

О геометризации абсолютной группы Галуа

А. КАМАЛИНЕЖАД

Шарифский технологический университет,
Институт фундаментальных научных исследований, Иран
e-mail: kamalinejad@alum.sharif.edu

УДК 512.772

Ключевые слова: детский рисунок, отображение Белого, абсолютная группа Галуа, квадратичный дифференциал.

Аннотация

Развит метод визуализации уравнения алгебраической кривой, соответствующей широкому классу рисунков на ориентируемой замкнутой поверхности, и посредством ассоциированных клеточных структур реализовано действие абсолютной группы Галуа. Обсуждаются приложения к квадратичным дифференциалам. Введена Галуа-инвариантная мера на $\mathbb{CP}(1)$ и башни (плоских) измельчений рисунков, связывающие структуру обратной системы абсолютной группы Галуа с геометрическими/комбинаторными структурами на поверхности.

Abstract

A. Kamalinejad, On the geometrization of the absolute Galois group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 145–159.

A method for exhibiting the equation of an algebraic curve for a large class of dessins on an orientable closed surface is developed, and the action of the absolute Galois group is realized as modification of the associated cell structures. An application to quadratic differentials is discussed. A Galois invariant measure on $\mathbb{CP}(1)$ is introduced. Towers of (flat) refinements of dessins are introduced that relate the inverse system structure of the absolute Galois group to geometric/combinatorial structures on surfaces.

1. Введение

Пусть M — компактная ориентируемая топологическая поверхность, M^a — риманова поверхность, топологической моделью которой является M . Тогда согласно теоремам Белого и Вейля M^a может быть определена как алгебраическая кривая над числовым полем тогда и только тогда, когда на ней найдётся непостоянная мероморфная функция $f: M^a \rightarrow \mathbb{CP}(1)$ с не более чем тремя критическими значениями. Можно нормализовать эти критические значения так, чтобы это были 0, 1 и ∞ ; таким образом нормализованную функцию мы будем называть функцией Белого. Зафиксировав уравнения, определяющие алгебраическую кривую M^a и функцию Белого f , получим действие абсолютной группы Галуа $\mathcal{G} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на коэффициентах уравнения, определяющего M^a , и на

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 145—159.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

функции Белого f . Множество $f^{-1}([0, 1])$ представляет собой граф $\Gamma = \Gamma_{M, f}$ на M , вершины которого являются прообразами точек 0 и 1. Граф Γ является двукрашенным с чёрными и белыми вершинами, соответствующими $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$. Более того, дополнение к Γ в M состоит из дисков, причём каждый диск содержит среди своих внутренних точек в точности одну точку из $f^{-1}(\infty)$. Наоборот, по графу Γ на M восстанавливается комплексная структура римановой поверхности M^a . Вдохновлённый работой Г. В. Белого, А. Гротендик предположил, что изучение графов, удовлетворяющих определённым условиям, на ориентированных топологических поверхностях вместе с действием абсолютной группы Галуа, определённым на основе приведённых выше соображений, обеспечивает геометрический и комбинаторный контекст для более глубокого понимания группы $\mathcal{G}$, которая ранее изучалась в основном через её действие на алгебраические числа. Среди существенных достижений в этом направлении нужно упомянуть работы Матцата с сотрудниками по обратной задаче теории Галуа и работы Дринфельда и Ихары, приведшие к построению группы Гротендика—Тайхмюллера и вложению в неё группы $\mathcal{G}$. Однако, поскольку это вложение не является сюръективным [15], его полезность с точки зрения понимания абсолютной группы Галуа несколько сомнительна. Обсуждение этого круга идей и их дальнейшего развития см. в [2, 4, 8—12] и в приведённых в этих работах ссылках. В настоящей работе предпринимается попытка взглянуть на эту общую проблему с более топологической/геометрической точки зрения.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Мердаду Шахшахани за введение в эту область и многочисленные обсуждения предмета. Расширенная версия работы будет опубликована совместно. Автору были также полезны беседы с профессорами Георгием Шабатом и Пьером Люшакком. Он хотел бы также поблагодарить профессора Сиаваша Шахшахани, сделавшего этот проект возможным.

2. Примеры и геометрическое описание действия Галуа

Примеров, в которых комплексная структура на ориентируемой поверхности рода $g > 0$ вместе с рисунком $\mathfrak{D}$ явно задана уравнением, определённым рисунком, известно недостаточно. Это затруднение преодолевается построением многочисленных примеров, в которых риманова поверхность задаётся классически как разветвлённое накрытие сферы $\mathbb{CP}(1)$. Идея лучше всего описывается при рассмотрении простейшего частного случая, реализации эллиптической кривой как двулистного накрытия прямой $\mathbb{CP}(1)$, разветвлённого в четырёх точках $\{0, 1, \infty, \lambda\}$. Точнее, определим рисунок $\mathfrak{D}$ на поверхности M как 1-остов клеточного разбиения M и предположим дополнительно, что вершины (0-остов) клеточного разбиения покрашены B и W , что наделяет $\mathfrak{D}$ структурой двукрашенного графа. Начнём с рисунка на $\mathbb{CP}(1)$, функция Белого $f: \mathbb{CP}(1) \rightarrow \mathbb{CP}(1)$

