Дифференциальное уравнение на функцию накрытия шестиугольной решётки трёхвалентным деревом

К. В. ГОЛУБЕВ
Институт математики им. А. Эйнштейна,
Иерусалимский университет, Израиль
e-mail: kgolubev@gmail.com

УДК 512

Ключевые слова: детские рисунки, функция Белого, j-инвариант, $\wp$-функции Вейерштрасса.

Аннотация

В работе приведено дифференциальное уравнение на функцию накрытия шестиугольной решётки трёхвалентным деревом, сформулированное с помощью модулярного дискриминанта, рассматриваемого как функция на гиперболической плоскости.

Abstract

K. V. Golubev, A differential equation on the cover function of the hexagonal lattice by the trivalent tree, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 91—94.

We provide a differential equation on the cover function of the hexagonal lattice by the trivalent tree, formulated using the modular discriminant considered as a function on the hyperbolic plane.

Функцией Белого (см. [1,2]) называется непостоянное мероморфное отображение (не обязательно компактной) римановой поверхности X в сферу Римана $\beta\colon X \to \bar{\mathbb{C}}$, разветвлённое над не более чем тремя точками. В качестве точек ветвления, применив дробно-линейное преобразование, можно выбрать точки 0, 1 и ∞. Пара (X, β) называется *парой Белого*. Прообраз отрезка $[0;1]$ образует двудольный граф, вложенный в поверхность X. Пара $\bigl(X, \beta^{-1}([0;1])\bigr)$ составляет *детский рисунок*.

Пусть (X_1, β_1) и (X_2, β_2) — две пары Белого и $f\colon X_1 \to X_2$ — мероморфное отображение. Мы будем называть f накрытием рисунка (X_2, β_2) рисунком (X_1, β_1), если выполняется соотношение $\beta_1 = f \circ \beta_2$. В этом случае ограничение функции f на графы $\beta_1^{-1}([0;1])$ и $\beta_2^{-1}([0;1])$ корректно определено как морфизм графов и является накрытием графов.

Функция Клейна $J\colon \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{C}}$ определяется как

$$J = \frac{1}{1728} \cdot j,$$

где $j(\tau)$ — это j-инвариант эллиптической кривой, соответствующей решётке $\langle 1, \tau\rangle \subset \mathbb{C}$ (см. [4]). Критическими значениями функции Клейна являются точки 0, 1 и ∞, и следовательно, пара $(\mathcal{H}, J)$ является парой Белого. Соответствующий детский рисунок — это регулярное трёхвалентное дерево на бесконечном числе вершин на гиперболической плоскости, обозначим его $(\mathcal{H}, T_3)$.

Обозначим через $\wp\colon \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ функцию Вейерштрасса шестиугольной решётки $\langle 1, e^{2\pi i/6}\rangle \subset \mathbb{C}$ (см. [4]). Функция $4\wp^3$ разветвляется над точками 0, 1 и ∞, и поэтому $(\mathbb{C}, 4\wp^3)$ также является парой Белого. Соответствующий ей детский рисунок — это бесконечная шестиугольная решётка $\langle 1, e^{2\pi i/6}\rangle \subset \mathbb{C}$ на комплексной плоскости, т. е. $(\mathbb{C}, \langle 1, e^{2\pi i/6}\rangle)$.

В [3] было доказано существование функции накрытия рисунков

$$f\colon (\mathcal{H}, T_3) \to (\mathbb{C}, \langle 1, e^{2\pi i/6}\rangle).$$

Следующая теорема даёт дифференциальное уравнение на эту функцию.

Теорема. *Обозначим через $f\colon \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{C}}$ функцию, удовлетворяюшую равенству*

$$J(\tau) = 4\wp^3\big(f(\tau)\big).$$

Тогда

$$\big(f'(\tau)\big)^6 = \frac{\Delta(\tau)}{2^4 3^3 \pi^{12}},$$

где $\Delta(\tau)$ — модулярный дискриминант.

