Гипергруппы порядка 3 над группой, возникающие из диэдральной группы порядка 18

С. Г. ДАЛАЛЯН
Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: dalalyan@ysu.am

П. ЗОЛЬФАГАРИ
Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: parvaneh_zolfagari@yahoo.com

УДК 512.548+512.538

Ключевые слова: унитарная гипергруппа над группой, полная приводимость, диэдральная группа.

Аннотация

С точностью до изоморфизма описываются все унитарные гипергруппы порядка 3 над группой, которые возникают из диэдральной группы D_9.

Abstract

S. H. Dalalyan, P. Zolfaghari, The hypergroups of order 3 *over a group arising from the dihedral group of order* 18, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 95—110.

We describe up to isomorphism all unitary hypergroups of order 3 over a group that arise from the dihedral group D_9.

1. Введение

Понятие гипергруппы над группой было введено в [1, 2]. В [6] излагаются основы теории гипергрупп над группой, и это понятие используется, чтобы получить широкое обобщение теоремы Шрайера о расширениях групп [7]. Стандартный способ построения гипергруппы над группой заключается в том, что трансверсаль к подгруппе данной группы наделяется некой структурой, индуцированной бинарной операцией этой группы, аналогично тому, как это делается в случае фактор-группы по нормальной подгруппе. Используемая здесь конструкция универсальна: любая гипергруппа над группой изоморфна гипергруппе над группой, получаемой таким способом. В [3] была введена операция приведения для гипергруппы над группой и определено понятие вполне приведённой гипергруппы над группой. С понятием гипергруппы над группой тесно связано обобщение понятий ряда известных произведений (под)групп, таких, как

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 95—110.

прямое произведение, полупрямое произведение, общее произведение в смысле Б. Неймана, косое произведение Редеи, факторизации групп, произведение подмножеств группы в смысле Хайоша (см. [4, Д13]).

По сути, правая гипергруппа над группой — это правая квазигруппа с левым нейтральным элементом, на которую (справа) действует заданная группа и которая снабжена ещё двумя дополнительными структурами (точное определение дано в разделе 2). Отметим, что понятие гипергруппы над группой объединяет и обобщает понятия группы, поля, линейного пространства. Как отмечено выше, с помощью теории гипергрупп над группой получено широкое обобщение теоремы Шрайера о расширениях групп. Нам представляется, что эта теория может быть применена к задаче описания конечных групп, обратной задаче теории Галуа, к построению некоммутативной теории когомологий групп.

Все гипергруппы порядка 2 над группой сводятся к группе. Вполне приведённые гипергруппы порядка 3 над гипергруппой могут возникнуть только из симметрической группы S_3 или из некоммутативных групп порядка 18 [8]. Все классы изоморфных унитарных гипергрупп порядка 3 над группой, возникающие из симметрической группы S_3, описаны в [9]. Все они определены над циклической группой C_2 порядка 2. С точностью до изоморфизма существуют три такие гипергруппы над группой, одна из них сводится к группе, две другие — нет.

Хорошо известно [5], что с точностью до изоморфизма существуют только три некоммутативные группы порядка 18:

1) прямое произведение симметрической группы S_3 и циклической группы C_3,
2) диэдральная группа D_9,
3) группа, являющаяся полупрямым произведением $C_3 \times C_3$ с C_2.

В [8] доказывается, что все гипергруппы порядка 3, возникающие из группы $S_3 \times C_3$, приводимы и сводятся к одной из гипергрупп порядка 3, возникающих из S_3.

В данной статье мы вычисляем унитарные гипергруппы порядка 3 над группой, возникающие из диэдральной группы D_9.

Теорема 1.1. *Все унитарные гипергруппы порядка* 3*, возникающие из диэдральной группы* D_9*, определены над симметрической группой* S_3*, причём с точностью до изоморфизма существуют только три такие гипергруппы.*

К этому результату можно добавить, что упомянутые в теореме 1.1 гипергруппы редуцируются к трём неизоморфным унитарным неприводимым гипергруппам порядка 3 над группой, которые возникают из симметрической группы S_3.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе собраны результаты о гипергруппах над группой, использующиеся далее. В разделе 3 описывается диэдральная группа D_9. В разделе 4 вычисляется группа автоморфизмов этой группы. В разделе 5 описываются классы эквивалентности трансверсалей к подгруппам порядка 6 группы D_9. В разделе 6 доказывается основная теорема 1.1.

2. Гипергруппы над группой

Пусть H — произвольная мультипликативная группа с нейтральным элементом ε, M — некоторое множество. Будем обозначать элементы группы H строчными греческими буквами, а элементы множества M — строчными латинскими буквами аналогично тому, как это часто делается в случае линейного пространства M над полем H.

Рассмотрим отображения

$$\Phi\colon M \times H \to M, \quad \Psi\colon M \times H \to H, \quad \Xi\colon M \times M \to M, \quad \Lambda\colon M \times M \to H.$$

Введём обозначения

$$\Phi(a,\alpha) = a^{\alpha}, \quad \Psi(a,\alpha) = {}^{a}\alpha, \quad \Xi(a,b) = [a,b], \quad \Lambda(a,b) = (a,b).$$

Определение 2.1 [6]. Пара (M,H) называется *правой гипергруппой над группой H с системой структурных отображений* $\Omega = (\Phi,\Psi,\Xi,\Lambda)$, если выполняются следующие условия.

P1. Структурное отображение Ξ определяет на M структуру правой квазигруппы с левым нейтральным элементом o.

