^2 4^2, 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 7)(2, 9)(3, 14)(4, 15)(5, 8)(10, 12),$$

$$b = (1, 2, 14, 13)(3, 12)(4, 7, 11, 8)(6, 9).$$

15.2. $(1^7 2^4, 1^1 2^1 4^3, 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (2, 3)(6, 7)(10, 11)(14, 15), \quad b = (1, 13, 8, 11)(2, 7, 4, 14)(3, 10, 12, 5)(6, 9).$$

15.3. $(1^7 2^4, 1^1 2^1 3^2 6^1, 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 2)(4, 7)(9, 10)(12, 15), \quad b = (1, 15, 14)(2, 5)(3, 10, 12, 4, 13, 11)(6, 8, 9).$$

 $AGL_4(2) = 2^4.L_4(2)$ порядка 322 560

PrimitiveGroup(16,11)

16.1. $(1^4 2^6, 2^4 4^2, 1^1 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (2, 9)(4, 11)(5, 7)(6, 15)(8, 13)(14, 16),$$

$$b = (1, 7, 16, 10)(2, 5)(3, 9)(4, 11, 13, 6)(8, 14)(12, 15).$$

16.2. $(1^8 2^4, 1^1 5^3, 1^1 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 15)(3, 13)(5, 11)(7, 9),$$

$$b = (2, 11, 4, 16, 8)(3, 6, 5, 15, 14)(7, 12, 10, 13, 9).$$

16.3. $(1^8 2^4, 1^1 3^1 6^2, 1^1 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 16)(3, 14)(5, 12)(7, 10),$$

$$b = (2, 16, 10, 4, 9, 13)(3, 8, 6)(5, 14, 15, 7, 11, 12).$$

16.4. $(1^4 2^6, 1^2 2^1 3^2 6^1, 1^1 15^1)$. Количество деревьев: **6**.

$$a_1 = (1, 13)(3, 15)(5, 7)(6, 12)(8, 10)(9, 11),$$

$$b_1 = (2, 4, 6, 9, 11, 13)(3, 7, 14)(5, 12, 16)(8, 15),$$

$$a_2 = (1, 13)(4, 16)(5, 12)(6, 7)(8, 9)(10, 11),$$

$$b_2 = (2, 4, 6, 9, 11, 13)(3, 7, 14)(5, 12, 16)(8, 15),$$

$$a_3 = (1, 6)(4, 7)(9, 12)(10, 16)(11, 13)(14, 15),$$

$$b_3 = (2, 4, 6, 9, 11, 13)(3, 7, 14)(5, 12, 16)(8, 15).$$

 $AGL_2(4)$ порядка 5 760

PrimitiveGroup(16,12)

16.5. $(1^4 2^6, 1^2 2^1 4^3, 1^1 15^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 15)(2, 12)(4, 8)(5, 11)(6, 16)(10, 14),$$

$$b = (3, 16, 6, 10)(4, 15, 5, 9)(7, 8)(11, 13, 12, 14).$$

$L_2(16)$ порядка 4 080 **PrimitiveGroup(17,6)**

17.1. $(1^1 2^8, 1^2 3^5, 1^2 15^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 11)(2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)(12, 17)(13, 16)(14, 15)$,
 $b = (1, 14, 11)(2, 7, 15)(3, 8, 12)(4, 6, 5)(9, 16, 13)$.

$L_2(16) : 2$ порядка 8 160 **PrimitiveGroup(17,7)**

17.2. $(1^5 2^6, 1^4 4^4, 1^2 15^1)$. Количество деревьев: **1**.
 $a = (1, 13)(2, 6)(3, 10)(4, 11)(8, 12)(15, 16)$,
 $b = (2, 7, 10, 6)(3, 12, 15, 13)(4, 11, 16, 5)(8, 17, 14, 9)$.

$PGL_2(19)$ порядка 6 840 **PrimitiveGroup(20,2)**

20.1. $(1^2 2^9, 1^2 3^6, 1^2 18^1)$. Количество деревьев: **3**.
 $a_1 = (1, 8)(2, 12)(4, 18)(5, 7)(6, 9)(10, 19)(11, 14)(13, 15)(16, 20)$,
 $b_1 = (1, 8, 5)(3, 4, 17)(6, 9, 19)(7, 15, 14)(10, 16, 12)(11, 18, 20)$,
 $a_2 = (1, 9)(2, 20)(4, 14)(5, 10)(6, 19)(7, 15)(11, 17)(12, 18)(13, 16)$,
 $b_2 = (1, 8, 5)(3, 4, 17)(6, 9, 19)(7, 15, 14)(10, 16, 12)(11, 18, 20)$,
 $a_3 = (1, 16)(2, 6)(4, 12)(5, 9)(7, 14)(8, 15)(10, 18)(11, 20)(13, 17)$,
 $b_3 = (1, 8, 5)(3, 4, 17)(6, 9, 19)(7, 15, 14)(10, 16, 12)(11, 18, 20)$.

$PGL_3(4)$ порядка 120 960 **PrimitiveGroup(21,7)**

21.1. $(1^7 2^7, 1^3 2^1 4^4, 21^1)$. Количество деревьев: **2**.
 $a = (1, 16)(4, 17)(5, 20)(6, 18)(10, 11)(12, 13)(14, 21)$,
 $b = (2, 13, 16, 11)(3, 10, 9, 7)(4, 15, 20, 12)(5, 19)(6, 14, 8, 17)$.
 Поле: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ (см. [8]).

M_{23} порядка 10 200 960 **PrimitiveGroup(23,5)**

23.1. $(1^7 2^8, 1^3 2^2 4^4, 23^1)$. Количество деревьев: **4**.
 $a_1 = (2, 5)(3, 21)(4, 17)(8, 16)(10, 18)(11, 19)(12, 23)(14, 20)$,
 $b_1 = (1, 14, 17, 12)(3, 20, 7, 6)(5, 9, 16, 22)(8, 15, 10, 23)(11, 21)(13, 18)$,
 $a_2 = (2, 6)(3, 13)(4, 17)(8, 9)(10, 12)(11, 18)(15, 20)(19, 23)$,
 $b_2 = (1, 14, 17, 12)(3, 20, 7, 6)(5, 9, 16, 22)(8, 15, 10, 23)(11, 21)(13, 18)$.
 Поле: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-23/2 - (5/2)\sqrt{-23}}\right)$ (см. [4]).

