

# О функциях Белого плоских круговых карт\*

**М. А. ДЕРЯГИНА**

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,  
Институт математики имени С. Л. Соболева  
e-mail: madinaz@rambler.ru*

**А. Д. МЕДНЫХ**

*Институт математики имени С. Л. Соболева,  
Новосибирский государственный университет  
e-mail: mednykh@math.nsc.ru*

УДК 517.545+519.17

**Ключевые слова:** круговые карты, функции Белого, детские рисунки.

## Аннотация

Картой  $(S, G)$  на замкнутой римановой поверхности  $S$  называется такой вложенный в неё граф, что дополнение  $S \setminus G$  представляет собой дизъюнктное объединение связных компонент, называемых гранями, каждая из которых гомеоморфна открытому диску. Цель данной статьи — продемонстрировать методы нахождения функции Белого для плоских круговых карт и построения графика плоской круговой карты по её функции Белого, а также представить функции Белого и графики для плоских круговых карт с не более чем пятью рёбрами. Отметим, что функция Белого для круговой карты с  $E$  рёбрами, полученная с помощью представленного в статье метода, является рациональной функцией степени  $E$ .

## Abstract

*M. A. Deryagina, A. D. Mednykh, On the Belyi Functions of Planar Circular Maps, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 111–133.*

A map  $(S, G)$  is a closed Riemann surface  $S$  with an embedded graph  $G$  such that  $S \setminus G$  amounts to the disjoint union of connected components, called faces, each of which is homeomorphic to an open disk. The purpose of this article is to demonstrate a method of finding a Belyi function for planar circular maps and a way to plot a planar circular map by its Belyi function. Also we present a list of planar circular maps with the number of edges not exceeding five, their Belyi functions and their plots. We remark that the Belyi function for a planar circular map with  $E$  edges obtained with the help of our method is a rational function of degree  $E$ .

---

\*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 13-01-00513) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2263.2014.1).

## 1. Введение

**Определение 1.1.** *Картой*  $(S, G)$  на замкнутой римановой поверхности  $S$  называется вложенный в неё граф, такой что дополнение  $S \setminus G$  представляет собой дизъюнктное объединение связных компонент, называемых *гранями*, каждая из которых гомеоморфна открытому диску.

По теореме Белого [2] каждой карте  $(S, G)$  соответствует мероморфная функция  $f: S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ , неразветвлённая вне  $\{0, 1, \infty\}$ . Указанная функция называется *функцией Белого*. Вычислению этих функций посвящены работы Г. Б. Шабата, А. К. Звонкина и других авторов (см. [1, 3, 6]).

**Определение 1.2.** Карту, расположенную на сфере, будем называть *плоской*. Следуя [4], определим понятие круговой карты.

**Определение 1.3.** *Элементарной круговой картой*  $(S_o, G_o)$  будем называть карту на сфере  $S_o$ , имеющую одно ребро, одну вершину и две грани (внутреннюю и внешнюю).



Рис. 1. Элементарная круговая карта

**Определение 1.4.** Карта  $(S, G)$  называется *круговой*, если существует разветвлённое накрытие  $\varphi: (S, G) \rightarrow (S_o, G_o)$ , допускающее ветвление только над центрами граней и вершиной  $G_o$ , такое что  $\varphi(G) = G_o$ .

Следующая лемма из [4] даёт наглядную геометрическую характеристику круговых карт.

**Лемма 1.1.** *Карта является круговой тогда и только тогда, когда её грани можно раскрасить в два цвета таким образом, чтобы каждое ребро разграничивало два разных цвета.*

Полный список карт с не более чем пятью рёбрами и иллюстрации к ним можно найти в [5].

Авторы выражают благодарность Г. Б. Шабату за полезные обсуждения в процессе работы над статьей.

## 2. Функции Белого плоских круговых карт

Рассмотрим элементарную круговую карту. Расположим её на расширенной комплексной плоскости следующим образом: вершина помещена в  $0$ , центр внутренней грани — в  $1$ , центр внешней грани — в  $\infty$ . Тогда для произвольной круговой карты  $(S, G)$  разветвлённое накрытие  $\varphi: (S, G) \rightarrow (S_o, G_o)$  из определения круговой карты является функцией Белого. Несложно заметить, что

в случае плоской круговой карты функция Белого представляет собой рациональную функцию степени  $E$ , где  $E$  — число рёбер круговой карты.

Продemonстрируем на примере метод нахождения функции Белого для заданной плоской круговой карты. Рассмотрим плоскую круговую карту  $(S_o, G_{99})$ , обозначенную 0.99 в каталоге [5]. (Здесь и далее будем пользоваться нумерацией из этого каталога.) У неё пять рёбер и две вершины, её паспорт  $[82, 2^5, 431^3]$ .

Расположим её на расширенной комплексной плоскости (рис. 2). Для этого поместим 0 в вершину, имеющую наибольшую валентность,  $\infty$  — в центр грани, имеющей наибольшую валентность, и раскрасим эту грань в белый цвет. Продолжим раскраску граней таким образом, чтобы каждое ребро разграничивало два разных цвета. Это можно сделать согласно лемме 1.1. Поместим 1 в центр чёрной грани, имеющей максимальную валентность среди чёрных граней.

