

Формальные матрицы и их определители*

П. А. КРЫЛОВ

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru*

А. А. ТУГАНБАЕВ

*Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»
e-mail: tuganbaev@gmail.com*

УДК 512.552+512.64

Ключевые слова: формальная матрица, определитель.

Аннотация

В статье изучаются кольца формальных матриц над данным кольцом и определители таких матриц.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Formal matrices and their determinants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 65—119.

In the presented paper, we study formal matrix rings over a given ring and determinants of such matrices.

В разделах 1—4 приводятся некоторые общие свойства колец формальных матриц. Разделы 5—9 посвящены кольцам формальных матриц над данным кольцом. Формулируются и исследуются задачи реализации (или характеристики), классификации и изоморфизма таких колец. Затем вводится понятие определителя формальной матрицы над коммутативным кольцом. На такие определители переносятся основные свойства обычного определителя матрицы над коммутативным кольцом.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Если R — кольцо, то $J(R)$ — его радикал Джекобсона и $Z(R)$ — его центр. В работе используются стандартные понятия и обозначения теории колец (см., например, [5, 25]).

*Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 14-01-00452-А: «Теория колец: структурная теория; приложения»).

1. Построение колец формальных матриц порядка 2

Пусть даны два кольца R и S , R - S -бимодуль M и S - R -бимодуль N . Обозначим через K множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \text{ где } r \in R, s \in S, m \in M, n \in N.$$

Относительно матричного сложения K является абелевой группой. Чтобы превратить K в кольцо, нужно уметь вычислять «произведение» $mn \in R$ и «произведение» $nm \in S$. Корректно это можно сделать следующим образом. Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$. Полагаем $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$. Теперь матрицы из K можно умножать как в обычном кольце матриц:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 + mn_1 & rm_1 + ms_1 \\ nr_1 + sn_1 & nm_1 + ss_1 \end{pmatrix},$$

$$r, r_1 \in R, s, s_1 \in S, m, m_1 \in M, n, n_1 \in N.$$

Уточним, что rm_1, ms_1, nr_1, sn_1 — это соответствующие модульные произведения. Пусть также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Тогда относительно указанных операций сложения и умножения K является кольцом. При проверке аксиом кольца нужно также учесть основные свойства тензорного произведения и бимодульность φ и ψ . Верно и обратное: если K — кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо K называется *кольцом формальных матриц* (порядка 2) и обозначается через

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Используется также термин «кольцо обобщённых матриц». Иногда мы будем просто писать «кольцо матриц».

Если $N = 0$ или $M = 0$, то K — кольцо формальных верхних или нижних треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}$$

соответственно. Для задания таких колец гомоморфизмы φ и ψ не нужны.

Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно. Они называются *идеалами следа* кольца K . Будем говорить, что K — *кольцо с нулевыми идеалами следа* или *тривиальное кольцо* в случае, когда $\varphi = 0 = \psi$, т. е. $I = 0 = J$. Конечно, кольцо формальных треугольных матриц является кольцом с нулевыми идеалами следа.

Договоримся через MN (NM) обозначать множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Выполнены равенства

$$I = MN, \quad J = NM, \quad IM = MJ, \quad NI = JN.$$

Как правильно сформулировать проблему изучения колец формальных матриц? Под изучением кольца

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

естественно понимать выяснение того, как свойства этого кольца зависят от свойств колец R и S , бимодулей M и N , гомоморфизмов φ и ψ .

Иногда удобно отождествлять матрицы с соответствующими элементами. Например, матрицу

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно отождествлять с элементом $r \in R$ и т. п. Аналогичные соглашения принимаются для множеств матриц. Например, множество матриц

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

записывается в виде (X, Y) (или просто X при $Y = 0$). Аналогичные правила действуют для матриц с нулевой верхней строкой.

Если $M = 0 = N$, то кольцо K можно отождествить с прямым произведением $R \times S$. Обычно мы считаем, что произведение $R \times S$ — кольцо матриц.

Пусть K — некоторое кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

формальных матриц. Используя соглашение о записях матриц, можно записать равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком подходе действие соответствующих гомоморфизмов φ и ψ совпадает с умножением в кольце K .

В определённом смысле верно обратное. Именно, пусть абстрактное кольцо T содержит идемпотент e , не равный нулю или единице. Можно образовать кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix}.$$

Кольца T и K изоморфны. Соответствие

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} ete & et(1-e) \\ (1-e)te & (1-e)t(1-e) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

задаёт соответствующий изоморфизм.

Пусть K — некоторое кольцо формальных матриц, записанное в виде (1.1). Нетрудно указать строение идеалов и фактор-колец кольца K (см. также окончание раздела 4 и предложения 6.3 и 6.4).

Если L — некоторый идеал кольца K , то непосредственно проверяется, что L совпадает с множеством матриц

$$\begin{pmatrix} eLe & eL(1-e) \\ (1-e)Le & (1-e)L(1-e) \end{pmatrix},$$

где eLe и $(1-e)L(1-e)$ — идеалы колец R и S соответственно, а $eL(1-e)$ и $(1-e)Le$ — подбимодули в M и N соответственно. Подгруппы, находящиеся в одной из четырех позиций в L , совпадают с множествами соответствующих компонент элементов из L .

Образуем группу матриц $\bar{K}$:

$$\begin{pmatrix} (eKe)/(eLe) & (eK(1-e))/(eL(1-e)) \\ ((1-e)Ke)/((1-e)Le) & ((1-e)K(1-e))/((1-e)L(1-e)) \end{pmatrix}.$$

В действительности мы имеем кольцо формальных матриц $\bar{K}$, понимаемое в том широком смысле, о котором мы условились. Умножение матриц в $\bar{K}$ индуцируется умножением в K . Непосредственно проверяется, что отображение

$$K/L \rightarrow \bar{K}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} + L \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{r} & \bar{m} \\ \bar{n} & \bar{s} \end{pmatrix}$$

является кольцевым изоморфизмом, где черта обозначает соответствующий смежный класс.

Конкретное кольцо формальных матриц определяется с помощью двух бимодульных гомоморфизмов φ и ψ . Выбор иной пары гомоморфизмов приводит в общем случае к другому кольцу. Можно сформулировать задачу о классификации колец формальных матриц в зависимости от соответствующих пар бимодульных гомоморфизмов. С этой задачей связана следующая *проблема изоморфизма*.

Пусть K и K_1 — два кольца формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ_1, ψ_1 соответственно. Как должны быть связаны гомоморфизмы φ, ψ и φ_1, ψ_1 , чтобы существовал изоморфизм $K \cong K_1$?

Насколько много колец формальных матриц? Из сказанного выше следует, что класс колец формальных матриц совпадает с классом колец, имеющих нетривиальные идемпотенты (если считать прямые произведения колец кольцами матриц).

Класс колец формальных матриц также совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму. Действительно, пусть $G = A \oplus B$ — правый модуль над некоторым кольцом T . Его кольцо эндоморфизмов

изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \text{End}_T(A) & \text{Hom}_T(B, A) \\ \text{Hom}_T(A, B) & \text{End}_T(B) \end{pmatrix}$$

с обычными операциями сложения и умножения матриц (в качестве произведения гомоморфизмов берётся их композиция). И наоборот, для кольца

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

можно записать разложение $K_K = (R, M) \oplus (N, S)$ в прямую сумму правых идеалов и убедиться, что кольцо $\text{End}_K(K)$ изоморфно кольцу

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Есть много видов колец, которые не обязательно имеют матричное происхождение, но являются близкими к кольцам формальных матриц. В частности, встречаются разнообразные кольца треугольных матриц. В [9] изучались так называемые *тривиальные расширения* колец, определяемые следующим образом. Если R — кольцо, M — R - R -бимодуль, то обозначим через T прямую сумму абелевых групп R и M :

$$T = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}.$$

Группа T становится кольцом, если умножение задаётся правилом

$$(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1, rm_1 + mr_1).$$

Это кольцо и является тривиальным расширением кольца R с помощью бимодуля M .

Рассмотрим теперь кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

и в нём подкольцо

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M \right\}.$$

Кольца T и Γ изоморфны при соответствии

$$(r, m) \rightarrow \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, тривиальные расширения состоят из треугольных матриц.

Любое кольцо формальных треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

является тривиальным расширением. Действительно, M можно рассматривать как $(R \times S)$ – $(R \times S)$ –бимодуль, считая, что $(r, s)m = rm$, $m(r, s) = ms$. Возьмём тривиальное расширение

$$T = \{(r, s), m \mid r \in R, s \in S, m \in M\}$$

кольца $R \times S$. Соответствие

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \rightarrow ((r, s), m)$$

задаёт изоморфизм колец K и T . Впрочем, имеется класс колец треугольных матриц, содержащий тривиальные расширения. Пусть $f: R \rightarrow S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда в кольце

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

все матрицы вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & f(r) \end{pmatrix}$$

образуют подкольцо.

Приведём более общую конструкцию расширения колец (см. [20]). Пусть снова M — R – R –бимодуль, а $\Phi: M \otimes_R M \rightarrow R$ — некоторый R – R –бимодульный гомоморфизм. Определим умножение в $R \oplus M$ правилом

$$(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1 + \Phi(m \otimes m_1), rm_1 + mr_1).$$

Это умножение ассоциативно в точности тогда, когда

$$\Phi(m \otimes m_1)m_2 = m\Phi(m_1 \otimes m_2) \quad (1.2)$$

для всех $m, m_1, m_2 \in M$. В таком случае $R \oplus M$ является кольцом. Это кольцо обозначается $R \times_\Phi M$ и называется *полутривиальным расширением* кольца R с помощью M и Φ .

Кольца формальных матриц являются полутривиальными расширениями. Пусть

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} —$$

кольцо формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ и ψ . Обозначим $T = R \times S$, $V = M \times N$ и рассмотрим V как естественный T – T –бимодуль. Обозначим через Φ T – T –бимодульный гомоморфизм

$$(\varphi, \psi): V \otimes_T V \rightarrow T.$$

Он удовлетворяет соответствующему равенству (1.2). Следовательно, имеем полутривиальное расширение $T \times_\Phi V$. Кольца $T \times_\Phi V$ и

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

изоморфны при соответствии

$$(r, s) + (m, n) \rightarrow \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, любое полутривиальное расширение вкладывается в подходящее кольцо формальных матриц. В самом деле, пусть $T \times_{\Phi} V$ — полутривиальное расширение. Равенство, соответствующее (1.2), означает, что существует кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} T & V \\ V & T \end{pmatrix}.$$

Его бимодульные гомоморфизмы совпадают с Φ . Отображение

$$T \times_{\Phi} V \rightarrow \begin{pmatrix} T & V \\ V & T \end{pmatrix}, \quad (t, v) \rightarrow \begin{pmatrix} t & v \\ v & t \end{pmatrix}$$

является вложением колец. Таким образом, можно отождествить $T \times_{\Phi} V$ с кольцом матриц вида

$$\begin{pmatrix} t & v \\ v & t \end{pmatrix}.$$

Пусть T — некоторое коммутативное кольцо. Если кольца R и S являются T -алгебрами, то кольцо

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

также является T -алгеброй. В этом случае говорят, что K — *алгебра формальных матриц*.

2. Примеры колец формальных матриц порядка 2

Приведём примеры колец формальных матриц.