P2. Структурное отображение Φ является правым действием группы H на множество M.

P3. Структурное отображение Ψ переводит подмножество $\{o\} \times H$ на H.

P4. Система структурных отображений Ω подчиняется следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A1}) \quad {}^{a}(\alpha \cdot \beta) = {}^{a}\alpha \cdot {}^{a^{\alpha}}\beta,\\
&(\mathrm{A2}) \quad [a,b]^{\alpha} = \bigl[a^{({}^{b}\alpha)}, b^{\alpha}\bigr],\\
&(\mathrm{A3}) \quad (a,b)^{[a,b]} \cdot \alpha = {}^{a}({}^{b}\alpha) \cdot \bigl(a^{({}^{b}\alpha)}, b^{\alpha}\bigr),\\
&(\mathrm{A4}) \quad \bigl[[a,b],c\bigr] = \bigl[a^{(b,c)}, [b,c]\bigr],\\
&(\mathrm{A5}) \quad (a,b) \cdot ([a,b],c) = {}^{a}(b,c) \cdot \bigl(a^{(b,c)}, [b,c]\bigr).
\end{aligned}$$

Такая правая гипергруппа над группой обозначается M_H.

Напомним, что

1) множество M вместе с бинарной операцией $\Xi(a,b) = [a,b]$ называется *правой квазигруппой*, если для любых элементов $a,b \in M$ существует единственный элемент $x \in M$, такой что $[x,a] = b$;
2) элемент $o \in M$ называется *левым нейтральным элементом* правой квазигруппы (M,Ξ), если $[o,a] = a$ для любого элемента $a \in M$;

3) Φ является *правым действием H на множество M*, если имеют место соотношения
$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}, \quad a^{\varepsilon} = a$$
для всех $a \in M$, $\alpha, \beta \in H$.

Понятие гипергруппы над группой и соответствующая теория имеют две двойственные друг другу разновидности: левую и правую. В настоящей статье мы рассматриваем только правые гипергруппы над группой и часто опускаем прилагательное «правая».

Существует стандартный способ (см. [6]) построения гипергруппы над группой, основанный на совпадающих понятиях дополнительного множества к подгруппе группы, трансверсали к подгруппе группы и образа сечения канонической сюръекции, ассоциированной с факторизацией группы по её подгруппе. Пусть, как и выше, G — мультипликативная группа и H — её подгруппа.

Подмножество M группы G называется (*правым*) *дополнительным множеством* к подгруппе H, если любой элемент $x \in G$ единственным образом представляется в виде
$$x = \alpha\cdot a, \quad \alpha \in H, \quad a \in M.$$
В этом случае мы говорим, что группа G является *точным произведением* подгруппы H и подмножества M и пишем $G = H \odot M$.

Подмножество M называется (*правой*) *трансверсалью* к подгруппе H группы G, если M с каждым смежным классом $H\cdot a = \{x\cdot a,\ x \in H\}$ пересекается в точности по одному элементу.

Сечением (правой) канонической сюръекции
$$\psi\colon G \to H\setminus G = \{H\cdot a,\ a \in G\}, \quad a \mapsto H\cdot a$$
называется левое обратное отображение $\sigma\colon H\setminus G \to G$ к ψ.

Следующие утверждения эквивалентны [7]:

1) M является дополнительным множеством к подгруппе H группы G;
2) M является трансверсалью к подгруппе H группы G;
3) M совпадает с образом $\operatorname{im}\sigma$ сечения σ канонической сюръекции ψ.

Теорема 2.2 [6]. *Пусть G — произвольная группа, H — её подгруппа и M — дополнительное множество к H, так что $G = H \odot M$. Определим систему отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ равенствами*
$$a\cdot\alpha = {}^{a}\alpha\cdot a^{\alpha}, \quad a\cdot b = (a,b)\cdot[a,b],$$
где a, b, a^{α}, $[a,b]$ — элементы из M, а α, ${}^{a}\alpha$, (a,b) — элементы из H. Такая система отображений Ω определяет гипергруппу M_H.

Мы говорим, что эта гипергруппа *ассоциирована с тройкой* (G, H, M), а соответствующую конструкцию называем *стандартной конструкцией* гипергруппы над группой.

Определение 2.3 [2, 6]. Пусть M_H и $M'_{H'}$ — две гипергруппы над группой с системами структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ и $\Omega' = (\Phi', \Psi', \Xi', \Lambda')$ соответственно. *Морфизм* из M_H в $M'_{H'}$ — это пара $f = (f_0, f_1)$, состоящая из гомоморфизма групп

$$f_0 \colon H \to H'$$

и отображения множеств

$$f_1 \colon M \to M',$$

связанных равенствами

$$\begin{aligned} \Phi \cdot f_1 &= (f_1 \times f_0) \cdot \Phi', & \Psi \cdot f_0 &= (f_1 \times f_0) \cdot \Psi', \\ \Xi \cdot f_1 &= (f_1 \times f_1) \cdot \Xi', & \Lambda \cdot f_0 &= (f_1 \times f_1) \cdot \Lambda'. \end{aligned}$$

Классы всех гипергрупп над группами и их морфизмов образуют категорию. Поэтому в отношении гипергрупп над группой мы можем использовать всю терминологию и все результаты общей теории категорий (в частности, понятия изоморфизма, эпиморфизма и т. д).

Следующую теорему мы называем *свойством универсальности стандартной конструкции*.