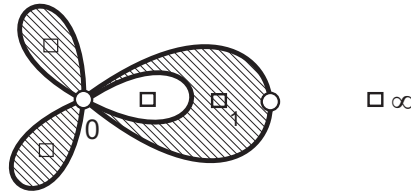


Рис. 2. Карта  $(S_o, G_{99})$

Пусть  $\varphi_{0.99}: (S_o, G_{99}) \rightarrow (S_o, G_o)$  — функция Белого для плоской круговой карты  $(S_o, G_{99})$ .  $\varphi_{0.99}(w)$  является рациональной функцией степени 5, такой что  $\varphi_{0.99}(0) = 0$ ,  $\varphi_{0.99}(1) = 1$ ,  $\varphi_{0.99}(\infty) = \infty$ . Вершины круговой карты — нули функции Белого, центры белых граней — её полюса, центры чёрных граней — прообразы 1. Разветвлённое накрытие  $\varphi_{0.99}$  имеет следующие критические точки: 0 кратности 4, 1 кратности 3 и  $\infty$  кратности 4. Значит,

$$\varphi_{0.99}(w) = \frac{3w^5 - 5w^4}{-5w + 3}.$$

### 3. Уравнения и графики плоских круговых карт

Теперь на примере плоской круговой карты  $(S_o, G_{99})$  покажем, как по заданной функции Белого найти уравнение и построить график плоской круговой карты.

Зададим элементарную круговую карту, расположенную на расширенной комплексной плоскости так, как описано в предыдущем разделе, уравнением

$$\zeta = 1 + e^{it}, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Пусть  $\varphi: (S, G) \rightarrow (S_o, G_o)$  — функция Белого для плоской круговой карты, такая что  $\varphi(G) = G_o$ . Тогда эта карта задаётся уравнением

$$\omega = \varphi^{-1}(\zeta), \tag{2}$$

или, с учётом (1),

$$\varphi(\omega) = 1 + e^{it}, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Тогда

$$(\operatorname{Re}(\varphi(\omega) - 1))^2 + (\operatorname{Im}(\varphi(\omega) - 1))^2 = 1, \quad (4)$$

где  $\operatorname{Re}(z)$  и  $\operatorname{Im}(z)$  — действительная и мнимая части комплексного числа  $z$ .

Положим  $\omega = x + iy$ , где  $x, y$  — действительные числа.

Тогда, учитывая (4), данную круговую карту  $(S_0, G_{99})$  задаём неявной функцией

$$\frac{((-1+x)^2 + y^2)^3((3+x(4+3x))^2 + 2(-1+3x(4+3x))y^2 + 9y^4)}{(3-5x)^2 + 25y^2} = 1.$$

Воспользуемся пакетом «Wolfram Mathematica» для построения графика этой неявной функции. Получим график, изображённый на рис. 3. Чёрными кружочками на нём обозначены вершины карты, их координаты  $(0, 0)$ ,  $(5/3, 0)$ .

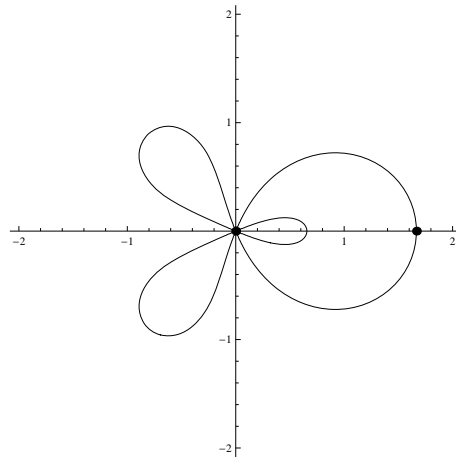


Рис. 3. График круговой карты  $(S_0, G_{99})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.99}(w) = \frac{3w^5 - 5w^4}{-5w + 3}$

#### 4. Функции Белого плоских круговых карт с не более чем четырьмя рёбрами

Отметим, что функции Белого для карт с не более чем четырьмя рёбрами ранее получены в каталоге [1]. Для плоских круговых карт с  $E$  рёбрами они представлены в виде рациональных функций степени  $2E$ . Используя наш метод, получим функции Белого для плоских круговых карт как рациональные функции степени  $E$ , а также нарисуем графики этих карт. Им соответствуют рисунки 4–22.

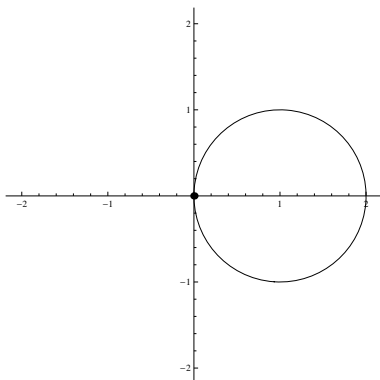


Рис. 4. Карта  $(S_0, G_1)$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.1}(w) = w$

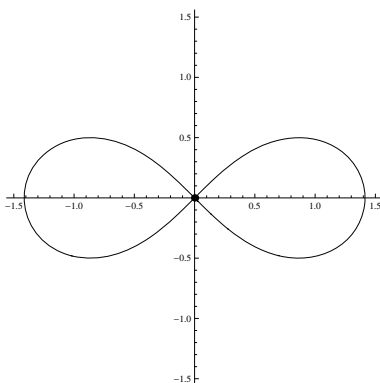


Рис. 5. Карта  $(S_0, G_3)$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.3}(w) = w^2$

