Модули, в которых суммы или пересечения двух прямых слагаемых являются прямыми слагаемыми*

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский федеральный университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: SSP-модуль, SIP-модуль, D_3-модуль, C_3-модуль.

Аннотация

Данная работа содержит новые характеризации SSP-модулей, SIP-модулей, D_3-модулей и C_3-модулей. В качестве следствий получены новые и известные результаты, связанные с SSP- и SIP-модулями. Также рассматриваются приложения полученных результатов к эндорегулярным модулям.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Modules in which sums or intersections of two direct summands are direct summands, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 3—11.

This paper contains new characterizations of SSP-modules, SIP-modules, D_3-modules, and C_3-modules. These characterizations are used for the proof of new and known results related to SSP-modules and SIP-modules. We also apply obtained results to endo-regular modules.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными.

Модуль M называется *SSP-модулем* (*SIP-модулем*), если сумма (соответственно пересечение) двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M. Изучение SIP-модулей и SSP-модулей было инспирировано И. Капланским и Л. Фуксом. И. Капланский установил, что каждый свободный

*Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00452-А.

© 2014 *Издательский дом «Открытые системы»*

модуль над областью главных идеалов является SIP-модулем [6]. Л. Фукс поставил задачу описания абелевых групп, являющихся SIP-модулями над кольцом целых чисел [1, проблема 9]. SSP- и SIP-модули изучались также в [2, 4, 5, 14].

Напомним следующие условия для модулей.

(C_1) Каждый подмодуль модуля M является существенным подмодулем прямого слагаемого модуля M.

(C_2) Каждый подмодуль модуля M, изоморфный прямому слагаемому модуля M, является прямым слагаемым в M.

(C_3) Если M_1 и M_2 — прямые слагаемые модуля M и $M_1 \cap M_2 = 0$, то $M_1 \oplus M_2$ — прямое слагаемое в M.

Модуль M, удовлетворяющий условию (C_1), называется *CS-модулем*. Если модуль M удовлетворяет условию (C_i) ($i = 2, 3$), то модуль M называется C_i*-модулем*. Модуль M, удовлетворяющий условиям (C_1) и (C_3), называется *квазинепрерывным*.

Модуль M называется *риккартовым*, если ядро каждого эндоморфизма $f \in \mathrm{End}_R(M)$ является прямым слагаемым в M. Согласно [9, предложение 2.16] каждый риккартов модуль является SIP-модулем. Модуль M называется *дуально риккартовым*, если образ каждого эндоморфизма $f \in \mathrm{End}_R(M)$ является прямым слагаемым в M. Согласно [10, предложение 2.11] каждый дуально риккартов модуль является SSP-модулем.

Пусть A и B — правые R-модули. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ называется *регулярным*, если для некоторого гомоморфизма $g \in \mathrm{Hom}_R(B, A)$ выполнено равенство $f = fgf$. Хорошо известно, что гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ регулярен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое в A и $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое в B.

Во втором разделе настоящей работы получены новые характеризации SSP-модулей и SIP-модулей. Также в этом разделе описываются модули, у которых регулярные эндоморфизмы замкнуты относительно операции композиции. В третьем разделе получены новые характеризации D_3-модулей и C_3-модулей. В четвёртом разделе рассматриваются приложения полученных результатов к эндорегулярным модулям.

2. Характеризации SSP-модулей и SIP-модулей

Следующие два утверждения проверяются непосредственно.

Лемма 2.1. *Пусть M — правый R-модуль, $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — регулярные гомоморфизмы и $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B$, $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) $\mathrm{Im}(fg) = f\Big(A \cap \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big)\Big)$;

2) $\mathrm{Ker}(fg) = g^{-1}|_{A'}\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{Ker}(g)$.

Лемма 2.2. *Пусть M — правый R-модуль, π — проекция на первое прямое слагаемое относительно разложения $M = A_1 \oplus A_2$ и π' — проекция на первое прямое слагаемое относительно разложения $M = B_1 \oplus B_2$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) $\mathrm{Im}(\pi'\pi) = (A_1 + B_2) \cap B_1$;
2) $\mathrm{Ker}(\pi'\pi) = A_1 \cap B_2 + A_2$.