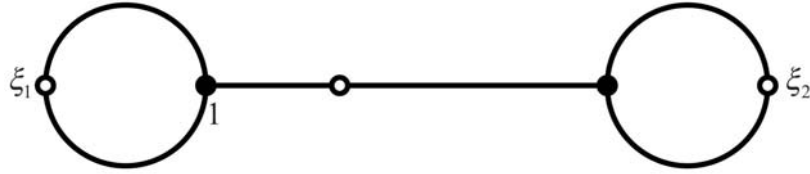


Рис. 1. Функция Белого: $f(x) = k \frac{(x-1)^3(x-a)^3}{x(x-b)}$, $k = \frac{4}{27}(97 - 56\sqrt{3})$, $a = 7 + 4\sqrt{3}$, $b = 4(2 + \sqrt{3})$,
 $\xi_1 = \frac{1}{2} \left(8 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2(7 + 4\sqrt{3})} \right)$, $\xi_2 = \frac{1}{2} \left(8 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2(7 + 4\sqrt{3})} \right)$

которого нормализована с критическими значениями $0, 1, \infty$. На $\mathbb{CP}(1)$ можно явно предъявить много рисунков и соответствующих им функций Белого; развитые нами методы позволяют довольно эффективно делать это на компьютере. В нашей нормализации предполагается, что $0, 1, \infty$ — критические значения для f , и пусть $\lambda \neq 0, 1, \infty$ — критическая точка f . Рассмотрим две копии $\mathbb{CP}(1)$ с одним и тем же рисунком $\mathfrak{D}$ и разрежем $\mathbb{CP}(1)$ вдоль отрезков $[0, 1]$ и $[\lambda, \infty]$. Склеивая две копии вдоль разрезов обычным образом, получаем эллиптическую кривую M^a , заданную уравнением

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda). \quad (1)$$

Рисунок $\mathfrak{D}$ на копиях $\mathbb{CP}(1)$ определяет рисунок на эллиптической кривой M . Функция Белого на M^a имеет вид

$$(x, y) \longrightarrow x \longrightarrow f(x).$$

Рисунок на $\mathbb{CP}(1)$ определяет рисунок на поверхности рода 1, а эллиптическая кривая задаётся уравнением (1). Группа Галуа действует на коэффициент λ . Рисунки, получаемые с помощью этой классической конструкции разрезов и склеек, будут называться *собственными рисунками*. Эта конструкция обобщается очевидным образом на гиперэллиптические кривые.

Здесь уместно следующее замечание. Пусть $\mathfrak{D}$ — рисунок с функцией Белого f . Пусть $\mathcal{H}$ — наибольшая подгруппа в $\mathcal{G}$, сохраняющая f , а k — неподвижное поле группы $\mathcal{H}$. Введём $\mathcal{G}_k = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k)$. Тогда естественно рассмотреть орбиту рисунка $\mathfrak{D}$ под действием группы $\mathcal{G}_k$, поскольку $\mathcal{G}_k$ сохраняет функцию Белого. Простое наблюдение заключается в том, что группа Галуа $\mathcal{G}_k$ может быть описана в контексте этой конструкции геометрически.

Теорема 1. Пусть во введенных обозначениях M^a — гиперэллиптическая кривая, определённая рисунком $\mathfrak{D}$. Действие абсолютной группы Галуа $\mathcal{G}$ на множестве собственных рисунков, соответствующих гиперэллиптическим кривым, эффективно. Для $\sigma \in \mathcal{G}_k$ обозначим через ${}^\sigma M^a$ кривую, определённую собственным рисунком $\mathfrak{D}^\sigma$. Тогда в эллиптическом случае $\mathfrak{D}^\sigma$ получается из $\mathfrak{D}$

преобразованием точки ветвления $\lambda \neq 0, 1, \infty$ в две регулярные точки и соединением двух регулярных точек (соответствующих $\sigma(\lambda)$) в точку ветвления. (Похожее наблюдение применимо к гиперэллиптическому случаю.)

Теорема 1 доказывается прямолинейно (см. [6] относительно эффективности действия). Замена точек ветвления в теореме 1 и соответствующая замена клеточного разбиения задаёт геометрическую реализацию действия группы Галуа. Она даёт необходимое (но не достаточное) условие того, что слияние пары вершин на рисунке $\mathfrak{D}$ задаётся действием группы Галуа. Хотя теорема 1 сформулирована для (гипер)эллиптических кривых, она обобщается на негиперэллиптические кривые сколь угодно большого рода; случай гиперэллиптических кривых (разветвлённых двулистных накрытий прямой $\mathbb{CP}(1)$) особенно прост (см. замечание 1 ниже). Смысл утверждения раскрывается в примерах на рис. 1 и 2.