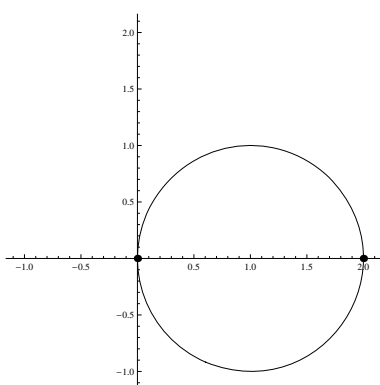
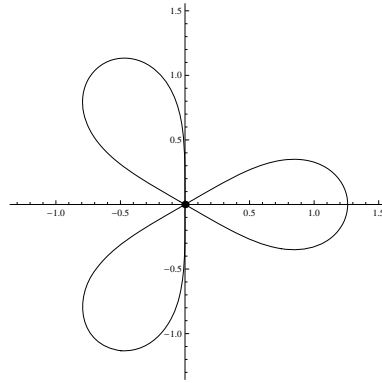
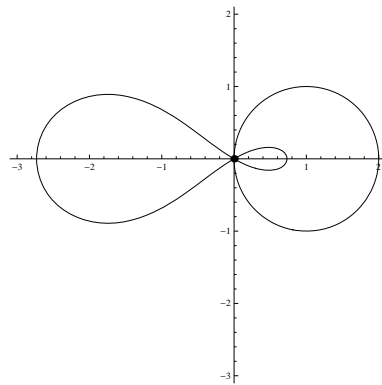
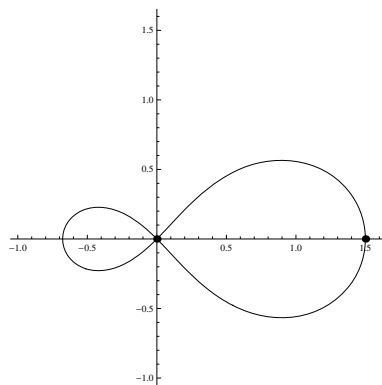


Рис. 6. Карта  $(S_0, G_5)$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.5}(w) = -w^2 + 2w$

Рис. 7. Карта  $(S_o, G_7)$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.7}(w) = w^3$ Рис. 8. Карта  $(S_o, G_8)$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.8}(w) = \frac{w^3}{3w - 2}$ Рис. 9. Карта  $(S_o, G_{11})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.11}(w) = -2w^3 + 3w^2$

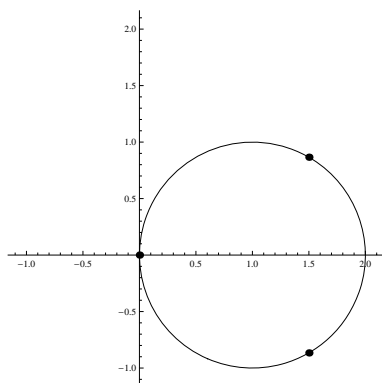


Рис. 10. Карта  $(S_0, G_{18})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.18}(w) = w^3 - 3w^2 + 3w$

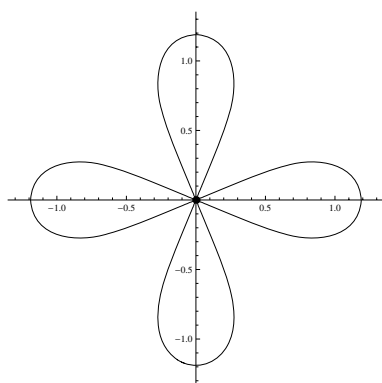


Рис. 11. Карта  $(S_0, G_{21})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.21}(w) = w^4$

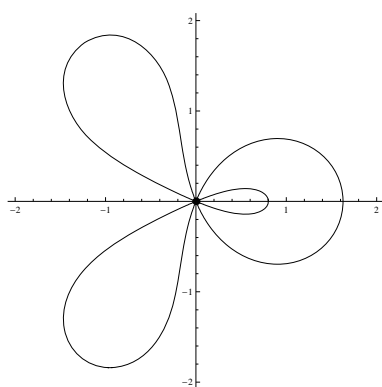


Рис. 12. Карта  $(S_0, G_{22})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.22}(w) = \frac{w^4}{-3 + 4w}$

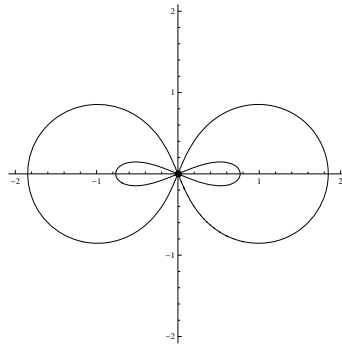


Рис. 13. Карта  $(S_o, G_{23})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.23}(w) = \frac{w^4}{-1 + 2w^2}$

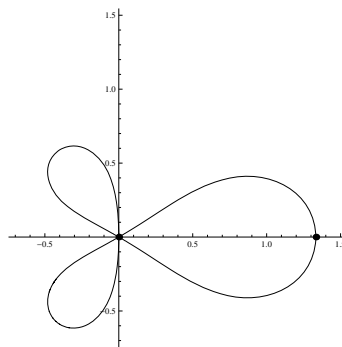


Рис. 14. Карта  $(S_o, G_{29})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.29}(w) = -3w^4 + 4w^3$

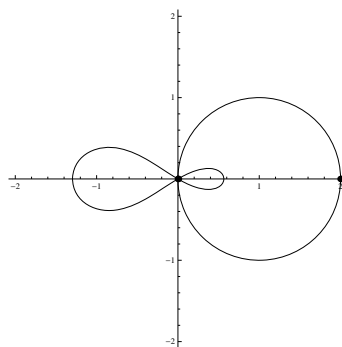


Рис. 15. Карта  $(S_o, G_{30})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.30}(w) = \frac{w^3(2-w)}{-1 + 2w}$



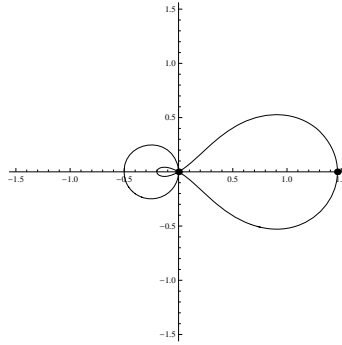


Рис. 16. Карта  $(S_o, G_{31})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.31}(w) = \frac{(-2 + 2\sqrt{3} - w)w^3}{7 - 4\sqrt{3} + 2(-5 + 3\sqrt{3})w}$