M₂₄ порядка 244 823 040

PrimitiveGroup(24,1)

24.1. $(2^{12}, 1^6 3^6, 1^1 23^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 19)(2, 24)(3, 12)(4, 5)(6, 8)(7, 22)(9, 10)(11, 14)(13, 20) \\ (15, 23)(16, 18)(17, 21),$$

$$b = (1, 14, 18)(4, 7, 21)(6, 10, 9)(8, 20, 23)(11, 17, 13)(12, 24, 16).$$

24.2. $(1^8 2^8, 3^8, 1^1 23^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 5)(2, 9)(3, 11)(6, 13)(7, 17)(8, 16)(15, 20)(18, 23),$$

$$b = (1, 22, 23)(2, 24, 4)(3, 16, 8)(5, 10, 13)(6, 14, 11)(7, 21, 19) \\ (9, 15, 12)(17, 18, 20).$$

24.3. $(1^8 2^8, 1^4 5^4, 1^1 23^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 6)(2, 13)(3, 19)(5, 9)(7, 10)(8, 21)(12, 20)(18, 23),$$

$$b = (1, 12, 4, 17, 8)(2, 22, 3, 15, 5)(7, 13, 20, 14, 24)(11, 23, 18, 16, 21).$$

24.4. $(1^8 2^8, 1^2 2^2 3^2 6^2, 1^1 23^1)$. Количество деревьев: **10**.

$$a_1 = (1, 7)(2, 6)(3, 19)(5, 24)(10, 13)(11, 23)(15, 21)(16, 20),$$

$$b_1 = (1, 17, 8, 14, 13, 9)(2, 19)(3, 22, 5)(4, 21)(6, 10, 12, 23, 20, 16)(11, 18, 15),$$

$$a_2 = (1, 7)(2, 21)(3, 16)(5, 24)(6, 15)(8, 14)(9, 18)(19, 20),$$

$$b_2 = (1, 17, 8, 14, 13, 9)(2, 19)(3, 22, 5)(4, 21)(6, 10, 12, 23, 20, 16)(11, 18, 15),$$

$$a_3 = (1, 22)(2, 13)(3, 5)(6, 14)(7, 23)(8, 24)(15, 16)(17, 21),$$

$$b_3 = (1, 17, 8, 14, 13, 9)(2, 19)(3, 22, 5)(4, 21)(6, 10, 12, 23, 20, 16)(11, 18, 15),$$

$$a_4 = (1, 7)(2, 16)(3, 21)(5, 18)(8, 14)(9, 24)(10, 22)(12, 13),$$

$$b_4 = (1, 17, 8, 14, 13, 9)(2, 19)(3, 22, 5)(4, 21)(6, 10, 12, 23, 20, 16)(11, 18, 15),$$

$$a_5 = (1, 16)(2, 24)(4, 20)(6, 19)(7, 12)(8, 18)(9, 13)(21, 22),$$

$$b_5 = (1, 17, 8, 14, 13, 9)(2, 19)(3, 22, 5)(4, 21)(6, 10, 12, 23, 20, 16)(11, 18, 15).$$

24.5. $(1^6 3^6, 1^6 3^6, 1^1 23^1)$. Количество деревьев: **2**.

$$a = (1, 13, 6)(2, 23, 5)(3, 4, 8)(10, 12, 16)(15, 17, 19)(20, 24, 22),$$

$$b = (1, 14, 18)(4, 7, 21)(6, 10, 9)(8, 20, 23)(11, 17, 13)(12, 24, 16).$$

L₅(2) порядка 9 999 360

PrimitiveGroup(31,10)

31.1. $(1^7 2^{12}, 1^3 2^6 4^4, 31^1)$. Количество деревьев: **6**.

$$a_1 = (2, 24)(5, 11)(7, 12)(8, 23)(10, 29)(13, 19)(14, 15)(16, 18)(17, 27) \\ (20, 28)(22, 26)(25, 31),$$

$$b_1 = (1, 19)(3, 8)(4, 9, 10, 16)(6, 27)(7, 24, 22, 15)(11, 18)(12, 23) \\ (13, 17, 14, 30)(20, 29)(21, 26, 25, 28),$$

$$a_2 = (2, 13)(5, 15)(7, 20)(8, 26)(10, 17)(11, 14)(12, 28)(16, 25)(18, 31)(19, 24)(22, 23)(27, 29),$$

$$b_2 = (1, 19)(3, 8)(4, 9, 10, 16)(6, 27)(7, 24, 22, 15)(11, 18)(12, 23)(13, 17, 14, 30)(20, 29)(21, 26, 25, 28),$$

$$a_3 = (2, 24)(5, 14)(7, 12)(8, 22)(10, 17)(11, 15)(13, 19)(16, 25)(18, 31)(20, 28)(23, 26)(27, 29),$$

$$b_3 = (1, 19)(3, 8)(4, 9, 10, 16)(6, 27)(7, 24, 22, 15)(11, 18)(12, 23)(13, 17, 14, 30)(20, 29)(21, 26, 25, 28).$$

Определено над полем разложения многочлена $a^6 + a^5 + 3a^4 + 11a^3 + 44a^2 + 36a + 32$ (см. [8]).

ASL₅(2) порядка 319979520

PrimitiveGroup(32,3)

32.1. $(1^8 2^{12}, 1^2 3^{10}, 1^1 31^1)$. Количество деревьев: **6**.

$$a_1 = (1, 23)(2, 24)(7, 17)(8, 18)(9, 25)(10, 26)(11, 13)(12, 14)(15, 31)(16, 32)(27, 29)(28, 30),$$

$$b_1 = (2, 29, 30)(3, 24, 16)(4, 12, 19)(5, 17, 21)(6, 13, 10)(7, 8, 28)(9, 26, 18)(11, 15, 31)(14, 22, 25)(20, 32, 23),$$

$$a_2 = (1, 19)(4, 18)(6, 24)(7, 21)(9, 15)(10, 30)(11, 31)(12, 14)(13, 25)(16, 28)(26, 32)(27, 29),$$

$$b_2 = (2, 29, 30)(3, 24, 16)(4, 12, 19)(5, 17, 21)(6, 13, 10)(7, 8, 28)(9, 26, 18)(11, 15, 31)(14, 22, 25)(20, 32, 23),$$

$$a_3 = (1, 3)(2, 16)(4, 14)(6, 10)(8, 12)(13, 15)(17, 31)(18, 20)(19, 29)(21, 25)(23, 27)(30, 32),$$

$$b_3 = (2, 29, 30)(3, 24, 16)(4, 12, 19)(5, 17, 21)(6, 13, 10)(7, 8, 28)(9, 26, 18)(11, 15, 31)(14, 22, 25)(20, 32, 23).$$

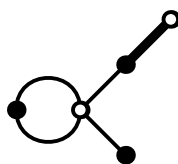
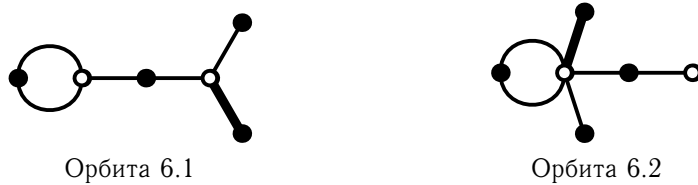
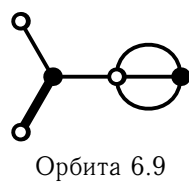
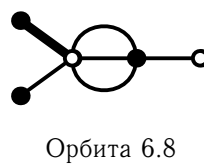
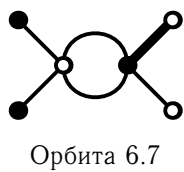
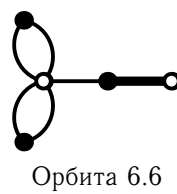
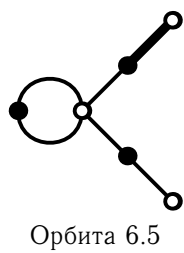
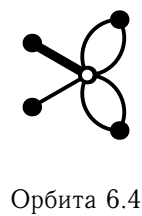
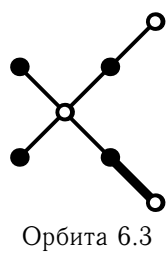