Теорема 2.3. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *M — SSP-модуль*;
2) *если $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — регулярные гомоморфизмы, то $\mathrm{Im}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'.$$

Так как

$$\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus A \cap \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big),$$

то из условия 1) следует, что $A \cap \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big)$ — прямое слагаемое модуля M. Поскольку $f|_A \colon A \to \mathrm{Im}(f)$ — изоморфизм, то $f\Big(A \cap \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big)\Big)$ — прямое слагаемое модуля M. Тогда из леммы 2.1 следует, что $\mathrm{Im}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть π, π' — идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$. Из леммы 2.2 следует, что подмодуль $(\pi M + \pi' M) \cap (1 - \pi')M$ является прямым слагаемым в $(1 - \pi')M$. Так как

$$(\pi M + \pi' M) = \pi' M \oplus (\pi M + \pi' M) \cap (1 - \pi')M,$$

то $\pi M + \pi' M$ — прямое слагаемое модуля M. □

Теорема 2.4. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *M — SIP-модуль*;
2) *если $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — регулярные гомоморфизмы, то $\mathrm{Ker}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'.$$

Так как согласно условию 1) $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M, то $g^{-1}|_{A'}\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)\big)$ — прямое слагаемое A'. Поскольку согласно лемме 2.1

$$\mathrm{Ker}(fg) = g^{-1}|_{A'}\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)\big) \oplus \mathrm{Ker}(g),$$

то $\mathrm{Ker}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть π, π' — идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$. Из леммы 2.2 следует, что подмодуль $\pi M \cap \pi' M \oplus (1 - \pi)M$ является прямым слагаемым модуля M. Следовательно, $\pi M \cap \pi' M$ — прямое слагаемое M. □

Следствие 2.5. *Для квазипроективного правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) M — *SSP-модуль*;
2) *если* $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — *регулярные гомоморфизмы, то* fg — *регулярный гомоморфизм.*

Следствие 2.6. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) R — *правое SSP-кольцо*;
2) R — *левое SSP-кольцо*;
3) *в кольце R множество регулярных элементов замкнуто относительно операции умножения.*

Теорема 2.7. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *если* $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — *регулярные гомоморфизмы, то* fg — *регулярный гомоморфизм*;
2) M — *SSP-модуль и SIP-модуль*;
3) $\mathrm{End}_R(M)$ — *правое SSP-кольцо*;
4) $\mathrm{End}_R(M)$ — *левое SSP-кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 3) и 4) следует из следствия 2.6. Эквивалентность условий 1) и 2) следует из теорем 2.3 и 2.4. □

3. C_3-модули и D_3-модули

Теорема 3.1. *Для правого R-модуля M следующие утверждения равносильны*:

1) M — C_3-*модуль*;
2) *если* $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — *регулярные эндоморфизмы и* $\mathrm{Ker}(fg)$ — *прямое слагаемое модуля M, то* $\mathrm{Im}(fg)$ — *прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'.$$

Из леммы 2.1 следует, что $g^{-1}|_{A'}\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)\big)$ — прямое слагаемое модуля A'. Поскольку $g|_{A'}\colon A' \to \mathrm{Im}(g)$ — изоморфизм и $\mathrm{Im}(g)$ — прямое слагаемое модуля M, то $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, для некоторого подмодуля N модуля M имеет место равенство $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g) \cap \cap\, \mathrm{Ker}(f) \oplus N$. Так как M — C_3-модуль и $N \cap \mathrm{Im}(g) = 0$, то $N \oplus \mathrm{Im}(g)$ — прямое слагаемое модуля M. Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g) \oplus N$, то

$$\mathrm{Im}(g) \oplus N = \mathrm{Ker}(f) \oplus (\mathrm{Im}(g) + N) \cap A = \mathrm{Ker}(f) \oplus \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big) \cap A.$$