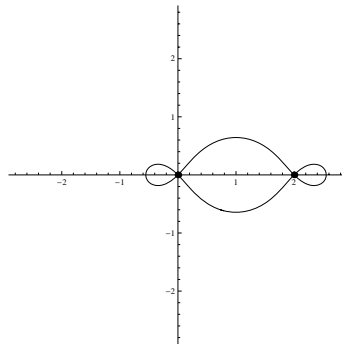


Рис. 17. Карта  $(S_o, G_{35})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.35}(w) = (w - 2)^2 w^2$

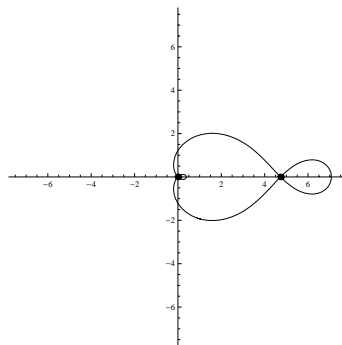


Рис. 18. Карта  $(S_o, G_{36})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.36}(w) = \frac{w^2(6(2 + \sqrt{3}) - 2(3 + \sqrt{3})w + w^2)}{-3 - 2\sqrt{3} + 2(5 + 3\sqrt{3})w}$

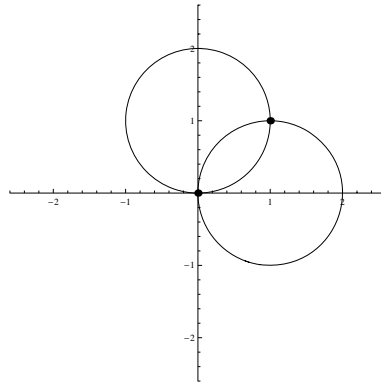


Рис. 19. Карта  $(S_o, G_{37})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.37}(w) = \frac{-(w - (1 + i))^2 w^2}{(-i + (1 + i)w)^2}$

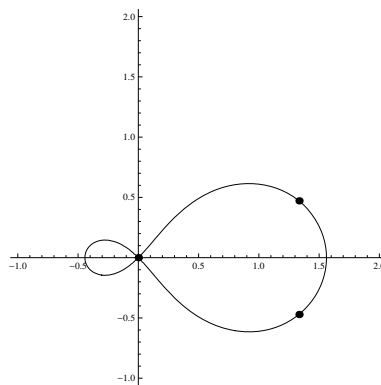


Рис. 20. Карта  $(S_o, G_{56})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.56}(w) = 3w^4 - 8w^3 + 6w^2$

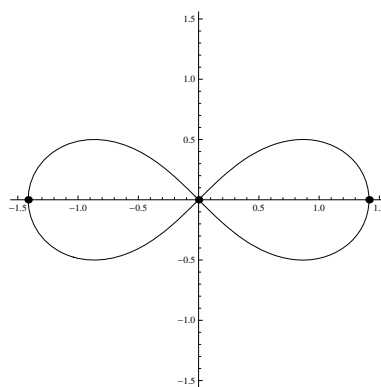
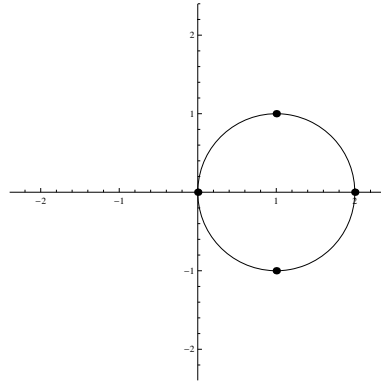
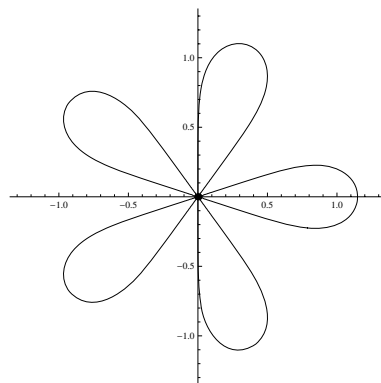


Рис. 21. Карта  $(S_o, G_{57})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.57}(w) = w^2(2 - w^2)$

Рис. 22. Карта  $(S_0, G_{74})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.74}(w) = (2-w)w(2-2w+w^2)$ 

## 5. Функции Белого плоских круговых карт с пятью рёбрами

Функции Белого и графики плоских круговых карт с пятью рёбрами представлены на рисунках 3 и 23—55.

Рис. 23. Карта  $(S_0, G_{78})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.78}(w) = w^5$

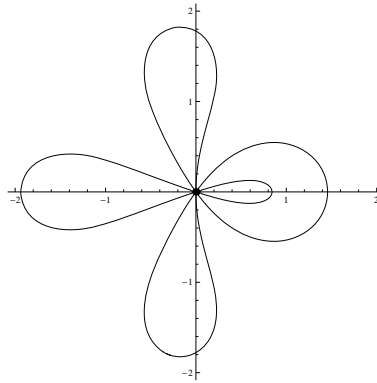


Рис. 24. Карта  $(S_{\circ}, G_{79})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.79}(w) = \frac{w^5}{5w - 4}$

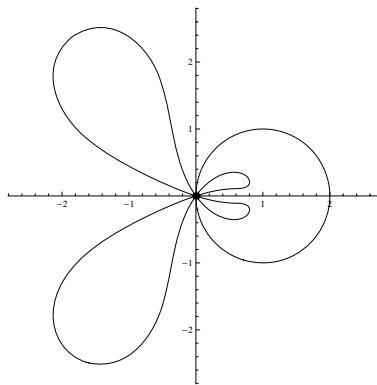


Рис. 25. Карта  $(S_{\circ}, G_{80})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.80}(w) = \frac{w^5}{10w^2 - 15w + 6}$