Теорема 2.4 [6]. *Пусть M_H — произвольная гипергруппа над группой. Существует единственная (с точностью до изоморфизма) тройка (G', H', M'), такая что ассоциированная с ней гипергруппа над группой $M'_{H'}$ изоморфна гипергруппе над группой M_H.*

Группу G' можно построить следующим образом. Рассмотрим декартово произведение $G' = H \times M$, его элементы удобно обозначать как двухбуквенные слова αa где $\alpha \in H$, $a \in M$. На этом множестве определим бинарную операцию по правилу

$$\alpha a \cdot \beta b = \bigl(\alpha \cdot {}^{a}\beta \cdot (a^{\beta}, b)\bigr)[a^{\beta}, b].$$

Множество G' вместе с этой бинарной операцией образует группу, $H' = H \times \{o\}$ является её подгруппой, изоморфной H, а подмножество $M' = \{\varepsilon\} \times M$ есть дополнительное множество к подгруппе H', биективное множеству M. Ассоциированная с тройкой (G', H', M') гипергруппа $M'_{H'}$ изоморфна исходной гипергруппе M_H.

Построенная группа G' называется (*внешним*) *точным произведением*, ассоциированным с гипергруппой M_H, и обозначается $H \odot M$. Далее мы отождествляем H с H' (отождествляя α с $(\alpha \cdot \theta)o$, где $\theta = (o, o)^{-1}$) и M с M' (отождествляя a с εa) и переобозначаем G' через G.

Определение 2.5. Пусть M_H — гипергруппа над группой и $G = H \odot M$ — ассоциированное с ней точное произведение. Мы говорим, что гипергруппа M_H *унитарная*, если левый нейтральный элемент o правой квазигруппы (M, Ξ) совпадает (после соответствующего отождествления) с нейтральным элементом ε подгруппы H и группы G (т. е. если $\theta = (o, o)^{-1} = \varepsilon$).

Предложение 2.6. *Существуют две стандартные конструкции, позволяющие ассоциировать с каждой гипергруппой над группой единственную (с точностью до изоморфизма) унитарную гипергруппу над группой и, обратно, начиная с произвольной унитарной гипергруппы над группой, восстановить все (с точностью до изоморфизма) гипергруппы над группой, которые ассоциируются с ней.*

Это предложение следует из результатов [6, § 4] и позволяет при описании гипергрупп над группой ограничиваться только унитарными гипергруппами над группой.

Любое действие группы на множество, следовательно структурное отображение Φ гипергруппы M_H, индуцирует представление

$$\underline{\Phi}\colon H \to \mathrm{S}_M, \quad \alpha \to \Phi_\alpha, \quad \Phi_\alpha(a) = a^\alpha,$$

где S_M — группа перестановок элементов множества M.

Определение 2.7. Действие группы на множество называется *эффективным*, если ядро соответствующего представления тривиальное. Гипергруппа M_H называется *вполне приведённой*, если действие Φ эффективно, т. е. ядро $K = \operatorname{Ker}\underline{\Phi}$ тривиально.

Теорема 2.8 [3]. *Пусть M_H — произвольная гипергруппа, $K = \operatorname{Ker}\underline{\Phi}$ и $\underline{H} = H/K$. Тогда существуют единственная (с точностью до изоморфизма) вполне приведённая гипергруппа $M_{\underline{H}}$ и эпиморфизм гипергрупп*

$$\psi = (\psi_0, \psi_1)\colon M_H \to M_{\underline{H}}$$

с каноническим фактор-эпиморфизмом

$$\psi_0\colon H \to \underline{H}$$

и с тождественным отображением

$$\psi_1 = 1_M.$$

Отметим, что вполне приведённая гипергруппа, соответствующая унитарной гипергруппе, сама унитарна.

Наша цель — описать все гипергруппы порядка 3 над группой, возникающие из диэдральной группы D_9. Имеет смысл попытаться уменьшить соответствующие вычисления. Для этого есть следующие возможности.

1. Рассматривать по одному представителю из каждого класса изоморфных гипергрупп над группой.
2. Рассматривать только унитарные гипергруппы над группой, имея в виду предложение 2.6.
3. Рассматривать только вполне приведённые гипергруппы над группой.

3. Диэдральная группа D_9

Мы используем следующие обозначения: I_n — множество первых n неотрицательных целых чисел; I_n^* — подмножество множества I_n, состоящее из взаимно простых с n чисел; $r(y/x)$ — остаток от деления целого числа y на целое число x; $\sigma(x)$ — функция чётности, равная 1, если n — чётное число, и -1, если n нечётно.

Диэдральная группа D_9 порядка 18 задаётся двумя образующими a и b и определяющими соотношениями

$$a^9 = b^2 = e, \quad ba = a^8 b.$$

Элементы группы D_9 однозначно записываются в виде

$$x = a^k b^l, \quad k \in I_9, \quad l \in I_2.$$

Произведение элементов $x = a^k b^l$ и $y = a^m b^n$ задаётся по формуле

$$x \cdot y = a^{k+\sigma(l)m} b^{l+n} = a^{r((k+\sigma(l)m)/9)} b^{r((l+n)/2)}.$$

Группа D_9 имеет шесть элементов порядка 9: a^i, $i \in I_9^*$, два элемента порядка 3: a^3, a^6 и девять элементов порядка 2: $a^j b$, $j \in I_9$.