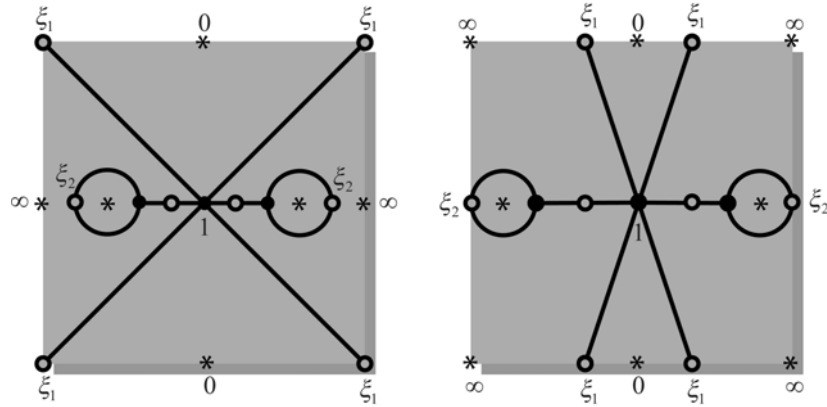


Рис. 2

Замечание 1. Существуют плоские гиперэллиптические кривые M^a , задаваемые уравнениями вида $y^n = h(x)$, где $n \geq 3$, степень $\deg h$ достаточно велика, а коэффициенты h — алгебраические числа. Проекция $\pi: (x, y) \rightarrow x$ задаёт разветвлённое накрытие $\mathbb{CP}(1)$, а композиция проекции с подходящей рациональной функцией f определяет функцию Белого ψ на M^a . Функция Белого ψ определяет на поверхности M клеточное разбиение, обладающее $\mathbb{Z}/(n)$ -симметрией. Это позволяет создать M^a с помощью «ножниц и клея» из n экземпляров $\mathbb{CP}(1)$ так же, как в гиперэллиптическом случае, понятие собственного рисунка в этом случае также ясно. Пусть $h(x) = x(x-1)(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_k)$ с разными $\lambda_i \neq 0, 1$. Действие $\sigma \in \mathcal{G}_k$ отображает M^a на кривую σM^a посредством действия на коэффициенты h . Геометрически это действие может быть описано расщеплениями некоторых множеств точек ветвления проекции π индекса n в n некритических точек и соединениями n некритических точек в точку ветвления индекса n . Это очень похоже на гиперэллиптический случай.

Более общо, пусть задана общая плоская кривая $M^a \subset \mathbb{CP}(2)$, определённая над $\mathbb{Q}$. Тогда координатная проекция определяет разветвлённое накрытие $\mathbb{CP}(1)$ и мы можем похожим образом построить функцию Белого ψ на M^a . Однако структура проекции в этом случае, вообще говоря, не так проста, как в случае $y^n = h(x)$. Действие $\sigma \in \mathcal{G}_k$ в принципе может быть описано через преобразование точек ветвления, но такого простого описания, как в случае $y^n = h(x)$, не существует.

3. Проективные системы и картографические группы

Поскольку группа $\mathcal{G}_k$ проконечна, а наша цель — преобразовать действие группы $\mathcal{G}_k$ на числах в действие на рисунках, естественно заняться поиском семейств рисунков и связанных с ними семейств алгебраических объектов, образующих проективные системы. Чтобы придать этому неопределённому сообщению математический смысл, прежде всего заметим, что каждая (открытая) клетка клеточного разбиения поверхности M (связанного с рисунком $\mathfrak{D}$) содержит единственную точку из множества $f^{-1}(\infty) = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Соединяя каждую точку ξ_j с вершинами на границе соответствующей клетки, получаем разбиение $\mathfrak{T}$ поверхности M на треугольники (не обязательно триангуляцию). Пусть $\Gamma_\circ = \Gamma_{\mathfrak{D}}$ обозначает 1-остов дуального разбиения. Тогда $\Gamma_\circ$ — 3-регулярный двукрашенный граф с вершинами, обозначаемыми B и W . Мы определяем 0-искривлённое, или плоское, измельчение Γ_1 графа $\Gamma_\circ$ как граф, изображённый на рис. 3 (чёрный граф исходный, а серый — его измельчение). Процесс может быть повторён, что приводит к бесконечной последовательности измельчений $\Gamma_\circ, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$. Первое наблюдение состоит в том, что 3-регулярные графы Γ_n связаны с рисунками $\mathfrak{D}_n$ таким же образом, как $\Gamma_\circ$ связан с $\mathfrak{D}$. Функция Белого, которую мы ставим в соответствие рисунку $\mathfrak{D}_n$, обозначается f_n .