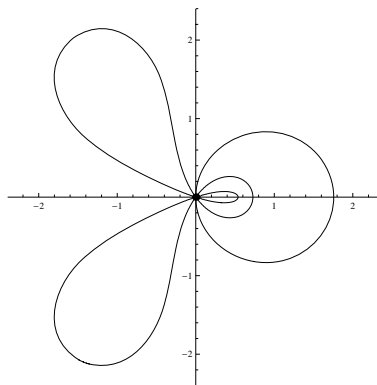


Рис. 26. Карта  $(S_{\circ}, G_{81})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.81}(w) = \frac{4w^5}{(3 - 5w)^2}$

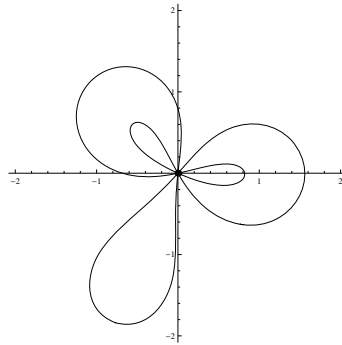


Рис. 27. Карта  $(S_0, G_{82})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.82}(w) = \frac{27w^5}{(70 + 10\sqrt{5}i)w^2 - (5 + 20\sqrt{5}i)w + (-38 + 10\sqrt{5}i)}$$

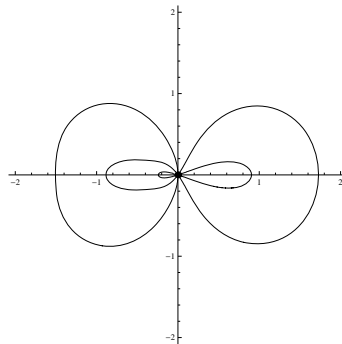


Рис. 28. Карта  $(S_0, G_{83})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.83}(w) = \frac{8w^5}{(25 - 5\sqrt{5})w^3 + (-20 + 10\sqrt{5})w^2 + (25 - 15\sqrt{5})w - 2}$$

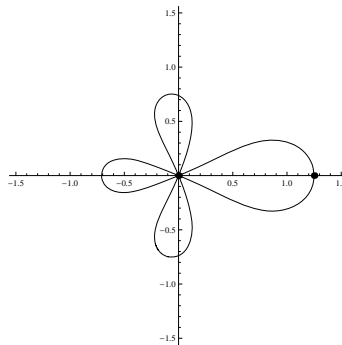
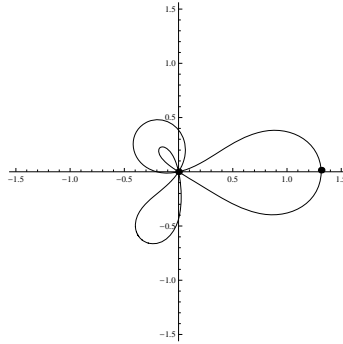
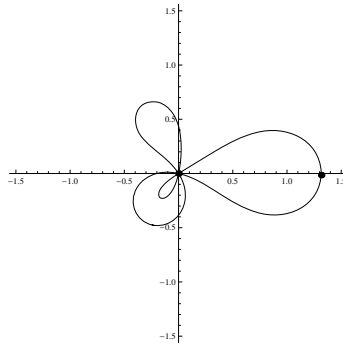


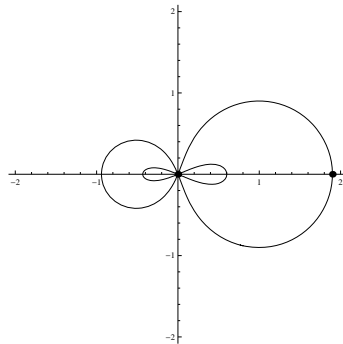
Рис. 29. Карта  $(S_0, G_{98})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.98}(w) = -4w^5 + 5w^4$

Рис. 30. Карта  $(S_0, G_{100})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.100}(w) = \frac{((-3+i) + \sqrt{-4-22i+2iw})w^4}{9-11i-3\sqrt{-4-22i}+2((-6+7i)+2\sqrt{-4-22i})w}$$

Рис. 31. Карта  $(S_0, G_{101})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.101}(w) = \frac{((-3-i) + \sqrt{-4+22i-2iw})w^4}{9+11i-3\sqrt{-4+22i}+2((-6-7i)+2\sqrt{-4+22i})w}$$

Рис. 32. Карта  $(S_0, G_{102})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.102}(w) = \frac{(-3+2\sqrt{6}-w)w^4}{-15+6\sqrt{6}+(39-16\sqrt{6})w+4(-7+3\sqrt{6})w^2}$$

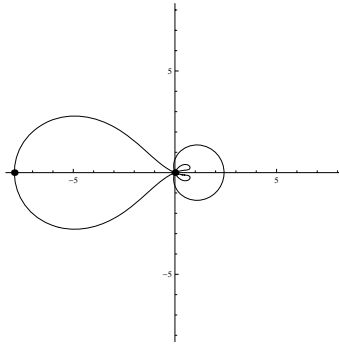


Рис. 33. Карта  $(S_0, G_{103})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.103}(w) = \frac{(3 + 2\sqrt{6} + w)w^4}{15 + 6\sqrt{6} - (39 + 16\sqrt{6})w + 4(7 + 3\sqrt{6})w^2}$$

