Одноклеточные четырёхрёберные торические рисунки

Г. Б. ШАБАТ
Российский государственный гуманитарный университет
e-mail: george.shabat@gmail.com

УДК 512.75+519.17

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, эллиптические кривые.

Аннотация

Вычислены пары Белого, соответствующие всем одиннадцати одноклеточным четырёхрёберным торическим детским рисункам.

Abstract

G. B. Shabat, Unicellular four-edged toric dessins, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 209—222.

The Belyi pairs corresponding to all the eleven unicellular four-edged toric dessins d'enfants are calculated.

Введение

Цель данного текста — перечислить пары Белого, соответствующие всем одиннадцати одноклеточным четырёхрёберным торическим рисункам, и описать методы их вычисления. Эти методы, по мнению автора, представляют значительный самостоятельный интерес.

Выражения для кривых и функций Белого приводятся в той форме, в которой были получены; в некоторых случаях они весьма громоздки. Вопрос о возможностях более компактных записей, обсуждение методов изображения истинных форм рисунков, анализ паразитических решений и их кратностей, простых плохой редукции и т. п. откладываются до последующих публикаций.

Окончательными результатами данного текста являются j-инварианты полученных кривых (см. таблицу в конце текста). Они заслуживают тщательного анализа и выявления бросающихся в глаза закономерностей.

Все торические рисунки изображаются в данном тексте графами либо внутри квадрата, либо внутри шестиугольника; в обоих случаях подразумеваются отождествления противоположных сторон.

Наименования рисунков имеют вид $a_1a_2a_3 \mid 8$ или $a_1a_2a_3 \mid 8n$; они определяются наборами 0-валентностей a_1, a_2, a_3, а число 8 указывают общую для всех

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 209—222.

2-валентность. Если наборы валентностей имеют несколько реализаций, их наименования имеют вид $a_1a_2a_3 \mid 8n$ или $a_1a_2a_3 \mid 8n^{\pm}$; первый вид наименований применяется для вещественных, т. е. изоморфных своим зеркальным отражениям, рисунков; наименования $a_1a_2a_3 \mid 8n^{+}$ и $a_1a_2a_3 \mid 8n^{-}$ применяются для пар зеркально симметричных рисунков. Буквы n, как и знаки $+$ и $-$, выбираются произвольно.

Соглашения и обозначения традиционны; мы, как правило, воздерживаемся от обозначения носителя рисунка, но задаём его аффинную модель уравнением $y^2 = f(x)$, где кубический многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ не имеет кратных корней.

Функция Белого обозначается β. Столица C располагается в бесконечности, поэтому β регулярна на аффинной части кривой и имеет вид

$$\beta = U + Vy,$$

где $U \in \mathbb{C}[x]$, $V \in \mathbb{C}[x]$, $\deg U = 4$, $\deg V = 2$.

Вершины обозначаются $A_{1,2,3}$ и нумеруются по неубыванию валентностей, «середины рёбер» обозначаются $B_{1,2,3,4}$.

Дивизориальные соотношения имеют вид

$$\operatorname{div}(\beta) = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 - 8C, \quad \operatorname{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C,$$

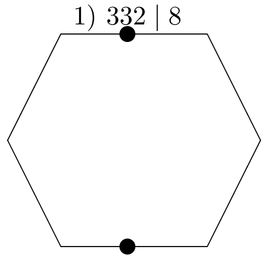
где для наборов валентностей имеется пять возможностей:

$$a_1a_2a_3 \in \{332, 422, 451, 521, 611\}.$$

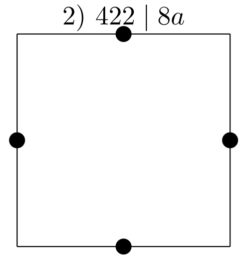
Автор признателен участникам своего семинара, особенно В. Дрёмову, за полезные советы, проявленный интерес и независимые вычисления, результаты которых совпали с результатами автора.