Теорема 2. Пусть M^a — риманова поверхность с комплексной структурой, определённой рисунком $\mathfrak{D}$. Тогда плоское измельчение сохраняет комплексную структуру $\mathfrak{D}$ на M^a . Пусть $\mathfrak{D}$ — рисунок на $\mathbb{CP}(1)$, а через $\mathfrak{k}_n^\varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1, \dots, \infty$, обозначаются расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$, получаемые присоединением координат точек $f_n^{-1}(\varepsilon)$. Получаем башню полей $\dots \mathfrak{k}_n^\varepsilon \subset \mathfrak{k}_{n+1}^\varepsilon \subset \dots$. При этом существует константа c_1 (зависящая от $\mathfrak{D}$) и универсальные многочлены P и Q (не зависящие от $\mathfrak{D}$), такие что $f_\circ$ и f_1 связаны соотношением

$$f_1(x) = c_1 \frac{P(f_\circ(x))}{Q(f_\circ(x))} f_\circ(x). \quad (2)$$

Идея доказательства. Утверждение о включении полей может быть доказано безотносительно к уравнению (2) и следует из того, что вершины рисунка

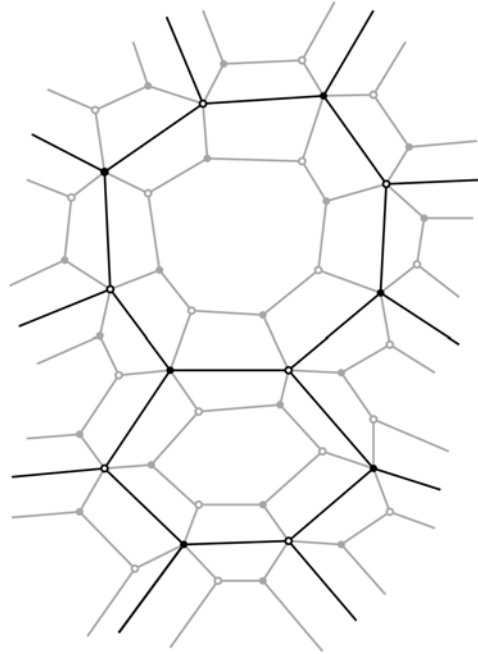


Рис. 3

на $\mathbb{CP}(1)$ сохраняются при плоском измельчении. Для доказательства последнего утверждения предположим, что $\lambda \in f_{\circ}^{-1}(\varepsilon)$ ($\lambda \neq 0, 1, \infty$), а M^a — эллиптическая кривая $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, получаемая подъёмом рисунка на $\mathbb{CP}(1)$ до собственного рисунка на M^a . Плоское измельчение на $\mathbb{CP}(1)$ поднимается до плоского измельчения рисунка, поднятого на M^a , и комплексная структура M^a сохраняется при измельчении, откуда легко следует теорема. Для универсальных многочленов P и Q имеются простые выражения:

$$P(z) = (z-2)^3, \quad Q(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Для вычисления коэффициента c_1 мы применяем алгоритмические методы построения рисунков и соответствующих им функций Белого. Детальные вычисления длинноваты и здесь не приводятся. $\square$

Замечание 2. Многочлены P и Q являются многочленами Шабата, т. е. имеют не более двух критических значений. Они эквивалентны, $P \sim Q$: существуют такие скаляры A, B, a, b , что $AP(az+b) + B = Q(z)$ и критические значения ζ_i^P и ζ_i^Q связаны соотношением $A\zeta_i^P + B = \zeta_i^Q$.

Следует отметить, что, хотя плоские измельчения рисунка $\mathfrak{D}$ сохраняют комплексную структуру, процедура может быть использована и для построения кривых с новыми комплексными структурами. Действительно, имея рисунок на $\mathbb{CP}(1)$ с функцией Белого $f_\circ$, мы можем взять критическую точку μ функции f_1 , для которой $f_1(\mu) = 1$, и предположить, что μ — регулярная точка $f_\circ$. Пусть $\lambda \neq 0, 1, \infty$ — корень уравнения $f_\circ(x) = 1$. Тогда, разрезая и склеивая вдоль $[\mu, \infty]$ и $[\lambda, \infty]$, мы, вообще говоря, получаем две разные эллиптические кривые.

Картографическая группа G_i , связанная с 3-регулярным графом $\Gamma_i \subset M$, является подгруппой симметрической группы $\mathfrak{S}_{2N_i}$, где N_i — количество рёбер графа Γ_i . Пусть $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$ — несвязное объединение двух копий Γ_i , в которых цвета B и W вершин заменены на противоположные, а $\mathcal{E}_i$ — множество рёбер графа $\tilde{\Gamma}_i$. Тогда $\mathfrak{S}_{2N_i}$ — (полная) группа перестановок множества $\mathcal{E}_i$. Картографическая группа G_i представляет собой группу, транзитивно действующую на $\mathcal{E}_i$.

Имеются сюръективные гомоморфизмы $\rho_i: \mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z}) \rightarrow G_i$, поскольку каждая G_i порождена двумя элементами $\sigma_2 = \rho_i(\delta_2)$ и $\sigma_3 = \rho_i(\delta_3)$ порядков 2 и 3 соответственно. Пусть K_i — ядро гомоморфизма $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z}) \rightarrow G_i$. Разумеется, K_i зависит от рисунка $\mathfrak{D}$. Побочным продуктом наших рассуждений является следующая теорема.