1. Пусть M — правый модуль над некоторым кольцом S , $R = \text{End}(M_S)$, $M^* = \text{Hom}(M_S, S_S)$. Тогда M — R - S -бимодуль и M^* — S - R -бимодуль, где

$$(s\alpha)m = s\alpha(m), \quad (\alpha r)m = \alpha(r(m)), \quad \alpha \in M^*, \quad s \in S, \quad r \in R, \quad m \in M.$$

Существуют R - R -бимодульный гомоморфизм $\varphi: M \otimes_S M^* \rightarrow R$ и S - S -бимодульный гомоморфизм $\psi: M^* \otimes_R M \rightarrow S$, определяемые правилами

$$\left(\varphi\left(\sum m_i \otimes \alpha_i\right)\right)(m) = \sum m_i \alpha_i(m), \quad \psi\left(\sum \alpha_i \otimes m_i\right) = \sum \alpha_i(m_i),$$

где $m_i, m \in M$ и $\alpha_i \in M^*$. Для φ и ψ выполняются два закона ассоциативности. Следовательно, получаем кольцо матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ M^* & S \end{pmatrix}.$$

2. Пусть X и Y — левый и правый идеалы кольца R соответственно. Далее, пусть S — любое подкольцо в R с условием $YX \subseteq S \subseteq X \cap Y$. Тогда

$$\begin{pmatrix} R & X \\ Y & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц, для которого действия отображений φ и ψ сводятся к умножению в R . В качестве специального случая получаем кольцо

$$\begin{pmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{pmatrix},$$

где e — некоторый идемпотент.

3. Пусть Y — правый идеал кольца R , и пусть S — любое подкольцо в R , которое содержит Y в качестве идеала. Тогда S называется *подидеализатором* идеала Y в R и

$$\begin{pmatrix} R & R \\ Y & S \end{pmatrix}$$

является кольцом матриц.

4. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. Если абелева группа G является прямой суммой, $G = A \oplus B$, то её кольцо эндоморфизмов $\text{End}(G)$ будет кольцом формальных матриц (см. раздел 1). Абелевы группы предоставляют много интересных и полезных примеров колец формальных матриц. Прежде всего это кольца треугольных матриц. Так, кольца эндоморфизмов групп $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$ изоморфны кольцам

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & A_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

соответственно, где $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, A_p — поле p -адических чисел.

Кольцо эндоморфизмов p -группы $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$, $n < m$, является содержательной иллюстрацией к понятию кольца формальных матриц. Его можно отождествить с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим это кольцо через K или

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Как умножаются матрицы в кольце K ? Прежде всего заметим, что $\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_{p^m}/(p^{m-n} \cdot 1)$. Поэтому кольца R и S действуют на M и N обычным, единственно возможным способом. Перейдём к гомоморфизмам $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$. Если рассмотреть K как исходное кольцо эндоморфизмов, то действие φ и ψ сведётся к композиции соответствующих гомоморфизмов.

Принимая это во внимание, приходим к следующему. Если $\bar{a} \in M$ и $\bar{b} \in N$, где черта обозначает класс вычетов, то

$$\varphi(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{a} \circ \bar{b} = p^{m-n} \bar{a} \bar{b}.$$

Имеем

$$\psi(\bar{b} \otimes \bar{a}) = \bar{b} \circ \bar{a} = p^{m-n} \bar{b} \bar{a},$$

где последние символы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ обозначают классы вычетов в $\mathbb{Z}_{p^m}$ с представителями b и a .

Получается, что идеалы следа I и J кольца K равны $(p^{m-n} \cdot 1)$ и $(p^{m-n} \cdot 1)$ соответственно. Отсюда следует, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Существует сюръективный гомоморфизм $e: S \rightarrow R$, $e(\bar{y}) = \bar{y}$, $\bar{y} \in S$. Кроме того, $\text{Ker}(e) \subseteq J(S)$ и верно равенство $e(\bar{b} \circ \bar{a}) = \bar{a} \circ \bar{b}$.

В [7] детально рассматривается случай $n = 1$ и $m = 2$. Найдены все обратимые матрицы кольца K . Они используются для построения криптосистемы.

5. Полные кольца матриц. Пусть R — некоторое кольцо. Полное кольцо матриц $M(n, R)$ может быть представлено в виде кольца формальных матриц порядка 2

$$M(n, R) = \begin{pmatrix} R & M(1 \times (n-1), R) \\ M((n-1) \times 1, R) & M(n-1, R) \end{pmatrix}.$$

Это кольцо даёт пример кольца блочных матриц. Более общая ситуация появится в доказательстве предложения 3.3 и в первом абзаце после этого доказательства.

6. Пусть R — кольцо, G — конечная подгруппа группы автоморфизмов кольца R , R^G — кольцо инвариантов кольца R , т. е. R^G — подкольцо

$$\{x \in R \mid x^g = x \text{ для всех } g \in G\}.$$

Рассмотрим косое групповое кольцо $R * G$, состоящее из всех формальных сумм вида

$$\sum_{g \in G} r_g g, \quad r_g \in R.$$

Суммы складываются покомпонентно, а при умножении используется закон дистрибутивности и соотношение $rg \cdot sh = rs^{g^{-1}}gh$ для всех $r, s \in R$ и $g, h \in G$. Ясно, что R является левым и правым R^G -модулем. Можно также рассматривать R как левый и правый $R * G$ -модуль следующим образом: для любых элементов $x = \sum_{g \in G} r_g g \in R * G$ и $r \in R$ полагаем

$$x \cdot r = \sum_{g \in G} r_g r^{g^{-1}}, \quad r \cdot x = \sum_{g \in G} (rr_g)^g.$$

Отображения

$$\varphi: R \otimes_{R * G} R \rightarrow R^G, \quad \psi: R \otimes_{R^G} R \rightarrow R * G$$

определяются с помощью соотношений

$$\varphi(x \otimes y) = \sum_{g \in G} (xy)^g, \quad \psi(y \otimes x) = \sum_{g \in G} yx^{g^{-1}}g$$

соответственно (см. [8]).

Два условия ассоциативности выполняются, и в итоге получаем кольцо

$$\begin{pmatrix} R^G & R \\ R & R * G \end{pmatrix}.$$

3. Кольца формальных матриц порядка $n \geq 2$

Приведём ряд замечаний о кольцах формальных матриц произвольного порядка n . Рассмотренный в разделе 1 случай $n = 2$ достаточен для понимания того, как надо определять такие кольца.

Фиксируем натуральное число $n \geq 2$. Пусть $R_1, \dots, R_n$ — кольца, M_{ij} — R_i - R_j -бимодули, причём $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любых $i, j, k = 1, \dots, n$, таких что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i - R_k -бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}: M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}.$$

Для индексов $i = j$ и $j = k$ считаем, что φ_{iik} и φ_{ikk} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \rightarrow M_{ij}.$$

Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ пишем $a \circ b$ или просто ab . Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{kl}$ и индексов i, j, k, l .

Обозначим через K множество всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij} . Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом. Его можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Говорят, что K — *кольцо формальных матриц порядка n* . Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j с условием $i < j$ ($j < i$), то мы говорим, что имеется *кольцо формальных нижних (соответственно верхних) треугольных матриц*.

Для лучшего понимания строения колец формальных матриц проясним их связи с идемпотентами и кольцами эндоморфизмов.

Предложение 3.1. Кольцо K является кольцом формальных матриц порядка $n \geq 2$ в точности тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов.

Доказательство. Если K — кольцо формальных матриц порядка n , то матричные единицы $E_{11}, \dots, E_{nn}$ (см. раздел 5) образуют нужную систему идемпотентов кольца K .

Обратно, если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — полная ортогональная система ненулевых идемпотентов некоторого кольца T , то T изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} e_1 T e_1 & e_1 T e_2 & \dots & e_1 T e_n \\ e_2 T e_1 & e_2 T e_2 & \dots & e_2 T e_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n T e_1 & e_n T e_2 & \dots & e_n T e_n \end{pmatrix}$$

(см. раздел 1). □

Случай прямых сумм двух модулей, рассмотренный в разделе 1, можно перенести на прямые суммы любого конечного числа слагаемых.

Предложение 3.2. *Класс колец формальных матриц порядка n совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму n ненулевых слагаемых.*

В конкретных задачах могут появляться кольца формальных матриц любого порядка n . В общей теории обычно изучаются кольца матриц порядка 2, в основном по причине технического удобства. Случай $n > 2$ иногда можно в определённом смысле свести к случаю матриц порядка 2.

Предложение 3.3. *Кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ изоморфно некоторому кольцу формальных матриц порядка k для каждого $k = 2, \dots, n-1$.*

Доказательство. Утверждение становится вполне понятным, если рассмотреть представление колец матриц с помощью идемпотентов или колец эндоморфизмов (см. предложения 3.1 и 3.2). Достаточно определённым образом «укрупнять» идемпотенты или прямые слагаемые. Есть, конечно, и прямое доказательство. Например, возьмём $k = 2$. Введём следующие обозначения для множеств матриц. Положим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \dots, M_{1n})$,

$$N = \begin{pmatrix} M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n2} & M_{n3} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Здесь S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R - S -бимодуль, N — S - R -бимодуль, причём модульные умножения определяются как произведения строк и столбцов на матрицы. Гомоморфизмы φ_{ijk} , задающие умножение в K , индуцируют бимодульные гомоморфизмы $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$. При этом верны два нужных закона ассоциативности. В результате имеем кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

и изоморфизм

$$K \cong \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм получается путём разбиения каждой матрицы на четыре блока:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad \square$$

В доказательстве предложения мы фактически пришли к тому, что формальные матрицы можно, как и обычные, разбивать на блоки, т. е. представлять их в виде блочных матриц. Действия над блочными матрицами производятся по тем же правилам, что и в случае, когда вместо блоков имеем отдельные элементы. Умножение блочных матриц одного порядка всегда выполнимо, когда сомножители имеют одинаковые блочные разбиения.

Таким образом, любое кольцо формальных матриц можно рассматривать как кольцо (формальных) блочных матриц. Естественным образом появляются кольца блочных верхних (нижних) треугольных матриц. Кольца (формальных) блочных матриц используются в теории конечномерных алгебр. Естественным образом в этой теории, в частности, появляются кольца блочных треугольных матриц над полями.

Существуют различные конструкции, позволяющие, наоборот, исходя из данного кольца формальных матриц, строить кольца формальных матриц бóльшего порядка. Рассмотрим первый способ.

Пусть дано кольцо формальных матриц вида (3.1). Зафиксируем некоторую последовательность натуральных чисел $s_1, \dots, s_n$. Обозначим через $\bar{M}_{ij}$ множество матриц размера $s_i \times s_j$ с элементами из M_{ij} (напомним, что $M_{ii} = R$). Далее, пусть $\bar{K}$ — множество всех блочных матриц $(\bar{M}_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$. Определим операции сложения и умножения этих матриц обычным образом, т. е. сложение покомпонентно, а относительно умножения заметим, что $A_{ij} \cdot A_{jk} \in \bar{M}_{ik}$ для любых матриц $A_{ij} \in \bar{M}_{ij}$, $A_{jk} \in \bar{M}_{jk}$. Тогда $\bar{K}$ превращается в кольцо формальных блочных матриц и одновременно $\bar{K}$ — кольцо формальных матриц порядка $s_1 + \dots + s_n$.

В дальнейшем мы будем применять второй простой способ построения колец формальных матриц бóльшего порядка. Пусть дано кольцо формальных матриц порядка 2:

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Покажем, что существует кольцо формальных матриц

$$K_4 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix} & S \end{pmatrix}.$$

Прежде всего,

$$\begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix}$$

естественным образом является K - S -бимодулем, а

$$\begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix}$$

является S - K -бимодулем. Отображение

$$\varphi: \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix} \rightarrow K, \quad \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \otimes (n, y) \rightarrow \begin{pmatrix} mn & my \\ xn & xy \end{pmatrix}$$

является K - K -бимодульным гомоморфизмом, а отображение

$$\psi: \begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix} \otimes_K \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \rightarrow S, \quad (n, y) \otimes \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \rightarrow nm + yx$$

является S - S -бимодульным гомоморфизмом. Выполняются два известных тождества ассоциативности для φ и ψ из раздела 1. Следовательно, указанное кольцо K_4 существует. Таким же способом определяется кольцо

$$K_2 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R & M \end{pmatrix} & R \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что наряду с кольцом K всегда имеется кольцо

$$L = \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}$$

Эти кольца изоморфны при соответствии

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} s & n \\ m & r \end{pmatrix}.$$

Поэтому вместе с кольцами K_4 и K_2 существуют кольца K_3 и K_1 , изоморфные им. Впрочем, их можно построить и непосредственно.

