Перечисление одного класса плоских взвешенных деревьев

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 519.1

Ключевые слова: функция Белого, взвешенные деревья, перечисление деревьев.

Аннотация

Взвешенное дерево — это дерево, каждому ребру и каждой вершине которого приписан вес (целое положительное число), причём для любой вершины сумма весов рёбер, исходящих из неё, равна весу этой вершины. Каждое дерево обладает бинарной структурой: мы можем раскрасить его вершины в два цвета, белый и чёрный, так, чтобы смежные вершины имели разные цвета. Рассматривается следующая задача: найти количество плоских взвешенных деревьев с заданным множеством весов белых вершин и заданным множеством весов чёрных вершин.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Enumeration of one class of plane weighted trees, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 171—184.

We present an enumeration formula for weighted trees, i.e., trees where vertices and edges have weights (a weight is a positive integer) and the weight of each vertex is equal to the sum of the weights of the edges incident to it. Each tree has a binary structure: we can color its vertices in two colors, black and white, so that adjacent vertices have different colors. In this work, the following problem is considered: enumerate weighted plane trees with given sets of weights of black and white vertices.

1. Введение

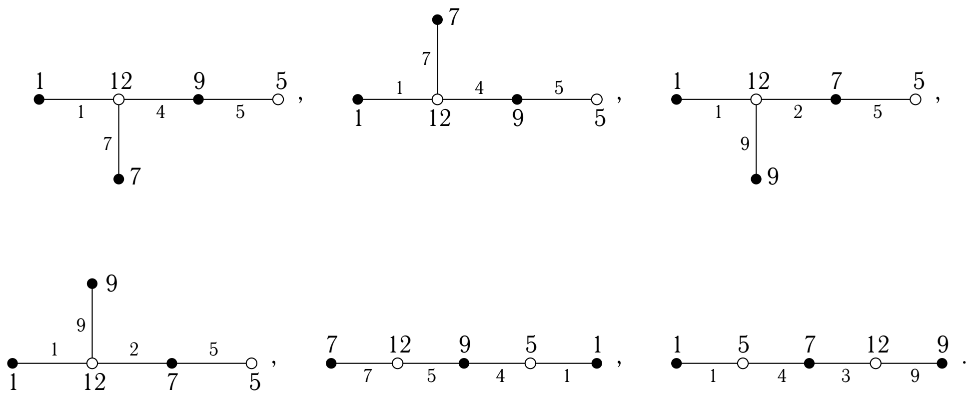
Мы будем рассматривать плоские связные деревья, рёбра и вершины которых имеют вес (целое положительное число), причём для каждой вершины сумма весов рёбер, из неё выходящих, равна весу этой вершины. Такое дерево мы будем называть *w-деревом* (см. [3]).

На связном дереве можно задать бинарную структуру, т. е. раскрасить вершины дерева в два цвета, белый и чёрный, так, чтобы смежные вершины имели разные цвета. Мы будем заниматься следующей задачей: перечислить все w-деревья с заданным списком весов белых вершин и заданным списком весов чёрных вершин. Два таких списка мы будем называть *типом* w-дерева и

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 171—184.

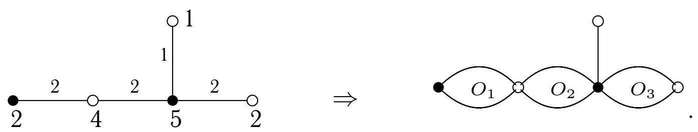
обозначать $\langle k_1, k_2, \ldots, k_s \mid l_1, \ldots, l_t \rangle$. Здесь $k_1, \ldots, k_s$ — веса белых вершин, записанные в порядке неубывания, а $l_1, l_2, \ldots, l_t$ — веса чёрных вершин (также записанные в порядке неубывания). Очевидно, что $k_1 + \ldots + k_s = l_1 + \ldots + l_t$. Число вершин типа Ξ будет обозначаться $\mathrm{v}(\Xi)$.

Пример 1. Перечислим w-деревья, принадлежащие типу $\langle 5, 12 \mid 1, 7, 9 \rangle$. Их шесть:



2. Плоские рисунки, функции Белого и антивандермондовы системы

Поставим в соответствие w-дереву древовидный граф на плоскости с кратными рёбрами:



При этом вес вершины становится просто её валентностью, а вес ребра интерпретируется как его кратность. Дополнение графа состоит из четырёх компонент: трёх ограниченных (компоненты O_1, O_2 и O_3) и одной неограниченной.

