Геометрия абсолютно вещественных полей Галуа степени 4

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 511+514

Ключевые слова: поля Галуа, целые элементы, единицы.

Аннотация

Абсолютно вещественное поле Галуа K степени 4 мы будем рассматривать как линейное пространство $\mathbb{Q}^4 \subset \mathbb{R}^4$. Элемент $k \in K$ называется строго положительным, если все его сопряжённые положительны. Множество всех строго положительных элементов образует выпуклый конус в $\mathbb{Q}^4$. Выпуклая оболочка строго положительных целых элементов поля является выпуклым подмножеством конуса, а его граница Γ — это бесконечное объединение трёхмерных полиэдров. Группа U строго положительных единиц действует на Γ; действие строго положительной единицы переставляет полиэдры. В настоящей работе на примерах изучаются фундаментальные области этого действия.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Geometry of totally real Galois fields of degree 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 33—44.

We consider a totally real Galois field K of degree 4 as the linear coordinate space $\mathbb{Q}^4 \subset \mathbb{R}^4$. An element $k \in K$ is called strictly positive if all its conjugates are positive. The set of strictly positive elements is a convex cone in $\mathbb{Q}^4$. The convex hull of strictly positive integral elements is a convex subset of this cone and its boundary Γ is an infinite union of 3-dimensional polyhedrons. The group U of strictly positive units acts on Γ: the action of a strictly positive unit permutes polyhedrons. Examples of fundamental domains of this action are the object of study in this work.

1. Введение

Пусть K — абсолютно вещественное поле Галуа, заданное многочленом $p = x^3 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$. Элементы поля K мы будем записывать в виде $kx^2 + lx + m,\ k, l, m \in \mathbb{Q}$. Эта форма записи позволят отождествить поле K с трёхмерным пространством $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Элемент $kx^2 + lx + m \in K$ называется строго положительным, если все его сопряжённые положительны, т. е. если

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 1, с. 33—44.

$$\begin{cases} kx_1^2 + lx_1 + m > 0, \\ kx_2^2 + lx_2 + m > 0, \\ kx_3^2 + lx_3 + m > 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 — (вещественные) корни многочлена p. Эти три условия задают выпуклый конус C в $\mathbb{R}^3$. Пусть $O \subset C$ — множество строго положительных целых элементов поля K, $\bar{O}$ — его выпуклое замыкание (бесконечное полиэдральное подмножество конуса C), Γ — граница выпуклой оболочки $\bar{O}$ (бесконечный полигональный комплекс в $\mathbb{R}^3$). Обозначим через U группу строго положительных единиц поля K. Это свободная абелева группа ранга 2. Действие строго положительной единицы на Γ индуцирует перестановку граней. Фундаментальная область действия группы U на комплексе Γ — это конечное объединение многоугольников с попарно отождествлёнными сторонами, тор. В [3] были рассмотрены примеры фундаментальных областей этого действия. В настоящей работе будет рассмотрен четырёхмерный аналог этой задачи.

2. Абсолютно вещественные поля Галуа степени 4

Пусть K — абсолютно вещественное поле Галуа степени 4, заданное многочленом $p \in \mathbb{Q}[x]$. Элементы поля мы будем записывать в виде $kx^3 + lx^2 + mx + n$, $k, l, m, n \in \mathbb{Q}$, что позволяет отождествить поле K с четырёхмерным пространством $\mathbb{Q}^4 \subset \mathbb{R}^4$ с координатами k, l, m, n. Обозначим через $O \subset K$ подмножество целых строго положительных элементов из K. Элемент $kx^3 + lx^2 + mx + n$ строго положителен, если

$$\begin{cases} kx_1^3 + lx_1^2 + mx_1 + n > 0, \\ kx_2^3 + lx_2^2 + mx_2 + n > 0, \\ kx_3^3 + lx_3^2 + mx_3 + n > 0, \\ kx_4^3 + lx_4^2 + mx_4 + n > 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — (вещественные) корни многочлена p Эти четыре условия задают выпуклый конус C в $\mathbb{R}^4$. Выпуклое замыкание $\bar{O}$ множества O является бесконечным четырёхмерным подмножеством конуса C. Граница Γ множества $\bar{O}$ — это бесконечный трёхмерный полиэдр. Пусть $U \subset O$ — группа строго положительных единиц поля K, свободная абелева группа ранга 3. Действие строго положительной единицы на множестве Γ индуцирует перестановку трёхмерных полиэдров этого комплекса. Мы будем изучать фундаментальную область действия U на Γ. Фундаментальная область здесь является конечным объединением трёхмерных полиэдров с попарно отождествлёнными гранями и гомеоморфна трёхмерному тору [2].