1. Список рисунков

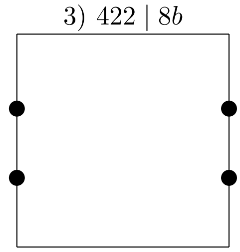
1) $332 \mid 8$



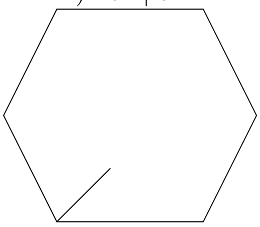
2) $422 \mid 8a$



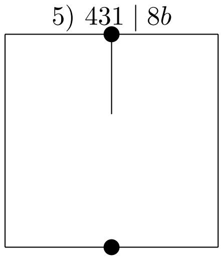
3) $422 \mid 8b$



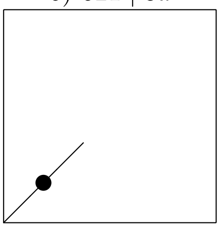
4) $431 \mid 8a$



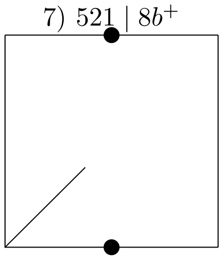
5) $431 \mid 8b$



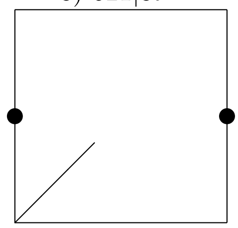
6) $521 \mid 8a$



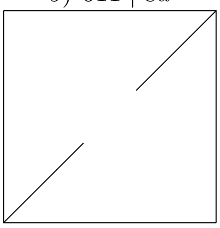
7) $521 \mid 8b^{+}$



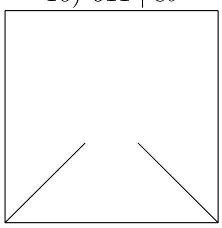
8) $521|8b^{-}$



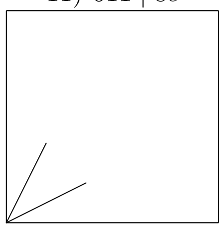
9) $611 \mid 8a$



10) $611 \mid 8b$



11) $611 \mid 8c$



2. Теоретические результаты

Предложение 2.1. *Торический рисунок обладает центральной симметрией тогда и только тогда, когда он может быть реализован парой Белого с чётной функцией Белого, иначе говоря, тогда и только тогда, когда соответствующая кривая может быть представлена уравнением*

$$y^2 = f(x),$$

где f — многочлен степени 3 или 4, таким образом, что функция Белого зависит только от x.

Доказательство. Утверждение следует из функториальных соображений и общеизвестных фактов об эллиптических кривых. $\square$

Предложение 2.2 (лемма Дрёмова). *Пусть β — чистая функция Белого, соответствующая некоторому рисунку. Функция $1-\beta$ является квадратом тогда и только тогда, когда граф рисунка допускает двудольную структуру.*

Доказательство. Сначала установим частный случай половины леммы: $1-\beta$ не является квадратом, если граф рисунка содержит петлю.

Параметризуем петлю вещественно-аналитическим отрезком, вложение которого в риманову поверхность отождествляет лишь концы (в вершине петли). Функция $1-\beta$ превращается в вещественно-аналитическую вещественнозначную функцию на отрезке, обращающуюся в 1 на его концах и имеющую единственный двукратный нуль во внутренней точке. Если бы функция $1-\beta$ была квадратом мероморфной функции на всей поверхности, то на нашем отрезке она превратилась бы в квадрат функции с однократным нулём во внутренней точке. Но тогда эта (новая) функция в концах отрезка обязана была бы принимать значения противоположных знаков, а это противоречит тому, что отрезок отображается в петлю.

Использоваться будет другая половина. Она в некотором смысле очевидна: аналитическое продолжение ростка функции $\sqrt{1-\beta}$, рассмотренного в малой окрестности любой вершины, корректно определено: выбор любого из значений ± 1 в этой вершине определяет продолжение вдоль всех рёбер. Будет приниматься то же значение в вершинах того же цвета и противоположное — в вершинах другого цвета. Возможность мероморфного продолжения внутрь клеток следует из определения детского рисунка. □

3. Вычисления для центрально-симметричных рисунков

3.1. Рисунок 332 | 8

Дивизориальные соотношения принимают вид

$$\mathrm{div}(\beta) = 3A_1 + 3A_2 + 2A_3 - 8C, \quad \mathrm{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C.$$

Из рисунка видно, что нетривиальные точки второго порядка — это одна вершина (валентности 2) и две «середины рёбер». Кроме того, $x(A_1) = x(A_2)$.