Функция Белого такого рисунка — это рациональная функция φ с критическими значениями 0, 1, ∞, такая что граф $\varphi^{-1}[0,1]$ изотопен рисунку. В нашем случае функция φ имеет три простых полюса в точках c_1, c_2, c_3, принадлежащих областям O_1, O_2, O_3 соответственно. Функция φ принимает значение 0 в белых вершинах и значение 1 в чёрных. Не теряя общности, можно считать, что белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке a_1, белая вершина валентности 1 — в точке a_2, чёрная вершина валентности 5 — в точке 1, чёрная вершина валентности 2 — в точке b. Таким образом,

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z^4(z-a_1)^2(z-a_2)}{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)}, \quad \varphi(z) - 1 = \frac{\alpha(z-1)^5(z-b)^2}{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)}.$$

Следовательно,

$$\alpha z^4(z-a_1)^2(z-a_2) - (z-c_1)(z-c_2)(z-c_3) = \alpha(z-1)^5(z-b)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях 6, 5 и 4, мы получаем систему

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2b + 5, \\ a_1^2 + 2a_1a_2 = b^2 + 10b + 10, \\ a_1^2a_2 = 5b^2 + 20b + 10. \end{cases} \tag{1}$$

Так как

$$(2a_1 + a_2)^2 - 2(a_1^2 + 2a_1a_2) = 2a_1^2 + a_2^2, \quad (2b+5)^2 - 2(b^2 + 10b + 10) = 2b^2 + 5,$$

то второе уравнение системы можно записать в виде

$$2a_1^2 + a_2^2 = 2b^2 + 5,$$

а так как

$$3a_1^2a_2 - 3(2a_1 + a_2)(a_1^2 + 2a_1a_2) + (2a_1 + a_2)^3 = 2a_1^3 + a_2^3,$$
$$3(5b^2 + 20b + 10) - 3(2b+5)(b^2 + 10b + 10) + (2b+5)^3 = 2b^3 + 5,$$

то третье уравнение системы можно записать в виде

$$2a_1^3 + a_2^3 = 2b^3 + 5.$$

В результате мы получаем так называемую *антивандермондову* систему [2]:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - 2b - 5 = 0, \\ 2a_1^2 + a_2^2 - 2b^2 - 5 = 0, \\ 2a_1^3 + a_2^3 - 2b^3 - 5 = 0. \end{cases}$$

Число конечных решений такой системы не больше 6, но в нашем случае оно равно 4.

В общем случае w-деревьям типа $\langle k_1, k_2, \ldots, k_s \mid l_1, l_2, \ldots, l_t \rangle$ мы ставим в соответствие плоские древовидные графы с s белыми вершинами валентностей $k_1, k_2, \ldots, k_s$ и t чёрными вершинами валентностей $l_1, l_2, \ldots, l_t$. У такого графа $n = k_1 + \ldots + k_s = l_1 + \ldots + l_t$ рёбер, и его дополнение есть объединение $m = n + 1 - s - t$ ограниченных областей и одной неограниченной. Функция Белого такого рисунка — это рациональная функция φ с простыми полюсами в точках $c_1, \ldots, c_m$ — по одному полюсу внутри каждой ограниченной области. Пусть белые вершины графа находятся в точках $a_1, \ldots, a_s$, а чёрные — в точках $b_1, \ldots, b_t$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{\alpha(z-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_s)^{k_s}}{(z-c_1) \cdot \ldots \cdot (z-c_m)} = \frac{\alpha(z-b_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (z-b_t)^{l_t}}{(z-c_1) \cdot \ldots \cdot (z-c_m)} + 1.$$

Следовательно,

$$\alpha(z-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-a_s)^{k_s}=\alpha(z-b_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(z-b_t)^{l_t}+(z-c_1)\cdot\ldots\cdot(z-c_m).$$

Приравнивая коэффициенты при степенях $z^{m+1},\ldots,z^{n-1}$ в правой и левой частях этого равенства, мы получим систему из $n-1-m=s+t-2$ уравнений с $s+t$ неизвестными $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t$. Мы можем положить, например, $a_s=0$ и $b_t=1$ и получить полиномиальную систему из $s+t-2$ уравнений с $s+t-2$ неизвестными, число решений которой не больше $(s+t-2)!$.

В следующем разделе мы покажем, что систему вида (1) всегда можно преобразовать в антивандермондову.

3. Приведение к антивандермондовой системе

Пусть

$$s=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{k_i}=x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\ldots,\quad \text{где}\quad n=\sum_{i=1}^{m}k_i.$$

Теорема 1. *Существуют многочлены с рациональными коэффициентами: q_1 от одной переменной, q_2 от двух переменных и т. д., такие что*

$$q_i(s_1,\ldots,s_i)=k_1a_1^i+\ldots+k_ma_m^i,$$

причём коэффициенты этих многочленов зависят только от числа i.

Доказательство. Рассмотрим вместо s произведение

$$s'=\prod_{i=1}^{m}(1-xa_i)^{k_i}=1-s_1x+s_2x^2+\ldots.$$

Тогда

$$\ln(s')=\sum_{i=1}^{m}k_i\ln(1-xa_i)=$$
$$=-\Bigl(\sum_{i=1}^{m}k_ia_i\Bigr)x-\frac{1}{2}\Bigl(\sum_{i=1}^{m}k_ia_i^2\Bigr)x^2-\frac{1}{3}\Bigl(\sum_{i=1}^{m}k_ia_i^3\Bigr)x^3-\ldots.\qquad(2)$$