Диэдральная группа D_9 допускает следующее геометрическое описание (рис. 1). Рассмотрим правильный многоугольник p с девятью вершинами

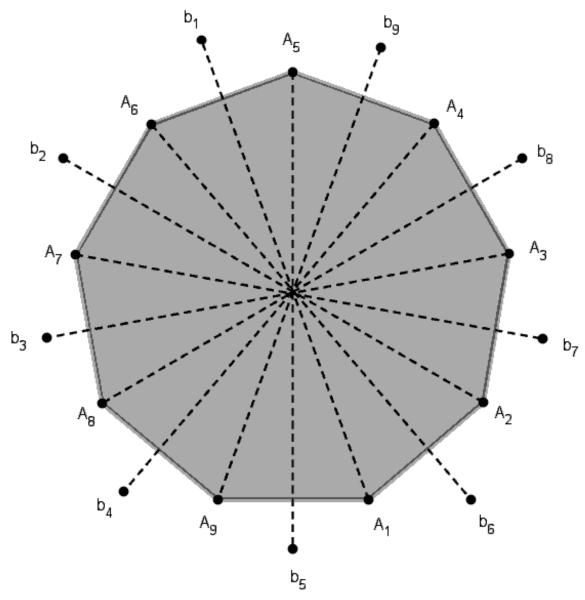

Рис. 1

$A_1, \ldots, A_9$ и его группу симметрий. Эта группа содержит элемент a девятого порядка, представляющий собой поворот вокруг центра O многоугольника p на угол $2\pi/9$, и девять элементов b_i второго порядка, являющиеся симметриями относительно осей L_i, связывающих вершину A_i с центром O. Нетрудно проверить, что $a \cdot b \cdot a \cdot b = e$ при любом $b = b_i$. Таким образом, группа симметрий многоугольника p является моделью диэдральной группы D_9.

Диэдральная группа D_9 имеет представление в симметрической группе S_9. Используя геометрическую модель группы D_9, получаем, что вращение a определяет циклическую перестановку $(A_1, A_2, \ldots, A_9)$ вершин многоугольника p. Поэтому можно поставить в соответствие вращению a циклическую подстановку $(1\,2\,\ldots\,9)$. Аналогично отражение $b = b_1$ отображает A_i в A_{11-i}, $i = 2, 3, \ldots, 9$ и не переставляет вершину A_1. Следовательно, отражению b можно поставить в соответствие подстановку $(2\,9)\,(3\,8)\,(4\,7)\,(5\,6)$. Определяя образы остальных элементов по гомоморфности, получим представление группы D_9 в S_9.

Построим решётку подгрупп группы D_9. Согласно описанию элементов этой группы она имеет (кроме тривиальной и тотальной подгрупп) следующие подгруппы:

1) девять подгрупп R_i порядка 2, содержащих элементы $a^i b$ $(i \in I_9)$;
2) одну подгруппу R_9 порядка 3, содержащую два элемента a^3 и a^6 порядка 3;
3) одну подгруппу R_{10} порядка 9, содержащую элементы a^i, $i \in I_9$.

Все эти подгруппы циклические.

Для данной статьи существенны подгруппы порядка 6.

Предложение 3.1. *Диэдральная группа* D_9 *имеет в точности три подгруппы порядка* 6:

$$H_1 = \langle a^3, b \rangle = \{e, a^3, a^6, b, a^3 b, a^6 b\},$$
$$H_2 = \langle a^3, ab \rangle = \{e, a^3, a^6, ab, a^4 b, a^7 b\};$$
$$H_3 = \langle a^3, a^2 b \rangle = \{e, a^3, a^6, a^2 b, a^5 b, a^8 b\}.$$

Эти подгруппы изоморфны симметрической группе S_3 *и являются попарно сопряжёнными.*

Доказательство. Как известно, с точностью до изоморфизма существуют только две группы шестого порядка: циклическая группа C_6 и симметрическая группа S_3. Согласно описанию порядков элементов диэдральная группа D_9 не имеет элементов порядка 6, следовательно, не имеет подгрупп, изоморфных циклической группе C_6. Если D_9 имеет подгруппу H, изоморфную S_3, то H должна содержать два элемента порядка 3, т. е. a^3 и a^6. Для трёх элементов порядка 2 подгруппы H есть девять возможностей. Прямое вычисление показывает, что имеются три такие группы, а именно H_1, H_2 и H_3, они являются попарно сопряжёнными:

$$H_2 = a^{-1} \cdot H_1 \cdot a, \quad H_3 = a^{-2} \cdot H_1 \cdot a^2. \qquad \square$$

Итак, диэдральная группа D_9 имеет решётку подгрупп, изображённую на рис. 2.

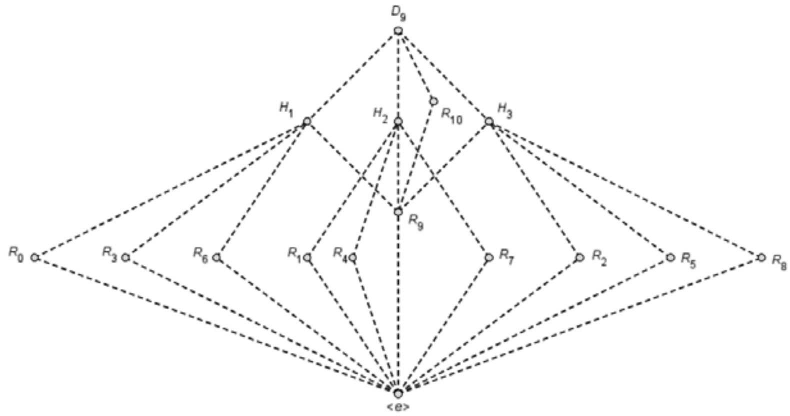

Рис. 2

Циклическая подгруппа $\langle a\rangle$ индекса 2 нормальная, и мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \to C_9 \to \mathrm{D}_9 \to C_2 \to 0.$$

Здесь эпиморфизм $\mathrm{D}_9 \to C_2$ имеет девять сечений, которые переводят нетривиальный элемент группы C_2 в один из элементов порядка 2 группы D_9. Поэтому D_9 — точное произведение циклической подгруппы $\langle a\rangle$ и произвольной подгруппы порядка 2 $\langle a^j b\rangle$, $j \in I_9$. Эти девять точных произведений представляют полупрямое произведение группы C_9 с группой C_2. Таким образом, диэдральная группа D_9 изоморфна полупрямому произведению C_9 и C_2.