Можно считать, что

$$f = [x - x(A_3)][x - x(B_1)][x - x(B_2)].$$

Тогда (с учётом того, что $\beta = U$ и $x(B_3) = x(B_4)$) имеем

$$U = k[x - x(A_1)]^3[x - x(A_3)], \quad U - 1 = k[x - x(B_3)]^2[x - x(B_1)][x - x(B_2)].$$

Пользуясь аффинным произволом в выборе x, выберем нормировку, в которой

$$x(A_1) = x(A_2) = 0, \quad x(B_3) = x(B_4) = 1.$$

Обозначив

$$[x - x(B_1)][x - x(B_2)] =: x^2 + px + q$$

и

$$x(A_3) =: r,$$

перепишем наши уравнения в виде

$$\begin{cases} f = (x - r)(x^2 + px + q), \\ U = kx^3(x - r), \\ U - 1 = k(x - 1)^2(x^2 + px + q). \end{cases}$$

Лёгкие вычисления в MAPLE дают (после замены y на $3y$) уравнение кривой

$$y^2 = (3x - 4)(3x^2 + 2x + 1)$$

с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{332} = -\frac{219\,488}{729} = -\frac{2^5\,19^3}{3^6} = -301{,}080932\ldots.$$

Искомая функция Белого имеет вид

$$\beta = -x^3(3x - 4),$$

что проверяется равенством

$$\beta - 1 = -(3x^2 + 2x + 1)(x - 1)^2.$$

3.2. Рисунок 422 | $8a$

Дивизориальные соотношения принимают вид

$$\operatorname{div}(\beta) = 4A_1 + 2A_2 + 2A_3 - 8C, \quad \operatorname{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C.$$

По рисунку сразу видно, что все точки второго порядка — вершины. Поэтому

$$f = [x - x(A_1)][x - x(A_2)][x - x(A_3)],$$

и с учётом того, что $\beta = U$, $x(B_1) = x(B_2)$ и $x(B_3) = x(B_4)$, имеем

$$U = k[x - x(A_1)]^2[x - x(A_2)][x - x(A_3)], \quad U - 1 = k[x - x(B_1)]^2[x - x(B_3)]^2.$$

Пользуясь аффинным произволом в выборе x, выберем нормировку, в которой

$$x(A_1) = 0, \quad x(A_2) = 1.$$

Обозначив

$$[x - x(B_1)][x - x(B_2)] =: x^2 + px + q$$

и

$$x(A_3) =: t,$$

перепишем наши уравнения в виде

$$\begin{cases} f = x(x-1)(x-t), \\ U = kx^2(x-1)(x-t), \\ U - 1 = k(x^2+px+q)^2. \end{cases}$$

Лёгкие вычисления в MAPLE дают уравнение кривой

$$y^2 = x(x-1)(x+1),$$

которая оказывается знаменитой кривой с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{422a} = 1\,728 = 2^6\,3^3.$$

Искомая функция Белого имеет вид

$$\beta = -4x^2(x-1)(x+1),$$

что проверяется равенством

$$\beta - 1 = -(2x^2-1)^2.$$

Если учесть симметрии и комплексное умножение, тот же ответ можно было бы получить красивее; его, однако, было бы дольше объяснять...

3.3. Рисунок 422 | 8*b*

Дивизориальные соотношения принимают вид

$$\mathrm{div}(\beta) = 4A_1 + 2A_2 + 2A_3 - 8C, \quad \mathrm{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C.$$

По рисунку сразу видно, что все точки второго порядка — это одна вершина и две «середины рёбер». Кроме того, $x(A_2) = x(A_3)$.