С другой стороны,

$$\ln(s')=-(s_1x-s_2x^2+\ldots)-\frac{1}{2}(s_1x-s_2x^2+\ldots)^2-\frac{1}{3}(s_1x-s_2x^2+\ldots)^3-\ldots.\qquad(3)$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при степенях x в (2) и (3), получаем требуемые многочлены. Так,

$$q_1=x_1,$$
$$q_2=-2x_2+x_1^2,$$

$$
\begin{aligned}
&q_3 = 3x_3 - 3x_1x_2 + x_1^3,\\
&q_4 = -4x_4 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_1^2x_2 + x_1^4,\\
&q_5 = 5x_5 - 5x_1x_4 - 5x_2x_a3 + 5x_1^2x_3 + 5x_1x_2^2 - 5x_1^3x_2 + x_1^5,\\
&q_6 = -6x_6 + 6x_1x_5 + 6x_2x_4 + 3x_3^2 - 6x_1^2x_4 - 12x_1x_2x_3 - 2x_2^3 +\\
&\quad + 6x_1^3x_3 + 9x_1^2x_2^2 - 6x_1^4x_2 + x_1^6.
\end{aligned}
$$ □

Пусть

$$\prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{k_i} = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots$$

и

$$\prod_{i=1}^{t}(x-b_i)^{l_i} = x^n - t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \ldots .$$

Тогда $s_i = t_i$ при $i = 1, \ldots, s+t-2$, и система

$$s_1 = t_1, \quad q_2(s_1, s_2) = q_2(t_1, t_2), \quad q_3(s_1, s_2, s_3) = q_3(t_1, t_2, t_3), \ldots$$

является требуемой антивандермондовой системой.

4. Простые неразложимые типы

Определение 1. Мы будем говорить, что тип $\Xi = \langle k_1, k_2, \ldots, k_s \mid l_1, l_2, \ldots, l_t\rangle$ *простой*, если числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ попарно различны и числа $l_1, l_2, \ldots, l_t$ также попарно различны. Мы будем говорить, что тип *разложим*, если существует собственное подмножество $I \subset \{1, \ldots, s\}$ и собственное подмножество $J \subset \{1, \ldots, t\}$, такие что $\sum\limits_{i\in I} k_i = \sum\limits_{j\in J} l_j$. В этом случае $\langle\{k_i\}_{i\in I} \mid \{l_j\}_{j\in J}\rangle$ тоже тип, который мы будем называть *подтипом* типа Ξ.

Теорема 2. *Пусть $\langle k_1, k_2, \ldots, k_s \mid l_1, l_2, \ldots, l_t\rangle$ — простой неразложимый тип. Тогда этот тип содержит ровно $(s+t-2)!$ попарно различных w-деревьев.*

Замечание 1. В предположении, что соответствующая антивандермондова система не имеет кратных решений, эта теорема была доказана В. Дрёмовым [1].

Доказательство. Белую вершину веса k_s поместим в 0, чёрную вершину веса l_t — в единицу. Рассмотрим соответствующую антивандермондову систему

$$
\begin{cases}
k_1x_1 + \ldots + k_{s-1}x_{s-1} - l_1y_1 - \ldots - l_{t-1}y_{t-1} - l_t = 0,\\
\quad\ldots\\
k_1x_1^{s+t-2} + \ldots + k_{s-1}x_{s-1}^{s+t-2} - l_1y^{s+t-2} - \ldots - l_{t-1}y_{s-1}^{l+s-2} - l_t = 0.
\end{cases}
$$

Покажем, что у этой системы нет решений на бесконечности.

Если решение на бесконечности есть, то оно удовлетворяет системе

$$\begin{cases} k_1x_1+\ldots+k_{s-1}x_{s-1}-l_1y_1-\ldots-l_{t-1}y_{t-1}=0,\\ \quad\ldots\\ k_1x_1^{s+t-2}+\ldots+k_{s-1}x_{s-1}^{s+t-2}-l_1y^{s+t-2}-\ldots-l_{t-1}y_{s-1}^{l+s-2}=0.\end{cases}$$

Будем рассматривать её как однородную систему с неизвестными k_i, l_j. Так как эта система имеет ненулевое решение, то определитель её матрицы равен нулю, т. е.

$$\prod_{i=1}^{s-1}x_i\prod_{j=1}^{t-1}y_j\prod_{1\leqslant i<j\leqslant t-1}(x_i-x_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant t-1}(y_i-y_j)\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant s-1,\\ 1\leqslant j\leqslant t-1}}(x_i-y_j)=0.$$

Это условие позволяет исключить один из параметров x_i или y_j и получить аналогичную систему с меньшим числом неизвестных и уравнений. Этот процесс остановится, когда станет равным нулю коэффициент при какой-то неизвестной x_i или y_j. Но это в точности означает, что тип разложим.

Теперь покажем, что у нашей системы нет кратных решений. Антивандермондова система

$$\begin{cases} k_1x_1+\ldots+k_nx_n+1=0,\\ \quad\ldots\\ k_1x_1^n+\ldots+k_nx_n^n+1=0\end{cases}$$

задаёт многозначное отображение из n-мерного координатного пространства K с координатами $k_1,\ldots,k_n$ в n-мерное координатное пространство X с координатами $x_1,\ldots,x_n$. Якобиан этого отображения равен

$$\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i-x_j}{/n!}\prod_{i=1}^{n}k_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j).$$

Мы видим, что кратное решение может появиться либо когда одно из неизвестных обращается в нуль, либо когда значения двух неизвестных совпадают. Далее рассуждаем, как выше.