Теорема 3. *Для данного рисунка $\mathfrak{D}$ почти все K_i — подгруппы конечного индекса в $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{Z})$, не являющиеся конгруэнц-подгруппами.*

Идея доказательства. Произведение $\sigma_2\sigma_3$ имеет следующий геометрический смысл: его порядок равен НОД количеств сторон граней. Следовательно, этот порядок сохраняется при плоском измельчении (см. рис. 3). Согласно критерию Вольфарта [14] подгруппа конечного индекса в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, содержащая все сопряжённые (в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является конгруэнц-подгруппой тогда и только тогда, когда она содержит главную конгруэнц-подгруппу уровня m . Поскольку $\sigma_2\sigma_3$ является образом матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

требуемый результат достигается простым применением критерия Вольфарта. $\square$

По-видимому, в общем случае не существует гомоморфизмов G_{i+1} на G_i , задающих проективную систему групп, связанных с графами Γ_i . Однако имеется алгебраическая структура, напоминающая проективную систему группоидов, которую можно определить с помощью следующего результата.

Теорема 4. Во введенных выше обозначениях существуют подмножества $C_i \subset \mathcal{E}_i$ и отображения $F_{i+1}: \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{E}_i$ со следующими свойствами:

- 1) $C_o = \mathcal{E}_o$, а отображения F_i сюръективны и остаются сюръективными, будучи ограниченными на C_i ;
- 2) для $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ и $e \in C_{i+1}$, таких что $\rho_{i+1}(\gamma_2)(e) \in C_{i+1}$, выполняется равенство

$$F_{i+1}(\rho_{i+1}(\gamma_1 \gamma_2)(e)) = \rho_i(\gamma_1 \gamma_2)F_{i+1}(e);$$

- 3) для каждого $e \in \mathcal{E}_{i+1}$ $F_{i+1}(\rho_{i+1}(\delta_3)(e)) = \rho_i(\delta_3)F_{i+1}(e)$.

Идея доказательства. Имеется естественное отображение из множества рёбер плоского измельчения в множество рёбер исходного дуального графа; доказательство теоремы основано на анализе этого отображения. $\square$

Взаимосвязь между $\mathcal{G}_k$ и картографической группой $G(\mathfrak{D})$ описать в принципе несложно. Действие группы Галуа, или, эквивалентно, замена точки ветвления, сохраняет количества треугольников, рёбер и вершин разбиения поверхности M . Разбиение поверхности, соответствующее собственному рисунку $\mathfrak{D}$, поднимается на M с соответствующего разбиения сферы $\mathbb{CP}(1)$ с помощью разветвлённого накрытия. Количество треугольников (или рёбер) разбиения M удваивается по сравнению с теми же величинами на $\mathbb{CP}(1)$. Отношения инцидентности на триангуляции M закодированы в картографической группе. Действие группы Галуа $\mathcal{G}_k$ меняет отношения инцидентности триангуляции. Картографические группы $G(\mathfrak{D})$ и $G(\mathfrak{D}^\sigma)$ изоморфны как абстрактные группы и обозначаются $G_{\mathfrak{D}}$. Группы $G(\mathfrak{D})$ и $G(\mathfrak{D}^\sigma)$ являются образами двух представлений группы $G_{\mathfrak{D}}$ в $\mathfrak{S}_{2N}$. Эти представления не обязательно сопряжены в $\mathfrak{S}_{2N}$. Если

$$G(\mathfrak{D}^\sigma) = TG(\mathfrak{D})T^{-1} \quad (3)$$

для некоторого $T \in \mathfrak{S}_{2N}$, то представления различаются только перенумерацией рёбер и считаются эквивалентными.

Теорема 5. Собственный рисунок $\mathfrak{D}$ определяет класс эквивалентности представлений группы $G_{\mathfrak{D}}$. Наоборот, класс эквивалентности представления абстрактной картографической группы $G_{\mathfrak{D}}$ определяет соответствующий ей собственный рисунок $\mathfrak{D}$.

Идея доказательства. Класс эквивалентности представлений группы $G_{\mathfrak{D}}$ в $\mathfrak{S}_{2N}$ определяется образами образующих порядков 2 и 3, что доказывает первое утверждение. Наоборот, класс эквивалентности представления определяет конфигурацию множества треугольников, по которой рисунок восстанавливается. $\square$

Теорема 5 была сформулирована в контексте дуальных графов; с незначительными изменениями похожий результат имеет место для рисунков и связанных с ними картографических групп.

4. Квадратичные дифференциалы

Пусть ω , имеющая в локальной координате вид $\omega = \varphi(z)dz^2$, — мероморфный квадратичный дифференциал на римановой поверхности M^a . *Горизонтальная кривая* для ω — это гладкая кривая $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$, такая что $\varphi(\alpha(t))(\alpha'(t))^2 > 0$. *Критическая кривая* α — это горизонтальная кривая, соединяющая два нуля дифференциала ω или ноль и простой полюс в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \alpha(t) = p_{\pm},$$

где $p_{\pm}$ — нули или простые полюса ω . Мероморфный квадратичный дифференциал называется *дифференциалом Дженкинса—Штребеля*, если все его горизонтальные кривые, кроме конечного числа непересекающихся, являются периодическими и задают слоение на поверхности M , из которой выброшены критические кривые и полюса (а также нули, кроме двукратных. — *Прим. перев.*) ω . При заданном дифференциале Дженкинса—Штребеля ω пусть γ_i , $i = 1, \dots, T$, — критические кривые. Положим

