О рациональных функциях с двумя критическими точками максимальной кратности

Д. А. ОГАНЕСЯН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: grag.oganes@gmail.com

УДК 512.772.5

Ключевые слова: алгебраические кривые, функции Белого, пары Фрида, пары Абеля, аппроксимации Паде.

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию функций на алгебраических кривых, дивизор которых имеет вид $nA - nC$. Предложено комбинаторно-топологическое и алгебраическое описание таких функций. Описаны все функции Белого среди таких функций. Случай кривой рода 1 рассмотрен более подробно. Количество функций Белого среди функций, дивизор которых имеет вид $nA-nC$, для рода 1 вычислено явно. Для общих функций такого вида на кривой рода 1 рассматриваются пространство их параметров и метод его вычисления с помощью аппроксимаций Паде.

Abstract

D. A. Oganesyan, Rational functions with two critical points of maximum multiplicity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 185—208.

In this paper, we consider the functions on algebraic curves whose divisors have the form $nA - nC$. Combinatorial-topological and algebraic descriptions are introduced for exploring such functions. All Belyi functions with such divisor are described. The case of curves of genus 1 is considered in more detail. The number of Belyi functions with divisor $nA - nC$ is explicitly calculated. For general functions of this type on a curve of genus 1, we consider the space of the parameters and a method of its calculation that uses the Padé approximation.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию функций на алгебраических кривых, дивизор которых имеет вид $nA - nC$, исследованию прежде всего в контексте теории детских рисунков, пар Белого и функций с небольшим числом критических значений. Выбор данного вида дивизоров можно объяснить как простотой и упрощением вычислений конкретных примеров пар Белого, так и возникающими связями с другими областями математики.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 185—208.

Подобные функции в связи с вычислением квазиэллиптического интеграла появлялись уже в работах Н. Х. Абеля [5], что оправдывает название *пара Абеля*, введённое в работе для пары кривой и функции с дивизором $nA - nC$.

В разделах 3 и 4 вводятся комбинаторно-топологические средства для изучения пар Абеля, которые будут использоваться в дальнейшем. По аналогии с парами Белого общей паре Абеля ставится в соответствие вложенный граф $\Gamma_{X,\alpha}$. По графу определяется и комбинаторное описание пар Абеля.

В разделе 5 рассматриваются пары Абеля на кривых рода 1. Эти пары параметризуются модулярными кривыми $X_1(n)$. Основным результатом является введение функции Белого $\varkappa_n$ на $X_1(n)$ и описание её детского рисунка (утверждение 5.9).

В разделе 6 рассматриваются инварианты Галуа пар Белого, являющихся парами Абеля.

В разделе 7 рассматривается метод вычисления пар Абеля рода 1, а также связанные с этим вопросы о редукции пар Белого—Абеля в полях положительной характеристики.

В известной автору литературе подобные вопросы уже поднимались. Например, в [7] изучается p-адическая редукция пар Белого—Абеля, в [6] имеются подобные рассмотрения для рода 1.

Выражаю благодарность моему научному руководителю Георгию Борисовичу Шабату за помощь и консультации при выполнении работы, а также участниками семинара механико-математического факультета МГУ «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за ценные советы и замечания к моей работе.

2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. Карты и рисунки

Определение 2.1 [2]. *Картой* M называется пара (X, Γ), где X — компактная связная ориентированная поверхность, а Γ — граф на ней, такой что

1) рёбра Γ являются несамопересекающимися кривыми на X, не имеющими общих точек, отличных от вершин;
2) каждая из связных компонент дополнения $X \setminus \Gamma$ (называемая клеткой) гомеоморфна открытому диску.

Замечание 2.2. Из второго условия следует, что граф должен быть связным. Граф может иметь петли и кратные рёбра.

Определение 2.3. Две карты $M_1 = (X_1, \Gamma_1)$ и $M_2 = (X_2, \Gamma_2)$ называются *изоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $u \colon X_1 \to X_2$, ограничение которого на Γ_1 является изоморфизмом графов Γ_1 и Γ_2.

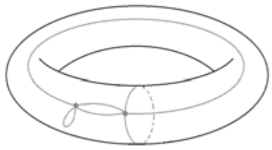

Рис. 1. Пример карты на торе

Теорема 2.4 (формула Эйлера). *Пусть* (X,Γ) *— карта. Тогда*

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2 - 2g(X),$$

где $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $F(\Gamma)$ *— вершины, рёбра и грани карты соответственно и* $g(X)$ *— род поверхности* X.

Определение 2.5. *Детским рисунком* называется карта, вершины которой раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Набор валентностей детского рисунка: $(a_1, \ldots, a_k \mid b_1, \ldots, b_m \mid c_1, \ldots, c_l)$, где a_i — валентности чёрных вершин, b_i — валентности белых вершин, c_i — число белых вершин на границе клеток.

Определение 2.6. Детский рисунок называется *чистым*, если валентности всех его белых вершин равны 2.

Определение 2.7. Пусть D — детский рисунок на поверхности X. Разместим внутри каждой грани новую вершину; заменим на эти новые вершины чёрные вершины исходного рисунка. Соединим белые вершины исходного рисунка с новыми вершинами, на границах граней которых они лежат. Полученный детский рисунок D^* будем называть двойственным к исходному.

Определение 2.8. Детский рисунок называется *самодвойственным*, если он изоморфен своему двойственному.

Определение 2.9. Торический рисунок D называется *центрально-симметричным*, если он может быть получен факторизацией евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ по некоторой решётке L, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/L \simeq X$, так, что прообраз графа $u^{-1}(\Gamma)$ центрально-симметричен в обычном смысле слова.

2.2. Пары Белого

Определение 2.10. *Парой Белого* (X,β) называется алгебраическая кривая X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ и непостоянная рациональная функция β (функция Белого), заданная на X, имеющая не более трёх критических значений. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над одним из критических значений имеют порядок 2.

Теорема 2.11 [4]. *Подходящим образом определённая категория детских рисунков эквивалентна категории пар Белого над* $\mathbb{C}$.

Для пары Белого (X, β) над $\mathbb{C}$ дробно-линейным преобразованием переведём критические точки в $\{0, 1, \infty\}$. Рассмотрим прообраз $\beta^{-1}([0, 1])$ отрезка $[0, 1]$. Он является картой на X. Раскрасим вершины $\beta^{-1}(0)$ в чёрный цвет, а вершины $\beta^{-1}(1)$ в белый. Тогда получим детский рисунок, соответствующий (X, β).

Теорема 2.12 [4]. *Торический рисунок центрально-симметричен тогда и только тогда, когда некоторая его модель соответствует эллиптической кривой, заданной уравнением $y^2 = P(x)$, где $P \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$, и функции Белого, зависящей только от x.*

Теорема 2.13 (Г. В. Белый). *Любая пара Белого (X, β) над $\mathbb{C}$ допускает модель над полем алгебраических чисел $\bar{\mathbb{Q}}$.*

Эта теорема позволяет задать на парах Белого и соответственно на детских рисунках действие абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Орбиты при этом действии называются орбитами Галуа.

Сразу заметим, что набор валентностей рисунка является инвариантом Галуа, так как кратности нулей β не меняются при действии $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Также инвариантами Галуа являются свойства центральносимметричности и самодвойственности [2].

2.3. Пары Фрида

Определение 2.14. *Парой Фрида* (X, φ) называется алгебраическая кривая X над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ и непостоянная рациональная функция φ (функция Фрида), заданная на X, имеющая не более четырёх критических значений.

Определение 2.15. *Семейством Фрида* называется четвёрка $(\mathcal{X}, B, \pi, \Phi)$, где $\mathcal{X}$ — поверхность, B — кривая, $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ и $\Phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{P}_1$ — морфизмы, такие что общий слой π — гладкая полная кривая и ограничение Φ на слой $\pi^{-1}(b)$ — функция Фрида.

Определение 2.16. Пусть $(\mathcal{X}, B, \pi, \Phi)$ — семейство Фрида. Для $b \in B$ рассмотрим функцию Фрида $\Phi|_{\pi^{-1}(b)}$ и её четыре критических значения в $\mathbb{P}_1$. Обозначим их двойное отношение как $\beta_{bas}(b)$.