Можно считать, что

$$f = [x - x(A_1)][x - x(B_1)][x - x(B_2)],$$

и с учётом того, что $\beta = U$ и $x(B_3) = x(B_4)$, имеем

$$U = k[x - x(A_1)]^2[x - x(A_2)]^2, \quad U - 1 = k[x - x(B_3)]^2[x - x(B_1)][x - x(B_2)].$$

Пользуясь аффинным произволом в выборе x, выберем нормировку, в которой

$$x(A_1) = 0, \quad x(B_3) = x(B_4) = 1.$$

Обозначив

$$[x - x(B_1)][x - x(B_2)] =: x^2 + px + q$$

и

$$x(A_3) =: r,$$

перепишем наши уравнения в виде

$$\begin{cases} f = x(x^2 + px + q), \\ U = kx^2(x-r)^2, \\ U - 1 = k(x-1)^2(x^2 + px + q). \end{cases}$$

Лёгкие вычисления в MAPLE дают уравнение кривой

$$y^2 = x(x^2 - 2x - 1)$$

с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{422b} = 10\,976 = 2^5\,7^3.$$

Искомая функция Белого имеет вид

$$\beta = x^2(x-2)^2,$$

что проверяется равенством

$$\beta - 1 = (x-1)^2(x^2 - 2x - 1).$$

3.4. Рисунок 611 | 8a

Дивизориальные соотношения принимают вид

$$\mathrm{div}(\beta) = 6A_1 + A_2 + A_3 - 8C, \quad \mathrm{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C.$$

По рисунку видны точки второго порядка: вершина валентности 6, т. е. A_1, и две «середины рёбер». Кроме того, $x(A_2) = x(A_3)$, $x(B_1) = x(B_3)$ и $x(B_2) = x(B_4)$.

Имеем

$$f = [x - x(A_1)]f_1$$

и

$$U = k[x - x(A_1)]^3[x - x(A_2)], \quad U - 1 = k[x - x(B_1)]^2 f_1.$$

Пользуясь аффинным произволом в выборе x, выберем нормировку, в которой

$$x(A_1) = 0, \quad x(A_2) = 1.$$

Обозначив

$$f_1 =: x^2 + px + q,$$

перепишем наши уравнения в виде

$$\begin{cases} f = x(x^2 + px + q), \\ U = kx^3(x-1), \\ U - 1 = k(x-r)^2(x^2 + px + q). \end{cases}$$

Лёгкие вычисления в MAPLE дают уравнение кривой

$$y^2 = x\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}\right)$$

с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{611a} = \frac{4\,000}{9} = \frac{2^5 5^3}{3^2} = 444{,}444444\ldots.$$

Искомая функция Белого имеет вид

$$\beta = -\frac{256}{27}x^3(x-1),$$

что проверяется равенством

$$\beta - 1 = (4x-3)^2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}\right).$$

4. Вычисления для двудольных рисунков

Остался единственный двудольный не центрально-симметричный рисунок, вычисления для которого будут сейчас приведены. Повторные вычисления для центрально-симметричных двудольных рисунков описанным ниже методом также осмысленны, но откладываются до дальнейших публикаций.

4.1. Рисунок 431 | $8a$

Дивизориальные соотношения принимают вид

$$\operatorname{div}(\beta) = 4A_1 + 3A_2 + A_3 - 8C, \quad \operatorname{div}(\beta - 1) = 2(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - 8C.$$

Согласно лемме Дрёмова можно ввести функцию α, определённую соотношением

$$1 - \beta = \alpha^2.$$

С учётом двудольной структуры получаем уравнение кривой

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

с соотношениями

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}(\beta) = 4A_1 + 3A_2 + A_3 - 8C,\\
x(C) = \infty,\\
x(A_1) = 0,\\
y(A_1) = 1,\\
\beta = 1 - \alpha^2,\\
\operatorname{div}(1-\alpha) = 4A_1 - 4C,\\
\operatorname{div}(1+\alpha) = 3A_2 + A_3 - 4C,\\
\alpha = p_0 + p_1x + p_2x^2 + qy.
\end{gathered}$$

Вычисления в MAPLE дают уравнение кривой

$$y^2 = \frac{1}{32}(x+2)(9x^2 + 16 + 8x)$$

с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{431a} = \frac{207\,646}{6\,561} = \frac{2\cdot 47^3}{3^8} = 31{,}648529\ldots.$$