Рис. 4. Группа $AGL_1(5)$: орбита 5.1 размера 2

Рис. 5. Группа $L_2(5)$: две орбиты размера 1Рис. 6. Группа $PGL_2(5)$: семь орбит размера 1

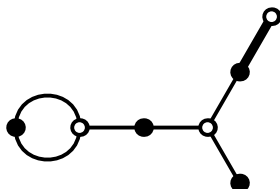
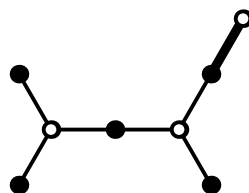
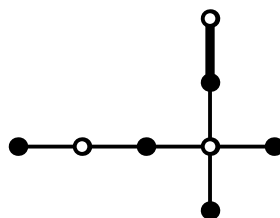


Рис. 7. Группа $AGL_1(7)$: орбита 7.1 размера 2



Орбита 7.2



Орбита 7.3

Рис. 8. Группа $L_3(2)$: две орбиты размера 2

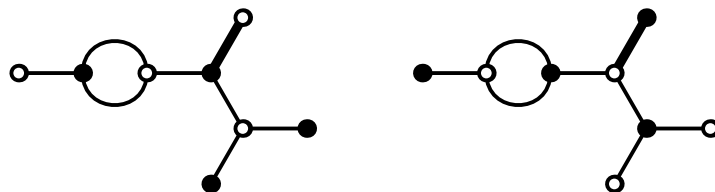
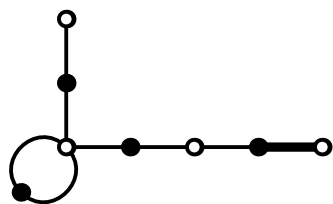
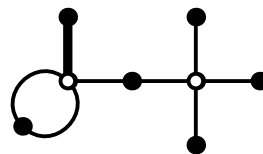


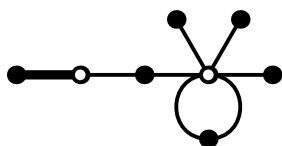
Рис. 9. Группа $AGL_1(8)$: орбита 8.1 размера 4



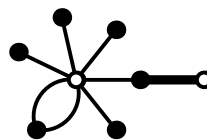
Орбита 8.2



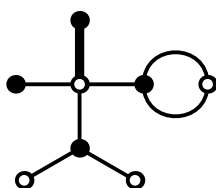
Орбита 8.3



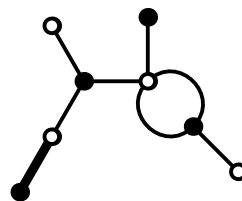
Орбита 8.4



Орбита 8.5

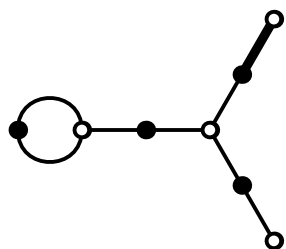


Орбита 8.6

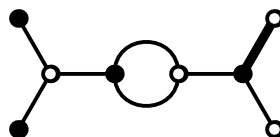


Орбита 8.7

Рис. 10. Группа $ASL_3(2)$: пять орбит размера 2 и одна орбита размера 4

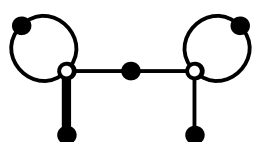


Орбита 8.8

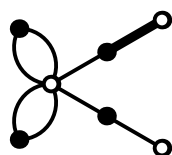


Орбита 8.9

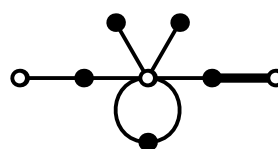
Рис. 11. Группа $L_2(7)$: две орбиты размера 1



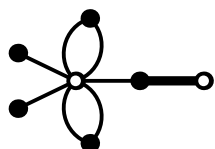
Орбита 8.10



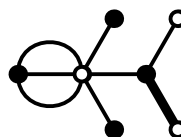
Орбита 8.11



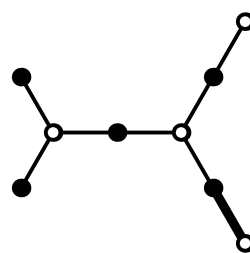
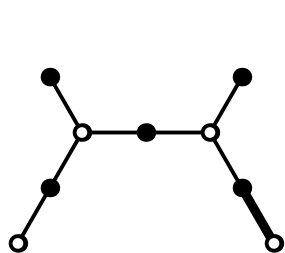
Орбита 8.12



Орбита 8.13

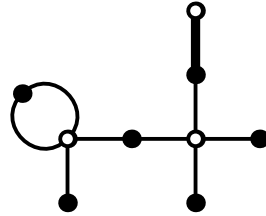
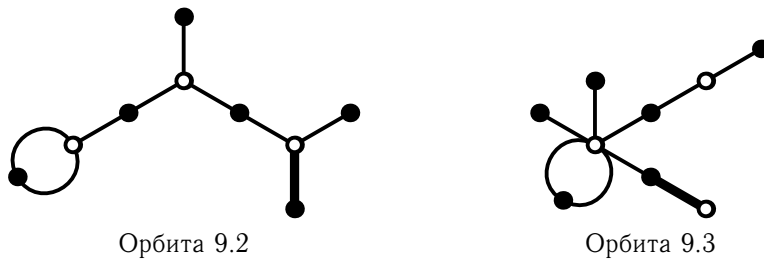


Орбита 8.14



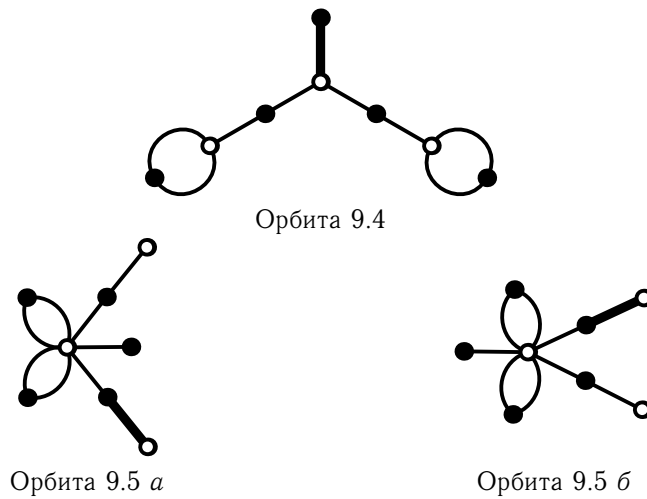
Орбита 8.15

Рис. 12. Группа $PGL_2(7)$: пять орбит размера 1 и одна орбита размера 2

Рис. 13. Группа $AGL_1(9)$: орбита 9.1 размера 2

Орбита 9.2

Орбита 9.3

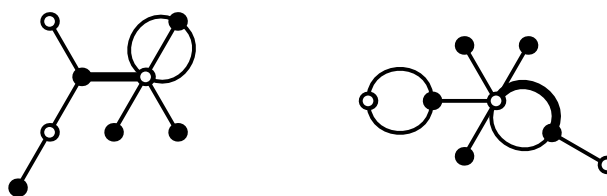
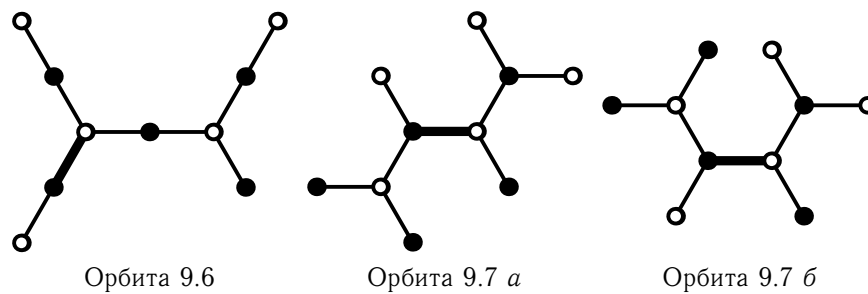
Рис. 14. Группа $AGL_2(3)$: две орбиты размера 2