Замечание 2.17. В общем случае так определённая β_{bas} является шестизначной. Для того чтобы эта функция стала корректно определённой, в общем случае потребуется такое расширение базы семейства Фрида, что критические значения каждой пары Фрида будут занумерованы и, соответственно, будет однозначно определено их двойное отношение. Тогда β_{bas} будет функцией Белого на базе.

В контексте данной работы два критических значения максимальной кратности выделены и полагаются равными 0 и ∞, и потому β_{bas} определена с точностью до перестановки двух оставшихся критических значений k_1, k_2, т. е. с точностью до обращения двойного отношения, которое равно k_1/k_2 или k_2/k_1.

2.4. Аппроксимации Паде

Определение 2.18. *Аппроксимацией Паде* функции $f(x)$ порядка $[n, m]$ называется отношение двух многочленов

$$R_{[n,m]} = \frac{p_{[n,m]}(x)}{q_{[n,m]}(x)}, \quad \deg p_{[n,m]}(x) \leqslant m, \quad \deg q_{[n,m]}(x) \leqslant n,$$

для которого $f^{(i)}(0) = R^{(i)}_{[n,m]}(0)$ при $0 \leqslant i \leqslant m + n$.

Замечание 2.19. Аппроксимация Паде функции $f(x)$ определяется коэффициентами ряда Тейлора $f(x)$, т. е. фактически определена по формальному степенному ряду. Это показывает, что определение корректно для любого поля констант.

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Положим $c_i = 0$ при $i < 0$. Тогда пусть

$$Q_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ x^m & x^{m-1} & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

и

$$P_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ \sum\limits_{i=0}^{n-m} c_i x^i & \sum\limits_{i=0}^{n-m+1} c_i x^i & \cdots & & \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.20 (К. Г. Я. Якоби). *Если*

$$Q_{[n,m]}(0) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n+m-2} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то $\frac{P_{[m,n]}(x)}{Q_{[m,n]}(x)}$ *является аппроксимацией Паде ряда* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i z^i$.

Доказательство можно найти в [1].

2.5. Пространство Гурвица

Мы будем рассматривать кривые и функции на них над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ (обычно $\mathbb{C}$ или $\bar{\mathbb{Q}}$, в конце работы будет рассматриваться и $\overline{\mathbb{F}_p}$). В случае положительной характеристики будем рассматривать только сепарабельные морфизмы.

Определение 2.21. Под пространством Гурвица $\mathcal{HUR}_{g,n}$ понимается пространство классов изоморфизмов пар (X, ψ), где X — алгебраическая кривая и ψ — рациональная функция на ней; такие пары (X_1, ψ_1) и (X_2, ψ_2) считаются изоморфными, если существует такой изоморфизм $f\colon X_1 \to X_2$, что $\psi_2 \circ f = \psi_1$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\psi_2"] \\ & \mathbb{P}^1(\Bbbk) & \end{tikzcd}.$$

2.6. Пары Абеля

Рассматриваемые функции α имеют две критические точки максимальной кратности, поэтому все рассматриваемые пары лежат в замыкании страта пространства Гурвица $\mathcal{HUR}_{g,n}$ с набором валентностей

$$\begin{pmatrix} n & n & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть A и B — две критические точки максимальной кратности. Удобно будет предположить, что $\alpha(A) = 0$ и $\alpha(B) = \infty$. Таким образом мы приходим к рассмотрению подмногообразия пространства Гурвица, которое будем обозначать

$$\mathcal{HUR}^{\infty 0}_{g,n} := \{(X, \alpha) \mid \operatorname{div}(\alpha) = nA - nB\} \subset \mathcal{HUR}_{g,n}.$$

Определение 2.22. Пары (X, α), для которых $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$, будем называть *парами Абеля*.

Функция на кривой определяется своим дивизором с точностью до умножения на ненулевую константу. Требуя, чтобы одно из оставшихся критических значений было равно единице, получим подмногообразие многообразия $\mathcal{HUR}^{\infty 0}_{g,n}$, которое будем обозначать

$$\mathcal{HUR}^{\infty 01}_{g,n} \subset \mathcal{HUR}^{\infty 0}_{g,n}.$$

3. Пары Абеля произвольного рода

В этом разделе мы будем рассматривать пары Абеля над $\mathbb{C}$ и свяжем с ними комбинаторно-топологические образы, являющиеся аналогами детских рисунков.

Пусть дана пара Абеля (X,α) с набором валентностей $(n|n|a_1,\dots,a_k)$. Рассмотрим прообраз замыкания луча отрицательных вещественных чисел

$$\Gamma_{X,\alpha} := \alpha^{-1}(\mathbb{R}_{\leqslant 0}\cup\{\infty\})\subset X,$$

являющийся графом на поверхности X.

$\Gamma_{X,\alpha}$ является вложенным графом в X, но не обязательно детским рисунком, поскольку некоторые из его граней могут не быть односвязными. Например, для пары (X,α), где X задана уравнением $y^2=x^3-x$ и $\alpha=x$, $\Gamma_{X,\alpha}$ не будет детским рисунком, поскольку $X\setminus\Gamma_{X,\alpha}$ будет гомеоморфно цилиндру.

Утверждение 3.1. *Если α не имеет критических значений на луче $\mathbb{R}_{<0}$, то $\Gamma_{X,\alpha}$ является вложенным графом с двумя вершинами и $n=\deg\alpha$ рёбрами, соединяющими их.*

Предположим, что ни одно из критических значений α не лежит на $\mathbb{R}_{<0}$. Пусть $\Omega=\langle(1,2,3,\dots,n)\rangle$. Поставим в соответствие паре (X,α) двусторонний смежный класс из $\Omega\setminus \mathrm{S}_n/\Omega$.

Полурёбра графа $\Gamma_{X,\alpha}$, исходящие из вершины $\alpha^{-1}(0)$, циклически упорядочены, потому на них действует перестановка ρ_0, переводящая полуребро в следующее при повороте против часовой стрелки. Аналогично определяется перестановка ρ_∞. Таким образом, на множестве рёбер графа $\Gamma_{X,\alpha}$ заданы две перестановки ρ_0, ρ_∞, являющиеся циклами длины n. Тогда существует перестановка, сопряжение которой переводит ρ_∞ в ρ_0. Более того, все такие перестановки образуют двусторонний смежный класс из $\Omega\setminus \mathrm{S}_n/\Omega$, который мы и поставим в соответствие паре Абеля.

Будем обозначать построенное отображение $\Delta\colon \mathcal{HUR}^{\infty 0}_{g,n}\to\Omega\setminus \mathrm{S}_n/\Omega$.

Утверждение 3.2. $\Delta(X,1/\alpha)=\Delta(X,\alpha)^{-1}$.

Из определения ρ видно, что элементы его образа можно понимать как отображения из n-элементного циклически упорядоченного множества в n-элементное циклически упорядоченное множество. Иногда мы будем прибегать к такому взгляду на элементы $\Omega\setminus \mathrm{S}_n/\Omega$.

3.1. Задание пары Абеля уравнением

Теорема 3.3. (X,α) — *пара Абеля степени n тогда и только тогда, когда уравнение кривой X можно записать в виде*

$$\alpha^k+\alpha^{k-1}P_{k-1}(x)+\ldots+\alpha P_1(x)+x^n=0,$$

где $P_i(x)\in\Bbbk[x]$ и $\deg P_i\leqslant n$.

Доказательство. Пусть (X, α) — пара Абеля, $\Bbbk(X)/\Bbbk(\alpha)$ — конечное расширение полей. По теореме о примитивном элементе для этого расширения есть примитивный элемент x: $F \in \Bbbk(\alpha)[t]$, $f(x) = 0$.

Пусть $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$. Применяя дробно-линейное преобразование, будем считать, что $x(A) = 0$ и $x(C) = \infty$. Приводя f к общему знаменателю, получим в числителе уравнение кривой $F(\alpha, x) \in \Bbbk[\alpha, x]$.