4. Некоторые идеалы колец формальных матриц

Найдём радикал Джекобсона и первичный радикал кольца формальных матриц порядка n . Сначала рассмотрим случай $n = 2$.

Пусть дано кольцо

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Определим четыре подбимодуля бимодулей M и N . Обозначим

$$\begin{aligned} J_l(M) &= \{m \in M \mid Nm \subseteq J(S)\}, & J_r(M) &= \{m \in M \mid mN \subseteq J(R)\}, \\ J_l(N) &= \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}, & J_r(N) &= \{n \in N \mid nM \subseteq J(S)\}. \end{aligned}$$

Теперь образуем следующие множества матриц:

$$J_l(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_l(M) \\ J_l(N) & J(S) \end{pmatrix}, \quad J_r(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_r(M) \\ J_r(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что получены левый и правый идеалы кольца K .

Теорема 4.1 [21]. Верны равенства

$$J_l(K) = J(K) = J_r(K).$$

Доказательство. Запишем

$$J(K) = \begin{pmatrix} X & B \\ C & Y \end{pmatrix},$$

где X и Y — идеалы колец R и S соответственно, B и C — подбимодули в M и N соответственно (см. раздел 1). Верны равенства

$$X = eJ(K)e = J(eKe) = J(R), \quad \text{где } e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем, что $Y = J(S)$. Имеем

$$B \subseteq J_l(M) \cap J_r(M), \quad C \subseteq J_l(N) \cap J_r(N).$$

Доказано, что $J(K) \subseteq J_l(K) \cap J_r(K)$.

Теперь возьмём произвольную матрицу

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

в $J_r(K)$ и единичную матрицу E . Матрицы

$$E - \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{pmatrix}$$

обратимы справа в K . Их правыми обратными будут соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} x & xm \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ yn & y \end{pmatrix},$$

где x и y — правые обратные к $1 - r$ и $1 - s$ соответственно. Следовательно, матрицы

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

лежат в $J(K)$. Поэтому $J_r(K) \subseteq J(K)$. Аналогично $J_l(K) \subseteq J(K)$. $\square$

Получается, что $J_l(M) = J_r(M)$ и $J_l(N) = J_r(N)$. Будем обозначать эти идеалы через $J(M)$ и $J(N)$ соответственно. Таким образом, верно равенство

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного кольца T пересечение всех его первичных идеалов называется *первичным радикалом* и обозначается через $P(T)$.

Хорошо известно, что первичный радикал кольца T совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца T . Напомним, что элемент $a \in T$ называется *строго нильпотентным*, если все члены любой последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, такой что

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} \in a_n T a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

равны нулю начиная с некоторого номера.

Определим идеалы $P_l(M)$, $P_r(M)$, $P_l(N)$ и $P_r(N)$, аналогичные идеалам $J_l(M)$, $J_r(M)$, $J_l(N)$ и $J_r(N)$ соответственно. Ограничимся «левосторонним» случаем. Обозначим

$$P_l(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq P(S)\}, \quad P_r(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq P(R)\}.$$

Пусть

$$P_l(K) = \begin{pmatrix} P(R) & P_l(M) \\ P_l(N) & P(S) \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2 [21]. Верны равенства

$$P_l(K) = P(K) = P_r(K).$$

Доказательство. Нужно проверить записанные равенства с помощью строго нильпотентных элементов. $\square$

Совпадающие идеалы $P_l(M)$ и $P_r(M)$ можно обозначить через $P(M)$, а совпадающие идеалы $P_l(N)$ и $P_r(N)$ можно обозначить через $P(N)$.

Теперь перейдём к кольцу K формальных матриц любого порядка n вида (3.1) из раздела 3. Для любых индексов i и j определим подбимодули

$$J_l(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid M_{ji}x \subseteq J(R_j)\}, \quad J_r(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid xM_{ji} \subseteq J(R_i)\}.$$

При $i = j$ получаем $J_l(R_i) = J_r(R_i) = J(R_i)$.

Теорема 4.3. Имеют место равенство

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R_1) & J_l(M_{12}) & \dots & J_l(M_{1n}) \\ J_l(M_{21}) & J(R_2) & \dots & J_l(M_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_l(M_{n1}) & J_l(M_{n2}) & \dots & J(R_n) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

и аналогичное равенство с заменой индекса l на r .

Доказательство. Случай $n = 2$ — это теорема 4.1. Пусть K — кольцо формальных матриц порядка $n \geq 3$. Представим K как кольцо блочных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R_n \end{pmatrix},$$

где R — кольцо формальных матриц порядка $n - 1$ и M, N — соответствующие бимодули (см. доказательство предложения 3.3). Согласно теореме 4.1

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции радикал $J(R)$ имеет вид, указанный в теореме. Надо показать, что множество из правой части равенства (4.1) совпадает с

$$\begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{pmatrix}.$$

Достаточно проверить, что

$$\begin{pmatrix} J_l(M_{1n}) \\ \dots \\ J_l(M_{n-1n}) \end{pmatrix} = J(M), \quad (J_l(M_{n1}), \dots, J_l(M_{nn-1})) = J(N),$$

где

$$J(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(R_n)\}, \quad J(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}.$$

Требуемое утверждение вытекает из определения подбимодулей $J_l(M_{ij})$. Только уточним следующий момент. Если $x \in J_l(M_{nj})$, то $M_{in}x \subseteq J_l(M_{ij})$ для всех различных $i, j = 1, \dots, n$. Действительно, имеем

$$M_{ji}M_{in}x \subseteq M_{jn}x \subseteq J(R_j).$$

Доказательство аналога равенства (4.1) для «индекса» r симметрично приведённому доказательству. $\square$

Имеем, что $J_l(M_{ij}) = J_r(M_{ij})$ для различных i и j . Обозначим этот подбимодуль через $J(M_{ij})$.

Первичный радикал $P(K)$ имеет аналогичное строение. Подобно подбимодулям $J_l(M_{ij})$ и $J_r(M_{ij})$ определим подбимодули $P_l(M_{ij})$ и $P_r(M_{ij})$. Верен следующий результат.

Теорема 4.4. *Имеют место равенство*

$$P(K) = \begin{pmatrix} P(R_1) & P_l(M_{12}) & \dots & P_l(M_{1n}) \\ P_l(M_{21}) & P(R_2) & \dots & P_l(M_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_l(M_{n1}) & P_l(M_{n2}) & \dots & P(R_n) \end{pmatrix}$$

и аналогичное равенство, в котором индекс l заменён на индекс r .

Остановимся на строении идеалов кольца K . Все сказанное в разделе 1 об идеалах и фактор-кольцах распространяется на кольца формальных матриц любого порядка n . Идеал L кольца K равен

$$\begin{pmatrix} I_1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & I_2 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & I_n \end{pmatrix},$$

где I_i — идеал кольца R , а A_{ij} — подбимодуль в M_{ij} . Между этими идеалами и подбимодулями существуют определённые связи, которые нетрудно найти (в одном частном случае они указаны в разделе 6). Множество матриц

$$\begin{pmatrix} R_1/I_1 & M_{12}/A_{12} & \dots & M_{1n}/A_{1n} \\ M_{21}/A_{21} & R_2/I_2 & \dots & M_{2n}/A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1}/A_{n1} & M_{n2}/A_{n2} & \dots & R_n/I_n \end{pmatrix}$$

естественным образом образует кольцо формальных матриц, которое канонически изоморфно фактор-кольцу K/L .

В заключение раздела найдём центр кольца формальных матриц. Напомним, что центр кольца T обозначается через $C(T)$.

Лемма 4.5. *Центр кольца формальных матриц K состоит из всех таких диагональных матриц $\text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$, что $r_i \in C(R_i)$ и $r_i m = m r_j$ для всех $m \in M_{ij}$ и различных i и j .*

Доказательство. Понятно, что диагональные матрицы с указанным строением лежат в $C(K)$.

Допустим, что матрица $D = (d_{ij})$ лежит в $C(K)$. Из равенства $DE_{kk} = E_{kk}D$ следует, что $d_{ik} = 0 = d_{kj}$ при $i \neq k$, $k \neq j$. Поэтому $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и D — диагональная матрица.

Теперь зафиксируем индексы i, j и элемент $m \in M_{ij}$. Пусть A_{ij} — матрица, у которой в позиции (i, j) стоит m , а в остальных позициях стоят нули. Из равенства $DA_{ij} = A_{ij}D$ следует, что $d_i m = m d_j$. В частности, при $i = j$ получаем, что $d_i \in C(R_i)$. $\square$

5. Кольца формальных матриц над кольцом R

Пусть R — некоторое кольцо. Для любого натурального числа $n \geq 2$ имеется кольцо матриц $M(n, R)$ порядка n . Можно определять другие матричные умножения, чтобы получались кольца формальных матриц. Соответствующие бимодульные гомоморфизмы $R \otimes_R R \rightarrow R$ для кольца $M(n, R)$ совпадают и действуют по правилу $x \otimes y \rightarrow xy$. Беря другие бимодульные гомоморфизмы $R \otimes_R R \rightarrow R$, можно получать кольца матриц над R порядка n (как кольца формальных матриц), отличные от $M(n, R)$.

Возьмём некоторое кольцо K формальных матриц порядка n , определённое в разделе 3, такое что $R_1 = \dots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех i и j . Такое кольцо будем называть *кольцом формальных матриц порядка n над кольцом R* . Пусть $\varphi_{ijk}: R \otimes_R R \rightarrow R$, $i, j, k = 1, \dots, n$, — бимодульные гомоморфизмы, ассоциированные с кольцом K . Как и в разделе 3, для элементов $x, y \in R$ положим $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y)$. Положим $s_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для каждой тройки индексов i, j, k . Теперь для любых элементов $x, y \in R$ и индексов i, j, k

$$x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = x \varphi_{ijk}(1 \otimes 1) y = x s_{ijk} y.$$

Получаем, что

$$xs_{ijk} = \varphi_{ijk}(x \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes x) = s_{ijk}x.$$

Таким образом, s_{ijk} — центральный элемент кольца R и $x \circ y = s_{ijk}xy$.

Для всех i, j, k, l справедливы равенства

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl}. \quad (5.1)$$

Первые два равенства вытекают из того, что φ_{iik} и φ_{ikk} совпадают с каноническим изоморфизмом $R \otimes_R R \rightarrow R$, $x \otimes y \rightarrow xy$. Остальные равенства вытекают из того, что $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для любых $x, y, z \in R$ (см. начало раздела 3). В частности, верно равенство $(1 \circ 1) \circ 1 = 1 \circ (1 \circ 1)$.

Пусть теперь дано произвольное множество центральных элементов s_{ijk} кольца R , $i, j, k = 1, \dots, n$, удовлетворяющих равенствам (5.1). Для любых трёх индексов i, j, k можно определить бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}: R \otimes_R R \rightarrow R, \quad \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk}xy, \quad x, y \in R.$$

Эти гомоморфизмы определяют кольцо формальных матриц порядка n в смысле раздела 3. Действительно, φ_{iik} и φ_{ikk} являются каноническими изоморфизмами. Положим $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y)$ и получим, что $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для всех $x, y, z \in R$ и соответствующих индексов i, j, k, l .