Группа Галуа G нашего поля K есть либо $\mathbb{Z}_4$, либо $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. В обоих случаях G содержит нормальную подгруппу второго порядка, следовательно, поле K

содержит подполе L степени 2, т. е. поле разложения некоторого неприводимого многочлена степени 2 с рациональными коэффициентами и положительным дискриминантом d. Значит, само поле K есть расширение поля L с помощью некоторого многочлена второй степени $r \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})[x]$.

Пусть $r = x^2 + 2sx + t$, $s, t \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда корни x_1, x_2 многочлена r имеют вид

$$x_{1,2} = -s \pm \sqrt{s^2 - t} \in K$$

следовательно, $\sqrt{s^2 - t} \in K$. Пусть $s^2 - t = m + n\sqrt{d}$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{m + n\sqrt{d}} \in K$. Но тогда все сопряжённые $\pm\sqrt{m \pm n\sqrt{d}}$ принадлежат полю K. Следовательно, поле K задано биквадратным многочленом

$$q = (x - \sqrt{m + n\sqrt{d}})(x + \sqrt{m + n\sqrt{d}})(x - \sqrt{m - n\sqrt{d}})(x + \sqrt{m - n\sqrt{d}}) = \\ = x^4 - 2mx^2 + m^2 - n^2 d = x^4 - 2ax^2 + b.$$

Этот многочлен задаёт абсолютно вещественное поле Галуа, если:

1) все его корни вещественны, т. е. если $a > 0$, $b > 0$ и $d = a^2 - b > 0$;
2) корень $y_1 = \sqrt{a + \sqrt{d}}$ полиномиально порождает остальные корни многочлена q.

В частности, это относится и к корню $y_2 = \sqrt{a - \sqrt{d}}$, который может быть выражен через y_1 только как $ky_1^3 + ly_1$. Это даёт нам две возможности:

1) $ky_2^3 + ly_2 = -y_1$; тогда $G = \mathbb{Z}_4$, $a^2b - b^2 = bd = c^2$, $l = (2a^2 - b)/c = (a^2 + d)/c$ и $k = -a/c$;
2) $ky_2^3 + ly_2 = y_1$; тогда $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $b = c^2$, $l = 2a/c$ и $k = -1/c$.

Замечание 1. Если b — полный квадрат и $a^2b - b^2$ тоже полный квадрат, то многочлен $x^4 - 2ax^2 + b$ приводим.

Далее мы будем считать, что $2a$ и b — целые положительные числа. Опишем сначала геометрию фундаментальной области для полей с самыми маленькими a и b: для поля $L_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4x^2 + 1)$ и для поля $L_2 = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4x^2 + 2)$ (многочлен $x^4 - 3x^2 + 1$ приводим).

3. Поле $L_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4x^2 + 1)$

Группа Галуа многочлена $x^4 - 4x^2 + 1$ равна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Преобразования $x \mapsto x^3 - 4x$ и $x \mapsto -x$ — образующие группы Галуа. Элементы вида $kx^3 + lx^2 + mx + n$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$, являются целыми элементами поля L_1.