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_T.$$

Тогда Γ — замкнутое подмножество в M и

$$M \setminus \Gamma = \bigcup_{k=1}^N \mathcal{U}_k \quad (\text{несвязное объединение}),$$

где $\mathcal{U}_k$ — диск (проколотый, или цилиндр. — *Прим. перев.*), представленный (кроме полюсов ω порядка 2 (обычно предполагается, что штребелевы дифференциалы не имеют полюсов порядка выше 2. — *Прим. перев.*)) в виде объединения непересекающихся замкнутых простых горизонтальных кривых. Пусть $\mathcal{Z}_{\omega}$ — множество нулей и полюсов квадратичного дифференциала ω . Тогда $\omega = \varphi dz^2$ задаёт риманову метрику на $M \setminus \mathcal{Z}_{\omega}$ по формуле $ds^2 = |\varphi(z)| dz d\bar{z}$. Эта метрика задаёт плоскую структуру на каждом диске $\mathcal{U}_k$, в которой горизонтальные кривые являются геодезическими. (Общее обсуждение квадратичных дифференциалов и, в частности, дифференциалов Дженкинса—Штребеля см. в [3, 7, 13] с некоторыми отличиями в терминологии.)

Имеется связь между дифференциалами Дженкинса—Штребеля на кривой, определённой над $\mathbb{Q}$, и соответствующим рисунком. Пусть дана топологическая поверхность M с рисунком $\mathfrak{D}$ (вершины которого будут лежать в нулях функции Белого), задающим на M структуру алгебраической кривой M^a над $\mathbb{Q}$. Как мы видели выше, эта структура определяет положение полюсов функции Белого f (а также $f^{-1}(1)$). Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(\infty)$ (вместе с некоторыми другими данными, описывать которые слишком долго (можно применить оператор Муласе—Пенкавы $\omega := (d \log f)^2 / (1 - f)$ — *Прим. перев.*)) определяют единственный дифференциал Дженкинса—Штребеля и, следовательно, множество Γ_{ω} , состоящее из описанных выше критических кривых.

Теорема 6. Во введённых обозначениях графы Γ_ω и $\mathfrak{D}$ имеют изоморфные фундаментальные группы и переводятся друг в друга конечными комбинациями преобразований Уайтхеда.

Идея доказательства. Первый шаг представляет собой топологическое наблюдение. Если на компактной ориентируемой поверхности M задано конечное множество точек v_i вместе с такими окрестностями U_i и U'_i , что $\Gamma = M \setminus \cup U_i$ и $\Gamma' = M \setminus \cup U'_i$ — связные графы, то Γ и Γ' переводятся друг в друга преобразованиями Уайтхеда. Теперь доказательство теоремы 36 в [3] применимо для получения требуемого результата. $\square$

Эта теорема даёт возможность оценить расстояние Тайхмюллера между кривыми, определёнными Γ_ω и $\mathfrak{D}$. (Другое описание связи между дифференциалами Дженкинса—Штребеля и рисунками имеется в [16]; неопубликованная пока работа [5], привлекая наше внимание недавно, также имеет отношение к предмету.)

5. Алгебраические, топологические и измеримые структуры

Построение семейств графов с помощью плоских измельчений было лишь одним из примеров геометрических конструкций, напоминающих башни расширений Галуа. В этом случае функция Белого на каждом этаже является композицией функций Белого, содержащей исходную функцию Белого как композиционный множитель. Другой полезной конструкцией является компонирование с функцией Белого на $\mathbb{CP}(1)$ (с критическими значениями $\{0, 1, \infty\}$), переводящей множество $\{0, 1, \infty\}$ в себя. Простым примером такой функции является $g(z) = 4z(1 - z)$. Пусть R — операция плоского измельчения, а B_g — композиция с этой функцией Белого. Операции R и B_g не коммутируют, как и операции B_g и $B_{g'}$ с разными g и g' . Таким образом, имеем абстрактный моноид $\mathfrak{M}$, порождённый R и множеством B_g , действующих на любой собственный рисунок. Применение этой операции к $\mathfrak{M}$ даёт возможность, начиная с простого рисунка, построить с помощью последовательных применений R и B_g весьма сложные рисунки, явно предьявляя функции Белого и уравнения кривых (подчеркнём, что речь идёт об усложняющихся функциях Белого на *одной и той же* кривой. — *Прим. перев.*). Выделение элементов абсолютной группы Галуа $\mathcal{G}$ (точнее, её конечных факторов. — *Прим. перев.*) как геометрических преобразований является ключевым моментом в нашем подходе, и операции R и B_g позволяют выделить широкий класс элементов группы $\mathcal{G}$ и представить их геометрически.

Теорема 7. Начиная с данного рисунка $\mathfrak{D}_0$ и последовательности R и B_g (класс допустимых функций Белого g ещё не вполне определён, но включает $g(z) = 4z(1 - z)$, $g(z) = 16z(z - 3/4)^2$ и бесконечно много других функций), мы

получаем последовательности конечных расширений Галуа $k_\circ \subset k_1 \subset \dots$ поля $\mathbb{Q}$ и рисунков $(\mathfrak{D}_\circ, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots)$, на которых действует $\mathcal{G}$.