Искомая функция Белого имеет вид

$$\beta = -\frac{9}{64}x^4 - x^3 - \frac{77}{36}x^2 - \frac{20}{9}x + \left(x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{8}{9}\right)y - \frac{8}{9}.$$

5. Вычисления для общих рисунков

5.1. Домножение $1-\beta$ до квадрата

Согласно лемме Дрёмова у всех оставшихся рисунков функция $1-\beta$ не является квадратом. Однако дивизор

$$\operatorname{div}(1-\beta) = 2(B_1+B_2+B_3+B_4) - 8C \tag{1}$$

является главным, и его «половинка» $B_1+B_2+B_3+B_4-4C$ имеет порядок 2, т. е. на кривой найдётся такая точка второго порядка D, что

$$B_1+B_2+B_3+B_4-4C \equiv D - C$$

(мы, как обычно, приняли C за нейтральный элемент на эллиптической кривой). По лемме Дрёмова точка D — одна из трёх *нетривиальных* точек второго порядка на кривой.

Прибавляя $D-C$ к обеим частям последнего равенства, находим такую функцию ψ, что

$$B_1+B_2+B_3+B_4-4C+(D-C) = \operatorname{div}(\psi). \tag{2}$$

Нами выделена одна из точек второго порядка, поэтому запишем уравнение кривой в виде

$$y^2 = f =: (x-1)(ax^2+bx-1)$$

и будем считать, что

$$x(D) = 1, \quad y(D) = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}(x-1) = 2(D-C). \tag{3}$$

Удваивая (2) и используя (1) и (3), получаем (умножив ψ на подходящую ненулевую константу)

$$(x-1)(\beta-1) = \psi^2. \tag{4}$$

5.2. Важное упрощение

Поскольку $\psi \in \mathrm{L}(4C)$, существуют такие $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, удовлетворяющие условиям $\deg P \leqslant 2$, $\deg Q \leqslant 1$, что

$$\psi = P + Qy. \tag{5}$$

Согласно (4)

$$(x-1)(\beta-1) = (P+Qy)^2.$$

Раскрывая скобки и пользуясь тем, что $\beta = U + Vy$, получаем, что

$$\begin{cases} (x-1)(U-1) = P^2 + Q^2 f, \\ (x-1)V = 2PQ. \end{cases}$$

Поскольку многочлен f делится на $x-1$, из первого уравнения системы видно, что P также делится на $x-1$. Это даёт нам основания ввести обозначение

$$P =: (x-1)P_1, \tag{6}$$

где $P_1 \in \mathbb{C}[x]$, $\deg P_1 \leqslant 1$.

После сокращений на $x-1$ последняя система принимает вид

$$\begin{cases} U - 1 = (x-1)P_1^2 + Q^2(ax^2+bx-1), \\ V = 2P_1 Q. \end{cases}$$

5.3. Общая параметризация

У всех оставшихся рисунков наибольшая 0-валентность (по нашим соглашениям соответствующая вершина обозначается A_1) не менее 4. Точнее,

$$\mathrm{div}(\beta) = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 - 8C, \quad (a_1a_2a_3) \in \{(611), (521), (431)\}.$$

Условие $\beta \in \mathrm{L}(8C - 4A_1)$ позволяет исключить коэффициенты многочленов первой степени P_1 и Q. Получаем, что

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1x+p_0}{S}, \quad Q = \frac{1}{2}\frac{q_1x+q_0}{S}, \tag{7}$$

где

$$p_1 = 4a + 16a^2 - 8ab + 3b^2 - 2b^3 - b^4, \tag{8}$$

$$p_0 = -8a + 32a^2 + 32ab - 6b^2 + 8b^3 - 2b^4, \tag{9}$$

$$q_1 = 8a + b - 12ab + 2b^2 - 3b^3, \tag{10}$$

$$q_0 = 2 + 24a - 8b + 6b^2, \tag{11}$$

$$S = -1 - 16a + 4b + 16a^2 + 16ab - 6b^2 + 4b^3 - b^4. \tag{12}$$

Иначе говоря, все оставшиеся кривые задаются уравнениями

$$y^2 = (x-1)(ax^2+bx-1),$$

а функции Белого на них определяются при подходящих значениях параметров a, b соотношениями (4)—(6) и (7)—(12).