Гиперплоскость $k + l + n - 1 = 0$ является опорной для множества O. Она содержит девять целых строго положительных точек:

$$A_1 = (-2, 0, 6, 3), \quad A_2 = (-2, 3, 2, 0), \quad A_3 = (-1, 0, 3, 2),$$
$$A_4 = (-1, 0, 4, 2), \quad A_5 = (-1, 1, 2, 1), \quad A_6 = (-1, 2, 0, 0),$$
$$A_7 = (-1, 2, 1, 0), \quad A_8 = (0, 0, 0, 1), \qquad A_9 = (0, 1, 0, 0).$$

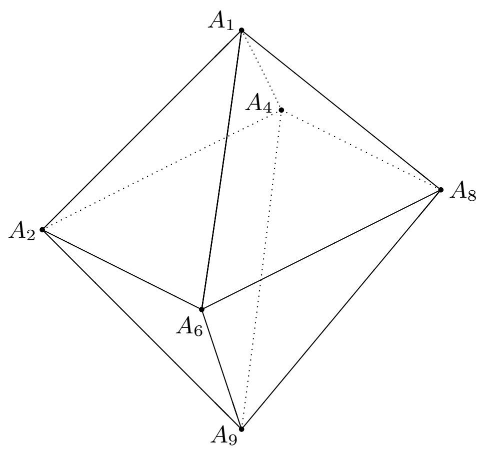

Рис. 1

Здесь точки A_1, A_2, A_4, A_6, A_8 и A_9 — единицы. Точка A_3 является серединой отрезка $[A_1, A_8]$ и имеет норму 4; точка A_7 является серединой отрезка $[A_2, A_9]$ и имеет норму 4; точка A_5 является серединой отрезка $[A_4, A_6]$ и имеет норму 9. Выпуклое замыкание этих точек в нашей гиперплоскости представляет собой октаэдр (рис. 1). Действие группы U не отождествляет грани октаэдра. Следовательно, построение фундаментального полиэдра не закончено.

Гиперплоскость $4k + 5l/2 + m + n - 1 = 0$ также является опорной для множества O. Она содержит пять строго положительных целых точек: A_1, A_3, A_6, A_8 и ещё точку $A_{10} = (0, 0, -1, 2)$, которая является единицей. Выпуклое замыкание этих пяти точек представляет собой тетраэдр, приклеенный к нашему октаэдру по треугольной грани $A_1A_6A_8$. В полученном полиэдре происходит отождествление некоторых (не всех!) граней, а именно

— грань $A_1A_8A_{10}$ отождествляется с гранью $A_2A_6A_9$ при умножении на единицу A_9: $A_1 \to A_2$, $A_8 \to A_9$, $A_{10} \to A_6$;
— грань $A_6A_8A_{10}$ отождествляется с гранью $A_1A_2A_4$ при умножении на единицу A_4: $A_6 \to A_2$, $A_8 \to A_4$, $A_{10} \to A_1$;
— грань $A_4A_8A_9$ отождествляется с гранью $A_1A_6A_{10}$ при умножении на единицу A_{10}: $A_4 \to A_1$, $A_8 \to A_{10}$, $A_9 \to A_6$.

Грани $A_1A_4A_8$, $A_1A_2A_6$, $A_6A_8A_9$ и $A_2A_4A_9$ остались неотождествлёнными. Следовательно, построение фундаментального полиэдра не закончено.

Гиперплоскость $k + l/2 + n - 1 = 0$ также является опорной для множества O. Она содержит пять целых строго положительных точек: A_1, A_3, A_4, A_8 и ещё точку $A_{11} = (-4, -2, 15, 8)$, которая является единицей. Выпуклое замыкание этих пяти точек представляет собой тетраэдр, приклеенный к нашему октаэдру по треугольной грани $A_1A_4A_8$. В полученном полиэдре происходит отождествление всех (ранее не отождествлённых) граней, а именно

— грань $A_1A_8A_{11}$ отождествляется с гранью $A_2A_4A_9$ при умножении на единицу A_9: $A_1 \to A_2$, $A_8 \to A_9$, $A_{11} \to A_4$;
— грань $A_4A_8A_{11}$ отождествляется с гранью $A_1A_2A_6$ при умножении на единицу A_6: $A_4 \to A_2$, $A_8 \to A_6$, $A_{11} \to A_1$;
— грань $A_6A_8A_9$ отождествляется с гранью $A_1A_4A_{11}$ при умножении на единицу A_{11}: $A_6 \to A_1$, $A_8 \to A_{11}$, $A_9 \to A_4$.

Построение фундаментальной области закончено.