Орбита 9.4

Орбита 9.5 а

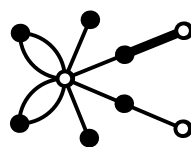
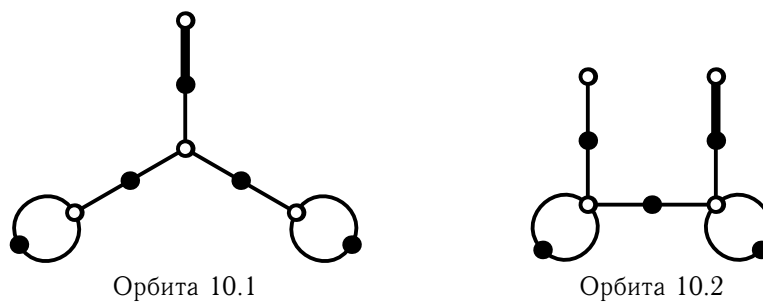
Орбита 9.5 б

Рис. 15. Группа $L_2(8)$: три орбиты размера 1



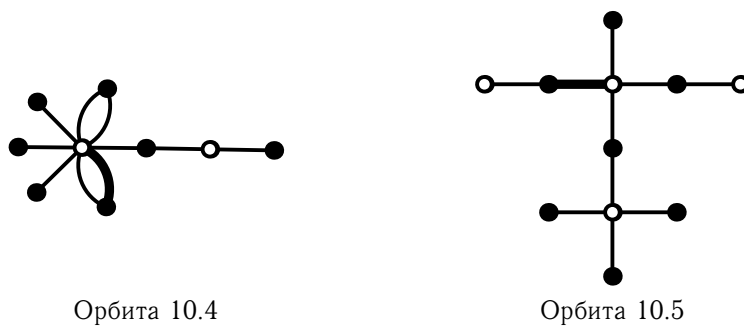
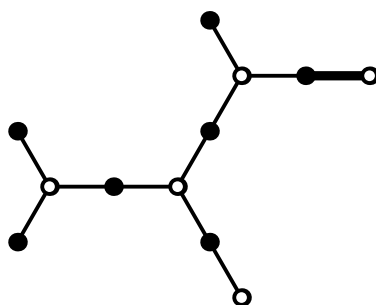
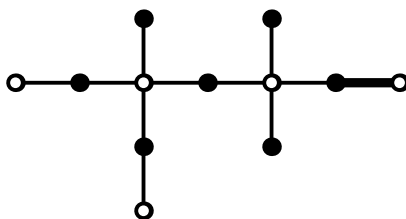
Орбита 9.8

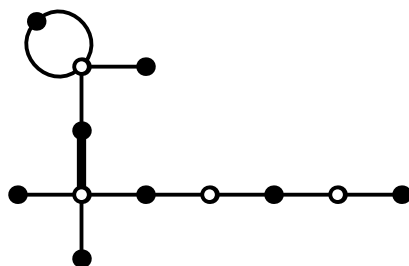
Рис. 16. Группа $PGL_2(8)$: три орбиты размера 2 и одна орбита размера 4



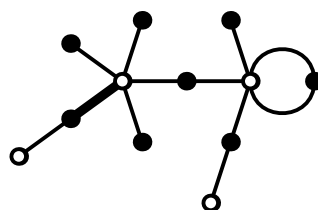
Орбита 10.3

Рис. 17. Группа $PGL_2(9)$: три орбиты размера 1

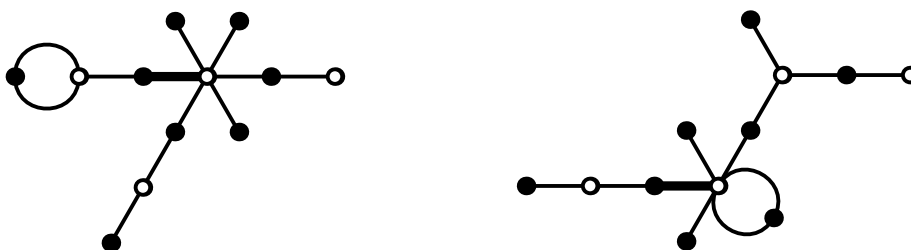
Рис. 18. Группа $PGL_2(9)$: две орбиты размера 1Рис. 19. Группа $L_2(11)$, действующая на 11 точках: орбита 11.1 размера 2Рис. 20. Группа M_{11} : орбита 11.2 размера 2