Таким образом, $\big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big) \cap A$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, согласно лемме 2.1 $\mathrm{Im}(fg) = f\Big(A \cap \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big)\Big)$ — прямое слагаемое модуля M.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$ и $A \cap B = 0$. Рассмотрим естественные проекции $\pi_1\colon A \oplus A' \to A$ и $\pi_2\colon B \oplus B' \to B'$. Из леммы 2.2 следует, что $\mathrm{Ker}(\pi_2\pi_1) = A'$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, согласно условию 2) и лемме 2.2 $\mathrm{Im}(\pi_2\pi_1) = (A + B) \cap B'$ — прямое слагаемое модуля M. Так как $A + B = B \oplus (A + B) \cap B'$, то $A + B$ — прямое слагаемое модуля M. □

Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм правых R-модулей. Через $\langle f \rangle$ мы будем обозначать подмодуль модуля $A \oplus B$ вида $\{a + f(a) \mid a \in A\}$.

Теорема 3.2. *Если M — C_3-модуль, $M = A \oplus B$, где A, B — подмодули модуля M, и $f\colon A \to B$ — гомоморфизм, у которого $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M, то образ f является прямым слагаемым в M.*

Доказательство. Пусть $A = A_0 \oplus \mathrm{Ker}(f)$, где A_0 — подмодуль модуля M. Так как M — C_3-модуль и $\langle f \rangle \cap A_0 = 0$, то $\langle f \rangle + A_0 = A \oplus \mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля M. □

Модуль M называется D_3-*модулем*, если пересечение двух прямых слагаемых A и B модуля M, удовлетворяющих условию $A + B = M$, является прямым слагаемым в M.

Теорема 3.3. *Для правого R-модуля M следующие утверждения равносильны*:

1) *M — D_3-модуль*;
2) *если $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ — регулярные эндоморфизмы и $\mathrm{Im}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M, то $\mathrm{Ker}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'.$$

Из леммы 2.1 следует, что $\big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big) \cap A$ является прямым слагаемым модуля M. Тогда для некоторого подмодуля N модуля M имеет место равенство $A = N \oplus \big(\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)\big) \cap A$. Так как M — D_3-модуль и $N + \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = M$, то $\big(N + \mathrm{Ker}(f)\big) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ — прямое слагаемое модуля M. Поскольку $g|_{A'}\colon A' \to \mathrm{Im}(g)$ — изоморфизм, то $g^{-1}|_{A'}\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)\big)$ — прямое слагаемое модуля M, и следовательно, согласно лемме 2.1 $\mathrm{Ker}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$ и $A + B = M$. Рассмотрим естественные проекции $\pi_1\colon A \oplus A' \to A$ и $\pi_2\colon B \oplus B' \to B'$. Из леммы 2.2 следует, что $\mathrm{Im}(\pi_2\pi_1) = B'$ — прямое слагаемое модуля M. Следовательно, согласно условию 2) и лемме 2.2 $\mathrm{Ker}(\pi_2\pi_1) = (A \cap B) + A'$ — прямое слагаемое модуля M. Тогда $A \cap B$ — прямое слагаемое модуля M. □

Следующая теорема была доказана в [3]. Доказательство этой теоремы, приведённое ниже, отлично от доказательства данного в [3].

Теорема 3.4. *Если M — D_3-модуль, $M = A \oplus B$, где A, B — подмодули модуля M, и $f\colon A \to B$ — гомоморфизм, у которого $\mathrm{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля M, то ядро f является прямым слагаемым в M.*

Доказательство. Пусть $B = B_0 \oplus \mathrm{Im}(f)$, где B_0 — подмодуль модуля M. Так как M — D_3-модуль и $\langle f\rangle + A + B_0 = M$, то $\langle f\rangle \cap (A + B_0) = \mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M. □

Следствие 3.5. *Пусть M — правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *если модуль $M \oplus M$ является C_3-модулем, то M — C_2-модуль;*
2) *каждая (конечная) прямая сумма копий модуля M является C_3-модулем тогда и только тогда, когда каждая (конечная) прямая сумма копий модуля M является C_2-модулем.*

Следствие 3.6 [2]. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

1) *M является D_3-модулем и SSP-модулем;*
2) *M является C_3-модулем и SIP-модулем;*
3) *M — SSP-модуль и SIP-модуль.*

Следствие 3.7. *Для кольца R следующие утверждения равносильны:*

1) *R — наследственное справа кольцо;*
2) *каждый фактор-модуль любого инъективного правого R-модуля является C_3-модулем.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — инъективный правый R-модуль и N — его подмодуль. Так как модуль $M/N \oplus E(M/N)$ является фактор-модулем инъективного модуля, то $M/N \oplus E(M/N)$ — C_3-модуль, и из теоремы 3.2 следует, что $E(M/N) = M/N$. □

Правый R-модуль M называется *ретрактабельным*, если для каждого его ненулевого подмодуля N выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$.