5.4. Рисунок 431 | 8b

Во введённых параметрах рисунок находится прямым вычислением: кривая задаётся уравнением

$$y^2 = -(x-1)\left(\frac{448}{81}x^2 + \frac{208}{9}x + 1\right)$$

с j-инвариантом

$$\mathrm{j}_{431b} = \frac{10\,647\,696\,795\,116\,000}{1\,853\,320\,108\,689} = \frac{2^5\,5^3\,13\,859^3}{3^8\,7^{10}} = 5\,745{,}201137\ldots .$$

Функция Белого на ней имеет вид

$$\beta = -\frac{4\,096}{250\,047}x^4 + \frac{137\,216}{1\,750\,329}x^3 + \frac{7\,414\,528}{12\,252\,303}x^2 + \frac{2\,086\,912}{9\,529\,569}x + \frac{10\,240}{1\,058\,841} - \\ - \left(\frac{8\,192}{194\,481}x^2 + \frac{152\,576}{1\,361\,367}x + \frac{10\,240}{1\,058\,841}\right)y.$$

Эта пара Белого соответствует параметрам

$$\left(a = -\frac{448}{81},\ b = -\frac{208}{9}\right).$$

5.5. Дискриминантная кривая

Дискриминантная кривая состоит из таких пар (a, b), что многочлен

$$\frac{U^2 - V^2 f}{x^4}$$

имеет кратный корень. Кривая содержит компоненту D_I рода 1, задаваемую уравнением

$$\begin{aligned}
0 = {} & 36\,864a^7 + \left(331\,776b^2 - 344\,064b + 94\,208\right)a^6 + \\
& + \left(-233\,984b^2 + 95\,232b + 158\,976b^4 - 2\,304 + 27\,648b^3\right)a^5 + \\
& + \left(-222\,976b^4 - 768b + 182\,016b^5 + 32\,256b^3 + 22\,272b^2\right)a^4 + \\
& + \left(20\,512b^4 + 72\,576b^7 - 21\,888b^5 - 9\,936b^8 - 60\,608b^6 + 1\,408b^3 - 64b^2\right)a^3 + \\
& + \left(1\,856b^5 - 1\,296b^{10} - 10\,560b^7 + 4\,560b^6 - 16b^4 - 5\,200b^8 + 10\,656b^9\right)a^2 + \\
& + \left(95b^8 + 540b^{11} + 424b^7 + 20b^6 - 9b^{12} - 1020b^9 - 50b^{10}\right)a + \\
& + 30b^{11} - 15b^{12} + 15b^9 - 3b^8 + 3b^{13} - 30b^{10}.
\end{aligned}$$

5.6. Рисунки 521 | 8a, 521 | $b^{\pm}$

На кривой D_I имеются три точки, соответствующие рассматриваемым рисункам и составляющие (единственную среди одноклеточных четырёхрёберных торических рисунков) кубическую орбиту Галуа. Соответствующие параметры являются корнями кубических уравнений

$$65\,536a^3 - 238\,080a^2 + 216\,425a + 14\,000$$

и

$$64b^3 - 272b^2 + 1\,427b - 344.$$

Приближённые значения указывают объединения этих параметров в пары:

$$(a = -0{,}060582\ldots,\ b = 0{,}252495\ldots)$$

соответствует вещественному рисунку $521 \mid 8a$, а

$$(a = 1{,}846697\ldots \pm 0{,}340363\ldots i,\ b = 1{,}998752\ldots \pm 4{,}158426\ldots i) —$$

паре комплексно сопряжённых рисунков $521 \mid 8b^{\pm}$. Неприводимый кубический многочлен, корнями которого являются j-инварианты всех трёх кривых, имеет вид

$$\begin{aligned}&56\,495\,049\,800\,000\,000\,000\,000j^3 - 315\,629\,560\,922\,285\,350\,000\,000\,000j^2 + \\ &+ 748\,295\,885\,321\,347\,996\,073\,297\,265\,625j - \\ &- 564\,055\,135\,320\,668\,135\,938\,721\,399\,828\,128,\end{aligned}$$