Орбита 12.1

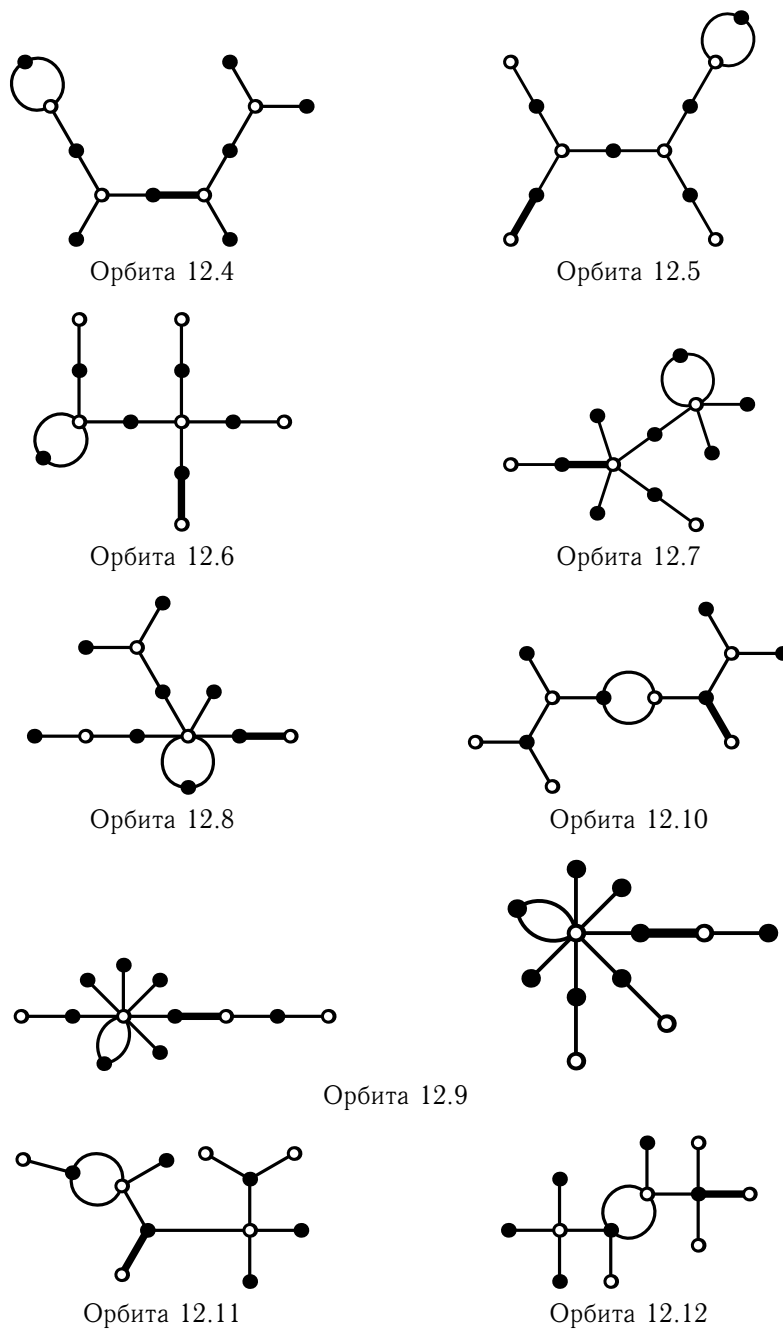


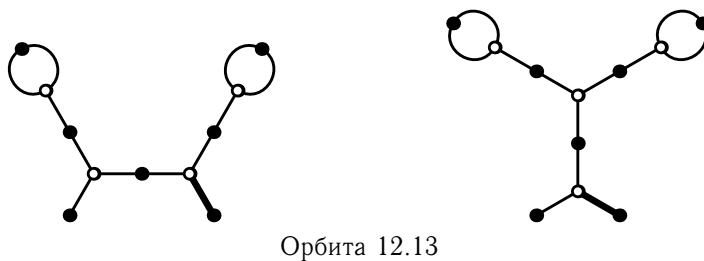
Орбита 12.2



Орбита 12.3.

Рис. 21. Группа M_{11} , действующая на 12 точках: две орбиты размера 2 и одна орбита размера 6

Рис. 22. Группа M_{12} : 8 орбит размера 2 и одна орбита размера 4

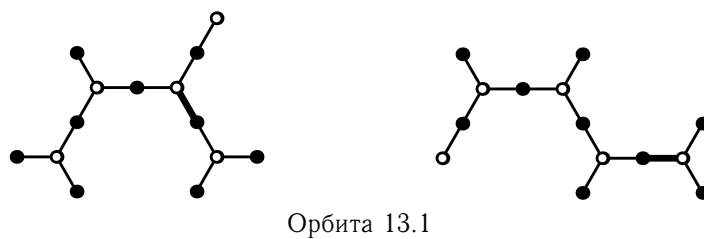


Орбита 12.13



Орбита 12.14

Рис. 23. Группа $PGL_2(11)$: две орбиты размера 2



Орбита 13.1

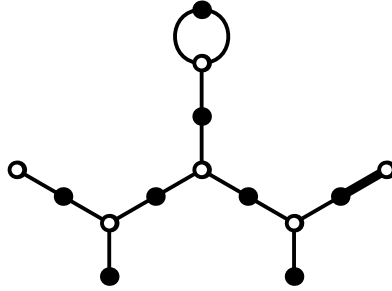
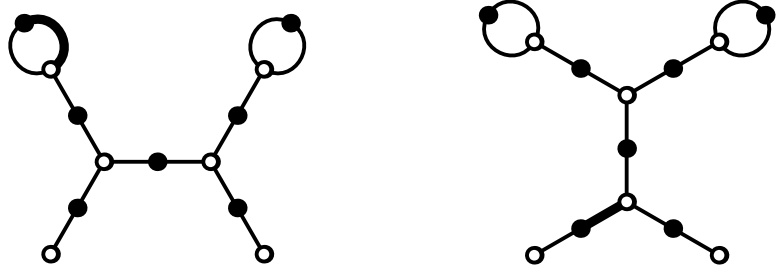


Орбита 13.2

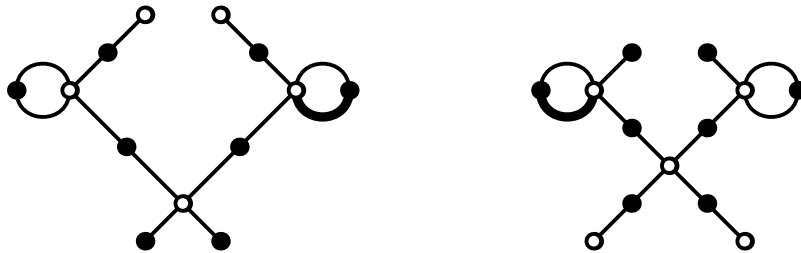


Орбита 13.3

Рис. 24. Группа $L_3(3)$: три орбиты размера 4

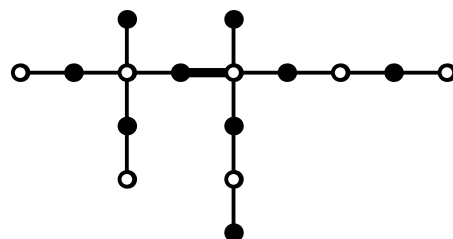
Рис. 25. Группа $L_2(13)$: орбита 14.1 размера 1

Орбита 14.2

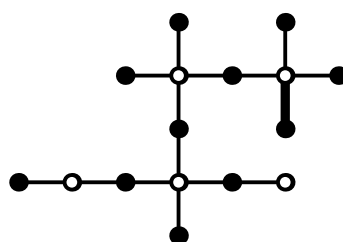


Орбита 14.3

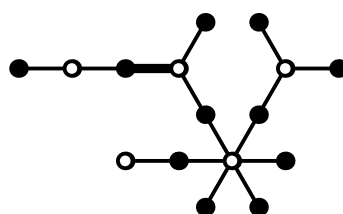
Рис. 26. Группа $PGL_2(13)$: две орбиты размера 2