Можно сделать вывод о наличии взаимно-однозначного соответствия между кольцами формальных матриц порядка n над кольцом R и множествами центральных элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ кольца R , удовлетворяющих равенствам (5.1). Конкретное такое кольцо будем обозначать $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, или $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, или просто K . Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K . Если все s_{ijk} равны 1, то получаем кольцо $M(n, R)$.

Полезно привести формулу для умножения матриц в кольце $M(n, R, \Sigma)$. Именно, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $AB = C = (c_{ij})$, то

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

Докажем несколько тождеств для множителей s_{ijk} (предполагается, что дано кольцо $M(n, R, \Sigma)$). Ещё раз запишем тождества (5.1) (их мы будем называть *основными тождествами*):

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl}. \quad (5.2)$$

Полагая $i = k$, получаем $s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{jil}$. Следовательно, $s_{jij} = s_{jil} \cdot s_{ijl}$. Поэтому верно равенство $s_{iji} = s_{jij}$. При $j = l$ имеем $s_{jkj} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}$, откуда следует, что $s_{iji} = s_{lij} \cdot s_{lji}$. Таким образом, можно записать

$$s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}. \quad (5.3)$$

Из тождеств (5.3) получаем следующие тождества, вытекающие друг из друга при перестановке индексов:

$$\begin{aligned}
s_{iji} &= s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\
s_{iki} &= s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}, \\
s_{jkj} &= s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Из тождеств (5.4) вытекают две серии равенств:

$$\begin{aligned}
s_{ijk} \cdot s_{iki} &= s_{jki} \cdot s_{iji} = s_{kij} \cdot s_{jkj}, \\
s_{kji} \cdot s_{iki} &= s_{ikj} \cdot s_{iji} = s_{jik} \cdot s_{jkj}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Равенства (5.5) могут быть напрямую выведены из (5.2), если подставить $l = i$ в (5.2) и переставить индексы.

С данным кольцом $M(n, R, \Sigma)$ можно связать несколько матриц. Положим

$$S = (s_{iji}) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{121} & \dots & s_{1n1} \\ s_{212} & s_{222} & \dots & s_{2n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1n} & s_{n2n} & \dots & s_{nnn} \end{pmatrix}.$$

Затем для каждого $k = 1, \dots, n$ образуем матрицу

$$S_k = (s_{ikj}) = \begin{pmatrix} s_{1k1} & s_{1k2} & \dots & s_{1kn} \\ s_{2k1} & s_{2k2} & \dots & s_{2kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{nk1} & s_{nk2} & \dots & s_{nkn} \end{pmatrix}.$$

Будем называть матрицы S , S_k *матрицами множителей* кольца $M(n, R, \Sigma)$. Матрица S является симметрической. Главная диагональ матрицы S_k совпадает с k -й строкой (и k -м столбцом) матрицы S , k -я строка и k -й столбец матрицы S_k состоят из единиц.

Сформулируем несколько взаимосвязанных задач о кольцах формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$.

I. Задача реализации и характеристики. Пусть $T, T_1, \dots, T_n$ — матрицы порядка n с элементами из центра $C(R)$. При каких условиях эти матрицы являются матрицами множителей некоторого кольца $M(n, R, \Sigma)$? Ясно, что матрица T должна быть симметрической. Дополнительно можно считать, что все матрицы T_k также симметрические.

II. Задача классификации. Описать кольца формальных матриц в зависимости от систем множителей или матриц множителей.

III. Проблема изоморфизма. Установить, когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц. В более общей ситуации проблема изоморфизма сформулирована в разделе 1.

Приведённым выше задачам I—III посвящены разделы 7—9. Сейчас рассмотрим некоторые простые способы построения систем множителей, а также стандартные ситуации, когда можно утверждать, что кольца формальных матриц изоморфны.

А. Можно задать действие симметрической группы степени n на системах множителей и, следовательно, на кольцах формальных матриц. Соответствующие орбиты состоят из изоморфных колец.

Пусть τ — подстановка степени n . Действие τ на матрицах известно. Именно, для матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. Имеется в виду, что в матрице τA в позиции (i, j) стоит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$, а элемент a_{ij} переходит в позицию $(\tau^{-1}(i), \tau^{-1}(j))$.

Теперь если $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет равенствам (5.2). Обозначим её через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \rightarrow \tau A$.

Ещё отметим, что действие подстановок на матрицах можно представить в другом виде (см. [12]). Пусть $T = (\delta_{i\tau(j)})$ — матрица подстановки τ , где $\delta_{i\tau(j)}$ — символ Кронекера. Тогда $\tau A = T^{-1}AT$, где $T^{-1} = (\delta_{i\tau^{-1}(j)})$. Суть изоморфизма $M(n, R, \Sigma) \cong M(n, R, \tau\Sigma)$ можно выразить равенством

$$T^{-1}(A \circ B)T = (T^{-1}AT) \circ (T^{-1}BT),$$

где произведение слева вычисляется в $M(n, R, \Sigma)$, а произведение справа вычисляется в $M(n, R, \tau\Sigma)$.

В. По-прежнему Σ — система множителей s_{ijk} , α — эндоморфизм кольца R . Обозначим $t_{ijk} = \alpha(s_{ijk})$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — система множителей. Обозначим её через $\alpha\Sigma$. Существует кольцевой гомоморфизм

$$M(n, R, \Sigma) \rightarrow M(n, R, \alpha\Sigma), \quad (a_{ij}) \rightarrow (\alpha a_{ij}).$$

Он является изоморфизмом, если α — автоморфизм кольца R .

С. Если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ и $X = \{x_{ijk}\}$ — две системы множителей, то $\{x_{ijk}s_{ijk}\}$ тоже является системой множителей. Обозначим её через $X\Sigma$. Для каждого $l = 1, \dots, n$ существует гомоморфизм

$$\zeta: M(n, R, X\Sigma) \rightarrow M(n, R, \Sigma), \quad (a_{ij}) \rightarrow (x_{ijl}a_{ij}).$$

Если все множители x_{ijk} — обратимые элементы, то ζ — изоморфизм.

Доказательство. Возьмём матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ в кольце $M(n, R, X\Sigma)$. Запишем $AB = (c_{ij})$, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ikj}s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

В позиции (i, j) матрицы $\zeta(AB)$ находится элемент

$$\sum_{k=1}^n x_{ijl}x_{ikj}s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

Имеем $\zeta(A) = (x_{ijl}a_{ij})$, $\zeta(B) = (x_{ijl}b_{ij})$, а в позиции (i, j) матрицы $\zeta(A)\zeta(B)$ стоит элемент

$$\sum_{k=1}^n s_{ikj}x_{ikl}x_{kjl}a_{ik}b_{kj}.$$

Однако по тождествам (5.2) $x_{ikj} \cdot x_{ijl} = x_{ikl} \cdot x_{kjl}$. Поэтому ζ сохраняет произведение. Если все x_{ijk} обратимы, то ζ имеет обратный $\zeta^{-1}: (c_{ij}) \rightarrow (x_{ijl}^{-1}c_{ij})$. $\square$

Пусть E_{ij} обозначает матричную единицу, т. е. матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит 1, а в остальных позициях стоят нули. Заметим, что $E_{ij} \cdot E_{jk} = s_{ijk}E_{ik}$.

Д. Для любой системы множителей $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ множество

$$\Sigma^t = \{t_{ijk} \mid t_{ijk} = s_{kji}, i, j, k = 1, \dots, n\}$$

также является системой множителей. Поэтому вместе с кольцом $M(n, R, \Sigma)$ существует также кольцо $M(n, R, \Sigma^t)$, обозначаемое через K^t . При этом если $S, S_1, \dots, S_n$ — матрицы множителей кольца K , то $S, S_1^t, \dots, S_n^t$ — матрицы множителей кольца K^t .

Если R — коммутативное кольцо, то транспонирование $A \rightarrow A^t$ является антиизоморфизмом колец K и K^t . Таким образом, верно равенство $(AB)^t = B^t A^t$, где произведение справа вычисляется в K^t . Отсюда вытекает одна импликация следующего утверждения.

Предложение 5.1. Пусть R — коммутативное кольцо. Равенство $(AB)^t = B^t A^t$ выполняется для любых матриц A и B в точности тогда, когда $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех индексов i, k, j (т. е. матрицы $S_1, \dots, S_n$ являются симметрическими).

Доказательство. Оставшаяся импликация вытекает из равенств

$$(E_{ik} \cdot E_{kj})^t = (s_{ikj}E_{ij})^t = s_{ikj}E_{ji}, \quad E_{kj}^t \cdot E_{ik}^t = E_{jk}E_{ki} = s_{jki}E_{ji}. \quad \square$$

В соответствии с пунктом С имеется также кольцо $M(n, R, \Sigma\Sigma^t)$. Все его матрицы множителей симметрические.

Рассмотрим гомоморфизм, который будет весьма полезен позже. Он является частным случаем гомоморфизма ζ из пункта С.

Пусть дано кольцо формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$, $\Sigma = \{s_{ijk}\}$. Зафиксируем индекс $l = 1, \dots, n$ и положим $t_{ij} = s_{ijl}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Отметим, что $t_{ii} = 1$ и из основных тождеств (5.2) вытекает равенство $s_{ijk} \cdot t_{ik} = t_{ij} \cdot t_{jk}$. В частности, $s_{iji} = t_{ij} \cdot t_{ji}$.

Определим отображение

$$\eta: M(n, R, \Sigma) \rightarrow M(n, R), \quad (a_{ij}) \rightarrow (t_{ij}a_{ij}).$$

Предложение 5.2.

1. η — кольцевой гомоморфизм.
2. Если для всех i, j, k множитель s_{ikj} делится на t_{ik} или t_{kj} , то $\text{Ker}(\eta)$ — нильпотентный идеал индекса нильпотентности 2.

3. *Отображение η инъективно в точности тогда, когда все s_{ijk} — неделители нуля.*
 4. *η — изоморфизм в точности тогда, когда все элементы s_{ijk} обратимы.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из пункта С, если взять систему, состоящую из единиц, в качестве Σ и взять Σ в качестве X .

Докажем пункт 2. Возьмём произвольные матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ в кольце $M(n, R, \Sigma)$. Если $\eta A = 0 = \eta B$, то $t_{ij}a_{ij} = 0 = t_{ij}b_{ij}$ для всех i и j . Из доказательства пункта С вытекает, что $AB = 0$. $\square$

В конце раздела обратим внимание на кольца формальных матриц над кольцом R порядка 2 и 3. В случае $n = 2$ легко достичь полной ясности. Действительно, возьмём произвольное кольцо $M(2, R, \Sigma)$ и выясним, как происходит умножение в нём.

Из предыдущего материала нетрудно вывести следующее. Найдётся такой элемент $s \in C(R)$, что матрицы в $M(2, R, \Sigma)$ умножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + sa_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & sa_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Верно и обратное. Любой центральный элемент s кольца R определяет кольцо формальных (2×2) -матриц над R , умножение в котором выполняется по правилу (5.6). Такие кольца были введены в [2] и обозначались там через K_s . Они также изучались и использовались в [10, 11, 14, 16, 19, 22, 23].