Полезность этой довольно абстрактной теоремы иллюстрируется тем, что, применяя эти операции, мы можем построить башни циклотомических и куммеровых расширений и предъявить их в качестве рисунков. Например,

$$f(x) = -\frac{(x^n - 1)^2}{4x^n}$$

является функцией Белого, а соответствующий рисунок — n -угольник с чёрными вершинами $(f^{-1}(0))$ в n -х корнях из единицы. Применение $g(z) = 4z(z - 1)$ даёт рисунок, чёрные и белые вершины которого $(f^{-1}(0))$ расположены в $(2n)$ -х корнях из единицы. Другими словами, применение функции g к рисунку позволяет получить n -угольник.

С другой стороны, применяя плоские измельчения к n -угольнику, определённого функцией Белого

$$f_\circ(x) = -\frac{(x^n - 1)^2}{4x^n},$$

получим функцию Белого

$$f_1(x) = \frac{(x^n - 1)^2(x^{2n} - 6x^n + 1)^3}{32x^n(x^{2n} + 1)^3}.$$

Применяя измельчение, мы получаем два новых n -угольника, расположенных внутри и вне первоначального n -угольника. Новые n -угольники связаны $4n$ новыми рёбрами, проходящими через $2n$ старых вершин (рис. 4). Вершинами нового рисунка являются:



Рис. 4

1) $f_1^{-1}(1)$:

- а) корни уравнения $x^n + 1 = 0$,
- б) вершины внутреннего n -угольника, соответствующие корням степени n из $3 - 2\sqrt{2}$,
- в) вершины внешнего n -угольника, соответствующие корням степени n из $3 + 2\sqrt{2}$;

2) $f_1^{-1}(0)$:

- а) корни уравнения $x^n - 1 = 0$,
- б) вершины внутреннего n -угольника, соответствующие корням степени n из $-3 + 2\sqrt{2}$,
- в) вершины внешнего n -угольника, соответствующие корням степени n из $-3 - 2\sqrt{2}$.

Для дерева $\mathfrak{D}_\circ$, определённого функцией Белого $f_\circ(x) = -4x^n(x^n - 1)$, $f_\circ^{-1}(1)$ даёт куммеровы расширения

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n, 2^{1/n}),$$

где ζ_n — первообразный корень степени n из единицы. Применение плоских измельчений к этому рисунку приводит к рисунку $\mathfrak{D}_1$, функцией Белого которого является

$$f_1(x) = \frac{32x^n(x^n - 1)(8x^{2n} - 8x^n + 4)^3}{(8x^{2n} - 8x^n + 1)^3}.$$

Новые вершины вида $f^{-1}(0)$ оказываются корнями степени n из $(1 \pm i)/2$, тогда как новые вершины вида $f^{-1}(1)$ — корнями степени n из $(1 \pm \sqrt{2})/2$. На рис. 5 указаны три итерации плоского измельчения рисунка $\mathfrak{D}_\circ$ в случае $n = 3$.

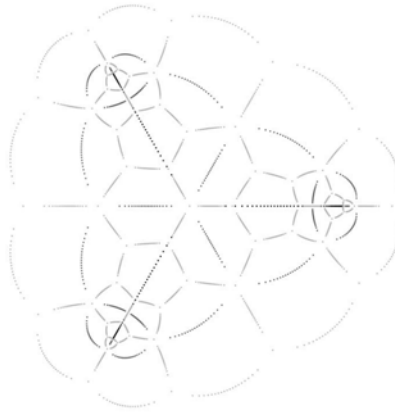


Рис. 5

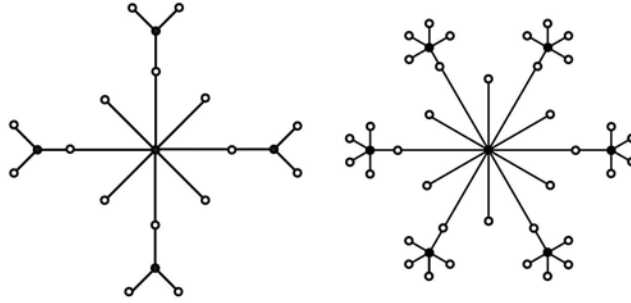


Рис. 6

В общем случае куммеровы расширения

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n, r^{1/n}),$$

где

$$0 < r = \frac{a}{a+b} < 1,$$

a и b — натуральные числа, могут быть получены из функции Белого $f(x) = cx^{na}(1-x^n)^b$ для подходящего c . На рис. 6 представлен детский рисунок для такого расширения Куммера при $r = (2/5)^{1/4}$ и $r = (2/7)^{1/6}$. Геометрический смысл параметров a , b и n находит непосредственное отражение в рисунке. Соответствующие функции Белого имеют вид

$$\frac{3125x^8(1-x^4)^3}{108}, \quad \frac{823543x^{12}(1-x^6)^5}{12500}.$$

Следует отметить, что, итерируя операции R и B_g , мы получаем бесконечные башни конечных расширений Галуа поля $\mathbb{Q}$ вместе с рисунками и действиями конечных групп Галуа. Таким образом, мы получаем явные геометрические реализации бесконечно многих элементов абсолютной группы Галуа и их комбинаторного действия на рисунках.