Орбита 15.1

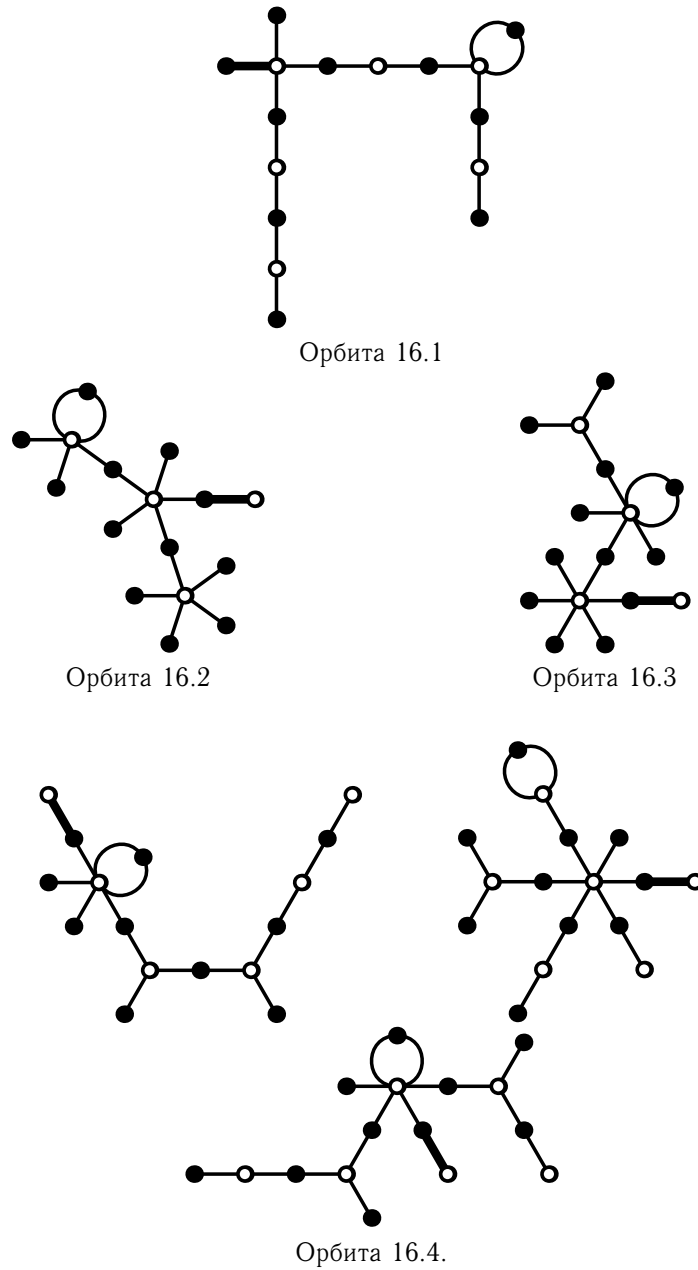


Орбита 15.2



Орбита 15.3

Рис. 27. Группа $L_4(2)$: три орбиты размера 2

Рис. 28. Группа $AGL_4(2)$: три орбиты размера 2 и одна орбита размера 6

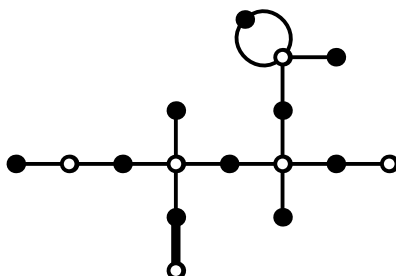


Рис. 29. Группа $AGL_2(4)$: орбита 16.5 размера 2

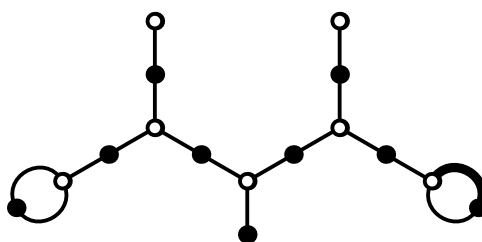


Рис. 30. Группа $L_2(16)$: орбита 17.1 размера 1

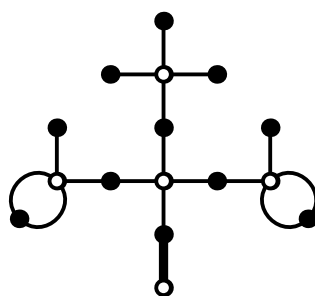
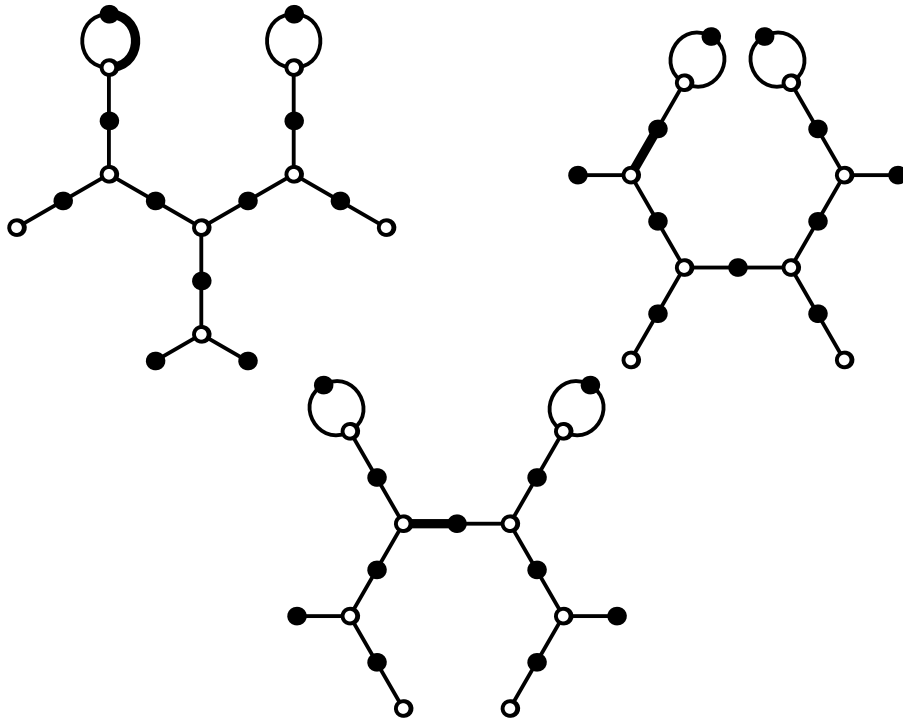
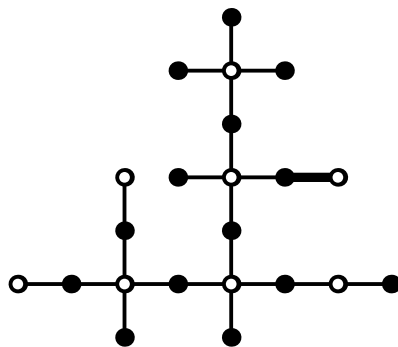


Рис. 31. Группа $L_2(16) : 2$: орбита 17.2 размера 1

Рис. 32. Группа $PGL_2(19)$: орбита 20.1 размера 3Рис. 33. Группа $PGL_3(4)$: орбита 21.1 размера 2