Ситуация с классификацией колец $M(3, R, \Sigma)$ более сложная. Основные тождества (5.2) превращаются в тождества

$$\begin{aligned} s_{iik} &= 1 = s_{ikk}, \quad i, k = 1, 2, 3, \\ s_{121} &= s_{212} = s_{123} \cdot s_{213} = s_{321} \cdot s_{312}, \\ s_{131} &= s_{313} = s_{132} \cdot s_{312} = s_{231} \cdot s_{213}, \\ s_{232} &= s_{323} = s_{231} \cdot s_{321} = s_{132} \cdot s_{123}. \end{aligned}$$

Каждое семейство элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, 3\}$, удовлетворяющих предыдущим равенствам, задаёт кольцо формальных матриц над R порядка 3. Если $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех $i, j, k = 1, 2, 3$, т. е. матрицы S_1 , S_2 и S_3 симметрические, то эти равенства можно записать более компактно:

$$\begin{aligned} s_{iik} &= 1 = s_{ikk}, \quad i, k = 1, 2, 3, \\ s_{121} &= s_{212} = s_{123} \cdot s_{213}, \\ s_{131} &= s_{313} = s_{132} \cdot s_{312}, \\ s_{232} &= s_{323} = s_{231} \cdot s_{321}. \end{aligned}$$

В связи с задачей I можно определённо сказать, что не всякая симметрическая матрица порядка 3 служит матрицей S для некоторого кольца $M(3, R, \Sigma)$.

6. Некоторые свойства колец формальных матриц над R

Прежде всего отметим, что многие результаты были доказаны Г. Тангом и И. Чжоу [24] для одного класса колец формальных матриц над R (см. раздел 7).

Пусть $M(n, R, \Sigma)$ — некоторое кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R . Напомним, что

$$\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\} —$$

система множителей. Множители s_{ijk} удовлетворяют равенствам (5.2) и их следствиям (5.4) и (5.5). Иногда мы обозначаем через R_{ij} кольцо R , стоящее в позиции (i, j) .

Применим теоремы 4.3 и 4.4 к вычислению радикала Джекобсона и первичного радикала кольца $M(n, R, \Sigma)$. В обозначениях теоремы 4.3 имеем

$$J(R_{ij}) = \{x \in R_{ij} \mid R_{ji} \circ x \subseteq J(R)\}$$

и $R_{ji} \circ x = s_{jij}Rx = s_{iji}Rx$. Поэтому

$$J(R_{ij}) = \{x \in R_{ij} \mid s_{iji}x \in J(R)\}.$$

Заметим, что идеал $J(R_{ij})$ совпадает с пересечением всех максимальных левых (правых) идеалов кольца R , не содержащих s_{iji} . Обозначим этот идеал $J(R_{ij})$ через $J_{ij}(R)$. Теперь из теоремы 4.3 вытекает следующий результат.

Следствие 6.1. Радикал Джекобсона кольца $M(n, R, \Sigma)$ равен

$$\begin{pmatrix} J(R) & J_{12}(R) & \dots & J_{1n}(R) \\ J_{21}(R) & J(R) & \dots & J_{2n}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{n1}(R) & J_{n2}(R) & \dots & J(R) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Первичный радикал кольца $M(n, R, \Sigma)$ имеет аналогичное строение. Обозначим

$$P(R_{ij}) = \{x \in R_{ij} \mid s_{iji}x \in P(R)\}.$$

Следствие 6.2. Первичный радикал кольца $M(n, R, \Sigma)$ совпадает с идеалом матриц вида (6.1), только буква J должна быть заменена на P .

Приведём внутреннее описание идеалов кольца $M(n, R, \Sigma)$ и выясним строение его фактор-колец. Для произвольного кольца формальных матриц эти вопросы кратко рассматривались в разделах 1 и 4. Следующее предложение доказывается непосредственными вычислениями.

Предложение 6.3. Если I — идеал кольца $M(n, R, \Sigma)$, то

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{n1} & I_{n2} & \dots & I_{nn} \end{pmatrix},$$

где все I_{ij} — идеалы в R , причём выполняются следующие соотношения:

$$I_{ii} \subseteq \bigcap_{l=1}^n (I_{il} \cap I_{li}), \quad s_{iji} I_{ij} \subseteq I_{ii} \cap I_{jj}$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$, причём

$$s_{ikj} I_{kj} \subseteq I_{ij}, \quad s_{jki} I_{jk} \subseteq I_{ji}$$

для всех различных i, j, k .

Следующее предложение также доказывается стандартными рассуждениями.

Предложение 6.4. Пусть $I = (I_{ij})$ — идеал кольца $K = M(n, R, \Sigma)$.

1. Множество матриц

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} R/I_{11} & R/I_{12} & \dots & R/I_{1n} \\ R/I_{21} & R/I_{22} & \dots & R/I_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R/I_{n1} & R/I_{n2} & \dots & R/I_{nn} \end{pmatrix}$$

является кольцом формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами

$$\varphi_{ijk}: R/I_{ij} \otimes_{R/I_{jj}} R/I_{jk} \rightarrow R/I_{ik}, \quad \varphi_{ijk}(\bar{x} \otimes \bar{y}) = s_{ijk}xy + I_{ik}$$

для всех $i, j, k = 1, \dots, n$.

2. Имеет место изоморфизм

$$K/I \cong \bar{K}, \quad (x_{ij}) + I \mapsto (x_{ij} + I_{ij}).$$

Применительно к нашим матричным кольцам рассмотрим несколько распространённых кольцевых свойств. Напомним, что E_{ij} — это матричные единицы.

Предложение 6.5. Пусть K — кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R с множителями s_{ijk} , $i, j, k = 1, \dots, n$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) K является простым кольцом в точности тогда, когда R — простое кольцо и все множители s_{ijk} не равны нулю;
- 2) K является первичным кольцом в точности тогда, когда R — первичное кольцо и все s_{ijk} не равны нулю;
- 3) K является регулярным кольцом в точности тогда, когда R — регулярное кольцо и все элементы s_{ijk} обратимы в R ;
- 4) K является полупримитивным кольцом в точности тогда, когда R — полупримитивное кольцо и все s_{ijk} не являются делителями нуля в R ;
- 5) K является полупервичным кольцом в точности тогда, когда R — полупервичное кольцо и все s_{ijk} не являются делителями нуля в R .

Доказательство. Докажем импликацию $\implies$ утверждения 1). Если I — ненулевой идеал в R , то

$$\begin{pmatrix} I & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots \\ I & \dots & I \end{pmatrix} -$$

идеал в K . Поэтому из простоты кольца K следует, что $I = R$. Следовательно, R — простое кольцо. Гомоморфизм η из предложения 5.2 должен быть инъективным. Поэтому все s_{ijk} не равны нулю.

Докажем импликацию $\Leftarrow$. Кольцо $M(n, R)$ является простым, а все центральные элементы s_{ijk} обратимы, поскольку центр простого кольца является полем. По предложению 5.2 $K \cong M(n, R)$, и следовательно, K — простое кольцо.

Докажем импликацию $\Rightarrow$ утверждения 2). Так как $R \cong E_{11}KE_{11}$, то R — первичное кольцо. Допустим, что $s_{ijk} = 0$ для некоторых i, j, k . Тогда $E_{ij}KE_{kl} = 0$. Это противоречит тому, что K — первичное кольцо.

Докажем импликацию $\Leftarrow$. Центр первичного кольца является областью, поэтому все s_{ijk} — делители нуля. Допустим, что $(a_{ij})K(b_{ij}) = 0$ для некоторых ненулевых матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) . Например, пусть $a_{kl} \neq 0$ и $b_{mp} \neq 0$. Тогда $s_{klm}s_{kmp}a_{kl}Rb_{mp} = 0$, откуда следует, что $a_{kl}Rb_{mp} = 0$, что противоречит первичности кольца R . Таким образом, K — первичное кольцо.

Докажем импликацию $\Rightarrow$ утверждения 3). Так как кольцо K регулярно и $R \cong E_{11}KE_{11}$, то кольцо R регулярно. Следовательно, существует такая матрица (a_{ij}) , что $E_{ij} = E_{ij}(a_{ij})E_{ij}$. Поэтому получаем равенство $s_{iji}a_{ji} = 1$, и все элементы s_{iji} обратимы. Из равенств (5.4) получаем, что все элементы s_{ijk} тоже обратимы.

Докажем импликацию $\Leftarrow$. Кольцо $M(n, R)$ регулярно, и $K \cong M(n, R)$ по предложению 5.2.

Утверждения 4) и 5) вытекают из равенств (5.4) и следствий 6.1 и 6.2 соответственно. $\square$

7. Характеризация матриц множителей

В этом и следующих двух разделах R обозначает произвольное кольцо, $M(n, R, \Sigma)$ — кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R , Σ — система множителей $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$. Множители s_{ijk} удовлетворяют тождествам (5.2). Элемент, находящийся на позиции (i, j) произведения матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) из кольца $M(n, R, \Sigma)$ равен

$$\sum_{k=1}^n s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

В разделе 5 сформулирована задача I о том, какие матрицы могут служить матрицами множителей для колец формальных матриц. Задача II относится к описанию колец $M(n, R, \Sigma)$ в зависимости от систем множителей Σ . В общем случае решить эти задачи трудно, например из-за сложности проверки тождеств (5.2).

Ситуация кажется более простой, если все множители s_{ijk} являются целыми степенями некоторого центрального элемента s кольца R . Мы знаем, что для $n = 2$ других возможностей не существует (см. конец раздела 5).

При $n \geq 3$ ситуация с характеристикой и классификацией колец $M(n, R, \Sigma)$ становится более запутанной, даже если все множители s_{ijk} являются степенями элемента s . Интересен частный случай, когда каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geq 1$. Г. Танг и И. Чжоу [24] подробно исследовали кольца $M(n, R, \Sigma)$, для которых $s_{iji} = s^2$ при $i \neq j$ и $s_{ijk} = s$ для всех попарно различных i, j, k . Мы будем называть такие кольца кольцами Танга—Чжоу.

Здесь и в разделе 8 мы рассмотрим случай, когда $s_{ijk} = 1$ или $s_{ijk} = s$ для всех i, j, k , где s — некоторый центральный элемент кольца R . На элемент s накладываются простые дополнительные ограничения. Любое соответствующее кольцо матриц обозначается через $M(n, R, s)$; ясно, что для фиксированного n имеется только конечное число различных таких колец. Элемент s называется *множителем* любого кольца $M(n, R, s)$.

Далее считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$. Дополнительно предполагаем, что $s^2 \neq 1$ и s не является идемпотентом. Без большой потери общности можно было бы считать, что s — необратимый элемент. Действительно, если элемент s обратим, то $M(n, R, s) \cong M(n, R)$ по предложению 5.2. Следующее условие является более сильным: $s^k \neq s^l$ для любых неотрицательных различных k и l .

Итак, считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$, где элемент s^2 не равен 1 и s ; в частности, $s \neq 0$ и $s \neq 1$. Укажем некоторые соотношения между множителями вида s_{iji} .

Лемма 7.1. Пусть индексы i, j и k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji} , s_{iki} и s_{jkj} имеет место только одна из следующих трёх возможностей:

- 1) все три элемента равны 1;
- 2) два элемента из этих трёх равны s , а третий элемент равен 1;
- 3) все три элемента равны s .

Доказательство. Из равенств (5.4) непосредственно следует, что невозможен случай, когда два из трёх множителей s_{iji} , s_{iki} , s_{jkj} равны 1, а третий множитель равен s . Поэтому остаются возможности, указанные в пунктах 1)–3). Каждая из этих возможностей действительно возникает, что вытекает из дальнейших рассуждений. $\square$

В разделе 5 мы составили квадратные матрицы $S, S_1, \dots, S_n$ порядка n из множителей s_{ijk} некоторого кольца формальных матриц. Мы назвали эти матрицы *матрицами множителей* данного кольца. В дальнейшем термин «матрица множителей» обычно используется для матрицы S .