4. Поле $L_2 = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4x^2 + 2)$

Группа Галуа многочлена x^4-4x^2+2 равна $\mathbb{Z}_4$. Преобразование $x \mapsto x^3-3x$ является образующим элементом группы Галуа. Элементы вида kx^3+lx^2+mx+n, $k,l,m,n \in \mathbb{Z}$, являются целыми элементами поля L_2.

Гиперплоскости

$$\begin{aligned}
&\Pi_1\colon k+2l+m+2n-2=0, &&\Pi_2\colon 3k+4l+2m+4n-4=0,\\
&\Pi_3\colon k+2l+2n-2=0, &&\Pi_4\colon k+4l-m+4n-4=0,\\
&\Pi_5\colon k-2l+m-2n+2=0, &&\Pi_6\colon 3k-4l+2m-4n+4=0,\\
&\Pi_7\colon k-2l-2n+2=0, &&\Pi_8\colon k-4l-m-4n+4=0
\end{aligned}$$

являются опорными для множества O. Каждая гиперплоскость содержит пять целых строго положительных точек, причём точки $A=(0,0,0,1)$, $B=(0,-2,0,-1)$ и $(A+B)/2$ принадлежат всем гиперплоскостям. Выпуклая оболочка целых точек в каждой гиперплоскости — треугольная пирамида.

Кроме точек A, B и $(A+B)/2$, гиперплоскость Π_1 содержит точки $C=(1,0,-3,2)$ и $D=(0,1,-2,1)$, гиперплоскость Π_2 — точки D и $E=(-2,4,1,-2)$, гиперплоскость Π_3 — точки E и $F=(-2,3,2,-1)$, гиперплоскость Π_4 — точки F и $G=(-1,0,3,2)$, гиперплоскость Π_5 — точки G и $H=(0,1,2,1)$, гиперплоскость Π_6 — точки H и $K=(2,4,-1,-2)$, гиперплоскость Π_7 — точки K и $L=(2,3,-2,-1)$, гиперплоскость Π_8 — точки L и C. Объединение этих тетраэдров очень грубо можно представить как две восьмиугольные пирамиды $ACDEFGHKL$ и $BCDEFGHKL$ с общим основанием $CDEFGHKL$. Здесь точки A, B, D, F, H и L — единицы, а норма точек C, E, G и K равна 2.

В этом полиэдре происходит отождествление некоторых (не всех!) граней:

— при действии единицы H грань ACD отождествляется с гранью BHK: $A \to H$, $C \to K$, $D \to B$;
— при действии единицы L грань AFG отождествляется с гранью BKL: $A \to L$, $F \to B$, $G \to K$;
— при действии единицы D грань AGH отождествляется с гранью BDE: $A \to D$, $G \to E$, $H \to B$;

— при действии единицы F грань ALC отождествляется с гранью BEF: $A \to F$, $C \to E$, $L \to B$.

Грани ADE, AEF, AHK, AKL, BCD, BFG, BGH и BLC остались неотождествлёнными. Построение фундаментального полиэдра не закончено.

Гиперплоскость $3k + 2l + m + n - 1 = 0$ является опорной для множества O. Она содержит семь целых строго положительных точек: A, D, E, F, $M = (0, 0, -1, 2)$, $N = (-2, 4, 0, -1)$ и $(-1, 2, 0, 0)$ — общую середину отрезков $[AN]$, $[DF]$ и $[EM]$. Выпуклая оболочка этих точек представляет собой октаэдр, где (A, N), (D, F) и (E, M) — пары противоположных вершин. Здесь точка N — единица, а норма точки M равна 2.

В полученном полиэдре, представляющем собой две восьмиугольные пирамиды с общим основанием и октаэдр, прикленный к ним по граням ADE и AFE, происходят следующие отождествления граней:

— при действии единицы N грань AHK отождествляется с гранью EFN: $A \to N$, $H \to F$, $K \to E$;

— при действии единицы N грань AKL отождествляется с гранью NDE: $A \to N$, $K \to E$, $L \to D$;

— при действии единицы H грань ADM отождествляется с гранью BGH: $A \to H$, $D \to B$, $M \to G$;

— при действии единицы L грань AFM отождествляется с гранью BCL: $A \to L$, $F \to B$, $M \to C$;

— при действии единицы $B^{-1}F$ грань BCD отождествляется с гранью FMN: $B \to F$, $C \to M$, $D \to N$;

— при действии единицы $B^{-1}D$ грань BFG отождествляется с гранью DMN: $B \to D$, $F \to N$, $G \to M$.