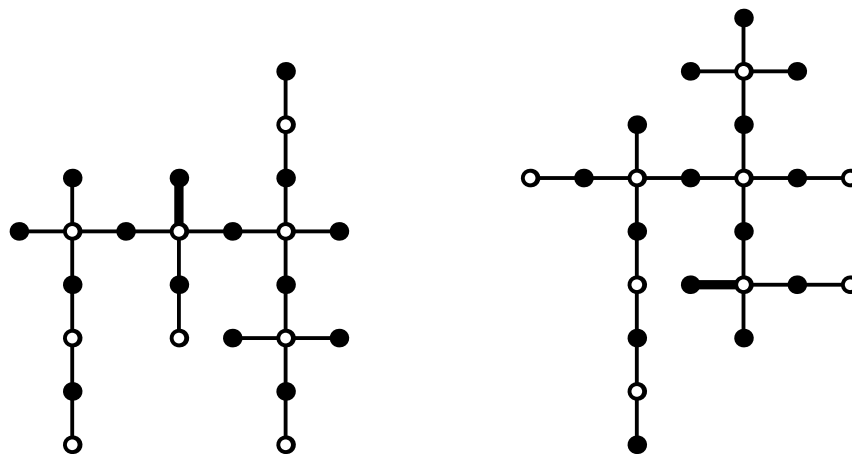


Рис. 34. Группа M_{23} : орбита 23.1 размера 4

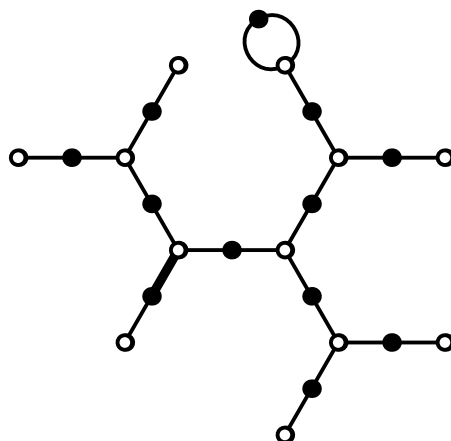
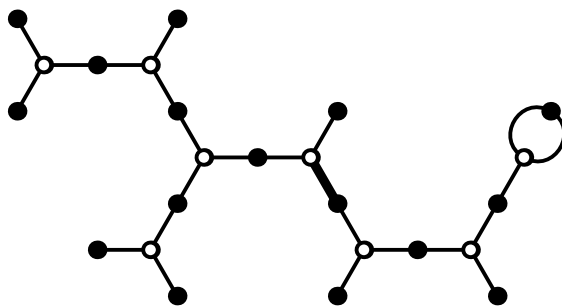
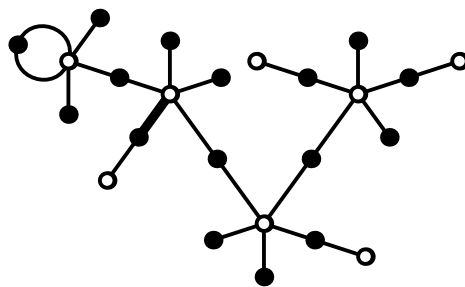


Рис. 35. Группа M_{24} : орбита 24.1 размера 2

Рис. 36. Группа M_{24} : орбита 24.2 размера 2Рис. 37. Группа M_{24} : орбита 24.3 размера 2

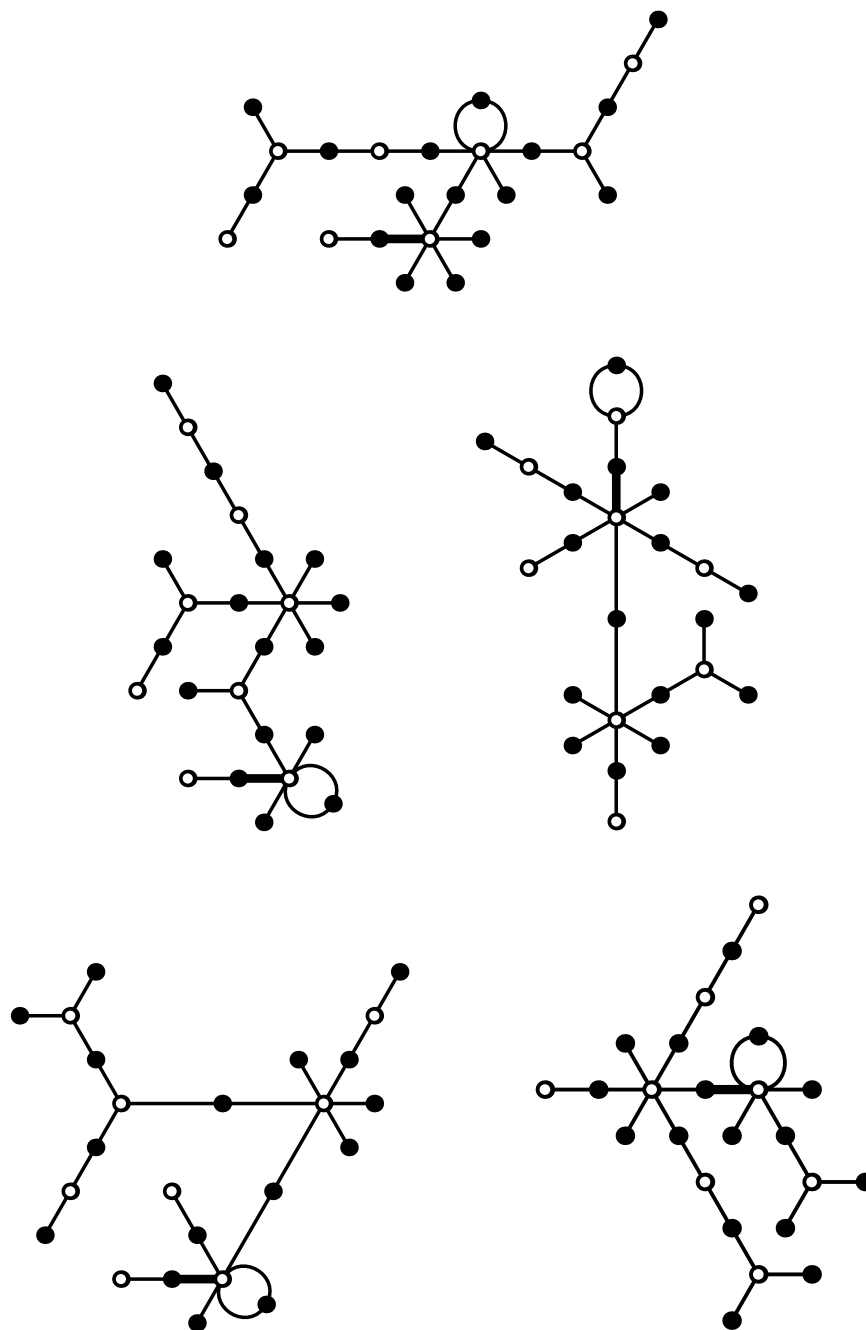
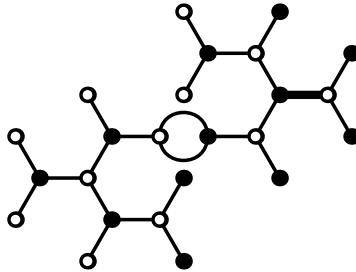
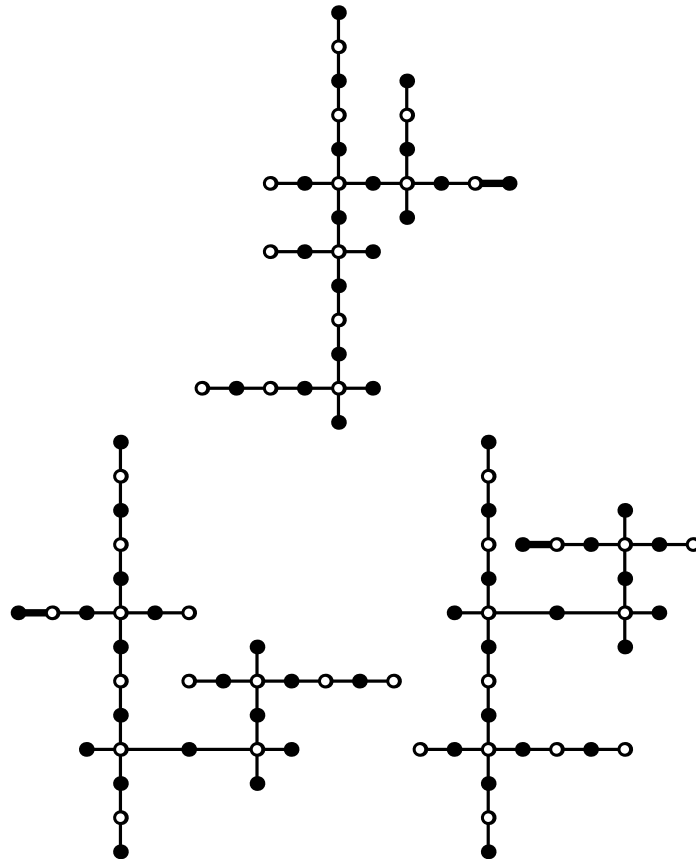