Полезно определить понятие абстрактной матрицы множителей. Как и раньше, пусть s — некоторый центральный элемент кольца R , причём $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n , в которой все элементы равны 1 или s , причём главная диагональ состоит из единиц и для любых трёх элементов t_{ij} , t_{ik} , t_{jk} верно одно из утверждений леммы 7.1. Назовём такую матрицу T *матрицей множителей*. Если τ — некоторая подстановка степени n , то $\tau T = (t_{\tau(i)\tau(j)})$ также является матрицей множителей (матрицы вида τT были определены в пункте А раздела 5).

Пусть T — матрица, которую можно представить в блочном виде, когда на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц, а на всех остальных позициях находится элемент s . Ясно, что T — матрица множителей. В таком случае будем говорить, что T имеет канонический вид.

Лемма 7.2. Для любой матрицы множителей T существует такая подстановка σ , что матрица σT имеет канонический вид.

Доказательство. Проведём индукцию по n . При $n = 2$ существует единственная матрица множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix},$$

имеющая канонический вид.

Предположим, что утверждение леммы верно для всех матриц порядка не выше $n - 1$, где $n \geq 3$. Пусть T — матрица порядка n . Возьмём подматрицу T' порядка $n - 1$, расположенную в правом нижнем углу матрицы T . Существует такая подстановка τ' чисел $2, \dots, n$, что матрица $\tau' T'$ имеет канонический вид. Возьмём подстановку τ степени n , совпадающую с τ' на числах $2, \dots, n$. В правом нижнем углу матрицы τT находится матрица $\tau' T'$. Если все элементы первой строки матрицы τT начиная со второго элемента равны s , то τT уже имеет канонический вид.

Теперь допустим, что в первой строке матрицы τT есть единицы (разумеется, мы исключаем позицию $(1, 1)$). Пусть второй блок, стоящий на главной диагонали (после позиции $(1, 1)$), имеет порядок $m - 1$, $m \geq 2$. В таком случае элементы $t_{12}, \dots, t_{1m}$ одновременно равны либо 1, либо s . Действительно, если $t_{1i} = 1$, $t_{1j} = s$, $2 \leq i, j \leq m$, то $t_{ij} = s$, что невозможно. Допустим, что $t_{12} = \dots = t_{1m} = 1$. Если $t_{1l} = 1$ для некоторого l , $m + 1 \leq l \leq n$, то $t_{2l} = 1$, что тоже невозможно. Следовательно, $t_{1m+1} = \dots = t_{1n} = s$. Теперь если мы объединим первый и второй блоки, стоящие на главной диагонали, то получим канонический вид матрицы τT .

Итак, можно считать, что $t_{12} = \dots = t_{1m} = s$. Что теперь можно сказать об элементах $t_{1m+1} = \dots = t_{1n}$? Допустим, что $t_{1i} = 1$, $t_{1j} = 1$ и $t_{1k} = 1$, где $m + 1 \leq i, j, k \leq n$ и $i < j < k$. В таком случае $t_{ij} = s$, $t_{ik} = 1$, и получаем противоречие. Отсюда следует, что последовательность $t_{1m+1}, \dots, t_{1n}$ может иметь только один из следующих трёх видов:

- 1) 111...sss;
- 2) sss...111...sss;
- 3) sss...111.

Важное обстоятельство заключается в том, что под последовательностью 11...1 из 1), 2), 3) на главной диагонали стоит блок, порядок которого равен числу единиц в данной последовательности.

В случаях 1) и 2) поступаем далее следующим образом. Возьмём подматрицу, у которой правый нижний угол заканчивается блоком, соответствующим последовательности 11...1. Некоторой подстановкой приводим эту подматрицу

к каноническому виду. Затем той же подстановкой (добавив недостающие одночленные циклы) действуем на всю матрицу и приводим её к каноническому виду (при этих манипуляциях подматрица, находящаяся в правом нижнем углу, не меняется).

Рассмотрим оставшийся случай 3). Пусть блок на главной диагонали, расположенный под последовательностью $11 \dots 1$, начинается со строки с номером $k + 1$, где $k \geq 2$. Применим к матрице цикл $(12 \dots k)$. В результате в правом нижнем углу появится блок из единиц порядка $k + 1$. Вместо единиц в первой строке справа и в первом столбце слева будет стоять s . На позициях $(k, 1), \dots, (k, k - 1)$ и $(1, k), \dots, (k - 1, k)$ также будет находиться s . Таким образом, слева и вверх от блока из единиц в правом нижнем углу на всех позициях стоит s . Некоторой подстановкой приведём к каноническому виду подматрицу, расположенную в строках и столбцах с номерами $1, 2, \dots, k - 1$. После этого вся матрица будет иметь канонический вид. $\square$

В ситуации леммы будем говорить, что *матрица T приведена к каноническому виду σT* . Верно и обратное, т. е. если некоторая матрица T приведена к каноническому виду σT , то T — матрица множителей. Таким образом, матрицы множителей совпадают с матрицами, которые приводятся к каноническому виду подстановками.

Пусть матрица T имеет канонический вид. Тогда блоки, стоящие на главной диагонали матрицы, можно расположить в любом наперёд заданном порядке. Иными словами, существует такая подстановка τ , что блоки в матрице τT располагаются в требуемом порядке, причём τT имеет канонический вид. Для доказательства достаточно показать, что если T состоит из двух блоков, то их можно переставить. Пусть первый блок имеет порядок k , $1 \leq k \leq n - 1$. Тогда в качестве τ можно взять подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n - k & n - k + 1 & \dots & n \\ k + 1 & k + 2 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Сформулируем основной результат раздела. Заметим, что один частный случай, появляющийся в доказательстве, будет рассмотрен в следующем разделе.

Теорема 7.3. Пусть T — матрица множителей. Существует кольцо $M(n, R, s)$, матрица множителей которого совпадает с T .

Доказательство. Проведём индукцию по n . При $n = 2$ имеется только одна матрица множителей, а именно матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что всегда существует кольцо $M(2, R, s)$ с матрицей множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь считаем, что $n > 2$. Пусть σ — такая подстановка, что матрица σT имеет канонический вид (см. лемму 7.2). Могут быть два случая.

СЛУЧАЙ 1. Все блоки, стоящие на главной диагонали, имеют порядок 1. В разделе 8 будет показано, что найдётся кольцо $M(n, R, s)$ с матрицей множителей σT .

СЛУЧАЙ 2. Не все блоки, указанные в случае 1, имеют порядок 1. Перед теоремой мы заметили, что существует такая подстановка τ , что матрица $\tau \sigma T$ имеет канонический вид и порядок самого нижнего блока больше 1. В $\tau \sigma T$ возьмём подматрицу T' порядка $n - 1$, лежащую в левом верхнем углу. Она имеет канонический вид. Согласно предположению индукции существует кольцо K вида $M(n - 1, R, s)$ с матрицей множителей T' . Запишем это кольцо в виде кольца блочных матриц порядка 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R & \dots & R & R \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ R & \dots & R & R \\ \hline R & \dots & R & R \end{array} \right).$$

Теперь применим конструкцию кольца K_4 из раздела 3 к кольцу K . Матрица множителей полученного кольца K_4 совпадает с матрицей $\tau \sigma T$. Кольцо $\sigma^{-1} \tau^{-1} K_4$ будет искомым кольцом формальных матриц. Действительно, матрица T является матрицей множителей этого кольца. $\square$

Вернёмся к действию подстановок на множестве колец формальных матриц (см. пункт А раздела 5). Ясно, что это действие можно ограничить на множество колец $M(n, R, s)$ рассматриваемого вида с фиксированным множителем s . Каждая подстановка τ также действует на любой матрице $A = (a_{ij})$, а именно $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. В частности, τ действует на матрицах множителей S . Согласно лемме 7.2 при этом орбиты состоят из матриц, имеющих одинаковый канонический вид. Число орбит, на которые разбивается множество матриц множителей под действием подстановок, равно числу представлений числа n в виде суммы чисел, меньших n .

Если кольцо $K = M(n, R, s)$ имеет матрицу множителей S , то τS — матрица множителей кольца τK для любой подстановки τ . Следовательно, если два кольца лежат в одной орбите, то соответствующие матрицы множителей тоже лежат в одной орбите. Конечно, обратное неверно. Причина в том, что для данной матрицы множителей S могут существовать несколько серий матриц множителей $S_1, \dots, S_k$. Поэтому неясно, сколько имеется орбит для колец. В нескольких частных случаях ответ будет дан в следующем разделе.

Для данного кольца матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

мы ввели в разделе 3 четыре способа построения колец матриц больших порядков. Назовём эти способы *конструкциями* K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Теперь предположим, что дано кольцо $M(n, R, s) = L$ с матрицами множителей $S, S_1, \dots, S_n$.

Допустим, что мы применили указанные конструкции к L . Обозначим полученные кольца через L_1 , L_2 , L_3 и L_4 соответственно. Матрицы множителей $S', S'_1, \dots, S'_n, S'_{n+1}$ каждого из этих колец получаются из матриц $S, S_1, \dots, S_n$ с помощью определённой закономерности. Рассмотрим подробнее конструкцию K_4 . Нужно записать кольцо L в блочном виде как кольцо матриц порядка 2 (см. раздел 3):

$$L = \begin{pmatrix} P & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

где P — кольцо матриц порядка k ($1 \leq k \leq n-1$), S , M и N указаны в разделе 3. Для простоты возьмём $k = n-1$. Применим к L конструкцию K_4 и получим кольцо матриц L_4 порядка $n+1$:

$$L_4 = \begin{pmatrix} L & \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix} & S \end{pmatrix}.$$

Учитывая строение матриц в кольце L_4 , получаем, что матрицы множителей $S', S'_1, \dots, S'_n$ кольца L_4 получаются из соответствующих матриц $S, S_1, \dots, S_n$ единообразно, причём $S'_{n+1} = S'_n$. Именно, нужно добавить справа к каждой матрице $S, S_1, \dots, S_n$ последний столбец этой матрицы; нужно добавить снизу к каждой матрице $S, S_1, \dots, S_n$ последнюю строку этой матрицы; в позицию $(n+1, n+1)$ нужно поставить элемент, стоящий в позиции (n, n) .

Сформулируем следующий вопрос, который снова появится в конце раздела 8. Подействуем подстановкой τ степени n на кольцо L . Затем применим конструкцию K_4 к кольцу τL ; получится кольцо $(\tau L)_4$. Какая имеется связь между кольцами L_4 и $(\tau L)_4$? Можно ли одно из этих колец перевести во второе некоторой подстановкой?

В конце раздела остановимся на исключённых значениях для множителя s : $s^2 = 1$ и $s^2 = s$. Если $s^2 = 1$, то элемент s обратим и $M(n, R, s) \cong M(n, R)$ по предложению 5.2. Случай $s^2 = s$ (т. е. s — идемпотент) более содержателен. Приведём один характерный пример. Положим $s_{iik} = 1 = s_{ikk}$ и $s_{ijk} = s$ при $i \neq j$ и $j \neq k$. Тогда $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — система множителей. Следовательно, существует кольцо $M(n, R, \Sigma)$.

8. Классификация колец формальных матриц

Продолжим тему, начатую в предыдущем разделе. Мы уделим основное внимание задаче II, сформулированной в разделе 5. Мы также закончим доказательство теоремы 7.3, связанной с задачей I. Сохраняются все обозначения и соглашения раздела 7.

По теореме 7.3 для всякой матрицы множителей T найдётся такое кольцо $M(n, R, s)$, что его матрица множителей S совпадает с T . Таких колец $M(n, R, s)$ может быть несколько, поскольку для данной матрицы S могут существовать

разные наборы матриц множителей $S_1, \dots, S_n$, соответствующие разным системам множителей Σ . В данной ситуации задача классификации Π заключается в перечислении при фиксированном s всех таких колец $M(n, R, s)$.