Построение фундаментальной области закончено.

5. Простейшие фундаментальные области в случае циклической группы Галуа

Комбинаторика фундаментального полиэдра может быть очень сложной. Тут естественно спросить, а может ли она быть достаточно простой? Оказывается, что есть серия полей, фундаментальные полиэдры которых образованы *одним* многогранником. Одно поле стоит особняком, и мы начнём с него.

5.1. Поле $K = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 15x^2 + 45)$

Преобразование $x \mapsto x^3/3 - 3x$ является образующим элементом группы Галуа. Элементы вида

$$(k, l, m, n) + \left(\frac{i}{6}, 0, 0, \frac{i}{2}\right) + \left(0, \frac{j}{6}, \frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right), \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad i, j = 0, \ldots, 5,$$

являются целыми.

Гиперплоскость Π: $3k + 6l + m + n = 1$ опорная для множества O. Она содержит восемь целых строго положительных точек:

$$A = (0, 0, 0, 1), \qquad B = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -2, \frac{9}{2}\right),$$
$$C = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right), \quad D = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{3}{2}, 3\right),$$
$$A_1 = \left(0, \frac{1}{3}, 0, -1\right), \qquad B_1 = \left(0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
$$C_1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{2}, 1\right), \qquad D_1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{2}\right).$$

Все эти точки — единицы. В трёхмерном пространстве гиперплоскости Π выпуклое замыкание этих точек представляет собой десятигранник, у которого есть две четырёхугольные грани, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а остальные грани — треугольники. Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллельные параллелограммы — являются основаниями «призмы». Её «боковая развёртка» приведена на рис. 2.

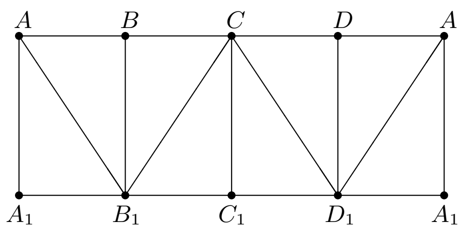

Рис. 2

Грани «призмы» отождествляются следующим образом:

— умножение на единицу A_1 отождествляет основание $ABCD$ с основанием $A_1B_1C_1D_1$: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$;
— умножение на единицу D отождествляет треугольную грань AA_1B_1 с треугольной гранью CDD_1: $A \to D$, $A_1 \to D_1$, $B_1 \to C$;
— умножение на единицу D_1 отождествляет треугольную грань ABB_1 с треугольной гранью CC_1D_1: $A \to D_1$, $B \to C$, $B_1 \to C_1$;
— умножение на единицу B отождествляет треугольную грань AA_1D_1 с треугольной гранью BCB_1: $A \to B$, $A_1 \to B_1$, $D_1 \to C$;
— умножение на единицу B_1 отождествляет треугольную грань ADD_1 с треугольной гранью CB_1C_1: $A \to B_1$, $D \to C$, $D_1 \to C_1$.

Построение фундаментальной области закончено.

5.2. Поля K_n

Положим

$$p_n = x^4 - (n^2+4)x^2 + n^2 + 4,$$

где n — нечётное целое положительное число. Через K_n мы будем обозначать поле, заданное многочленом p_n.

Лемма 1. *Многочлен p_n неприводим.*

Доказательство. Пусть a — целый положительный корень многочлена p_n: $a^4 - (n^2+4)a^2 + n^2 + 4 = 0$. Тогда любой простой делитель числа a является делителем числа n^2+4 и, обратно, любой простой делитель числа n^2+4 является делителем числа a. Пусть π — простой делитель этих чисел, α — показатель числа a (относительно π), β — показатель числа n^2+4. Тогда среди чисел 4α, $2\alpha+\beta$ и β не может быть одного наименьшего. Так как $2\alpha+\beta > \beta$, то $4\alpha = \beta$. Так как это справедливо для любого простого делителя числа n^2+4, то это число — полный квадрат, что неверно.