Мы показали, что у нашей системы нет решений на бесконечности и нет кратных решений. Следовательно, она имеет $(s+t-2)!$ попарно различных конечных решений. $\square$

5. Простые разложимые типы

Если тип Ξ разложим, то число w-деревьев в нём меньше, чем $(\mathrm{v}(\Xi)-2)!$ Обозначим через $|\Xi|$ число w-деревьев в типе Ξ.

Пример 2.

$$|\langle 1,5,7 \mid 2,4,7\rangle| = 18, \qquad |\langle 1,3,11 \mid 4,5,6\rangle| = 20,$$
$$|\langle 1,2,4 \mid 1,2,4\rangle| = 11, \qquad |\langle 1,2,4,5 \mid 1,2,9\rangle| = 72,$$
$$|\langle 1,2,3 \mid 1,2,3\rangle| = 7, \qquad |\langle 1,2,6,10 \mid 4,5,10\rangle| = 96.$$

Определение 2. n-разбиением типа $\Xi = \langle k_1, k_2, \ldots, k_s \mid l_1, l_2, \ldots, l_t\rangle$ мы будем называть такое представление множества $\{1, \ldots, s\}$ в виде объединения n попарно непересекающихся непустых подмножеств $I_1, \ldots, I_n$ и множества $\{1, \ldots, t\}$ в виде объединения n попарно непересекающихся непустых подмножеств $J_1, \ldots, J_n$, что

$$\sum_{i\in I_1} k_i = \sum_{j\in J_1} l_j, \ldots, \ \sum_{i\in I_n} k_i = \sum_{j\in J_n} l_j.$$

Мы будем говорить, что тип Ξ есть объединение подтипов $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$:

$$\Xi = \Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n,$$

где

$$\Xi_1 = \langle \{k_i \mid i \in I_1\} \mid \{l_j \mid j \in J_1\}\rangle, \ldots, \ \Xi_n = \langle \{k_i \mid i \in I_n\} \mid \{l_j \mid j \in J_n\}\rangle.$$

Замечание 2. Сам тип можно рассматривать как его 1-разбиение.

Теорема 3. *Число w-деревьев в типе Ξ вычисляется как сумма слагаемых, отвечающих разбиениям: n-разбиению $\Xi = \Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n$ отвечает слагаемое*

$$(-1)^{n-1}(\mathrm{v}(\Xi) - 1)^{n-2} \prod_{m=1}^{n} (\mathrm{v}(\Xi_i) - 1)!.$$

Пример 3.

1. У типа $\langle 7,5,1 \mid 7,4,2\rangle$ есть только одно нетривиальное разбиение (2-разбиение):

$$\langle 7,5,1 \mid 7,4,2\rangle = \langle 7 \mid 7\rangle \cup \langle 5,1 \mid 4,2\rangle.$$

Имеем

$$|\langle 7,5,1 \mid 7,4,2\rangle = 4! - 3! = 18.$$

2. У типа $\langle 4,2,1 \mid 4,2,1\rangle$ есть следующие нетривиальные разбиения:

1) 2-разбиение $\langle 4 \mid 4\rangle \cup \langle 2,1 \mid 2,1\rangle$;
2) 2-разбиение $\langle 2 \mid 2\rangle \cup \langle 4,1 \mid 4,1\rangle$;
3) 2-разбиение $\langle 1 \mid 1\rangle \cup \langle 4,2 \mid 4,2\rangle$;
4) 3-разбиение $\langle 4 \mid 4\rangle \cup \langle 2 \mid 2\rangle \cup \langle 1 \mid 1\rangle$.

Имеем

$$|\langle 4,2,1 \mid 4,2,1\rangle| = 4! - 3! - 3! - 3! + 5 = 11.$$

3. У типа $\langle 3,2,1 \mid 3,2,1\rangle$ есть следующие нетривиальные разбиения:

1) 2-разбиение $\langle 3 \mid 3\rangle \cup \langle 2,1 \mid 2,1\rangle$;
2) 2-разбиение $\langle 2 \mid 2\rangle \cup \langle 3,1 \mid 3,1\rangle$;
3) 2-разбиение $\langle 1 \mid 1\rangle \cup \langle 3,2 \mid 3,2\rangle$;
4) 2-разбиение $\langle 3 \mid 2,1\rangle \cup \langle 2,1 \mid 3\rangle$;
5) 3-разбиение $\langle 3 \mid 3\rangle \cup \langle 2 \mid 2\rangle \cup \langle 1 \mid 1\rangle$.

Имеем

$$|\langle 3,2,1 \mid 3,2,1\rangle| = 4! - 3! - 3! - 3! - 2!\cdot 2! + 5 = 7.$$

Замечание 3. Мы можем рассматривать w-деревья с нецелыми весами. Всё, что нам нужно, — чтобы сумма весов белых вершин была равна сумме весов чёрных. Решение соответствующей антивандермондовой система даёт нам положение вершин w-дерева на плоскости.