Теорема 3.8. *Пусть M — ретрактабельный модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *M — C_3-модуль;*
2) *$\mathrm{End}_R(M)$ — правое C_3-кольцо.*

Доказательство. Обозначим $S = \mathrm{End}_R(M)$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть f, g — регулярные элементы кольца S и $r(fg) = eS$, где $e \in S$ — идемпотент. Покажем, что $\mathrm{Ker}(fg) = eM$. Ясно, что $eM \subset \mathrm{Ker}(fg)$. Если $eM \neq \mathrm{Ker}(fg)$, то $\mathrm{Ker}(fg) = \mathrm{Ker}(fg) \cap (1-e)M \oplus eM$, и, так как модуль M ретрактабельный, найдётся ненулевой гомоморфизм $h \in S$, у которого $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(fg) \cap (1-e)M$. Тогда $h \in r(fg) = eS$ и $(1-e)h = h$, что

противоречит выбору гомоморфизма h. Таким образом, $\mathrm{Ker}(fg) = eM$. Следовательно, согласно теореме 3.1 $\mathrm{Im}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M. Тогда fg — регулярный гомоморфизм и, следовательно, fgS — прямое слагаемое модуля S_S. Тогда из теоремы 3.1 следует, что S — правое C_3-кольцо.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть f, g — регулярные элементы кольца S и $\mathrm{Ker}\, fg = eM$, где $e \in S$ — идемпотент. Тогда, очевидно, $r(fg) = eS$, и из теоремы 3.1 следует, что fgS — прямое слагаемое модуля S_S. Следовательно, fg — регулярный гомоморфизм и $\mathrm{Im}(fg)$ — прямое слагаемое модуля M. Тогда из теоремы 3.1 следует, что M — C_3-модуль. □

Следствие 3.9. *Пусть M — несингулярный ретрактабельный модуль. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *M — квазинепрерывный модуль*;
2) *$S = \mathrm{End}_R(M) \cong S_1 \times S_2$, где S_1 — инъективное справа регулярное кольцо, S_2 — несингулярное справа, редуцированное и квазинепрерывное справа кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из теоремы 3.8, теоремы 3.2 из [8], теоремы 3.1 из [7] и следствия 3.13 из [12]. □

4. Эндорегулярные модули

Лемма 4.1. *Пусть M — риккартов модуль. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *если M — C_2-модуль, то $\mathrm{End}_R(M)$ — регулярное кольцо*;
2) *если M — C_3-модуль, то в кольце $\mathrm{End}_R(M)$ множество регулярных элементов замкнуто относительно операции умножения.*

Доказательство. Первое утверждение проверяется непосредственно.

Докажем второе утверждение. Согласно [9, предложение 2.16] модуль M является SIP-модулем. Тогда утверждение вытекает из следствия 3.6 и теоремы 2.7. □

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 4.2. *Пусть M — дуально риккартов модуль. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *если M — D_2-модуль, то $\mathrm{End}_R(M)$ — регулярное кольцо*;
2) *если M — D_3-модуль, то в кольце $\mathrm{End}_R(M)$ множество регулярных элементов замкнуто относительно операции умножения.*

Лемма 4.3. *Пусть M и N — правые R-модули. Если $M \oplus N$ — SSP-модуль и SIP-модуль, то каждый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ является регулярным.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ и

$\pi_1 \colon M \oplus N \to M, \quad \pi_2 \colon M \oplus N \to N, \quad \pi_1' \colon \langle f \rangle \oplus N \to \langle f \rangle, \quad \pi_2' \colon \langle f \rangle \oplus N \to N$ —