Запишем F по степеням α:

$$\alpha^k P_k(x) + \alpha^{k-1} P_{k-1}(x) + \ldots + \alpha P_1(x) + P_0(x).$$

Из степени α выводим, что $\deg P_i \leqslant n$. Далее из условия $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$ получаем, что $P_0(x) = x^n$ и $P_k(x) = 1$.

Обратно, из вида уравнения ясно, что α будет иметь дивизор $nA - nB$. □

Теорема 3.4. *(X, α) — гиперэллиптическая пара Абеля степени n тогда и только тогда, когда уравнение кривой X можно записать в виде*

$$\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0,$$

где $P(x) \in \Bbbk[x]$ и $\deg P \leqslant n$. Гиперэллиптическая инволюция в таких координатах задаётся отображением $(\alpha, x) \to (P(x) - \alpha, x)$.

Доказательство. Поместим полюс функции Абеля в бесконечно удалённую точку; тогда функция примет вид $P(x) + Q(x)y$. Тогда уравнение X примет вид $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$. □

Теорема 3.5. *Представление гиперэллиптической пары Абеля в виде $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ единственно с точностью до замен $P(x) \to \pm P(x)$ и $x \to \zeta x$, где ζ — корень n-й степени из 1.*

Доказательство. Пусть для пары Абеля (X, α) с уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ есть другое представление $\alpha_1^2 + \alpha_1 P_1(x_1) + x_1^n = 0$. Тогда $\alpha_1 = \alpha + U(x)$ и $x_1 = Cx$. Отсюда получаем, что $C^n = 1$ и $U(x)\big(U(x) + P(x)\big) = 0$. □

4. Пары Белого—Абеля

Будем называть пары Белого, являющиеся парами Абеля, парами Белого—Абеля.

Утверждение 4.1. *Род пары Белого с набором валентностей $(n\,|\,n\,|\,a_1, \ldots, a_k)$ равен $g = (n - k)/2$.*

Доказательство. Пусть на поверхности X есть рисунок с набором валентностей $(n \mid n \mid a_1, \ldots, a_k)$. Тогда по формуле Эйлера

$$\chi(X) = V - E + F = (1 + k) - n + 1 = 2 + (k - n),$$

т. е. $g(X) = (n - k)/2$. □

Определение 4.2. Будем называть *остовом* детского рисунка $\mathcal{D}$ его максимальный подграф $\tilde{\mathcal{D}}$, не содержащий висячих вершин.

Утверждение 4.3. *Для фиксированного рода существует лишь конечное число остовов, соответствующих парам Белого—Абеля. Остальные рисунки, соответствующие парам Белого—Абеля, получаются добавлением множеств висячих ребер к чёрной вершине в одном из этих остовов.*

Доказательство. Пусть род равен g. Остов рисунка, соответствующего паре Белого—Абеля, также является рисунком, соответствующим паре Белого—Абеля. В наборе валентностей остова $(n \mid n \mid a_1, \ldots, a_k)$ все a_i не меньше 2, т. е. $k \leqslant n/2$ и по утверждению 4.1 $g \geqslant n/4$. Значит, $n \leqslant 4g$, а количество рисунков данного рода и степени конечно. □

Теорема 4.4. *Если $g \in \Delta(\mathcal{D})$, то 3-созвездие (см. [2]) $\mathcal{D}$ задаётся перестановками*

$$[g^{-1}(1,2,3,\ldots,n)g,\ g^{-1}(1,2,3,\ldots,n)^{-1}g(1,2,3,\ldots,n)^{-1},\ (1,2,3,\ldots,n)].$$

Доказательство. На языке 3-созвездий 3-созвездие $\mathcal{D}$ $[\rho_0, \rho_1, \rho_\infty]$ задаётся условиями $\rho_\infty = (1,2,3,\ldots,n)$, $\rho_0^n = e$, $\rho_0\rho_1\rho_\infty = e$.

$g \in \Delta(\mathcal{D})$ такова, что $\rho_0 = g^{-1}\rho_\infty g$. Замена g на $(1,2,3,\ldots,n)^k g$ не изменит этого равенства, замена на $g(1,2,3,\ldots,n)^m$ приведёт к сопряжению созвездия перестановкой $(1,2,3,\ldots,n)^m$. Получим тот же класс $\Omega g \Omega$, определяющий рассматриваемые 3-созвездия с точностью до сопряжения. □

Следствие 4.5. *Ограничение Δ на пары Белого—Абеля степени n является биекцией.*

4.1. Самодвойственные рисунки, соответствующие парам Абеля

Утверждение 4.6. $\Delta(\mathcal{D}^*) = \Delta(\mathcal{D})^{-1}$.

Доказательство. Утверждение следует из утверждения 3.2. □

Утверждение 4.7. *Рисунок $\mathcal{D}$, соответствующий паре Абеля, является самодвойственным тогда и только тогда, когда в $\Delta(\mathcal{D})$ есть перестановка порядка 2.*

Доказательство. Из существования в классе $\Delta(\mathcal{D})$ перестановки порядка 2 следует, что $\Delta(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D})^{-1}$. По утверждению 4.6 $\Delta(\mathcal{D})^{-1} = \Delta(\mathcal{D}^*)$. По следствию 4.5 $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$.

Обратно, пусть $\omega = (1,2,3,\ldots,n)$. Из утверждения 4.6 для самодвойственного рисунка $\mathcal{D}$ имеем, что $\Delta(D) = \Delta(D)^{-1}$. Пусть $g \in \Delta(D)$. Тогда $\omega^k g \omega^m = g^{-1}$. Преобразуя, получаем, что $\omega^{k-m} \cdot (\omega^m \cdot g) = (\omega^m \cdot g)^{-1}$ и $(\omega^m \cdot g)^2 = \omega^{m-k}$.

Рассмотрим два случая. Для нечётного n имеем $\omega = \left(\omega^{(n+1)/2}\right)^2$. Подставляя это равенство в предыдущее, получаем, что $(\omega^m \cdot g)^2 = \left(\omega^{(n+1)/2}\right)^{2\cdot(mk)}$ и $\left(\omega^{(k\cdot(n+1)/2+m\cdot(1-n)/2)} \cdot g\right)^2 = e$, т. е. построена лежащая в том же классе перестановка порядка 2.

В случае чётного n заметим, что ω не является квадратом другой перестановки, поскольку является нечётной. Потому из равенства $(\omega^m \cdot g)^2 = \omega^{m-k}$ для чётного n следует чётность $m-k$, и $\left(\omega^{(k+m)/2} \cdot g\right)^2 = e$. Аналогично предыдущему случаю утверждение доказано. □

5. Пары Абеля рода 1

5.1. Пары Белого—Абеля на торе

Утверждение 5.1. *Остовами рисунков, соответствующих парам Белого—Абеля для рода* 1, *являются только рисунки с наборами валентностей* $(3 \mid 3 \mid 3)$ *или* $(4 \mid 4 \mid 2, 2)$.

Доказательство. В рисунке на торе, соответствующем паре Белого—Абеля с набором валентностей $(n \mid n \mid a_1, \ldots, a_k)$, имеет место соотношение $k = n - 2$. Поскольку $a_1 + \ldots + a_k = n$ и для остова $a_i > 1$, получаем искомое утверждение. □