4. Группа автоморфизмов диэдральной группы D_9

Обозначим группу автоморфизмов диэдральной группы D_9 через A. Предположим, что φ — элемент A. Так как изоморфизм сохраняет порядки элементов, порядки элементов $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ должны равняться соответственно 9 и 2. Следовательно, мы имеем шесть возможностей для $\varphi(a)$ и девять возможностей для $\varphi(b)$:

$$\varphi(a) = a^i, \quad i \in I_9^*, \quad \varphi(b) = a^j b, \quad j \in I_9.$$

Поэтому $|A| \leqslant 54$.

Если φ — гомоморфизм, то для любого элемента группы D_9

$$x = a^k b^l = a^{k(x)} b^{l(x)}, \quad k \in I_9, \quad l \in I_2,$$

будем иметь

$$\varphi(x) = a^{ik+jl}b^l = a^{r((ik+jl)/9)}b^l.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_{ij}\colon \mathrm{D}_9 \to \mathrm{D}_9, \quad \varphi_{ij}(x) = \varphi_{ij}(a^k b^l) = a^{ik+jl}b^l = a^{r((ik+jl)/9)}b^l,$$

где $i \in I_9^*$ и $j \in I_9$.

Предложение 4.1. *Все отображения φ_{ij} являются автоморфизмами.*

Доказательство. Во-первых, проверим гомоморфность:

$$\varphi_{ij}(x \cdot y) = \varphi_{ij}(x) \cdot \varphi_{ij}(y)$$

при произвольных $x = a^k b^l$ и $y = a^m b^n$, $k, m \in I_9$, $l, n \in I_2$.

С одной стороны,

$$\varphi_{ij}(x \cdot y) = \varphi_{ij}(a^k b^l \cdot a^m b^n) = \\ = \varphi_{ij}\big(a^{r((k+\sigma(l)m)/9)} b^{r((l+n)/2)}\big) = a^{i(k+\sigma(l)m)+j(r((l+n)/2))} b^{l+n}.$$

С другой стороны,

$$\varphi_{ij}(x) \cdot \varphi_{ij}(y) = \varphi_{ij}(a^k b^l) \cdot \varphi_{ij}(a^m b^n) = \\ = a^{ik+jl}b^l \cdot a^{im+jn}b^n = a^{(ik+jl)+\sigma(l)(im+jn)}b^{l+n}.$$

Поэтому соотношение гомоморфности редуцируется к виду

$$\left(i(k+\sigma(l)m) + j\left(r\left(\frac{l+n}{2}\right)\right)\right) \equiv \big((ik+jl) + \sigma(l)(im+jn)\big) \pmod 9$$

и, следовательно, к соотношению

$$j\left(r\left(\frac{l+n}{2}\right)\right) \equiv j(l + \sigma(l)n) \pmod{9}.$$

Чтобы проверить это соотношение, достаточно проверить его отдельно в четырёх случаях $(l, n) \in I_2 \times I_2$.

Для того чтобы проверить биективность φ_{ij}, достаточно показать, что ядро $\operatorname{Ker}\varphi_{ij}$ тривиально. Действительно, если $x = a^k b^l$, $k \in I_9$, $I \in I_2$, и

$$\varphi_{ij}(x) = a^{ik+jl}b^l = e,$$

то $ik + jl \equiv 0 \pmod 9$, $l = 0$ и, следовательно, $k = 0$. Итак, $x = e$. □

Лемма 4.2. *Автоморфизмы φ_{ij} и $\varphi_{i'j'}$, где $i, i' \in I_9^*$ и $j, j' \in I_9$, совпадают тогда и только тогда, когда $i = i'$ и $j = j'$.*

Доказательство. Очевидно, только прямое утверждение требует доказательства. Применяя равенство $\varphi_{i,j} = \varphi_{i',j'}$ к элементу a, получаем, что $a^i = a^{i'}$. Так как $i, i' \in I_9^*$, заключаем, что $i = i'$. Аналогично, применяя $\varphi_{i,j} = \varphi_{i',j'}$ к элементу b, получаем, что $j = j'$. □

Следствие 4.3. *Порядок группы автоморфизмов A равен 54. Любой элемент этой группы однозначно представляется в виде φ_{ij}, $i \in I_9^*$, $j \in I_9$.*

Предложение 4.4. *Операция умножения (композиции) в группе A задаётся формулой*

$$\varphi_{ij} \cdot \varphi_{kl} = \varphi_{mn}, \quad m \equiv ik \pmod 9, \quad n \equiv jk + l \pmod 9.$$

Доказательство. Имеем

$$(\varphi_{ij} \cdot \varphi_{kl})(a) = \varphi_{kl}\big(\varphi_{ij}(a)\big) = \varphi_{kl}(a^i) = (\varphi_{kl}(a))^i = a^{ik},$$
$$(\varphi_{ij} \cdot \varphi_{kl})(b) = \varphi_{kl}\big(\varphi_{ij}(b)\big) = \varphi_{kl}(a^j b) = (\varphi_{kl}(a))^j \cdot \varphi_{kl}(b) = a^{jk} \cdot a^l \cdot b = a^{jk+l}b.$$

Так как $\varphi_{mn}(a) = a^m$ и $\varphi_{mn}(b) = a^n b$, предложение доказано. □

Подчеркнём, что ввиду того, что $i, k \in I_9^*$, имеем $ik \pmod 9$ также принадлежит I_9^*, но $jk + l \pmod 9$ является, вообще говоря, элементом I_9.