Доказательство. Шаг 1. Пусть наш тип Ξ допускает только одно разбиение, а именно 2-разбиение $\Xi = \Xi' \cup \Xi''$, $\mathrm{v}(\Xi') = k$, $\mathrm{v}(\Xi'') = l$.

Зададим «деформацию» $\tilde{\Xi}$ нашего типа Ξ, увеличив вес какой-либо белой вершины v из Ξ' на малое ε и увеличив вес чёрной вершины u из Ξ'' на то же ε. Полученный тип неразложим и содержит $(\mathrm{v}(\Xi) - 2)!$ w-деревьев. Если T — некоторое w-дерево из $\tilde{\Xi}$, то веса его рёбер — целые числа, за исключением рёбер пути от v к u. Вес такого ребра отличен от целого числа на ε в бо́льшую или меньшую сторону. Если среди рёбер пути есть ребро веса ε (ε-мостик), то при $\varepsilon = 0$ такого w-дерева в типе Ξ нет — потеряна связность.

Следовательно, нам нужно найти число w-деревьев в типе $\tilde{\Xi}$, у которых есть ε-мостик. Отметим, что ε-мостик соединяет белую вершину x из подтипа Ξ' и чёрную вершину y из подтипа Ξ': в белую вершину x путь из вершины v приходит с весом $p-\varepsilon$ (p — целое число), аналогично в чёрную вершину y путь из u приходит с весом $q - \varepsilon$. Таким образом, построение дерева с ε-мостиком происходит следующим образом: выбираем дерево T' из Ξ' и дерево T'' из Ξ'' ($(k-2)!\,(l-2)!$ способов); выбираем белую вершину в T' и направление выходящего из неё ε-мостика (число способов сделать это равно числу рёбер дерева T', т. е. $k-1$); выбираем чёрную вершину в T'' и направление входящего в неё ε-мостика ($l-1$ способ). Следовательно,

$$|\Xi| = (s+t-2)! - (k-1)!\,(l-1)!.$$

Шаг 2. Пусть наш тип допускает только 2-разбиения, и $\Xi_1' \cup \Xi_1'', \ldots, \Xi_n' \cup \Xi_n''$ — все 2-разбиения типа Ξ. Обозначим через k_i число вершин подтипа Ξ_i', а через l_i — число вершин подтипа Ξ_i''.

Выберем белую вершину x в Ξ_n' и чёрную вершину y в Ξ_n''. Увеличим их веса на ε. Полученный тип $\tilde{\Xi}$ может иметь только 2-разбиения (количество 2-разбиений строго меньше n), и пусть в типе $\tilde{\Xi}$ сохранились лишь первые k 2-разбиений типа Ξ. Это означает, что при $i \leqslant k$ вершины x и y обе лежат или в Ξ_i', или в Ξ_i'', а при $i > k$ одна из этих вершин лежит в Ξ_i', а другая — в Ξ_i''.

По предположению индукции

$$|\tilde{\Xi}| = (s+t-2)! - \sum_{i=1}^{k} (k_i-1)!\,(l_i-1)!.$$

Теперь нам нужно найти число деревьев в типе $\tilde{\Xi}$, у которых есть ε-мостик.

Пусть T — такое дерево. При $\varepsilon = 0$ дерево T распадается на два (именно два) поддерева T_1 и T_2, причём T_1 — это дерево из некоторого подтипа Ξ_i', а T_2 — из Ξ_i'', $i > k$. Как и выше, получаем, что число таких деревьев равно $(k_i-1)!\,(l_i-1)!$. Теперь, суммируя по i, получаем требуемую формулу.

Шаг 3. Пусть теперь тип Ξ допускает ровно одно 3-разбиение: $\Xi = \Xi_1 \cup \cup\, \Xi_2 \cup \Xi_3$, причём 2-разбиениями типа Ξ являются только

$$\Xi_1 \oplus (\Xi_2 \cup \Xi_3), \quad \Xi_2 \oplus (\Xi_1 \cup \Xi_3), \quad \Xi_3 \oplus (\Xi_1 \cup \Xi_2),$$

где через $\Xi' \oplus \Xi''$ обозначен тип, у которого множество белых (чёрных) весов есть объединение множества белых (чёрных) весов типа Ξ' и множества белых (чёрных) весов типа Ξ''. Пусть подтипы Ξ_1, Ξ_2 и Ξ_3 имеют k, l и m вершин соответственно. Увеличим вес какой-либо белой вершины x из Ξ_1 на ε и вес какой-либо чёрной вершины y из Ξ_2 на то же ε. Полученный тип $\tilde{\Xi}$ допускает только одно разбиение, а именно 2-разбиение $(\tilde{\Xi}_1 \oplus \tilde{\Xi}_2) \cup \Xi_3$. Следовательно,

$$|\tilde{\Xi}| = (k+l+m-2)! - (m-1)!\,(k+l-1)!.$$

Теперь будем искать число деревьев с ε-мостиками. Таких мостиков может быть один или два. В первом случае либо дерево из Ξ_1 соединено ε-мостиком с деревом из $\Xi_2 \oplus \Xi_3$, либо дерево из Ξ_2 соединено ε-мостиком с деревом из $\Xi_1 \oplus \Xi_3$. Следовательно, деревьев с одним ε-мостиком будет

$$\begin{gathered}(k-1)!\,(l+m-1)\big((l+m-2)! - (l-1)!\,(m-1)!\big) + \\ + (l-1)!\,(k+m-1)\big((k+m-2)! - (k-1)!\,(m-1)!\big).\end{gathered}$$