Доказательство. Для доказательства этого равенства нам потребуются следующие равенства (см., например, [5]):

$$J(\tau) = \frac{4\cdot(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\cdot\lambda^2(\lambda-1)^2},$$

где $\lambda = \lambda(\tau)$ — модулярная λ-функция.

Обозначим

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad (n) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^{nk}).$$

В этих обозначениях нуль-ϑ-функции Якоби записываются в виде

$$\vartheta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4}\frac{(4)^2}{(2)},$$

$$\vartheta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = \frac{(2)^5}{(1)^2(4)^2},$$

$$\vartheta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} = \frac{(1)^2}{(2)}.$$

Следующие равенства связывают нуль-ϑ-функции Якоби и функцию λ. Во-первых,

$$\lambda = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = 1 - \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4},$$

во-вторых,

$$\vartheta_2^4(q) = \frac{\lambda'}{\lambda - 1}, \quad \vartheta_3^4(q) = \frac{\lambda'}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad \vartheta_4^4(q) = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

В этих же обозначениях η-функция Дедекинда записывается в виде

$$\eta(\tau) = q^{1/12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) = q^{1/12} \cdot (2).$$

Теперь вернёмся к исходному равенству

$$J(\tau) = 4\wp^3\big(f(\tau)\big)$$

и продифференцируем его:

$$J'(\tau) = 12\wp^2\big(f(\tau)\big)\wp'\big(f(\tau)\big)f'(\tau).$$

Возведём полученное равенство в шестую степень:

$$(J')^6(\tau) = 12^6 \wp^{12}\big(f(\tau)\big)\wp'^6\big(f(\tau)\big)(f')^6(\tau). \tag{1}$$

Воспользуемся равенством

$$(\wp')^2\big(f(\tau)\big) = 4\wp^3\big(f(\tau)\big) - 1 = J(\tau) - 1,$$

связывающим $\wp$-функцию шестиугольной решётки с её производной, и исходным равенством, подставив их в (1):

$$(J')^6(\tau) = \frac{12^6}{4^4} J^4(\tau)(J(\tau) - 1)^3 (f')^6(\tau).$$

Последнее равенство равносильно следующему:

$$\frac{1}{4^2 3^6} \frac{(J')^6(\tau)}{J^4(\tau)(J(\tau) - 1)^3} = (f')^6(\tau). \tag{2}$$

Прямой подсчёт показывает, что левая часть предыдущего равенства равна

$$\frac{1}{2^4 3^6} \cdot \frac{(J')^6(\tau)}{J^4(\tau)(J(\tau) - 1)^3} = \frac{1}{2^4 3^6} \cdot 2^4 3^3 \, \frac{(\lambda')^6}{\lambda^4(\lambda - 1)^4} = \frac{1}{3^3} \cdot (\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4)^8.$$

Рассмотрим теперь выражение $\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$. Согласно формулам выше его можно записать как

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 = 2q^{1/4} \frac{(4)^2}{(2)} \cdot \frac{(2)^5}{(1)^2(4)^2} \cdot \frac{(1)^2}{(2)} = 2q^{1/4} \cdot (2)^3.$$

Возвращаясь к интересующему нас равенству (2), получаем

$$f'(\tau)^6 = \frac{1}{3^3} \cdot (2q^{1/4} \cdot (2)^3)^8 = \frac{2^8}{3^3} \cdot \left(q^{1/12} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) \right)^{24} = \frac{2^8}{3^3} \cdot \big(\eta(\tau)\big)^{24}.$$

Чтобы завершить доказательство, вспомним, что модулярный дискриминант связан с η-функцией Дедекинда равенством

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \big(\eta(\tau)\big)^{24}. \qquad \square$$

Литература

[1] Белый Г. В. О расширениях Галуа максимального кругового поля // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 2. — С. 267—276.

[2] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.

[3] Batchelor M., Brownlee P., Woods W. An equivariant covering map from the upper half plane to the complex plane minus a lattice. — arXiv:1203.5261.

[4] Knapp A. W. Elliptic Curves. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.

[5] Whittaker E. T., Watson G. N. A Course in Modern Analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.