Пусть $\alpha = \varphi_{2,0}$ и $\beta = \varphi_{1,1}$. Это означает, что $\alpha(a) = a^2$, $\alpha(b) = b$, следовательно, $\alpha(a^k \cdot b^l) = a^{2k} \cdot b^l$; $\beta(a) = a$, $\beta(b) = a \cdot b$, следовательно, $\beta(a^k \cdot b^l) = a^{k+l} \cdot b^l$.

Лемма 4.5. *Порядки элементов α и β группы A равны соответственно 6 и 9.*

Доказательство. По индукции имеем

$$\alpha^k(a) = a^{2^k}, \quad \alpha^k(b) = b,$$
$$\beta^k(a) = a, \quad \beta^k(b) = a^k b.$$

Предположим, что $\alpha^k = 1$. Тогда $\alpha^k(a) = a^{2^k} = a$, следовательно, $2^k \equiv 1 \pmod 9$. Значит, $k = 6s$ для некоторого целого s. С другой стороны, так как α^6 — гомоморфизм, для любого элемента $x = a^m \cdot b^n$ из D_9 мы имеем

$$\alpha^6(x) = \alpha^6(a^m \cdot b^n) = \alpha^6(a^m) \cdot \alpha^6(b^n) = \big(\alpha^6(a)\big)^m \cdot \big(\alpha^6(b)\big)^n = a^m \cdot b^n = x.$$

Значит, порядок α равен 6.

Аналогично предположим, что $\beta^k = 1$. Тогда $\beta^k(b) = a^k \cdot b = b$, следовательно, $k = 9s$ для некоторого целого числа s. С другой стороны,

$$\beta^9(x) = \beta^9(a^m \cdot b^n) = \beta^9(a^m) \cdot \beta^9(b^n) = \big(\beta^9(a)\big)^m \cdot \big(\beta^9(b)\big)^n = a^m \cdot b^n = x.$$

Поэтому порядок элемента β равен 9. □

Предложение 4.6. *Элементы α и β порождают группу A. Более точно, для любых $i \in I_9^*$ и $j \in I_9$ существуют целые числа $u \in I_6$ и $v \in I_9$, такие что $\varphi_{i,j} = \alpha^u \cdot \beta^v$, а именно можно взять в качестве u наименьшее неотрицательное целое число, такое что $i \equiv 2^u \pmod 9$ и положить $v = j$.*

Доказательство. Согласно следствию 4.3 для любых целых чисел u и v существуют однозначно определяемые $i \in I_9^*$ и $j \in I_9$, такие что $\varphi_{ij} = \alpha^u \cdot \beta^v$. В таком случае, с одной стороны,

$$(\alpha^u \cdot \beta^v)(a) = \beta^v\big(\alpha^u(a)\big) = \beta^v(a^{2^u}) = \big(\beta^v(a)\big)^{2^u} = a^{2^u},$$
$$(\alpha^u \cdot \beta^v)(b) = \beta^v\big(\alpha^u(b)\big) = \beta^v(b) = a^v \cdot b.$$

С другой стороны,

$$\varphi_{i,j}(a) = a^i, \quad \varphi_{i,j}(b) = a^j \cdot b.$$

Следовательно, можно взять $i \equiv 2^u \pmod 9$ и $j = v$. Отметим, что существует биективное отображение $I_6 \to I_9^*$, $u \to i = 2^u$. Это замечание завершает доказательство предложения 4.6. □

Следствие 4.7. *Группа автоморфизмов A является точным произведением циклических подгрупп $\langle\alpha\rangle$ и $\langle\beta\rangle$, порождённых элементами α и β.*

5. Классы эквивалентности трансверсалей к подгруппам порядка 6 группы D_9

Пусть G — группа, H и H' — её подгруппы, M и M' — трансверсали к H и H' соответственно. Мы говорим, что трансверсали M и M' *эквивалентны*, если существует такой автоморфизм φ группы G, что $\varphi(H) = H'$ и $\varphi(M) = M'$. Очевидно, это действительно отношение эквивалентности.

Диэдральная группа D_9 имеет в точности три подгруппы порядка 6 (H_1, H_2, H_3), причём они являются попарно сопряжёнными. Следовательно, система трансверсалей к одной из этих подгрупп (например, H_1) эквивалентна системе трансверсалей к любой другой из этих подгрупп. Положим

$$H = H_1 = \langle a^3, b\rangle = \{e, a^3, a^6, b, a^3b, a^6b\}.$$

Один из смежных классов (правого) фактор-множества группы D_9 относительно H совпадает с H, другие два смежных класса следующие:

$$\{a, a^4, a^7, a^2b, a^5b, a^8b\}, \quad \{a^2, a^5, a^8, ab, a^4b, a^7b\}.$$

Три первых элемента этих двух смежных классов имеют порядок 9, а три последних элемента — порядок 2.