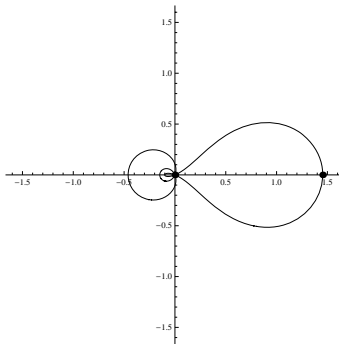


Рис. 34. Карта  $(S_0, G_{104})$ . Функция Белого:

$$\varphi_{0.104}(w) = \frac{27(-34 + 11\sqrt{10})(-10 + 5\sqrt{10} - 4w)w^4}{2(89 - 28\sqrt{10} + 5(-34 + 11\sqrt{10})w)^2}$$

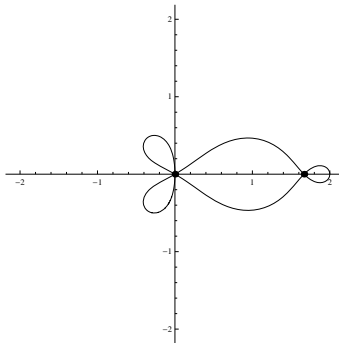


Рис. 35. Карта  $(S_0, G_{113})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.113}(w) = \frac{(5 - 3w)^2 w^3}{4}$

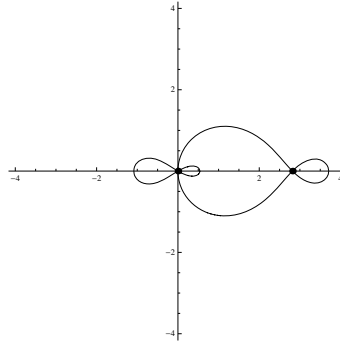


Рис. 36. Карта  $(S_0, G_{114})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.114}(w) = \frac{w^3(14 + 4\sqrt{6} - 2(6 + \sqrt{6})w + 3w^2)}{-2(2 + \sqrt{6}) + (9 + 4\sqrt{6})w}$

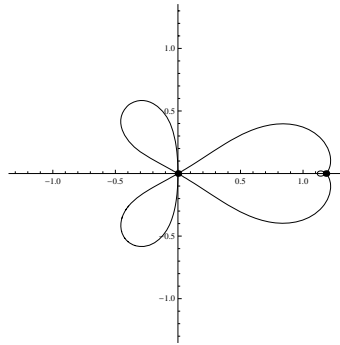


Рис. 37. Карта  $(S_0, G_{115})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.115}(w) = \frac{w^3(-14 + 4\sqrt{6} + (12 - 2\sqrt{6})w - 3w^2)}{4 - 2\sqrt{6} + (-9 + 4\sqrt{6})w}$

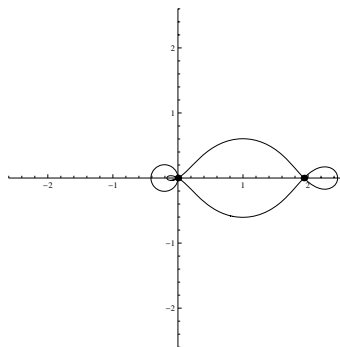


Рис. 38. Карта  $(S_0, G_{116})$ . Функция Белого:  
 $\varphi_{0.116}(w) = \frac{(-10 + 5\sqrt{10} - 3w)^2 w^3}{(-13 + 5\sqrt{10})(32 - 10\sqrt{10} + 15(-3 + \sqrt{10})w)}$



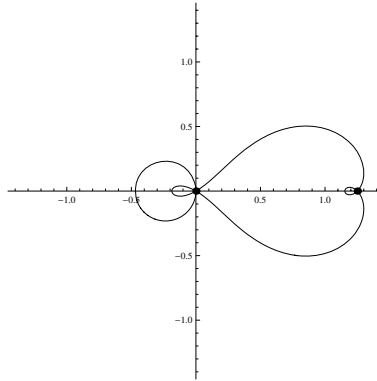


Рис. 39. Карта  $(S_o, G_{117})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.117}(w) = \frac{w^3(-5 + 4w)^2}{1 + 5w - 5w^2}$

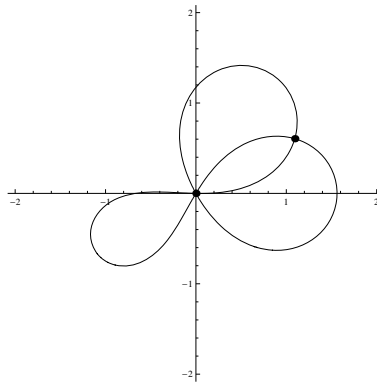


Рис. 40. Карта  $(S_o, G_{118})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.118}(w) = \frac{4(-35i + 5\sqrt{15} + 32iw)^2 w^3}{(-61i - 5\sqrt{15} + 55iw + 15\sqrt{15}w)^2}$

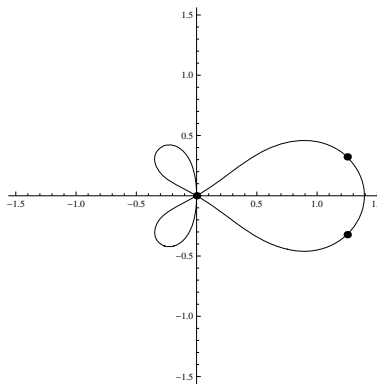


Рис. 41. Карта  $(S_o, G_{185})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.185}(w) = w^3(10 - 15w + 6w^2)$