Дерево с двумя мостиками строится так: выбираем дерево T_1 из Ξ_1, дерево T_2 из Ξ_2 и дерево T_3 из Ξ_3. Белую вершину дерева T_1 соединяем мостиком с чёрной вершиной дерева T_3, а чёрную вершину дерева T_2 соединяем мостиком с белой вершиной дерева T_3. Следовательно, деревьев с двумя ε-мостиками будет $(k-1)!\,(l-1)!\,(m-1)!\,(m-1)$. Теперь легко проверить, что мы получаем требуемую формулу.

Шаг 4. Пусть тип Ξ допускает только 2- и 3-разбиения. Мы увеличиваем на ε вес одной белой и одной чёрной вершины так, чтобы количество 3-разбиений уменьшилось. Далее проводим индукцию, как во втором шаге.

Шаг 5. Пусть тип Ξ допускает одно 4-разбиение: $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \Xi_3 \cup \Xi_4$, причём 2- и 3-разбиениями типа Ξ являются только разбиения, сконструированные из подтипов Ξ_i. Пусть число вершин в подтипе Ξ_1 равно k, в подтипе Ξ_2 — l, в подтипе Ξ_3 — m и в подтипе Ξ_4 — n.

Как и выше, определим деформацию $\tilde{\Xi}$ типа Ξ, увеличив вес некоторой белой вершины подтипа Ξ_1 на малое ε и вес некоторой чёрной вершины подтипа Ξ_2 на то же ε. После этого нам нужно найти количество деревьев типа $\tilde{\Xi}$ с ε-мостиками и вычесть это число из $|\tilde{\Xi}|$. Достаточно убедиться, что полученное выражение содержит слагаемое $(k+l+m+n-1)^2(k-1)!\,(l-1)!\,(m-1)!\,(n-1)!$ (за другие слагаемые отвечают 2- и 3-разбиения). Мы будем последовательно перебирать классы деревьев с мостиками и указывать, с каким коэффициентом входит произведение $(k-1)!\,(l-1)!\,(m-1)!\,(n-1)!$ в число деревьев в каждом классе.

Класс $(\Xi_1 \oplus \Xi_3 \oplus \Xi_4) \cup \Xi_2$. Один мостик. Коэффициент $(k+m+n-1)^2$.
Класс $(\Xi_1 \oplus \Xi_3) \cup (\Xi_2 \oplus \Xi_4)$. Один мостик. Коэффициент $(k+m-1)(l+n-1)$.
Класс $(\Xi_1 \oplus \Xi_4) \cup (\Xi_2 \oplus \Xi_3)$. Один мостик. Коэффициент $(k+n-1)(l+m-1)$.
Класс $\Xi_1 \cup (\Xi_2 \oplus \Xi_3 \oplus \Xi_4)$. Один мостик. Коэффициент $(l+m+n-1)^2$.
Класс $(\Xi_1 \oplus \Xi_3) \cup \Xi_4 \cup \Xi_2$. Два мостика. Коэффициент $-(k+m-1)(n-1)$.
Класс $(\Xi_1 \oplus \Xi_4) \cup \Xi_3 \cup \Xi_2$. Два мостика. Коэффициент $-(k+n-1)(m-1)$.
Класс $\Xi_1 \cup (\Xi_3 \oplus \Xi_4) \cup \Xi_2$. Два мостика. Коэффициент $-(m+n-1)^2$.
Класс $\Xi_1 \cup \Xi_3 \cup (\Xi_2 \oplus \Xi_4)$. Два мостика. Коэффициент $-(l+n-1)(m-1)$.
Класс $\Xi_1 \cup \Xi_4 \cup (\Xi_2 \oplus \Xi_3)$. Два мостика. Коэффициент $-(l+m-1)(n-1)$.
Класс $\Xi_1 \cup \Xi_3 \cup \Xi_4 \cup \Xi_2$. Три мостика. Коэффициент $2(m-1)(n-1)$.

Нетрудно найти сумму коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&(k+m+n-1)^2 + (k+m-1)(l+n-1) + \\
&\quad + (k+n-1)(l+m-1) + (l+m+n-1)^2 - (k+m-1)(n-1) - \\
&\quad - (k+n-1)(m-1) - (m+n-1)^2 - (l+m-1)(n-1) - \\
&\quad - (l+n-1)(m-1) + 2(m-1)(n-1) = (k+l+m+n-1)^2.
\end{aligned}$$