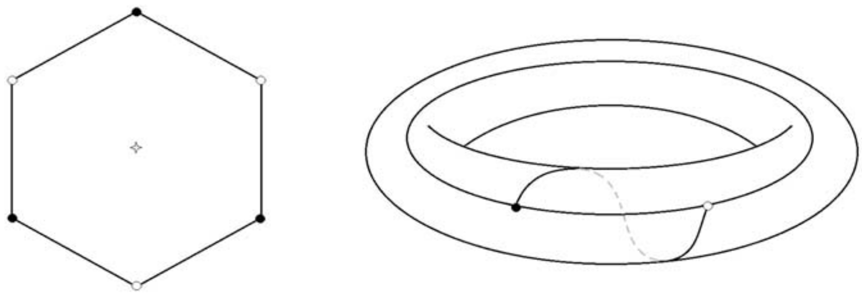

Рис. 2. Единственный рисунок с валентностями $(3 \mid 3 \mid 3)$

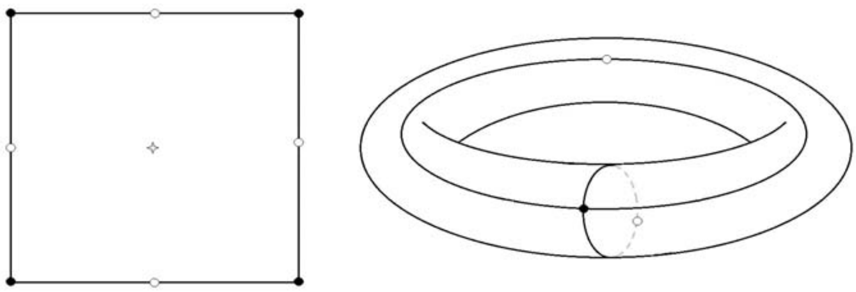

Рис. 3. Единственный рисунок с валентностями $(4 \mid 4 \mid 2, 2)$

Утверждение 5.2. *На торе рисунки, соответствующие парам Белого—Абеля, ограничиваются наборами валентностей* $(n \mid n \mid 3, 1, 1, \ldots, 1)$ *и* $(n \mid n \mid 2, 2, 1, \ldots, 1)$.

Висячие вершины можно добавить в три угла между рёбрами, исходящими из чёрной вершины остова $(3 \mid 3 \mid 3)$. Пусть количества этих рёбер против часовой стрелки $a-1$, $b-1$, $c-1$. Будем обозначать получившийся рисунок $\langle a, b, c\rangle$. Аналогично для остова $(4 \mid 4 \mid 2, 2)$, добавляя $a-1$, $b-1$, $c-1$, $d-1$ рёбер в четыре угла остова, получаем рисунок, соответствующий паре Белого—Абеля. Будем обозначать получившийся рисунок $\langle a, b, c, d\rangle$.

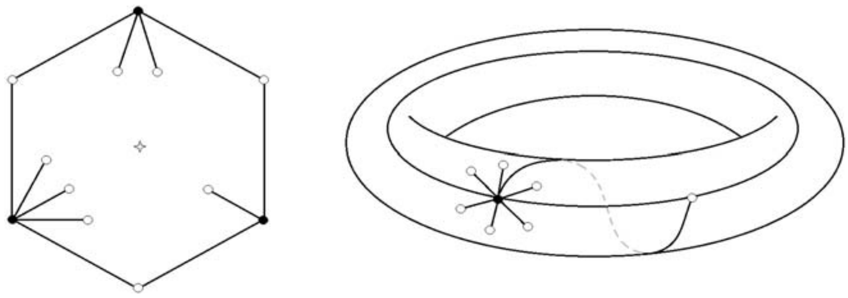

Рис. 4. $\langle 4, 2, 3\rangle$

Утверждение 5.3.

1. *Рисунки с набором валентностей* $(n \mid n \mid 3, 1, \ldots, 1)$ *однозначно задаются набором* $\langle a, b, c\rangle$*, определённым с точностью до циклической перестановки* $(\langle a, b, c\rangle = \langle b, a, c\rangle = \langle c, a, b\rangle)$ *с* $a+b+c=n$.
2. *Рисунки с набором валентностей* $(n \mid n \mid 2, 2, \ldots, 1)$ *задаются набором* $\langle a, b, c, d\rangle$*, определённым с точностью до циклической перестановки* $(\langle a, b, c, d\rangle = \langle b, c, d, a\rangle = \langle c, d, a, b\rangle = \langle d, a, b, c\rangle)$ *с* $a+b+c+d=n$.

Утверждение 5.4. *Все торические рисунки, соответствующие парам Белого—Абеля, самодвойственны.*

Доказательство. Рассмотрим $\Delta(\langle a, b, c\rangle)$ как отображение циклически упорядоченных множеств. Множество в прообразе $\Delta(\langle a, b, c\rangle)$ состоит из $a+b+c$ элементов и разбито на три идущих по циклу группы из a, b, c элементов, соответствующих углам между висячими рёбрами в одном из углов. Отображение $\Delta(\langle a, b, c\rangle)$ переворачивает элементы внутри групп, сохраняя порядок самих групп (рис. 5). Такому отображению циклически упорядоченных множеств соответствует двойной смежный класс, содержащий перестановку порядка 2

$$
\begin{aligned}
(g = (1, a) \cdot (2, a-1) \cdot (3, a-2) \cdot \ldots \cdot (1+a, b+a) \times \\
\times (2+a, b+a-1) \cdot (3+a, b+a-2) \cdot \ldots \cdot (1+a+b, a+b+c) \times
\end{aligned}
$$

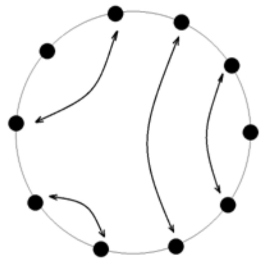

Рис. 5. $\rho(\langle 5,3,2\rangle)$

$$\times (2+a+b, a+b+c-1)\cdot(3+a+b, a+b+c-2)\cdot\ldots).$$

Аналогично для $\langle a,b,c,d\rangle$. □

5.2. Общие пары Абеля на торе и модулярная кривая $X_1(n)$

Утверждение 5.5. *Общая пара Абеля рода* 1 *имеет четыре критических значения:* 0, ∞ *и ещё два простых критических значения.*

Доказательство. Утверждение следует из формулы Римана—Гурвица. □

Пары Абеля из $\mathcal{HUR}^{\infty 01}_{g,n}$ на торе фиксированной степени распадаются на семейства Фрида, соответствующие делителям n.

Возведение функции Абеля в степень k переводит пару Абеля (X,α) в пару Абеля (X,α^k). Тем самым определено отображение $\mathcal{HUR}^{\infty 0}_{1,n}\to\mathcal{HUR}^{\infty 0}_{1,kn}$. Поэтому $\mathcal{HUR}^{\infty 0}_{g,n}$ состоит из неприводимых компонент, соответствующих делителям n. В компоненте, соответствующей d, лежат функции, являющиеся d-й степенью. Будем далее рассматривать только основную компоненту из функций, не являющихся степенью.

Утверждение 5.6. *База пары Фрида пар Абеля рода* 1*, соответствующей функциям, не являющимся степенями, — модулярная кривая* $X_1(n)$.

Доказательство. Утверждение следует из определения $X_1(n)$ (см. [3]). □

В общем случае пусть $\mathrm{CritVal}(\varphi)=\{0,k_1,k_2,\infty\}$, в случае трёх критических значений будем считать $k_1=k_2$ третьим критическим значением.

Утверждение 5.7. *Величина* $\varkappa_n=(k_1/k_2+k_2/k_1+2)/4$, *где* k_1, k_2 *— простые критические значения функции* φ *из* $X_1(n)$*, определяет рациональную функцию на модулярной кривой* $X_1(n)$*, причём* $\varkappa_n$ *является функцией Белого и над нулём все её ветвления имеют порядок* 2.

Доказательство. Количество прообразов k_1/k_2 локально постоянно в точках, где все четыре критических значения различны, потому критические значения k_1/k_2 могут быть только в точках, в которых $k_1/k_2\in\{0,1,\infty\}$.

Преобразуя, получаем, что $\varkappa_n = (k_1+k_2)^2/(4k_1k_2)$, откуда следует, что критические значения этой функции — 0 (ветвления над которым имеют порядок 2) и значения в критических точках k_1/k_2; в них $\varkappa_n = 1$ или $\varkappa_n = \infty$. □

Утверждение 5.8. *Над точками пополнения $X_1(n)$, в которых $\varkappa_n = 1$, лежат*

1) *торические пары Белого—Абеля, не являющиеся степенью функции меньшей степени;*
2) *слои, в которых падает род кривой и кривая вырождается в декартов лист, на котором функция Белого имеет вид x^n и два корня уравнения $x^n = 1$, отношение между которыми является первообразным корнем из 1 степени n, склеены в особую точку декартова листа.*

Доказательство. Если $\varkappa_n = 1$, то либо кривая неособая, тогда $k_1 = k_2$ и это пара Белого—Абеля, либо кривая вырождается. □

Будем обозначать особую пару из пункта 2) $\langle a, b\rangle$, если в особенность склеены корни из единицы ξ_1 и ξ_2, $\xi_1/\xi_2 = e^{2i\pi a/n}$ и $\xi_2/\xi_1 = e^{2i\pi b/n}$.