Пусть многочлен p_n является произведением двух множителей степени 2. Тогда

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + b) = x^4 - (n^2+4)x^2 + n^2 + 4.$$

Из этого опять-таки следует, что число n^2+4 — полный квадрат. □

Замечание 2. Поля K_n не являются попарно различными. Так, например, поля K_1 и K_{11} совпадают: пусть $y = -3x^3 + 5x \in K_1$, тогда $y^4 - 125y^2 + 125 = 0$.

5.3. Поле $K_1 \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 5x^2 + 5)$

Преобразование $x \mapsto x^3 - 3x$ является образующим элементом группы Галуа. Целые элементы поля — это элементы вида $kx^3 + lx^2 + mx + n$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

Гиперплоскость Π: $2k + 2l + m + n = 1$ опорная для множества O. Она содержит десять целых строго положительных точек:

$$\begin{aligned}
A &= (0,0,0,1), & A_1 &= (0,1,0,-1),\\
B &= (0,0,-1,2), & B_1 &= (-1,2,1,-2),\\
C &= (2,-2,-8,9), & C_1 &= (0,1,-2,1),\\
D &= (2,-2,-7,8), & D_1 &= (1,0,-3,2),\\
E &= (1,-1,-4,5), & E_1 &= (0,1,-1,0).
\end{aligned}$$

Выпуклая оболочка этих точек в гиперплоскости Π — это такая же десятигранная «призма», как в предыдущем примере. Отождествление её граней происходит по той же схеме. Единственное отличие состоит в том, что Π содержит ещё две целые строго положительные точки E и E_1 — центры параллелограммов-оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

5.4. Поле $K_3 \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 13x^2 + 13)$

Преобразование $x \mapsto x^3/3 - 11x/3$ является образующим элементом группы Галуа. Элементы вида

$$(k, l, m, n) + \left(\frac{i}{3}, 0, \frac{i}{3}, 0\right) + \left(0, \frac{j}{3}, 0, \frac{j}{3}\right), \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad i, j = 0, \ldots, 2,$$

являются целыми.

Гиперплоскость Π: $2k + 2l + m + n = 1$ опорная для множества O. Она содержит 36 целых строго положительных точек. Их выпуклая оболочка в Π — такая же «призма», как в двух предыдущих примерах. Отождествление её граней происходит по той же схеме. Кроме восьми вершин «призмы» — единиц, гиперплоскость содержит ещё следующие целые точки:

1) два центра параллелограммов-оснований;
2) по две точки на отрезках $[A, A_1]$, $[B, B_1]$, $[C, C_1]$ и $[D, D_1]$, которые делят эти отрезки на три равные части;
3) 18 точек внутри «призмы».

5.5. Общий случай

Предположим, что поле K_n не равно никакому полю K_m, $m < n$. Пусть $n = 2a + 1$. Отображение

$$x \mapsto -\frac{x^3}{2a+1} + \frac{4a^2 + 4a + 3}{2a+1}\, x$$

задаёт образующий элемент группы Галуа поля K_n. Элементы вида

$$(k, l, m, n) + i\left(\frac{1}{2a+1}, 0, \frac{2a-1}{2a+1}, 0\right) + j\left(0, \frac{1}{2a+1}, 0, \frac{2a-1}{2a+1}\right),$$
$$k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad i, j = 0, \ldots, 2a,$$

являются целыми.