Это комбинаторное равенство, однако, допускает геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим на плоскости квадрат

$$A = [0, k+l+m+n-1] \times [0, k+l+m+n-1]$$

и в нём четыре прямоугольника:

$$\begin{aligned}
A_1 &= [0, k+m+n-1] \times [0, k+m+n-1],\\
A_2 &= [k, k+l+m+n-1] \times [k, k+l+m+n-1],\\
A_3 &= [0, k+m-1] \times [k+m, k+l+m+n-1],\\
A_4 &= [k+n, k+l+m+n-1] \times [0, k+n-1].
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&A_1 \cap A_2 = [k, k+m+n-1] \times [k, k+m+n-1],\\
&A_1 \cap A_3 = [0, k+m-1] \times [k+m, k+m+n-1],\\
&A_1 \cap A_4 = [k+n, k+m+n-1] \times [0, k+n-1],\\
&A_2 \cap A_3 = [k, k+m-1] \times [k+m, k+l+m+n-1],\\
&A_2 \cap A_4 = [k+n, k+l+m+n-1] \times [k, k+n-1],\\
&A_3 \cap A_4 = \varnothing,\\
&A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [k, k+m-1] \times [k+m, k+m+n-1],\\
&A_1 \cap A_2 \cap A_4 = [k+n, k+m+n-1] \times [k, k+n-1].
\end{aligned}$$

Таким образом, наше равенство — это просто формула включения-исключения.

Шаг 6. В общем случае мы рассматриваем разбиение типа Ξ, аналогичное разбиению в шаге 5, но являющееся (n+2)-разбиением, и так же строим деформацию $\tilde{\Xi}$. Нам нужно найти коэффициент, с которым в формулу, описывающую число деревьев с мостиками, входит произведение $\prod\limits_{i=1}^{n+2}(m_i-1)!$ (здесь $m_i = \mathrm{v}(\Xi_i)$, $i = 1, \ldots, n+2$). Положим

$$M = m_1 + \ldots + m_{n+2} - 1.$$

Как и выше, мы перечисляем классы деревьев с мостиками и для каждого класса находим соответствующий коэффициент. Класс определяется таким разбиением (допустимым разбиением) множества $\{1, \ldots, n+2\}$ на непересекающиеся подмножества, что числа 1 и 2 входят в *разные* подмножества. Допустимому разбиению отвечает произведение по подмножествам разбиения, а затем мы суммируем по разбиениям.

Фиксируем разбиение. Подмножеству $\{s_1, \ldots, s_p\} \subset \{1, \ldots, n+2\}$ этого разбиения отвечает множитель $(m_{s_1} + \ldots + m_{s_p} - 1)^p$, если $\{1, 2\} \cap \{s_1, \ldots, s_p\} = \varnothing$, и множитель $(m_{s_1} + \ldots + m_{s_p} - 1)^{p-1}$, если $s_1 = 1$ или $s_1 = 2$. Полученное произведение по подмножествам разбиения мы умножаем на $(-1)^{q-2}(q-2)!$, где q — число подмножеств в разбиении.

Нужно доказать, что сумма по всем допустимым разбиениям равна M^n. Приведём доказательство этого утверждения по методу включения-исключения.

Рассмотрим n-мерный куб C — декартово произведение n сегментов $C = [0, M]^n$ и прямые параллелотопы в нём. Параллелотопы перечисляются подмножествами (в том числе и несобственными) множества $N = \{3, \ldots, n+2\}$. Для $A = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{3, \ldots, n+2\}$ положим

$$S_A = \sum_{i \in A} m_i.$$

Определим сегменты

$$[a_i, b_i], \quad i = 1, \ldots, n,$$

следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i+2 \in A, \\ m_1 + S_A, & \text{если } i+2 \notin A; \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} m_1 + S_A - 1, & \text{если } i+2 \in A, \\ M, & \text{если } i+2 \notin A. \end{cases}$$

Параллелотоп Π_A есть декартово произведение $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset C$. Его объём $V(P_A)$ равен $(m_1 + S_A - 1)^{|A|}(M - m_1 - S_A)^{n-|A|}$.

Покажем, что $\bigcup\limits_A P_A = C$. Рассмотрим точку $X = (x_1, \ldots, x_n) \in C$. Если $x_i \leqslant m_1 + m_{i+2} - 1$, $i = 1, \ldots, n$, то $X \in P_N$. Если $x_i \geqslant m_1 + m_{i+2}$, $i = 1, \ldots, n$, то $X \in P_\varnothing$. Пусть теперь $x_i \leqslant m_1 + m_{i+2} - 1$, $i = 1, \ldots, s$, и $x_i \geqslant m_1 + m_{i+2}$, $i = s+1, \ldots, n$. Положим $F = \{3, \ldots, s+2\}$. Если $x_i \leqslant m_1 + S_F - 1$, $i = s+1, \ldots, n$, то $X \in P_N$. Если $x_i \geqslant m_1 + S_F$, $i = s+1, \ldots, n$, то $X \in P_F$. Пусть $m_1 + S_F - 1 \leqslant x_{i-2} \leqslant m_1 + S_F$ для $i \in G \subset \{s+3, \ldots, n+2\}$. Теперь заменяем множество F на множество $F \cup G$.