Важным объектом является рисунок на $X_1(n)$, соответствующий функции Белого $\varkappa_n$. Перечислим набор его валентностей.

Утверждение 5.9.

1. *Точки базы, над которыми висят рисунки $\langle a, b, c, d\rangle$, имеют валентность 2. Они соединены с точками, над которыми висят рисунки $\langle a+1, b-1, c+1, d-1\rangle$, $\langle a-1, b+1, c-1, d+1\rangle$. Если один из параметров $a-1$, $b-1$, $c-1$, $d-1$ оказывается нулевым, то соответствующий рисунок принимает вид $\langle x, y, z\rangle$. Если нулевыми оказываются сразу два из перечисленных параметров (что возможно лишь в случае $\langle a, 1, c, 1\rangle$), то точки базы, над которым висят рисунки $\langle a, 1, c, 1\rangle$ соединены с точками, над которыми висят рисунки $\langle a+1, c+1\rangle$ и $\langle a-1, 2, c-1, 2\rangle$.*
2. *Точки базы, над которыми висят рисунки $\langle a, b, c\rangle$, имеют валентность 3. Они соединены с точками, над которыми висят рисунки $\langle 1, a-1, b+1, c-1\rangle$, $\langle a-1, 1, b-1, c+1\rangle$, $\langle a+1, b-1, 1, c-1\rangle$. Если один из параметров $a-1$, $b-1$, $c-1$ оказывается нулевым, то соответствующий рисунок принимает вид $\langle x, y, z\rangle$, если сразу два параметра — нули (что возможно лишь в случае $\langle a, 1, 1\rangle$), то этот случай сводится к виду $\langle 1, a-1, 2\rangle$, $\langle a-1, 1, 2\rangle$ и $\langle a+1, 1\rangle$.*
3. *Точки базы, над которыми висят особые пары $\langle a, b\rangle$, имеют валентность 1 и соединены с точками базы, над которыми висят $\langle a-1, 1, b-1, 1\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим поведение отображения Δ при движении по ребру рисунка, соответствующего $\varkappa_n$, от одной белой вершины до другой. При прохождении чёрной вершины перестановки из класса Δ умножатся на транспозицию. На основе этого замечания утверждение проверяется прямым вычислением. □

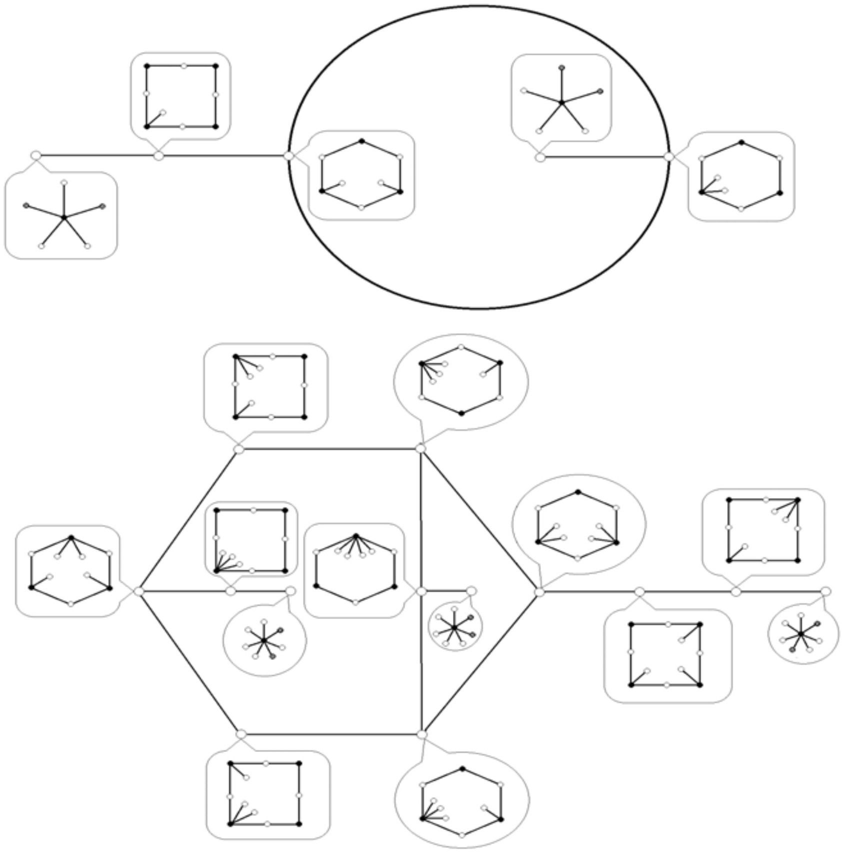

Рис. 6. Рисунки, соответствующие парам $\varkappa_5$, $\varkappa_7$, и пары Белого в слоях над точками со значением 1

5.3. Количество пар Белого на $X_1(n)$

Пусть $m_3(n)$ — это количество детских рисунков с набором валентностей $(n \mid 3, 1, \dots, 1 \mid n)$, которым соответствуют функции Белого, не являющиеся степенями, и аналогично $m_2(n)$ — количество детских рисунков с набором валентностей $(n \mid 3, 1, \dots, 1 \mid n)$, которым соответствуют функции Белого, не являющиеся степенями.

Утверждение 5.10. *При* $n > 3$

$$m_3(n) = \frac{\varphi(n)\psi(n)}{6} - \frac{\varphi(n)}{2},$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера и $\psi(n)$ — пси-функция Дедекинда,

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Доказательство. Рисунок с набором валентностей $(n \mid 3, 1, \ldots, 1 \mid n)$ задаётся тройкой $\langle a, b, c\rangle$ чисел, удовлетворяющих равенству $a + b + c = n$, с точностью до циклической перестановки a, b, c. Таких троек $k_3(n) = \lceil (n-1)(n-2)/6 \rceil$.

Исключим теперь из этого числа рисунки, соответствующие парам Белого, являющимся степенями. $\langle a, b, c\rangle$ является d-й степенью рисунка $\langle a/d, b/d, c/d\rangle$ тогда и только тогда когда d делит НОД(a, b, c). Потому каждый из рисунков с набором валентностей $(n \mid 3, 1, \ldots, 1 \mid n)$ является степенью рисунка с взаимно простыми a, b, c, причём так как $a + b + c = n$, то степень рисунка делит n. Суммируя по всем возможным степеням, получаем

$$k_3(n) = \sum_{d|n} m_3(d).$$

Воспользуемся формулой обращения Мёбиуса:

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) k_3(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left\lceil \frac{(d-1)(d-2)}{6} \right\rceil.$$

Замечая, что

$$\left\lceil \frac{(d-1)(d-2)}{6} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{(d-1)(d-2)}{6} & \text{при } 3 \nmid n; \\ \dfrac{(d-1)(d-2)}{6} + \dfrac{2}{3} & \text{при } 3 \mid n, \end{cases}$$

имеем

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \frac{(d-1)(d-2)}{6} + \frac{2}{3} \sum_{d|n,\ 3|d} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

При $3 \mid n$ второе слагаемое примет вид $\sum\limits_{d|(n/3)} \mu(d)$, что равно нулю при $n/3 \neq 1$, но $n > 3$. При $3 \nmid n$, второго слагаемого не будет, т. е. мы можем его отбросить. Перегруппируем сумму:

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \frac{(d-1)(d-2)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{d|n} d^2 \mu\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{1}{2} \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) + \frac{1}{3} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Осталось вспомнить, что

$$\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n), \quad \sum_{d|n} d^2 \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)\psi(n)$$

и при $n \neq 1$

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0. \qquad \square$$

Утверждение 5.11.

$$m_2(n) = \frac{(n-6)\varphi(n)\psi(n)}{24} + \frac{\varphi(n)}{2}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему.