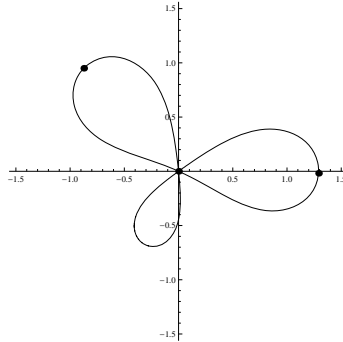


Рис. 42. Карта  $(S_0, G_{186})$ . Функция Белого: 
$$\varphi_{0.186}(w) = \left(4 - \frac{2}{27}(19 + 5i\sqrt{5})\right)w^3 + \left(-3 + \frac{4}{27}(19 + 5i\sqrt{5})\right)w^4 - \frac{2}{27}(19 + 5i\sqrt{5})w^5$$

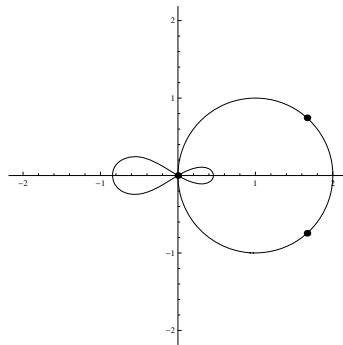


Рис. 43. Карта  $(S_0, G_{187})$ . Функция Белого: 
$$\varphi_{0.187}(w) = \frac{w^3(10 - 10w + 3w^2)}{-2 + 5w}$$

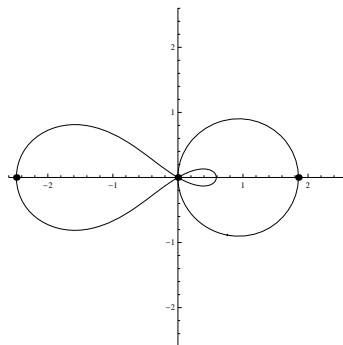


Рис. 44. Карта  $(S_0, G_{188})$ . Функция Белого: 
$$\varphi_{0.188}(w) = \frac{w^3(4 + 4\sqrt{6} + (3 - 2\sqrt{6})w - 3w^2)}{-5 - 2\sqrt{6} + (9 + 4\sqrt{6})w}$$

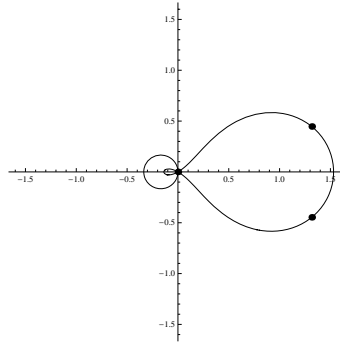


Рис. 45. Карта  $(S_0, G_{189})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.189}(w) = \frac{w^3(-4 + 4\sqrt{6} - (3 + 2\sqrt{6})w + 3w^2)}{5 - 2\sqrt{6} + (-9 + 4\sqrt{6})w}$

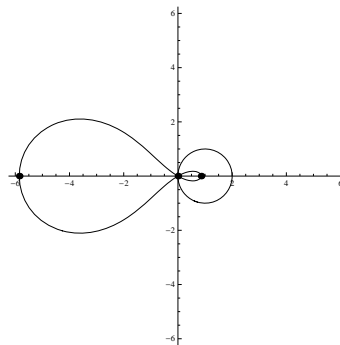


Рис. 46. Карта  $(S_0, G_{190})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.190}(w) = \frac{w^3(-5 + 5w + w^2)}{(-4 + 5w)^2}$

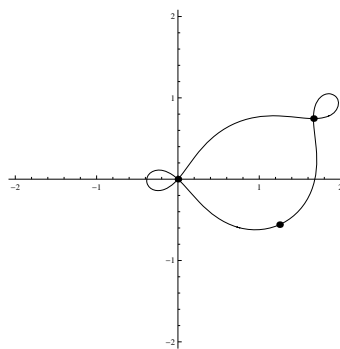


Рис. 47. Карта  $(S_0, G_{221})$ . Функция Белого:  
 $\varphi_{0.221}(w) = \frac{w^2(200 - 10i\sqrt{5} - (330 - 30i\sqrt{5})w + (195 - 30i\sqrt{5})w^2 - (38 - 10i\sqrt{5})w^3)}{27}$

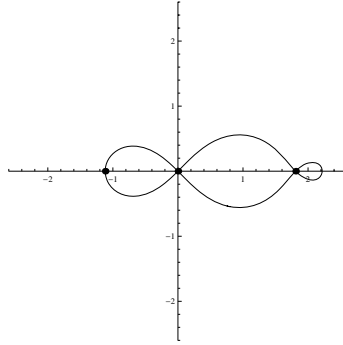


Рис. 48. Карта  $(S_0, G_{222})$ . Функция Белого:  
 $\varphi_{0.222}(w) = w^2(25 - 10\sqrt{5} - (90 - 40\sqrt{5})w + (110 - 50\sqrt{5})w^2 - (44 - 20\sqrt{5})w^3)$

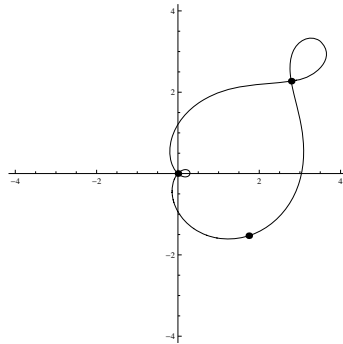


Рис. 49. Карта  $(S_0, G_{223})$ . Функция Белого:  
 $\varphi_{0.223}(w) = \left( w^2((4 + 22i) + 6\sqrt{-11 + 2i} - ((6 + 18i) + 4\sqrt{-11 + 2i})w + \right.$   
 $\left. + ((4 + 7i) + \sqrt{-11 + 2i})w^2 - (1 + i)w^3) \right) / (-3i - \sqrt{-11 + 2i} + ((1 + 13i) + 4\sqrt{-11 + 2i})w)$