Подгруппа H имеет 36 унитарных трансверсалей:

1) 9 трансверсалей содержат два элемента порядка 2;
2) 9 трансверсалей содержат два элемента порядка 9;
3) 18 трансверсалей содержат по одному элементу порядков 2 и 9.

Очевидно, две трансверсали M и M' могут быть эквивалентны, только если существует биекция между M и M', такая что соответствующие элементы имеют одинаковый порядок.

Лемма 5.1. *Множество B всех автоморфизмов φ группы D_9, таких что $\varphi(H) \subset H$, является подгруппой группы A порядка 18, а именно*

$$B = \{\varphi_{i,j},\ i \in I_9^*,\ j = 0, 3, 6\}.$$

Доказательство. Для любых элементов $\varphi, \psi \in B$, очевидно, $\varphi \cdot \psi, \varphi^{-1} \in B$, следовательно, B — подгруппа группы A. Пусть φ — некоторый элемент группы B. Тогда согласно следствию 4.3 $\varphi = \varphi_{i,j}$ при некоторых $i \in I_9^*$, $j \in I_9$. Здесь мы имеем следующие возможности:

$$\varphi_{i,j}(a^3) = a^{3i} = a^3 \text{ или } a^6, \quad \varphi_{i,j}(b) = a^j b = b, \ a^3 b \text{ или } a^6 b.$$

Поэтому получаем, что i может быть произвольным элементом множества I_9^*, но $j = 0, 3, 6$. □

Предложение 5.2.

1. *Любые две унитарные трансверсали к подгруппе H группы D_9, содержащие два элемента порядка 2, эквивалентны.*
2. *Существует два класса эквивалентных унитарных трансверсалей к подгруппе H группы D_9, содержащих два элемента порядка 9:*
   а) $\{e, a, a^2\}$, $\{e, a^2, a^4\}$, $\{e, a^4, a^8\}$, $\{e, a^5, a\}$, $\{e, a^7, a^5\}$, $\{e, a^8, a^7\}$;
   б) $\{e, a, a^8\}$, $\{e, a^4, a^5\}$, $\{e, a^7, a^2\}$.
3. *Любые две унитарные трансверсали к подгруппе H группы D_9, содержащие по одному элементу порядков 2 и 9, эквивалентны.*

Доказательство. 1. Имеем, что

$$\varphi_{i,j}(\{e, ab, a^2 b\}) = \{e, a^{i+j} b, a^{2i+j} b\}$$

пробегает множество всех унитарных трансверсалей к подгруппе H группы D_9, содержащих два элемента порядка 2, когда $i \in I_9^*$ и $j = 0, 3, 6$, причём каждую такую трансверсаль дважды.

2. Вычисляя

$$\varphi_{i,0}(\{e, a, a^2\}) = \{e, a^i, a^{2i}\}, \quad i \in I_9^*,$$

получаем трансверсали а). Вычисляя

$$\varphi_{i,0}(\{e, ab, a^2 b\}) = \{e, a^{i+j}, a^{2i+j}\}, \quad i \in I_9^*,$$

получаем трансверсали б), каждую дважды.

3. В этом случае мы имеем, что

$$\varphi_{i,j}(\{e, a, ab\}) = \{e, a^i, a^{i+j} b\}$$

пробегает множество всех унитарных трансверсалей к подгруппе H группы D_9, содержащих по одному элементу порядков 2 и 9, где $i \in I_9^*$ и $j = 0, 3, 6$. Предложение 5.2 доказано. □

6. Гипергруппы порядка 3, возникающие из диэдральной группы D_9

В этом разделе мы опишем (с точностью до изоморфизма) все унитарные гипергруппы порядка 3, возникающие из диэдральной группы D_9. Такие гипергруппы возникают, если мы рассматриваем дополнительные множества (т. е. трансверсали) к подгруппам шестого порядка группы D_9 (раздел 2). Существуют три такие подгруппы (H_1, H_2, H_3), причём они являются попарно сопряжёнными (раздел 3). Системы трансверсалей к этим подгруппам эквивалентны (раздел 5). Очевидно, что гипергруппы на эквивалентных трансверсалях изоморфны. Поэтому, чтобы получить все гипергруппы с точностью до изоморфизма, достаточно рассматривать только неэквивалентные трансверсали. Согласно разделу 5 мы имеем в точности четыре такие трансверсали. Например, достаточно рассмотреть следующие трансверсали:

$$M_1 = \{e, ab, a^2b\}, \quad M_2 = \{e, a, a^2\}, \quad M_3 = \{e, a^4, a^5\}, \quad M_4 = \{e, a, ab\}.$$

Предложение 6.1. *Пусть $\Omega_i = (\Phi_i, \Psi_i, \Xi_i, \Lambda_i)$ — система структурных отображений гипергруппы $(M_i)_H$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Эти структурные отображения задаются следующими таблицами.*

1. $i = 1$.

Φ_1	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	e	e	e	e	e
a^2b	a^2b	a^2b	a^2b	ab	ab	ab
ab	ab	ab	ab	a^2b	a^2b	a^2b

,

Ψ_1	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
a^2b	e	a^6	a^3	a^3b	b	a^6b
ab	e	a^6	a^3	a^3b	b	a^6b

,

Λ_1	e	a^2b	ab
e	e	e	e
a^2b	e	e	a^3b
ab	e	b	e

,

Ξ_1	e	a^2b	ab
e	e	a^2b	ab
a^2b	a^2b	e	a^2b
ab	ab	ab	e

.