естественные гомоморфизмы. Так как согласно теореме 2.7 $\pi_2\pi_1$, $\pi_2'\pi_1'$ — регулярные гомоморфизмы, то $J(\pi_2'\pi_1') = \mathrm{Im}(f)$ и $\mathrm{Ker}(\pi_2\pi_1) = \mathrm{Ker}(f) \oplus N$ — прямые слагаемые модуля $M \oplus N$. Следовательно, f — регулярный гомоморфизм. □

Пусть M, N — правые R-модули. Если для каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ядро (образ) f является прямым слагаемым в M (соответственно в N), то модуль M называется N-риккартовым (соответственно N-дуально риккартовым). Модуль M называется N-C_2-модулем, если каждый подмодуль N' модуля N, изоморфный прямому слагаемому модуля M, является прямым слагаемым модуля N. Если каждый подмодуль M' модуля M, у которого M/M' изоморфно прямому слагаемому модуля N, является прямым слагаемым модуля M, то модуль M называется N-D_2-модулем.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 4.4. *Пусть M и N — правые R-модули. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *каждый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ является регулярным*;
2) *модуль M является N-риккартовым и N-C_2-модулем*;
3) *модуль M является N-дуально риккартовым и N-D_2-модулем.*

Теорема 4.5. *Пусть $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ — прямое разложение правого R-модуля M. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathrm{End}_R(M)$ — *регулярное кольцо*;
2) $\mathrm{End}_R(M_i)$ — *регулярное кольцо для каждого i и в кольце $\mathrm{End}_R(M)$ регулярные гомоморфизмы замкнуты относительно операции умножения*;
3) *модуль M_i является M_j-риккартовым и M_j-C_2-модулем для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$*;
4) *модуль M_i является M_j-дуально риккартовым и M_j-D_2-модулем для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$*;
5) *модуль M является риккартовым и дуально риккартовым модулем.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 5) проверяется непосредственно. Эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 3) и 1) $\Longleftrightarrow$ 4) непосредственно следуют из леммы 4.4 и [13, теорема 29]. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Из теоремы 2.7 следует, что M — SSP—модуль и SIP—модуль. Тогда для каждой пары различных индексов i, j модуль $M_i \oplus M_j$ является SSP- и SIP-модулем. Следовательно, согласно лемме 4.3 каждый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j)$ является регулярным. Тогда из [13, теорема 29] следует, что $\mathrm{End}_R(M)$ — регулярное кольцо. □

Замечание. Эквивалентность пунктов 3)—5) из предыдущей теоремы была доказана другим способом в [10, 11].

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[2] Alkan M., Harmanci A. On summand sum and summand intersection property of modules // Turkish J. Math. — 2002. — Vol. 26. — P. 131—147.

[3] Amin I., Ibrahim Y., Yousif M. D_3-modules // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42, no. 2. — P. 578—592.

[4] Garcia J. L. Properties of direct summands of modules // Commun. Algebra. — 1989. — Vol. 17. — P. 73—92.

[5] Hausen J. Modules with the summand intersection property // Commun. Algebra. — 1989. — Vol. 17. — P. 135—148.

[6] Kaplansky I. Commutative Rings. — Chicago: Univ. Chicago Press, 1974.

[7] Khuri S. M. Endomorphism rings of nonsingular modules // Ann. Sci. Math. Quebec. — 1980. — Vol. 4. — P. 145—152.

[8] Khuri S. M. Nonsingular retractable modules and their endomorphism rings // Bull. Austral. Math. Soc. — 1991. — Vol. 43. — P. 63—71.

[9] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Rickart modules // Commun. Algebra. — 2010. — Vol. 38, no. 11. — P. 4005—4027.

[10] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Dual Rickart modules // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39, no. 11. — P. 4036—4058.

[11] Lee G., Rizvi S. T., Roman C. S. Direct sums of Rickart modules // J. Algebra. — 2012. — Vol. 353, no. 1. — P. 62—78.

[12] Mohamed S. H., Muller B. J. Continuous and Discrete Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 147).

[13] Nicholson W. K., Zhou Y. Semiregular morphisms // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34. — P. 219—233.

[14] Wilson G. V. Modules with the direct summand intersection property // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14. — P. 21—38.