Рис. 38. Группа M_{24} : орбита 24.4 размера 10

Рис. 39. Группа M_{24} : орбита 24.5 размера 2Рис. 40. Группа $L_5(2)$: орбита 31.1 размера 6

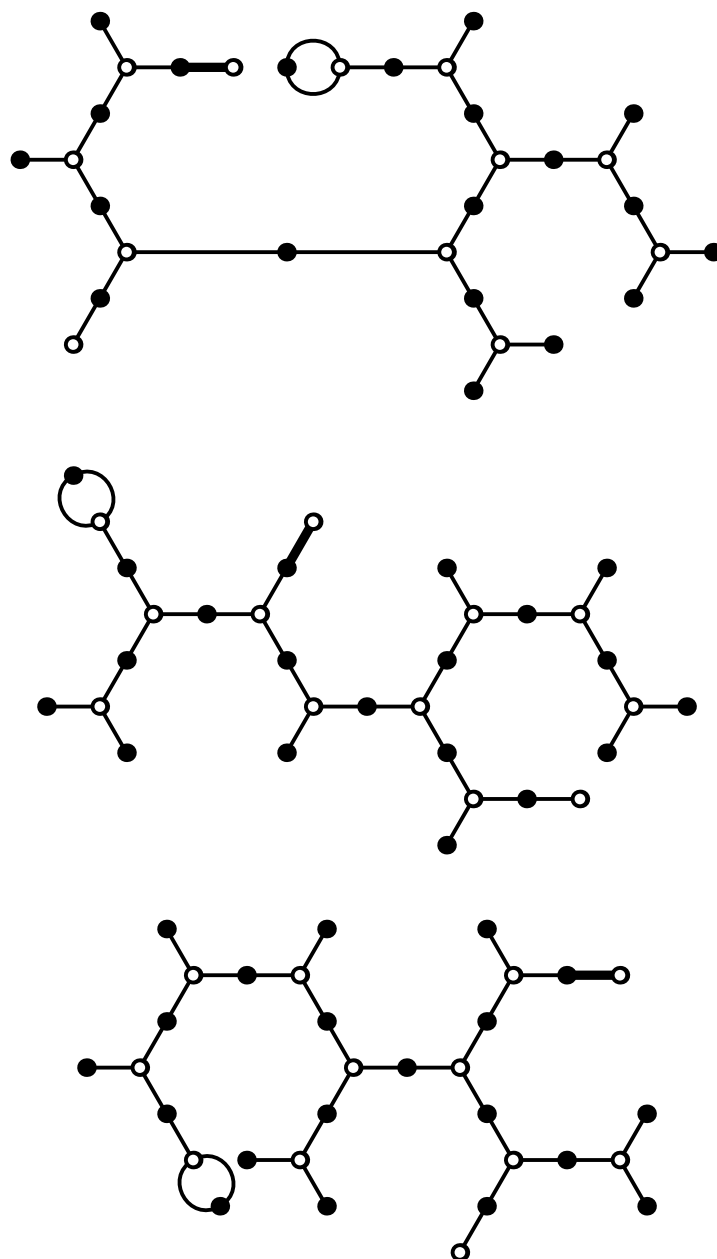


Рис. 41. Группа $ASL_5(2)$: орбита 32.1 размера 6

Литература

- [1] Адрианов Н. М. Классификация примитивных групп вращений рёбер плоских деревьев // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1069—1083.
- [2] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Суворов А. Д. Плоские деревья с исключительными примитивными группами вращений рёбер // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1085—1092.
- [3] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
- [4] Матиясевиц Ю. В. Вычисление обобщённых полиномов Чебышёва на компьютере // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 1996. — № 6. — С. 59—61.
- [5] Beukers F., Stewart C. L. Neighboring powers // *J. Number Theory.* — 2010. — Vol. 130. — P. 660—679.
- [6] Birch B. J., Chowla S., Hall M., Jr., Schinzel A. On the difference $x^3 - y^2$ // *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandling* (Trondheim). — 1965. — Vol. 38. — P. 65—69.
- [7] Butler G., McKay J. The transitive groups of degree up to eleven // *Commun. Algebra.* — 1983. — Vol. 11, no. 8. — P. 863—911.
- [8] Cassou-Noguès P., Couveignes J.-M. Factorisations explicites de $g(y) - h(z)$ // *Acta Arith.* — 1999. — Vol. 87, no. 4. — P. 291—317.
- [9] Frohardt D., Magaard K. Composition factors of monodromy groups // *Ann. Math.* — 2001. — Vol. 154. — P. 327—345.
- [10] Guralnick R., Thompson J. Finite groups of genus zero // *J. Algebra.* — 1990. — Vol. 131, no. 1. — P. 303—341.
- [11] Hulpke A. Constructing transitive permutation groups // *J. Symb. Comp.* — 2005. — Vol. 39, no. 1. — P. 1—30.
- [12] Jones G. A. Primitive permutation groups containing a cycle // *Bull. Austr. Math. Soc.* — [arXiv:1209.5169v1](https://arxiv.org/abs/1209.5169v1).
- [13] Jordan C. Théorèmes sur les groupes primitifs // *J. Math. Pures Appl.* — 1871. — Vol. 16. — P. 383—408.
- [14] Magaard K., Shpectorov S., Wang G. Generating sets of affine groups of low genus. — 2011. — [arXiv:1108.4833v1](https://arxiv.org/abs/1108.4833v1).
- [15] Müller P. Primitive monodromy groups of polynomials // *Recent Developments in the Inverse Galois Problem.* — Amer. Math. Soc., 1995. — (Contemp. Math.; Vol. 186). — P. 385—401.
- [16] Pakovich F., Zvonkin A. K. Minimum degree of the difference of two polynomials over \mathbb{Q} , and weighted plane trees // *Selecta Math., New Ser.* — 2014. — DOI 10.1007/s00029-014-0151-0. — P. 1—63. — [arXiv:1306.4141v1](https://arxiv.org/abs/1306.4141v1).
- [17] Pakovich F., Zvonkin A. K. Minimum degree of the difference of two polynomials over \mathbb{Q} . Pt. II: Davenport—Zannier pairs. — In preparation. — A preliminary version available at <http://www.labri.fr/perso/zvonkin/>.
- [18] Wang G. Genus zero systems for primitive groups of affine type: Ph. D. Thesis. — Univ. of Birmingham, 2011.
- [19] Zannier U. On Davenport’s bound for the degree of $f^3 - g^2$ and Riemann’s existence theorem // *Acta Arith.* — 1995. — Vol. 71, no. 2. — P. 107—137.