Утверждение 5.12.

$$\deg \varkappa_n = \frac{n\varphi(n)\psi(n)}{12}.$$

Доказательство. Из утверждения 5.9 следует, что $\varkappa_n - 1$ имеет $m_3(n)$ нулей кратности 3, m_2 нулей кратности 2 и $\varphi(n)/2$ простых нулей. □

Утверждение 5.13. *Количество особых слоёв семейства Фрида на* $X_1(n)$ *равно* $\varphi(n)\sigma_0(n)/2$.

Доказательство. Утверждение доказывается подсчётом количества проколов модулярной кривой $X_1(n)$. □

Утверждение 5.14. *Эйлерова характеристика равна*

$$\chi\big(X_1(n)\big) = \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} - \frac{\varphi(n)\psi(n)}{12}.$$

Доказательство. Из утверждения 5.7 следует, что валентности чёрных вершин равны 2, формула Эйлера и утверждения 5.10—5.13 дают

$$\chi\big(X_1(n)\big) = m_2(n) + m_3(n) - \frac{\deg \varkappa_n}{2} + \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} = \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} - \frac{\varphi(n)\psi(n)}{12}. \ \square$$

Следствие 5.15. $g\big(X_1(n)\big) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $n \leqslant 12$ *и* $n \neq 11$.

6. Инварианты Галуа рисунков, соответствующих парам Белого—Абеля

6.1. Самодвойственные рисунки

Утверждение 6.1. *Пусть рисунок* $\mathcal{D}$ *самодвойственный и соответствующий ему класс* $\Delta(\mathcal{D})$ *имеет вид* $\Omega g_0 \Omega$, *где* $g_0^2 = e$. *Тогда количество неподвижных точек перестановки* g_0 *— инвариант Галуа рисунка* $\mathcal{D}$.

Доказательство. Применим к функции Белого, соответствующей $\mathcal{D}$, преобразование $\beta \to (\beta + 1/\beta + 2)/4$. Отображение $(z + 1/z + 2)/4$ (отнормированная функция Жуковского) переводит 0, ∞ в ∞ и 1 в 0.

Рисунок, соответствующий $(\beta + 1/\beta + 2)/4$, получается из исходного $\mathcal{D}$ добавлением к нему двойственного рисунка и переходом к двойственному к этому объединению $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}^*)^*$ (рис. 7 и 8).

Получившийся рисунок будет обладать нетривиальной симметрией (поскольку $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^*$). В фактор—рисунке набор валентностей белых вершин будет совпадать с длинами независимых циклов перестановки g_0, т. е. это инвариант Галуа. □

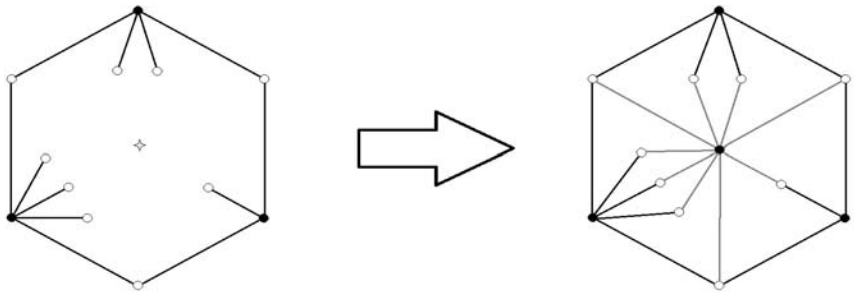

Рис. 7. Добавление двойственного рисунка

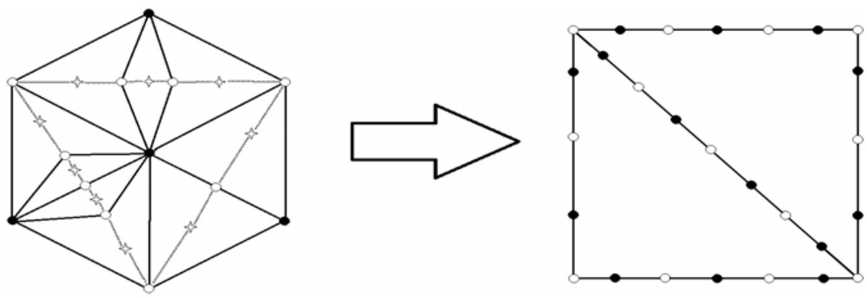

Рис. 8. Переход к двойственному рисунку

В частности, для рисунков рода 1 это утверждение примет следующий вид.

Следствие 6.2. *Количество чётных чисел среди a, b, c (a, b, c, d) является инвариантом Галуа торического рисунка $\langle a, b, c\rangle$ ($\langle a, b, c, d\rangle$).*

6.2. Знак

Теорема 6.3. *Если n нечётно, то знак всех перестановок в классе $\Omega g \Omega$ одинаков и является инвариантом Галуа соответствующего рисунка.*

Доказательство. При нечётном n цикл ω является чётным, потому знак в классе $\Omega g \Omega$ постоянный. На языке созвездий рисунок будет созвездием $[g^{-1}\omega g, g^{-1}\omega^{-1}g\omega^{-1}, \omega]$, все перестановки которого лежат в A_n.

Рассмотрим класс сопряжённости в S_n, содержащий цикл максимальной длины ω. В A_n он распадается на два класса сопряжённых. В каком из двух этих классов, содержащем или не содержащем ω, будет лежать $g^{-1}\omega g$, зависит от чётности g. По [2] класс сопряжённости, в котором лежат элементы созвездия, является инвариантом Галуа. $\square$

6.3. Степень

Возведение в степень m функции Абеля степени n переводит её в функцию Абеля степени nm. Рассмотрим вложение $\mathcal{HUR}^{0\infty}_{g,n} \to \mathcal{HUR}^{0\infty}_{g,nm}$, переводящее функцию в её m-ю степень. Образ этого вложения является компонентной связности $\mathcal{HUR}^{0\infty}_{g,nm}$. Таким образом, $\mathcal{HUR}^{0\infty}_{g,n}$ для составного n разбито на компоненты связности, каждая из которых соответствует некоторому делителю d числа n, функции в этой компоненте являются d-й степенью другой функции.

Утверждение 6.4. *Рассматриваемый детский рисунок степени nm соответствует функции Белого, являющейся m-й степенью, тогда и только тогда, когда перестановка ρ_1 в 3-созвездии сохраняет остаток от деления на m.*

Доказательство. Пусть β — рассматриваемая функция Белого степени nm. Попробуем извлечь из неё корень m-й степени. Если выбросить из кривой детский рисунок $\beta^{-1}([0,1])$, то на оставшихся дисках никаких препятствий для извлечения корня нет, это делается одним из m возможных способов.

Детский рисунок состоит из одной чёрной вершины степени nm и некоторого количества белых. В окрестности чёрной вершины β будет устроена как x^{nm}, а корень определим как x^n.

Рассмотрим значения корня на nm рёбрах, выходящих из чёрной вершины. Исходная функция на этих полурёбрах принимала значения в отрезке $[0,1]$, корень значения вида $[0, e^{2\pi ik}/m]$. Одинаковыми значения корня будут только на рёбрах, идущих через m. Чтобы корень был определённой функцией на кривой, необходимо и достаточно, чтобы белые вершины соединяли только рёбра с одинаковыми значениями корня на них, т. е. только идущие через m. Это и означает, что перестановка α в 3-созвездии сохраняет остаток от деления на m. $\square$

Сформулируем частные случаи этого утверждения для торических рассматриваемых рисунков.

Следствие 6.5.

1. *Торический рисунок вида $\langle a,b,c\rangle$ соответствует функции Белого, являющейся m-й степенью, тогда и только тогда, когда m делит* НОД(a,b,c).
2. *Торический рисунок вида $\langle a,b,c,d\rangle$ соответствует функции Белого, являющейся m-й степенью, тогда и только тогда, когда*

$$a \equiv -b \equiv c \equiv -d \pmod{m}.$$

Доказательство. Применим утверждение 6.4. В случае 1 ρ_1 можно положить тройным циклом $(1, a+1, b+a+1)$. Сохранение остатка при делении на m перестановкой ρ_1 тогда равносильно $a \equiv b \equiv 0 \pmod{m}$.