Гиперплоскость Π: $2k + 2l + m + n = 1$ опорная для множества O. Выпуклая оболочка множества $O \cap \Pi$ в Π представляет собой такую же призму с вершинами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 и с основаниями-параллелограммами $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Во внутренних координатах k, l, m гиперплоскости Π основания призмы лежат в параллельных плоскостях $k + l = 0$ и $k + l = 1$. Все вершины призмы — единицы:

$$A = 1,$$
$$B = \frac{2(a+1)x^3 - 2(a+1)x^2 - (8a^3 + 16a^2 + 16a + 7)x + 8a^3 + 16a^2 + 18a + 8}{2a+1},$$
$$C = 2x^3 - 2x^2 - (8a^2 + 8a + 8)x + 8a^2 + 8a + 9,$$
$$D = \frac{2ax^3 - 2ax^2 - (8a^3 + 8a^2 + 8a + 1)x + 8a^3 + 8a^2 + 10a + 2}{2a+1},$$

$$\begin{aligned}
&A_1 = x^2 - 1,\\
&B_1 = \frac{x^3 + 2ax^2 - (2a+3)x + 2}{2a+1},\\
&C_1 = x^2 - 2x + 1,\\
&D_1 = \frac{-x^3 + (2a+2)x^2 - (2a-1)x - 2}{2a+1}.
\end{aligned}$$

Умножение на единицу A_1 отождествляет основание $ABCD$ с основанием $A_1B_1C_1D_1$. Остальные грани призмы — это восемь треугольников AA_1B_1, ABB_1, BB_1C, B_1CC_1, CC_1D_1, CDD_1, DD_1A и D_1AA_1. Они отождествляются попарно следующим образом:

$$\triangle AA_1B_1 \sim \triangle CDD_1, \quad \triangle ABB_1 \sim \triangle CC_1D_1,$$
$$\triangle BB_1C \sim \triangle D_1AA_1, \quad \triangle B_1CC_1 \sim \triangle DD_1A.$$

Кроме вершин, пересечение $\Pi \cap O$ содержит центры оснований, $2a$ точек на каждом сегменте $[A, A_1]$, $[B, B_1]$, $[C, C_1]$ и $[D, D_1]$, делящих сегменты на $2a+1$ равных частей, а также точки внутри призмы.

Замечание 3. Целые поля K_{11} — это элементы вида

$$(k, l, m, n) + i\left(\frac{1}{275}, 0, \frac{3}{11}, 0\right) + j\left(0, \frac{1}{55}, 0, \frac{4}{11}\right).$$

Поэтому описанная выше призма содержит *несколько* фундаментальных многогранников поля K_{11}.

6. Простые фундаментальные области в случае группы Галуа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

В случае группы Клейна нам не известны примеры полей, у которых фундаментальная область состоит из одной трёхмерной грани комплекса Г, но известны примеры, где эта область состоит из двух граней.

6.1. Поле $K = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 9x^2 + 9)$

Преобразования $x \mapsto x^3/3 - 3x$ и $x \mapsto -x$ являются образующими группы Галуа. Элементы вида $kx^3 + lx^2 + mx + n$, $3k, 3l, m, n \in \mathbb{Z}$, целые.

Гиперплоскость $\Pi_1\colon 6k + 3l + m + n - 1 = 0$ опорная для множества O. Она содержит 14 целых строго положительных точек. Эти точки лежат в двух параллельных плоскостях в Π_1: $P_0\colon 9k + 3l + m = 0$ и $P_1\colon 9k + 3l + m = 1$ (по семь в каждой). Точки

$$A = (0, 0, 0, 1), \quad B = \left(0, \frac{1}{3}, -1, 1\right), \quad C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -1, 0\right),$$

$$D = \left(-\frac{2}{3}, 2, 0, 1\right), \quad E = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, -1\right),$$
$$F = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \quad G = \left(-\frac{1}{3}, 1, 0, 0\right)$$

принадлежат плоскости P_0. Точки A, B, C, D, E и F — вершины центрально-симметричного шестиугольника; точки A, C, D и F — единицы; норма точек B и E равна 4; точка G — центр шестиугольника и имеет норму 9.

Точки

$$A_1 = \left(0, \frac{1}{3}, 0, 0\right), \quad B_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, -1\right), \quad C_1 = \left(-\frac{4}{3}, 4, 1, -4\right),$$
$$D_1 = \left(-2, \frac{17}{3}, 2, -6\right), \quad E_1 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{14}{3}, 2, -5\right),$$
$$F_1 = \left(-\frac{2}{3}, 2, 1, -2\right), \quad G_1 = (-1, 3, 1, -3)$$

принадлежат плоскости P_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 — вершины центрально-симметричного шестиугольника; точки A_1, C_1, D_1 и F_1 — единицы; норма точек B_1 и E_1 равна 4; точка G_1 — центр шестиугольника и имеет норму 9.