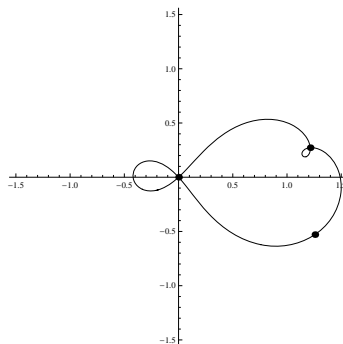


Рис. 50. Карта  $(S_0, G_{224})$ . Функция Белого:  
 $\varphi_{0.224}(w) = \left( w^2(-22 + 4i) + 6\sqrt{11 + 2i} + (18 + 6i - 4\sqrt{11 + 2i})w - \right.$   
 $\left. - (7 + 4i - \sqrt{11 + 2i})w^2 + (1 + i)w^3) \right) / (3 - \sqrt{11 + 2i} - (13 + i - 4\sqrt{11 + 2i})w)$

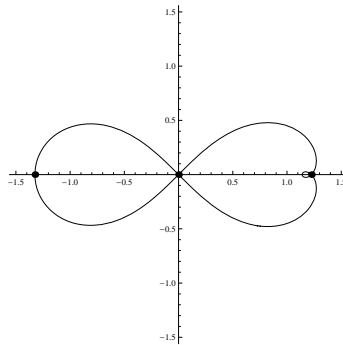


Рис. 51. Карта  $(S_0, G_{225})$ . Функция Белого:  

$$\varphi_{0.225}(w) = \frac{w^2(60(25 - 8\sqrt{10}) - 20(34 - 11\sqrt{10})w + 15(7 - 2\sqrt{10})w^2 - 9w^3)}{-419 + 130\sqrt{10} + 15(89 - 28\sqrt{10})w}$$

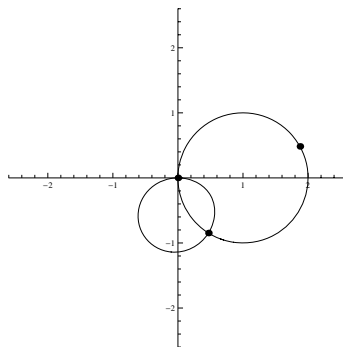


Рис. 52. Карта  $(S_0, G_{226})$ . Функция Белого:  

$$\varphi_{0.226}(w) = \frac{-2w^2(15(75 + 61i\sqrt{15}) + 60(71 - 31i\sqrt{15})w - 640(9 - i\sqrt{15})w^2 + 2048w^3)}{(6i - 10\sqrt{15} + 5(11i + 3\sqrt{15})w)^2}$$

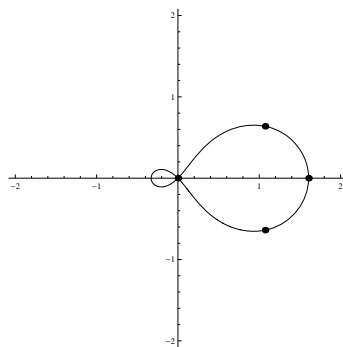


Рис. 53. Карта  $(S_0, G_{330})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.330}(w) = w^2(10 - 20w + 15w^2 - 4w^3)$

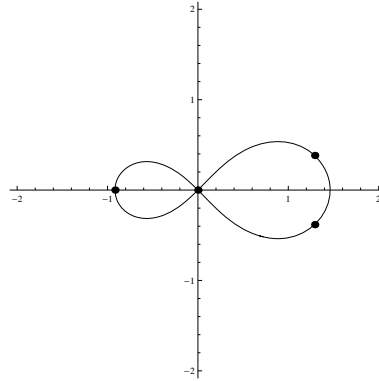


Рис. 54. Карта  $(S_0, G_{331})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.331}(w) = \frac{w^2(15 - 5w - 15w^2 + 9w^3)}{4}$

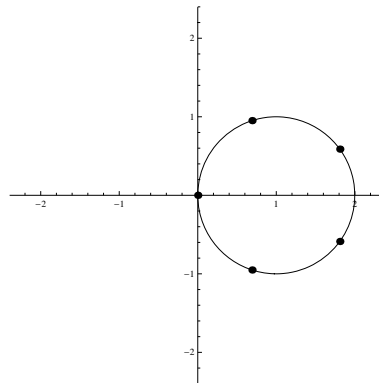


Рис. 55. Карта  $(S_0, G_{383})$ . Функция Белого:  $\varphi_{0.383}(w) = w(5 - 10w + 10w^2 - 5w^3 + w^4)$

## Литература

- [1] Адрианов Н. М., Амбург Н. Я., Дрёмов В. А., Кочетков Ю. Ю., Крейнс Е. М., Левицкая Ю. А., Насретдинова В. Ф., Шабат Г. Б. Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 35–112.
- [2] Белый Г. В. О расширениях Галуа максимального кругового поля // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* — 1979. — Т. 43, № 2. — С. 267–276.
- [3] Бычков Б. С., Дрёмов В. А., Епифанов Е. М. Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3 // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 137–148.
- [4] Дерягина М. А., Медных А. Д. О подсчёте круговых карт с заданным числом рёбер // *Сиб. мат. журн.* — 2013. — Т. 54, № 4. — С. 788–806.

- [5] Jackson D. M., Visentin T. I. *An Atlas of the Smaller Maps in Orientable and Nonorientable Surfaces*. — Chapman & Hall/CRC Press, 2001.
- [6] Shabat G. B., Zvonkin A. K. Plane trees and algebraic numbers // *Jerusalem Combinatorics'93* / H. Barcelo, G. Kalai, eds. — Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 178). — P. 233—275.