Для случая 2 ρ_1 можно положить равной $(1, a+b+1)(a+1, a+b+c+1)$ и рассуждать аналогично (см. также [6]). $\square$

7. Аппроксимация Паде

В этом разделе мы опишем метод вычисления пар Абеля рода 1, который имеет и теоретическое значение, поскольку показывает, что пара $(X_1(n), \varkappa_n)$ определена над $\mathbb{Z}$.

Изложенным ниже методом вычислены пары Абеля рода 1 степеней $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12$.

7.1. Расчёт

Пусть эллиптическая кривая X задана уравнением

$$y^2 = 1 + ax + bx^2 + cx^3.$$

Пусть $p_n(x)/q_n(x)$ является аппроксимацией Паде в нуле функции

$$\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

где $\deg p_n(x) = [n/2]$, $\deg q_n(x) = [(n-3)/2]$ и $n \geqslant 3$ натуральное.

Утверждение 7.1. *Коэффициенты многочленов $p_n(x)$ и $q_n(x)$ являются линейными функциями от первых n коэффициентов разложения в ряд Тейлора в нуле $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$.*

Доказательство. Утверждение является следствием теоремы 2.20. □

Утверждение 7.2. *Функция $\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y$ на X имеет дивизор $\operatorname{div}(\varphi_n) = (n-1)A + B - nC$, где A — точка с координатами $(0, 1)$, C — бесконечная точка, а B не обязательно отлична от A, C.*

Доказательство. Имеем

$$p_n(x) - q_n(x)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3} = O(x^{n-1}),$$

т. е. φ_n имеет в A ноль порядка не меньше $n-1$ и $\deg \varphi_n \leqslant n$. □

Утверждение 7.3. *Аппроксимация Паде $p_n(x)/q_n(x)$ в нуле функции $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$ существует тогда и только тогда, когда дивизор $(n-2)(A - C)$ не является линейно эквивалентным* 0.

Доказательство. Дивизор $nC - (n-1)A$ линейно эквивалентен точке. Обозначим её через B. Таким образом, существует функция φ, для которой $\operatorname{div}(\varphi) = (n-1)A + B - nC$. Поскольку полюса φ находятся в C, $\varphi = p(x) + q(x)y$. По теореме Якоби $p(x)/q(x)$ является аппроксимацией Паде тогда и только тогда, когда $q(0) \neq 0$.

Из того, что $q(0) = 0$, следует, что $p(0) = 0$, так как $p(0) + q(0) = \varphi(A) = 0$. Таким образом, то, что $p(x)/q(x)$ не является аппроксимацией Паде, равносильно тому, что существует φ_1, такая что $\varphi = x\varphi_1$.

Если $\varphi = x\varphi_1$, то $\operatorname{div}(\varphi_1) = (n-2)(A - C)$. Существование такой φ_1 равносильно линейной эквивалентности $(n-2)(A - C)$ нулю. □

Предыдущее утверждение позволяет найти уравнение $X_1(n)$. Также оно позволяет доопределить φ_n для любой эллиптической X и пары точек A и C на ней, а именно как функцию с дивизором $(n-1)A+B-nC$.

Среди функций φ_n лежат и искомые пары Абеля рода 1 степеней n и $n-1$. Действительно, условие $A=B$ задаст пары Абеля степени n и условие $B=C$ задаст пары Абеля степени $n-1$.

На практике оказалась удобной параметризация $\mathcal{M}_{1,2}$

$$y^2 = (1+(a+1)x)^2 + 4b(x^2+x^3).$$

Из предыдущих утверждений следует, что коэффициенты $p_n(x)$ и $q_n(x)$ являются многочленами от a и b и уравнение $U=0$ — это полиномиальное уравнение на a, b. Таким образом, мы получили параметризацию $X_1(n)$ двумя параметрами a, b, связанными полиномиальным соотношением.

Теперь укажем метод вычисления $\varkappa_n$.

Утверждение 7.4. *Имеет место следующее равенство для логарифмического дифференциала*:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\varphi_n} = C(1+K_n x+y)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

где C — ненулевая константа,

$$K_{2n} = \frac{q_{n-2}f_3}{2np_n}, \quad K_{2n+1} = \frac{p_n}{(2n+1)q_{n-1}}$$

и p_s, q_s, f_s — коэффициенты p, q, f при x^s соответственно.

Доказательство. Пусть

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\varphi_n} = \xi\,\mathrm{d}x.$$

Тогда $\operatorname{div}(\xi) = K_1+K_2-A-C$, где K_1 и K_2 — критические точки функции φ_n, отличные от A и C. Из вида полюсов получим, что $\xi = C(1+kx+y)/x$, где k — целое число.

Найдём теперь значение k. Дифференцируя φ_n, получаем

$$(1+kx+y)\varphi_n = (1+kx+y)(p_n-q_n y) = x\big((-q_n'f-q_nf')+p_n'y\big),$$

откуда находится формула для k. □

Согласно предыдущему утверждению критические точки φ_n, соответствующие критическим значениям k_1 и k_2, лежат на прямой $1+K_nx+y=0$. С помощью этого уравнения они вычисляются в системе компьютерной алгебры. Это позволяет вычислить k_1, k_2 и $\varkappa_n$. Уравнение $\varkappa_n=1$ позволяет найти среди всех пар Абеля на эллиптической кривой уравнения пар Белого—Абеля.

7.2. Результаты вычислений

Приведём вычисленные пары Фрида для n, при которых $g\big(X_1(n)\big)=0$.

$n=4$	j_4	$-16\frac{(16-16t+t^2)^3}{t^4(t-1)}$
	$\varkappa_4$	$\frac{1}{64}\frac{(t-1)(t-9)^3}{t^3}$
$n=5$	j_5	$-\frac{(a^4+12a^3+14a^2-12a+1)^3}{a^5(-1+11a+a^2)}$
	$\varkappa_5$	$\frac{4}{5^{10}}\frac{(-1+11a+a^2)(a+8)^2(3a+4)^3(3a-1)^3}{a^4}$
$n=6$	j_6	$\frac{(3a-1)^3(3a^3-3a^2+9a-1)^3}{a^6(a-1)^3(9a-1)}$
	$\varkappa_6$	$\frac{1}{2^{14}\cdot 3^{12}}\frac{(9a-1)(9a-25)^2(81a^3-27a^2+99a-25)^3}{a^5(a-1)^4}$
$n=7$	j_7	$\frac{(l^2-l+1)^3(l^6-11l^5+30l^4-15l^3-10l^2+5l+1)^3}{l^7(l-1)^7(l^3-8l^2+5l+1)}$
	$\varkappa_7$	$\frac{2^2}{7^{14}}\frac{(l^3-8l^2+5l+1)(l-5)^2(4l^2-26l-5)^2(2l^2+l+1)^2(3l^2-9l+5)^3(12l^3-12l^2+4l+5)^3}{l^{10}(l-1)^6}$
$n=8$	j_8	$\frac{(1+12l^2+8l^3-10l^4+8l^5+12l^6-8l^7+l^8-8l)^3}{l^8(-1+l)^4(l^2-6l+1)(1+l)^2}$
	$\varkappa_8$	$\frac{1}{2^{50}}\frac{P_8}{(-1+l)^6(1+l)^4l^7}$
$n=9$	j_9	$-\frac{(v^3-3v+1)^3(-9v-48v^3+54v^4-45v^5+27v^6-9v^7+v^9+27v^2+1)^3}{v^9(v^2-v+1)^3(v-1)^9(v^3+3v^2-6v+1)}$
	$\varkappa_9$	$\frac{1}{2^2\cdot 3^{36}}\frac{P_9}{v^8(v^2-v+1)^6(v-1)^{14}}$
$n=10$	j_{10}	$-\frac{(1-4u+15u^8-20u^9-216u^7-6u^{10}+4u^{11}+u^{12}+216u^5+236u^6+15u^4+20u^3-6u^2)^3}{u^5(u+1)^{10}(u-1)^{10}(u^2-u-1)(u^2+4u-1)^2}$
	$\varkappa_{10}$	$\frac{2^4}{5^{20}}\frac{P_{10}}{u^8(u^2+4u-1)^5(u+1)^9(u-1)^{21}}$
$n=12$	j_{12}	$\frac{J_{12}}{v^{12}(v-1)^6(v^2+1)^3(v^2-v+1)^4(v^2-4v+1)(v+1)^2}$
	$\varkappa_{12}$	$\frac{1}{2^{50}\cdot 3^{24}}\frac{P_{12}}{v^{11}(v+1)^6(v^2+1)^8(v^2-v+1)^9(v-1)^{10}}$