Многогранник M_1, выпуклое замыкание в Π_1 множества $O \cap \Pi_1$, представляет собой нечто вроде призмы с двумя параллельными шестиугольными основаниями и десятью «боковыми» гранями: ABA_1, A_1B_1CB, B_1C_1C, C_1D_1C, CDD_1, DED_1, D_1E_1FE, E_1F_1F, FAA_1, F_1A_1F.

— Действие единицы A_1 отождествляет основания;
— действие единицы F отождествляет грань ABA_1 с гранью E_1F_1F: $A \to F$, $B \to E_1$, $A_1 \to F_1$;
— действие единицы $A_1^{-1}F$ отождествляет грань A_1B_1CB с гранью D_1E_1FE: $A_1 \to F$, $B_1 \to E_1$, $C \to D_1$, $B \to E$;
— действие единицы $C^{-1}D$ отождествляет грань B_1C_1C с гранью DED_1: $B_1 \to E$, $C_1 \to D_1$, $C \to D$.

Гиперплоскость $\Pi_2 : 3k + 3l + n - 1 = 0$ также является опорной гиперплоскостью для множества O. Пересечение $\Pi_2 \cap O$ содержит четыре точки: A, A_1, F и единицу $H = (-1/3, 0, 2, 2)$. Многогранник M_2, выпуклое замыкание в Π_2 множества $O \cap \Pi_2$, является треугольной пирамидой, приклеенной к «боковой» грани многогранника M_1. «Боковая» поверхность полученного полиэдра показана на рис. 3.

Боковые грани C_1D_1C, CDD_1, F_1A_1F, AA_1H, A_1FH и FAH попарно отождествляются следующим образом:

— действие единицы $C^{-1}A$ отождествляет грань C_1D_1C с гранью AA_1H: $C_1 \to A_1$, $D_1 \to H$, $C \to A$;
— действие единицы $C^{-1}A_1$ отождествляет грань CDD_1 с гранью A_1FH: $C \to A_1$, $D \to H$, $D_1 \to F$;

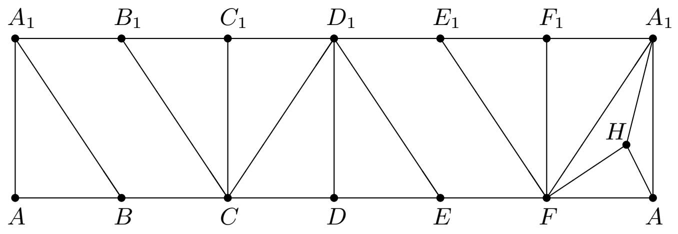

Рис. 3

— действие единицы $A_1^{-1}A$ отождествляет грань F_1A_1F с гранью FAH: $F_1 \to F$, $A_1 \to A$, $F \to H$.

Построение фундаментальной области окончено.

6.2. Поле $K = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 25x^2 + 25)$

Преобразования $x \mapsto x^3/5 - 5x$ и $x \mapsto -x$ являются образующими группы Галуа. Элементы вида $kx^3 + lx^2 + mx + n$, $5k, 5l, m, n \in \mathbb{Z}$, целые. Гиперплоскости $\Pi_1\colon 5k + 5l + m + n = 1$ и $\Pi_2\colon\ -75k + 20l - 3m + n = 1$ являются опорными для множества O. Пересечение $\Pi_1 \cap O$ содержит 14 точек, а пересечение $\Pi_2 \cap O$ — 4. Комбинаторная структура фундаментального полиэдра такая же, как в предыдущем примере.

Замечание 4. Для поля $K = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 49x^2 + 49)$ структура фундаментального полиэдра значительно сложнее.

Литература

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

[2] Винберг Э. Б. Частное сообщение.

[3] Кочетков Ю. Ю. О геометрии кубических полей Галуа // Мат. заметки. — 2011. — Т. 89, № 1. — С. 139—144.