его старший коэффициент раскладывается на малые простые множители

$$56\,495\,049\,800\,000\,000\,000\,000 = 2^{15}\,5^{14}\,7^{10}.$$

5.7. Рисунки $611 \mid 8a$, $611 \mid 8b$

Эта квадратичная орбита Галуа соответствует параметрам

$$\left(a = -\frac{3}{64} \pm \frac{3}{32}\sqrt{2},\ b = \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4}\sqrt{2}\right).$$

j-инварианты кривых равны

$$j = \frac{1\,211\,356\,467\,233}{847\,425\,747} \pm \frac{5\,287\,472\,423\,321}{20\,338\,217\,928}\sqrt{2};$$

и удовлетворяют квадратному уравнению

$$\begin{aligned}0 = 413\,643\,108\,486\,820\,613\,184j^2 - 1\,182\,567\,927\,315\,693\,367\,354\,752j + \\ + 789\,298\,737\,392\,595\,284\,292\,204\,382,\end{aligned}$$

старший коэффициент которого раскладывается на малые простые множители:

$$413\,643\,108\,486\,820\,613\,184 = 2^6\,3^4\,7^{20}.$$

Приложение 1. Таблица j-инвариантов

Номер	Рисунок	j
1	$332 \mid 8$	$-219\,488/729 = -2^5\,19^3/3^6 = -301{,}080932\ldots$
2	$422 \mid 8a$	$1\,728 = 2^6\,3^3$
3	$422 \mid 8b$	$10\,976 = 2^5\,7^3$
4	$431 \mid 8a$	$207\,646/6\,561 = 2 \cdot 47^3/3^8 = 31{,}648529\ldots$
5	$431 \mid 8b$	$10\,647\,696\,795\,116\,000/1\,853\,320\,108\,689 =$ $= 2^5\,5^3\,13\,859^3/(3^8\,7^{10}) = 5\,745{,}201137\ldots$
6	$521 \mid 8a$	вещественный корень I^*_{521}
7	$521 \mid 8b^+$	один из невещественных корней I^*_{521}
8	$521 \mid 8b^-$	один из невещественных корней I^*_{521}
9	$611 \mid 8a$	$4000/9 = 2^5\,5^3/3^2 = 444{,}444444\ldots$
10	$611 \mid 8b$	один из корней I^{**}_{611}
11	$611 \mid 8c$	один из невещественных корней I^{**}_{611}

$$^*\mathrm{I}_{521} := 56\,495\,049\,800\,000\,000\,000\,000 j^3 - 315\,629\,560\,922\,285\,350\,000\,000\,000 j^2 + \\ + 748\,295\,885\,321\,347\,996\,073\,297\,265\,625 j - \\ - 564\,055\,135\,320\,668\,135\,938\,721\,399\,828\,128,$$

$$^{**}\mathrm{I}_{611} := 413\,643\,108\,486\,820\,613\,184 j^2 - 1\,182\,567\,927\,315\,693\,367\,354\,752 j + \\ + 789\,298\,737\,392\,595\,284\,292\,204\,382.$$

Приложение 2. Нормы иррациональных j-инвариантов

Орбита Галуа	Норма j-инвариантов
$\{521 \mid 8a,\ 521 \mid 8b^+,\ 521 \mid 8b^-\}$	$43^3\,389^3\,919^3\,1\,693^3/(2^{10}\,5^{14}\,7^{10})$
$\{611 \mid 8b,\ 611 \mid 8c\}$	$11^6\,9\,239^3/(2^5\,3^4\,7^{10})$

Приложение 3. Простые делители дискриминантов кривых

Номера	Рисунки	«Плохие» простые
1	$332 \mid 8$	3
2, 3	$422 \mid 8a,\ 422 \mid 8b$	отсутствуют
4	$431 \mid 8a$	3
5	$431 \mid 8b$	3, 7
6, 7, 8	$521 \mid 8a,\ 521 \mid 8b^{\pm}$	2, 5, 7
9	$611 \mid 8a$	3
10, 11	$611 \mid 8b,\ 611 \mid 8c$	2, 3, 7