Параллелотопы Π_A и Π_B имеют непустое пересечение, только если $A \subset B$ (или $B \subset A$). В этом случае

$$V(P_A \cap P_B) = (k + S_B - 1)^{|S_B|}(S_A - S_B - 1)^{|S_A)-|S_B|}(M - k - S_A)^{n-|S_A|}.$$

Одинаковый объём имеют тройные пересечения $P_{A\cup B\cup C} \cap P_{A\cup B} \cap P_A$ и $P_{A\cup B\cup C} \cap P_{A\cup C} \cap P_A$, где $A, B, C \subset \{3, \ldots, n+2\}$ — попарно непересекающиеся подмножества. Аналогично показывается, что для каждого непустого четверного пересечения есть ещё пять того же объёма. □

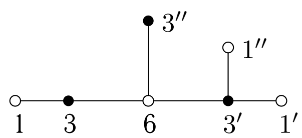
6. Непростые типы

Если тип Ξ не простой, то нумерация вершин (или постановка в соответствие вершинам меток) делает тип простым. Этот тип мы будем называть «производным» и обозначать Ξ'.

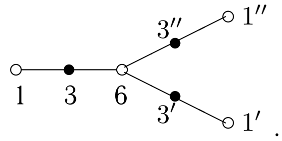
Пример 4. От типа $\langle 6, 1, 1, 1 \mid 3, 3, 3 \rangle$ переходим к типу $\langle 6, 1, 1', 1'' \mid 3, 3', 3'' \rangle$. Этот тип простой, но разложимый: он допускает три 2-разбиения:

1) $\langle 6 \mid 3, 3' \rangle \cup \langle 1, 1', 1'' \mid 3'' \rangle$;
2) $\langle 6 \mid 3, 3'' \rangle \cup \langle 1, 1', 1'' \mid 3' \rangle$;
3) $\langle 6 \mid 3', 3'' \rangle \cup \langle 1, 1', 1'' \mid 3 \rangle$.

Следовательно, этот тип содержит 84 дерева. Из них 72 дерева вида



и 12 деревьев с симметрией третьего порядка



Следовательно, общее количество деревьев в типе $\langle 6,1,1,1 \mid 3,3,3\rangle$ равно

$$\frac{72}{3!\,3!}+\frac{12}{(3!\,3!)/3}=3.$$

Теорема 4. *Пусть Ξ — непростой тип, $k_1,\ldots,k_s$ — различные веса белых вершин, а $l_1,\ldots,l_t$ — различные веса чёрных вершин. Пусть тип Ξ содержит m_1 вершин веса k_1, m_2 вершин веса k_2,…, m_s вершин веса k_s. Аналогично определяются числа $n_1,\ldots,n_t$. Положим*

$$p=\prod_{i=1}^{s}(m_i)!\prod_{i=1}^{t}(n_i)!.$$

Пусть производный тип Ξ' содержит N несимметричных деревьев и M_i, $i=2,3,\ldots$, деревьев с симметрией i-го порядка. Тогда число деревьев в типе Ξ равно

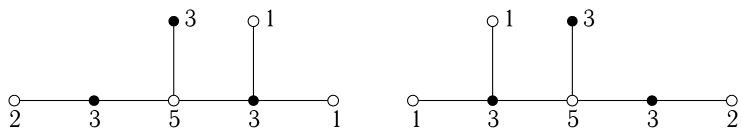
$$\frac{N}{p}+\sum_i\frac{iM_i}{p}.$$

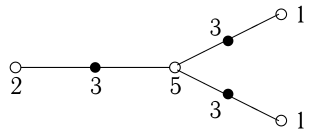
Замечание 4. Тип Ξ содержит дерево с симметрией i-го порядка, $i\geqslant 2$, если

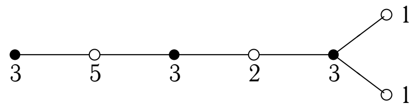
1) существует вершина, вес которой делится на i;
2) во множестве всех остальных вершин для каждого веса и цвета число вершин этого цвета и веса делится на i.

По такому типу мы можем построить тип Ξ/i, у которого вес вершины v уменьшен в i раз, а вершин заданного веса и цвета в i раз меньше, чем в типе Ξ. Так, для типа $\Xi=\langle 6,1,1,1 \mid 3,3,3\rangle$ $\Xi/3=\langle 2,1 \mid 3\rangle$. Каждое дерево типа Ξ/i порождает единственное дерево типа Ξ.

Пример 5. Рассмотрим тип $\Xi=\langle 5,2,1,1, \mid 3,3,3\rangle$ и производный тип $\Xi'=$ $=\langle 5,2,1,1', \mid 3,3',3''\rangle$. Производный тип допускает шесть 2-разбиений, следовательно, $|\Xi'|=120-6\cdot 12=48$. Так как симметричных деревьев здесь нет, то $|\Xi|=4$. Эти четыре дерева приведены ниже.







Литература

[1] Дрёмов В. А. Алгебраическая теория пар Белого: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2012.

[2] Кочетков Ю. Ю. Антивандермондовы системы и плоские деревья // Функц. анал. и его прил. — 2002. — Т. 36, № 3. — С. 83—87.

[3] Zvonkin A., Pakovich F. Minimum degree of the difference of two polynomials over Q and weighted plane trees. — arXiv:1306.4141.