$$
\begin{aligned}
P_8 &= (l^2-6l+1)(2\,401+294l-1\,881l^2+564l^3+575l^4-250l^5+25l^6)^2 \times \\
&\quad \times (225l^6-450l^5-225l^4+36l^3-81l^2-130l+49)^3, \\
P_9 &= (1-6v+3v^2+v^3)(5v^3+15v^2-3v+32)^2(40v^9-576v^7+1\,272v^6+ \\
&\quad +432v^5-6\,525v^4+13\,521v^3-14\,229v^2+8\,064v-2\,048)^2(5v^3+3v-1)^3 \times \\
&\quad \times (20v^6-60v^5+48v^4+40v^3-96v^2+57v-16)^3, \\
P_{10} &= (u^2-u-1)(54u^{14}+162u^{13}-1\,854u^{12}+333u^{11}+31\,324u^{10}-88\,744u^9- \\
&\quad -67\,532u^8+944\,894u^7-2\,380\,538u^6+2\,801\,086u^5-1\,678\,854u^4+ \\
&\quad +595\,213u^3-133\,896u^2+17\,792u-1\,024)^2(9u^{10}+45u^9+40u^8-150u^7- \\
&\quad -430u^6-884u^5-360u^4-70u^3+25u^2+15u-4)^3,
\end{aligned}
$$

$$J_{12} = (v^4 - 2v^3 - 2v + 1)^3(v^{12} - 6v^{11} + 12v^{10} - 14v^9 + 3v^8 + 12v^7 - 24v^6 + 12v^5 + 3v^4 - 14v^3 + 12v^2 - 6v + 1)^3,$$

$$\begin{aligned}P_{12} = (v^2 - 4v + 1)(&214\,358\,881 - 496\,037\,080v + 60\,025v^{26} - 960\,400v^{25} - \\ &- 202\,855\,541v^{18} + 131\,268\,550v^{20} - 41\,239\,576v^{19} + 553\,750\,568v^{17} + \\ &+ 64\,706\,950v^{22} - 114\,532\,600v^{21} + 6\,542\,725v^{24} - 25\,450\,600v^{23} + \\ &+ 1\,746\,882\,820v^{12} - 75\,890\,780v^{14} - 903\,401\,008v^{13} - 1\,872\,752\,176v^{11} + \\ &+ 1\,106\,930\,815v^{10} + 404\,345\,024v^9 - 808\,291\,433v^{16} + 697\,152\,752v^{15} - \\ &- 1\,613\,955\,101v^8 + 2\,276\,564\,984v^7 - 1\,614\,356\,618v^6 + 612\,680\,360v^5 + \\ &+ 604\,125\,910v^4 - 1\,011\,984\,952v^3 + 1\,002\,337\,501v^2)^2 \times \\ &\times (1\,225v^{14} - 4\,900v^{13} + 8\,575v^{12} - 9\,800v^{11} + 6\,125v^{10} - 1\,100v^9 - 2\,325v^8 + \\ &+ 336v^7 - 1\,317v^6 + 4v^5 + 605v^4 - 1\,160v^3 + 943v^2 - 532v + 121)^3.\end{aligned}$$

7.3. Вычисленные j-инварианты пары Белого

В приведённой ниже таблице указаны j-инварианты некоторых эллиптических кривых с рассматриваемыми парами Белого. В случае если несколько пар Белого лежат в одной орбите действия абсолютной группы Галуа и определены над расширением $\mathbb{Q}$, приведена норма j-инварианта в этом расширении.

n	Рисунок	Поле определения	$N(j)$	p
5	$(1,1,3)$	$\mathbb{Q}$	$\frac{2^{12}\cdot 5}{3^5}$	3
5	$(1,2,2)$	$\mathbb{Q}$	$-\frac{269^3}{2^{10}3^5}$	2, 3
5	$(1,1,1,2)$	$\mathbb{Q}$	$\frac{5\cdot 211^3}{2^{15}}$	2
6	$(1,1,2,2)$	$\mathbb{Q}$	$\frac{11^3\cdot 1\,979^3}{2^3\cdot 3\cdot 5^{12}}$	2, 3, 5
6	$(1,1,4)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$	$\frac{2^8\cdot 3^6\cdot 11^3\cdot 157^3}{5^{12}}$	5
6	$(1,2,3)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5
6	$(1,3,2)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5
7	$(2,2,2,1)$	$\mathbb{Q}$	$\frac{3^3\cdot 7\cdot 2\,099^3}{2^{14}\cdot 5^7}$	2, 5
7	$(3,1,2,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$\frac{41^3\cdot 43^3\cdot 109^3\cdot 881^3}{2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^7}$	2, 3, 5
7	$(4,1,1,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		2, 3, 5
7	$(3,3,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$-\frac{2^{24}\cdot 83^3}{3^7\cdot 5^7}$	3, 5

7	$(5,1,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		3, 5
7	$(3,2,1,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$	$\frac{18\,439^3}{2^{21}}$	2
7	$(3,1,1,2)$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$		2
7	$(3,2,2)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}]$	$\frac{1\,511^3\cdot 130\,873^3}{2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^7}$	2, 3, 5
7	$(4,2,1)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2, 3, 5
7	$(4,1,2)$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2, 3, 5
8	все шесть 8-крестов	$D = 2^{65}\cdot 3^3\cdot 5^4\cdot 7^5$	$\frac{2^5\cdot 193^3\cdot 734\,614\,312\,466\,980\,513^3}{3^{12}\cdot 5^{16}\cdot 7^{32}}$	3, 5, 7
8	все шесть 8-пропеллеров	$D = 2^{69}\cdot 3^8\cdot 5^4$	$-\frac{2^3\cdot 24\,293\,971\,310\,474\,687^3}{3^{24}\cdot 5^{16}\cdot 7^{16}}$	3, 5, 7
9	$(1,1,7)$	$D = -3^5\cdot 5$	$-\frac{2^{36}\cdot 3^2\cdot 2\,267^3}{5^9\cdot 7^9}$	
9	$(1,3,5)$			5, 7
9	$(1,5,3)$			
9	$(2,2,2,3)$	$D = -3^6\cdot 5\cdot 7^3$	$-\frac{273^3\cdot 5\,653^3\cdot 10\,400\,327\,909^3}{2^{57}\cdot 3^2\cdot 5^9\cdot 7^{18}}$	3, 5, 7
9	$(2,2,1,4)$			
9	$(2,2,4,1)$			

Замечание 7.5. Отметим, что в этой таблице в знаменателях норм j-инвариантов стоят степени простых чисел, меньших степени пары Белого, а дискриминанты полей определения являются произведениями простых, не превосходящих степени пары Белого. Отметим также, что показатели степеней простых чисел в знаменателях норм j-инвариантов для простых степеней рисунков делятся на степень пары Белого, это же касается и составных степеней рисунков, но для простых, больших3.

Литература

[1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.

[2] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2010.

[3] Ленг С. Введение в теорию модулярных форм. — М.: Мир, 1979.

[4] Шабат Г. Б. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М., 1998.

[5] Abel N. H. Über die Integration der Differential-Formel $\rho dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Funktionen sind // J. Reine Angew. Math. — 1826. — Bd. 1. — S. 185—221.

[6] Pakovitch F. B. Combinatoire des arbres planaires et arithmetique des courbes hyperelliptiques // Ann. Inst. Fourier. — 1998. — Vol. 48, no. 2. — P. 323—351.

[7] Zapponi L. Lame curves with bad reduction: Preprint. — 2006.