В зависимости от канонического вида матрицы S мы исследуем два случая:

- 1) главная диагональ матрицы S состоит из двух блоков;
- 2) все блоки на главной диагонали матрицы S имеют порядок 1.

В первом случае матрицы $S_1, \dots, S_n$ являются симметрическими и однозначно восстанавливаются по матрице S .

Как и в разделе 7, мы считаем, что матрица множителей кольца $M(n, R, s)$ — это матрица S , если не оговорено другое.

Лемма 8.1. Пусть дано кольцо $M(n, R, s)$ и $S, S_1, \dots, S_n$ — его матрицы множителей. Равносильны следующие условия:

- 1) канонический вид матрицы S содержит ровно два блока;
- 2) для любых трёх элементов s_{iji} , s_{iki} и s_{jkj} реализуется либо возможность 1), либо возможность 2) из леммы 7.1;
- 3) матрицы $S_1, \dots, S_n$ являются симметрическими.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \implies 2)$. Пусть τ — произвольная подстановка. Если для элементов матрицы S выполняется 2), то это же верно для элементов матрицы τS , и наоборот. Поэтому можно считать, что S имеет канонический вид. Тогда нетрудно проверить, что 2) верно.

Докажем импликацию $2) \implies 1)$. Опять считаем, что S имеет канонический вид. Если мы допустим, что число блоков не менее трёх, то быстро получим противоречие.

Докажем импликацию $2) \implies 3)$. Возьмём любые три элемента s_{iji} , s_{iki} и s_{jkj} , где индексы i, j, k попарно различны. По 2) либо все эти элементы равны 1, либо два из них равны s , а третий элемент равен 1. В любом случае из равенств (5.4) получаем, что $s_{ikj} = s_{jki}$.

Докажем импликацию $3) \implies 2)$. Если мы допустим, что

$$s_{iji} = s_{iki} = s_{jkj} = s,$$

то получим, что все остальные шесть множителей в равенстве (5.5) равны друг другу. Это противоречит равенствам (5.4). $\square$

Далее рассмотрим кольца $M(n, R, s)$ с матрицами множителей, удовлетворяющими эквивалентным условиям 1)–3) леммы 8.1. Несложно доказать следующее утверждение: любая из строк матрицы S однозначно определяет оставшиеся строки. Переформулируем это утверждение. Для этого перейдём к «аддитивной» записи в матрицах $S, S_1, \dots, S_n$, т. е. заменим все элементы соответствующими показателями степени элемента s (как обычно, полагаем $s^0 = 1$). Полученные матрицы состоят из нулей и единиц. (Эти матрицы являются примерами булевых матриц из [15].) Обозначим через S^+ матрицу, построенную из матрицы S . Сохраним за элементами матрицы S^+ обозначение s_{iji} (или s_{ij}). Тогда утверждение 2) леммы 8.1 для элементов матрицы S^+ в поле из двух элементов имеет

вид $s_{ij} + s_{ik} = s_{jk}$. Это равенство также верно, если какая-то пара индексов совпадает.

Элементы s_{ikj} с различными i и j (т. е. элементы матрицы S_k) однозначно определяются элементами вида s_{iji} . Более точно, элементы главной диагонали матрицы S_k (эта диагональ совпадает с k -й строкой матрицы S) задают все остальные элементы этой матрицы, если учесть равенства (5.4). В поле из двух элементов выполняется равенство $s_{ikj} = s_{ik} \cdot s_{jk}$. Оно также остаётся верным для совпадающих индексов. Итак, матрица S полностью определяет матрицы S_k , $k = 1, \dots, n$.

Можно предложить полное обозрение колец $M(n, R, s)$, о которых идёт речь в лемме 8.1.

Уточним, что кольцо $M(n, R)$ также подпадает под пункт 3) следующей теоремы. Оно получается, когда все множители s_{ijk} равны $1 = s^0$. В пункте 2) матрица, состоящая из единиц, соответствует $M(n, R)$.

Теорема 8.2. Существует взаимно-однозначное соответствие между следующими тремя множествами:

- 1) множество последовательностей длины $n - 1$, состоящих из 0 и 1;
- 2) множество матриц множителей порядка n , удовлетворяющих эквивалентным условиям 1) и 2) леммы 8.1;
- 3) множество колец $M(n, R, s)$, у которых матрицы множителей удовлетворяют условиям 1)–3) леммы 8.1.

Доказательство. По существу, биекция между множествами 1) и 2) уже установлена. Именно, если $T = (t_{ij})$ — некоторая матрица множителей из множества 2), то поставим в соответствие матрице T последовательность $t_{12}, \dots, t_{1n}$ (как условлено выше, мы заменяем элементы t_{ij} на соответствующие показатели элемента s , поступаем далее аналогично). Наоборот, пусть дана некоторая последовательность из множества 1). Припишем 0 слева к этой последовательности. Возьмём эту расширенную последовательность в качестве первой строки матрицы (t_{ij}) порядка n . Остальные элементы матрицы получаются с помощью равенства $t_{1j} + t_{1k} = t_{jk}$ (в поле из двух элементов). Также верно равенство $t_{ij} + t_{ik} = t_{jk}$ для всех $i = 2, \dots, n$ и всех j, k . Теперь заменим 0 (1) на 1 (соответственно s) в этой матрице. Построенная матрица будет матрицей из множества 2). Установленное соответствие между последовательностями из 1) и матрицами из 2) является биекцией.

Теперь перейдём к биекции между множествами 2) и 3), которая практически уже тоже имеется. Если T — некоторая матрица из множества 2), то по теореме 7.3 существует такое кольцо $M(n, R, s)$, что T — матрица множителей для $M(n, R, s)$. Сейчас заметим, что совпадение двух колец вида $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ означает, что операции умножения в этих кольцах совпадают. Из определения таких колец вытекает, что системы множителей этих колец $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ совпадают. Поэтому ясно, что различным матрицам T соответствуют различные кольца $M(n, R, s)$.

Наоборот, если кольцо $M(n, R, s)$ принадлежит множеству 3), то поставим в соответствие кольцу $M(n, R, s)$ матрицу множителей S этого кольца. Ранее отмечалось, что множители s_{ijk} с различными индексами i и k однозначно определяются множителями вида s_{iji} . Иными словами, матрицы множителей $S_1, \dots, S_n$ кольца $M(n, R, s)$ однозначно восстанавливаются по матрице S . Поэтому разным кольцам $M(n, R, s)$ соответствуют разные матрицы S . $\square$

Следствие 8.3. В теореме 8.2 число колец из множества 3) равно 2^{n-1} . Следовательно, это число не зависит от кольца R и элемента s .

Теперь опишем одну ситуацию общего характера. Пусть дано произвольное множество центральных элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ кольца R . Требуется проверить, удовлетворяет ли это множество тождествам (5.2), т. е. является ли оно системой множителей. Для этого нам, в частности, нужно проверить равенство

$$s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \quad (8.1)$$

для всех попарно различных индексов i, j, k, l . Может случиться так, что для любой такой четвёрки индексов важно только взаимное расположение индексов i, j, k, l , т. е. важен только порядок между индексами. Подобная ситуация возникает ниже. Для удобства будем считать, что $i = 1, j = 2, k = 3$ и $l = 4$. Учитывая все варианты расположения чисел i, j, k, l , получаем, что число соответствующих равенств (8.1) равно 24. Удобно расположить эти равенства в виде четырёх серий из шести равенств в каждой серии. Запишем первую серию, в которой индексы i, j, k принимают любые значения из $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} s_{123} \cdot s_{134} &= s_{124} \cdot s_{234}, & s_{321} \cdot s_{314} &= s_{324} \cdot s_{214}, \\ s_{312} \cdot s_{324} &= s_{314} \cdot s_{124}, & s_{213} \cdot s_{234} &= s_{214} \cdot s_{134}, \\ s_{231} \cdot s_{214} &= s_{234} \cdot s_{314}, & s_{132} \cdot s_{124} &= s_{134} \cdot s_{324}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Имеются ещё три серии для значений индексов $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ и $\{2, 3, 4\}$.

Теперь обратимся к случаю 2), выделенному в начале раздела. Именно, исследуем другую встречающуюся ситуацию с кольцом $M(n, R, s)$, когда все множители s_{iji} , $i \neq j$, равны s . Иначе говоря, в матрице множителей такого кольца на главной диагонали стоят блоки порядка 1 (эта матрица уже имеет канонический вид). В частности, завершим доказательство теоремы 7.3. Кольцо $M(2, R, s)$ относится к этому виду колец, поэтому считаем, что $n \geq 3$.

Теорема 8.4. Пусть $T = (t_{ij})$ — матрица порядка $n \geq 3$, у которой на главной диагонали стоит 1, а на остальных позициях стоит элемент s . Найдётся кольцо $M(n, R, s)$, для которого T является матрицей множителей. Любые два таких кольца переводятся друг в друга подстановками, т. е. они лежат в одной орбите.

Доказательство. Рассуждения после следствия 8.3 показывают, какие значения нужно придать множителям s_{ijk} , чтобы получилось нужное кольцо $M(n, R, s)$. Как всегда, $s_{iik} = 1 = s_{ikk}$. Затем полагаем $s_{iji} = t_{ij}$. Далее для

любых попарно различных индексов i, j, k считаем, что $s_{ijk} = 1$, если перестановка (i, j, k) чётная и $s_{ijk} = s$ для нечётной перестановки (i, j, k) . Убедимся, что множество $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ будет системой множителей, т. е. выполняются тождества (5.2).

Если в каком-то тождестве (5.2) (это тождество (8.1)) два индекса совпадают, то оно превращается в тождество вида (5.4) или (5.5). Однако эти тождества выполняются в силу выбора множителей s_{ijk} . В частности, всё проверено для случая $n = 3$. Далее считаем, что $n \geq 4$. Осталось проверить равенство (8.1) для любых попарно различных индексов i, j, k, l . Здесь мы как раз находимся в ситуации, описанной после следствия 8.3, поскольку при проверке важно лишь взаимное расположение чисел i, j, k, l . Поэтому достаточно проверить выполнение всех 24 равенств вида (8.2), что производится непосредственными вычислениями.

Итак, Σ — система множителей. Следовательно, имеется кольцо $M(n, R, \Sigma)$ с матрицей множителей T .

Замечание. Мы прервём доказательство теоремы и к оставшемуся утверждению об орбите вернёмся позже.

Наоборот, можно в доказательстве считать, что $s_{ijk} = s$ для чётных перестановок (i, j, k) и $s_{ijk} = 1$ для нечётных перестановок (i, j, k) . Тогда тоже получим кольцо с матрицей множителей T . Соответствующие кольца обозначим L_0 и L_1 . Подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

переводит L_0 в L_1 (нужно учесть, что перестановки (i, j, k) и $(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$ имеют противоположные чётности).

Итак, мы нашли два кольца L_0 и L_1 с матрицей множителей T . Существуют ли ещё такие кольца? Для $n = 3$ ответ отрицательный, что вытекает из следующего рассуждения.