Напомним, что при построении плоских рисунков мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathfrak{D}} & & \\ \pi \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{CP}(1) & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}(1) \end{array}$$

в которой $\beta = f \circ \pi$ — соответствующая функция Белого. Рисунок $\mathfrak{D}$ определяет кусочно-плоскую структуру на $M_{\mathfrak{D}}$ и кусочно-плоскую риманову меру, которую

мы обозначим $\mu_{\mathfrak{D}}$. Вообще говоря, меры $\mu_{\mathfrak{D}}$ и $\mu_{\mathfrak{D}'}$ различны для $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'$, более того, $\pi_*(\mu_{\mathfrak{D}}) \neq \pi_*(\mu_{\mathfrak{D}'})$. С другой стороны, если $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ лежат в одной и той же орбите $\mathcal{G}_k$, то

$$\pi_*(\mu_{\mathfrak{D}}) = \pi_*(\mu_{\mathfrak{D}'}).$$

С помощью повторяющихся плоских измельчений рисунка $\mathfrak{D}$ мы получаем последовательность точек, соответствующих множествам вершин измельчённых рисунков, которые мы обозначим $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$. Нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 8. *Предельное множество $\bigcup V_n$ плотно в M , и эмпирические меры μ_i , индуцированные с конечных множеств V_i , слабо сходятся к $\mu_{\mathfrak{D}}$, нормализованной вероятностной мере.*

В этой теореме было использовано только плоское измельчение, а комплексная структура поверхности $M_{\mathfrak{D}}$ оставалась фиксированной. С другой стороны, процесс может быть организован на пространстве модулей кривых вида $M_{\mathfrak{D}}$. Например, пусть $M_{\mathfrak{D}}$ — эллиптическая кривая, получаемая из $\mathbb{CP}(1)$ разрезами вдоль $[0, 1]$ и $[\lambda, \infty]$. В результате плоского измельчения вершина λ присоединяется к множеству вершин $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Марковский процесс на пространстве модулей определяется вероятностной мерой ν на конечном множестве $\{\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, а $M_{\mathfrak{D}}$ может перейти в эллиптическую кривую, определённую разрезами $[0, 1]$ и $[\lambda_i, \infty]$, $i = 0, 1, \dots, N$, с вероятностью, определённой мерой ν . Природа этого предельного процесса в настоящее время неясна.

Литература

- [1] Артамкин И. В., Левицкая Ю. А., Шабат Г. Б. Примеры семейств штробелевых дифференциалов на гиперэллиптических кривых // Функц. анализ и его прил. — 2009. — Т. 43, № 2. — С. 140—142.
- [2] Шабат Г. Б., Воеводский В. Правильные триангуляции римановых поверхностей и кривые над полями алгебраических чисел // ДАН СССР. — 1989. — Т. 39, № 1. — С. 38—41.
- [3] Arbarello E., Cornalba M. Jenkins—Strebel differentials // Rend. Lincei Mat. Appl. — 2010. — Vol. 21. — P. 115—157.
- [4] Buff X., Lochak P., et al. Moduli Spaces of Curves, Mapping Class Groups and Field Theory. — Amer. Math. Soc., 2003.
- [5] Dunin-Barkowski P., Popolitov A., Shabat G., Sleptsov A. On the homology of certain smooth covers of moduli spaces of algebraic curves. — [arXiv:1006.4322v2](https://arxiv.org/abs/1006.4322v2). — 2010.
- [6] Gironde E., González-Diez G. A note on the action of the absolute Galois group on dessins // Bull. Lond. Math. Soc. — 2007. — Vol. 39, no. 5. — P. 721—723.
- [7] Gardiner F., Lakic N. Quasiconformal Teichmüller Theory. — Amer. Math. Soc., 2000.
- [8] Ihara Y. Braids, Galois groups and some arithmetical functions // Proc. ICM-90. Vol. 1. — Kyoto: Springer, 1990. — P. 99—120.
- [9] Lochak P. <http://www.math.jussieu.fr/~lochak>.

- [10] Malle G., Matzat B. H. Inverse Galois Theory. — New York: Springer, 1999.
- [11] The Grothendieck Theory of Dessin d'Enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [12] Schneps L. <http://www.math.jussieu.fr/~leila/>.
- [13] Strebel K. Quadratic Differentials. — New York: Springer, 1984.
- [14] Sury B. The Congruence Subgroup Problem. — Hindustan Book Agency, 2003.
- [15] Wood M. Belyi-extending maps and the Galois action on dessin d'enfants. — 2005. — [arXiv.math/0304489v2](https://arxiv.org/abs/math/0304489v2).
- [16] Zapponi L. Fleurs, arbres et cellules: un invariant galoisien pour une famille d'arbres // Compositio Math. — 2000. — Vol. 122. — P. 113—133.