Гипергруппа $(M_1)_H$ редуцируется к гипергруппе над группой C_2. Соответствующая правая квазигруппа (M_1, Ξ_1) неассоциативна.

2. $i = 2$.

Φ_2	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	e	e	e	e	e
a	a	a	a	a^2	a^2	a^2
a^2	a^2	a^2	a^2	a	a	a

,

Ψ_2	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
a	e	a^3	a^6	a^3b	a^6b	b
a^2	e	a^3	a^6	a^3b	a^6b	b

,

Λ_2	e	a	a^2
e	e	e	e
a	e	e	a^3
a^2	e	a^3	a^3

,

Ξ_2	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

.

Гипергруппа $(M_2)_H$ также редуцируется к гипергруппе над группой C_2. Соответствующая правая квазигруппа (M_2, Ξ_2) является группой.

3. $i = 3$.

Φ_3	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	e	e	e	e	e
a^4	a^4	a^4	a^4	a^5	a^5	a^5
a^5	a^5	a^5	a^5	a^4	a^4	a^4

,

Ψ_3	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
a^4	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
a^5	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b

,

Λ_3	e	a^4	a^5
e	e	e	e
a^4	e	a^3	e
a^5	e	e	a^6

,

Ξ_3	e	a	a^2
e	e	a^4	a^5
a^4	a^4	a^5	e
a^5	a^5	e	a^4

.

Гипергруппа $(M_3)_H$ изоморфна гипергруппе $(M_2)_H$.

4. $i = 4$.

Φ_4	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	e	e	e	e	e
a	a	a	a	ab	ab	ab
ab	ab	ab	ab	a	a	a

,

Ψ_4	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
e	e	a^3	a^6	b	a^3b	a^6b
a	e	a^3	a^6	e	a^3	a^6
ab	e	a^6	a^3	e	a^6	a^3

,

Λ_4	e	a	ab
e	e	e	e
a	e	a^3b	a^3b
ab	e	b	e

,

Ξ_4	e	a	ab
e	e	a	ab
a	a	ab	a
ab	ab	e	e

.

Гипергруппа $(M_4)_H$ редуцируется к гипергруппе над группой C_2. Соответствующая правая квазигруппа (M_4, Ξ_4) неассоциативна, но не изоморфна правой квазигруппе (M_1, Ξ_1).

Доказательство. Таблицы структурных отображений получаем, используя формулы теоремы 2.2 и таблицу умножения диэдральной группы D_9. Анализируя таблицы структурных отображений Φ_i, можно заключить, что ассоциированное представление $\underline{\Phi}_i$ имеет ядро порядка 3. Поэтому согласно [3] все гипергруппы $(M_i)_H$ могут быть редуцированы к гипергруппам над циклической группой C_2. Таблицы умножения Ξ_2 и Ξ_3, очевидно, являются таблицами умножения циклической группы. Таблицы умножения Ξ_1 и Ξ_4 неассоциативны, потому что, например,

1) в (M_1, Ξ_1) мы имеем $(ab \cdot ab) \cdot a^2b = a^2b$, но $ab \cdot (ab \cdot a^2b) = ab \cdot ab = e$;

2) в (M_4, Ξ_4) мы имеем $(a \cdot a) \cdot ab = ab \cdot ab = e$, но $a \cdot (a \cdot ab) = a \cdot a = ab$.

Чтобы получить изоморфизм $(M_2)_H \to (M_3)_H$, можно взять пару, состоящую из тождественного гомоморфизма группы H и произвольного отображения $M_2 \to M_3$, отображающего e в e и множество $\{a, a^2\}$ на множество $\{a^4, a^5\}$. Наконец, правые квазигруппы (M_1, Ξ_1) и (M_4, Ξ_4) неизоморфны, потому что в (M_1, Ξ_1)) квадраты всех элементов равны e, а в (M_4, Ξ_4) мы имеем $a^2 = ab$. Предложение 6.1 полностью доказано. □

Основная теорема 1.1 немедленно следует из предложения 6.1.

В заключение отметим попутно полученный любопытный факт: согласно предложениям 5.2 и 6.1 для неэквивалентных трансверсалей (например, M_2 и M_3) соответствующие гипергруппы (в данном случае $(M_2)_H$ и $(M_3)_H$) могут быть изоморфными.

Литература

[1] Далалян С. Г. О гипергруппах, преднормальных подгруппах и простейших группах // Конф., посвящённая 90-летию М. М. Джрбашяна. — Ереван, 2008. — С. 12—14.

[2] Далалян С. Г. О категории гипергрупп // Конф., посвящённая 90-летию ЕГУ. — Ереван, 2009. — С. 8—9.

[3] Далалян С. Г. Теория приводимости гипергрупп над группой // Конф. АМС, посвящённая 1400—летию Анания Ширакаци. — Ереван, 2012. — С. 22—24.

[4] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[5] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J. Generators and Relations for Discrete Groups. — New York: Springer, 1972.

[6] Dalalyan S. H. Hypergroups over the group and generalizations of Schreier's theorem on group extensions. — 2014. — `arXiv:1403.6134v1`.

[7] Rotman J. J. An Introduction to the Theory of Groups. — New York: Springer, 1999.

[8] Zolfaghari P. About hypergroups of order 3 over the group, which arise from groups of order 18 // Math. Problems of Comp. Sci. — 2012. — P. 93—94.

[9] Zolfaghari P. The hypergroups of order 3, arising from symmetric group S_3 // Proc. of the Fourth Int. Group Theory Conf. of Iran. — Isfahan, 2012. — P. 198—201.