Возьмём $n = 4$. Из тождеств (5.4) и (5.5) непосредственно следует, что множители $s_{123}, s_{312}, s_{231}$ из равенств (8.2) совпадают, то же верно для $s_{321}, s_{213}, s_{132}$. Кроме того, элементы этих троек должны принимать противоположные значения (из 1 и s). Аналогичная ситуация имеет место с первыми элементами остальных 18 равенств. Первыми элементами равенств (8.2) исчерпываются все элементы, присутствующие в этих равенствах. Поэтому можно сделать вывод, что данное кольцо $M(4, R, s)$ однозначно определяется вектором (c_1, c_2, c_3, c_4) длины 4, состоящим из 0 и 1. Здесь $c_1 = 0$, если $s_{123} = 1$, и $c_1 = 1$, если $s_{123} = s$, и т. д. Кольцам L_0 и L_1 отвечают векторы $(0, 0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$ соответственно. Применяя циклы $(1\ 2\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 4)$ и $(1\ 4\ 2\ 3)$ к кольцам L_0 и L_1 , получаем ещё четыре кольца $M(4, R, s)$, которым соответствуют векторы $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$. Подстановка $(1\ 4)(2\ 3)$ переводит L_0 в L_1 и обратно. Не существует колец $M(4, R, s)$, соответствующих векторам $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$,

$(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$; чтобы это проверить, достаточно изучить равенства (8.2). Отсюда следует, что имеется шесть колец $M(4, R, s)$ с данной матрицей множителей T . Эти кольца переводятся друг в друга подстановками, т. е. они лежат в одной орбите. Кроме того, отметим, что

$$L_1 = L_0^t, \quad L_{(0,0,1,1)} = L_{(1,1,0,0)}^t, \quad L_{(0,1,1,0)} = L_{(1,0,0,1)}^t$$

(см. пункт D раздела 5).

Теперь считаем, что $n \geq 5$. У нас уже есть два кольца L_0 и L_1 , таких что T — матрица множителей для L_0 и L_1 . Теперь пусть $M(n, R, s)$ — любое другое подобное кольцо. Покажем, что оно переводится некоторой подстановкой в L_0 или L_1 .

Зафиксируем произвольные попарно различные индексы i, j, k, l . Элементы, занимающие в матрицах из $M(n, R, s)$ позиции

$$(i, i), (i, j), (i, k), (i, l), (j, i), (j, j), (j, k), (j, l), \\ (k, i), (k, j), (k, k), (k, l), (l, i), (l, j), (l, k), (l, l),$$

образуют некоторое кольцо $M(4, R, s)$. Мы только что установили, что найдётся подстановка σ степени 4, переводящая это кольцо $M(4, R, s)$ в кольцо L_0 . Подразумевая, что числа, отличные от i, j, k, l , остаются на месте, считаем, что σ — подстановка степени n . Применим σ к кольцу $M(n, R, s)$. Повторив это действие несколько раз, получим подстановку степени n , переводящую кольцо $M(n, R, s)$ в L_0 . На этом доказательство теоремы 8.4 закончено. $\square$

На основе изложенного выпишем рассмотренные нами матрицы множителей S колец $M(n, R, s)$ для $n = 2, 3, 4$. Мы опускаем матрицу, которая состоит из 1 и соответствует кольцу $M(n, R)$.

$n = 2$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

$n = 3$. Две орбиты матриц множителей и две соответствующие орбиты колец.

Первая орбита:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец состоит из колец L_0 и L_1 .

Вторая орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 1 & s \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец содержит три кольца.

$n = 4$. Три орбиты матриц множителей и три соответствующие орбиты колец.

Первая орбита:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец состоит из шести колец.

Вторая орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & 1 \\ s & 1 & s & s \\ 1 & s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & s & 1 \\ s & s & 1 & s \\ 1 & 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Третья орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s & s \\ 1 & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & 1 \\ s & 1 & 1 & s \\ s & 1 & 1 & s \\ 1 & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \\ 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая орбита колец содержит четыре кольца, третья орбита колец содержит три кольца.

Кольца L_0 являются примерами колец скрещённых матриц [6], которые весьма полезны для структурной теории некоторых артиновых колец.

Вернёмся к лемме 7.1. В этой лемме говорится о возможных значениях множителей в тройке s_{iji} , s_{iki} , s_{jkj} . Мы рассмотрели ситуации, когда реализуются только возможности 1) и 2), а затем только 3). Этим ситуациям соответствует определённое строение канонического вида матриц множителей. Остался случай, когда может возникнуть любая из возможностей 1), 2), 3). Это равносильно тому, что в каноническом виде данной матрицы множителей число блоков на главной диагонали больше двух и есть блоки порядка больше единицы.

Как получить все кольца $M(n, R, s)$, у которых канонический вид матрицы множителей имеет подобное строение? Для $n = 2$ и $n = 3$ таких колец, конечно, нет. Доказательство теоремы 7.3 предоставляет практический способ построения требуемых колец для $n \geq 4$. Именно, нужно брать, начиная с $n = 3$, кольца $M(n, R, s)$ и применять к ним конструкцию K_4 из раздела 3. Перед этим надо применить некоторую подстановку, чтобы перейти к кольцу $M(n, R, s)$, у которого матрица множителей имеет канонический вид. Из колец $M(n, R, s)$ нужно исключить те, у которых матрицы множителей имеют канонический вид, содержащий ровно два блока на главной диагонали. В результате получим кольца $M(n + 1, R, s)$ с искомым видом матрицы множителей. Затем применим всевозможные подстановки к этим кольцам. После этого будем иметь нужные кольца $M(n + 1, R, s)$. Отметим, что если блоки матрицы множителей кольца $M(n, R, s)$ имеют порядки $k_1, \dots, k_t$ с $t \geq 3$, то блоки соответствующего кольца $M(n + 1, R, s)$ будут иметь порядки $k_1, \dots, k_{t-1}, k_t + 1$.

Проиллюстрируем изложенный способ построения для $n = 4$. Возьмём кольцо $M(3, R, s)$, обозначенное выше через L_0 . Это кольцо имеет матрицу множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя конструкцию K_4 к кольцу L_0 , получим кольцо $M(4, R, s)$ с матрицей множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

для которой $s_{121} = s_{131} = s_{232} = s_{141} = s$, $s_{343} = 1$. Учитывая положение 1 выше главной диагонали, обозначим полученное кольцо через L_{34} . Применим к кольцу L_{34} подстановки $(31)(42)$, $(134)(2)$, $(13)(2)(4)$, $(234)(1)$ и $(23)(1)(4)$, получим кольца L_{12} , L_{13} , L_{14} , L_{23} и L_{24} соответственно. Выше главной диагонали матрицы множителей этих колец имеют 1 в позициях $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ и $(2, 4)$ соответственно.

То же самое можно делать, начав с кольца $L_1 = M(3, R, s)$. В результате получим кольца L'_{12} , L'_{13} , L'_{14} , L'_{23} , L'_{24} и L'_{34} . Напомним, что кольцо L_0 переводится в кольцо L_1 некоторой подстановкой (например, $(14)(23)$). Кольцо L_{34} переводится в кольцо L'_{34} подстановкой $(12)(34)$; это даёт частичный ответ на вопрос, сформулированный в конце раздела 7. Таким образом, все 12 колец

$$L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23}, L_{24}, L_{34}, \\ L'_{12}, L'_{13}, L'_{14}, L'_{23}, L'_{24}, L'_{34}$$

лежат в одной орбите. Кроме того, заметим, что $L_1 = L_0^t$ и $L'_{ij} = L_{ij}^t$ (см. пункт D раздела 5).

Составленный выше список матриц множителей можем дополнить для $n = 4$ ещё одной орбитой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s & s \\ 1 & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & s \\ 1 & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & 1 \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ 1 & s & s & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & 1 & s \\ s & 1 & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & 1 \\ s & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая орбита колец содержит 12 колец вида L_{ij} и L'_{ij} . Остаётся неясным, есть ли в этой орбите другие кольца.

9. Изоморфизм колец $M(n, R, s)$

Следующий результат непосредственно выводится из леммы 4.5.

Лемма 9.1. *Для любого кольца K формальных матриц над кольцом R верно равенство $C(K) = \{rE \mid r \in C(R)\}$.*

В разделе 5 сформулирована проблема изоморфизма III. Сейчас мы рассмотрим её для колец формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, для которых при $i \neq j$ и $j \neq k$ каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geq 1$, где s — фиксированный центральный элемент кольца R . Подобные кольца упоминались в начале раздела 7. Здесь мы обозначаем такие кольца через $M(n, R, s)$; не путать с символом $M(n, R, s)$ из разделов 7 и 8, где $M(n, R, s)$ обозначает кольцо, для которого $s_{ijk} = 1$ или $s_{ijk} = s$.

В дальнейшем $M(n, R, 0)$ обозначает такое кольцо $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что все множители s_{ijk} , за исключением s_{iik} и s_{ikk} , равны нулю. Далее, T — некоторое кольцо и $M(n, T, \{t_{ijk}\})$ — произвольное кольцо формальных матриц над T .

Напомним известное определение. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральные.

Лемма 9.2. *Пусть R — нормальное кольцо. Если $M(n, R, 0) \cong M(n, T, \{t_{ijk}\})$, то все множители t_{ijk} , за исключением случаев, когда $i = j$ или $j = k$, равны нулю.*

Доказательство. Обозначим $K_1 = M(n, R, 0)$ и $K_2 = M(n, T, \{t_{ijk}\})$. Зафиксируем некоторый кольцевой изоморфизм $f: K_1 \rightarrow K_2$. Пусть I обозначает идеал (I_{ij}) кольца K_1 , где $I_{ii} = 0$ и $I_{ij} = R$ при $i \neq j$ (см. предложение 6.3). Тогда $I^2 = 0$, откуда следует, что $(f(I))^2 = 0$. Допустим, что существует такой ненулевой множитель t_{ikj} , что $i \neq k$ и $k \neq j$. Тогда $E_{ik}E_{kj} = t_{ikj}E_{ij} \neq 0$, где E_{ij} — матричная единица (см. раздел 5). Следовательно, матрицы E_{ik} и E_{kj} не могут одновременно содержаться в $f(I)$. Для определённости пусть $E_{ik} \notin f(I)$. Тогда

$$E_{ii}(E_{ii} + E_{ik}) - (E_{ii} + E_{ik})E_{ii} = E_{ik} \notin f(I).$$

Показано, что идемпотент $(E_{ii} + E_{ik}) + f(I)$ фактор-кольца $K_2/f(I)$ не является центральным в $K_2/f(I)$. Поэтому кольцо $K_2/f(I)$ не является нормальным. С другой стороны, кольцо $K_2/f(I)$ нормально, поскольку

$$K_2/f(I) \cong K_1/I \cong R \oplus \dots \oplus R —$$

конечное прямое произведение нормальных колец. Получено противоречие. $\square$

Пусть теперь s и t — два ненулевых центральных элемента кольца R (по лемме 9.2 можно считать, что $s \neq 0$ и $t \neq 0$). Кроме того, пусть $s^k \neq s^l$ для любых различных неотрицательных k и l . Пусть $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ и $M(n, R, \{t_{ijk}\})$ — такие кольца, как указано в начале раздела, а именно каждый множитель s_{ijk} является целой положительной степенью элемента s , а каждый множитель t_{ijk} является целой положительной степенью элемента t . Мы также предполагаем,

что хотя бы один из множителей s_{ijk} равен s и хотя бы один из множителей t_{ijk} равен t . Кроме того, предполагается, что системы множителей s_{ijk} и t_{ijk} являются «подобными» в следующем смысле:

$$s_{ijk} = s^m \iff t_{ijk} = t^m$$

для всех множителей s_{ijk} и t_{ijk} . В соответствии с нашим соглашением обозначаем рассматриваемые кольца через $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$ соответственно.

Напомним, что через $J(R)$, $U(R)$ и $Z(R)$ обозначаются радикал Джекобсона, группа обратимых элементов и множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца R .

Теорема 9.3. Пусть R — такое коммутативное кольцо, что $Z(R) \subseteq J(R)$. Кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент в R и α — автоморфизм кольца R .

Доказательство. Обозначим $K_1 = M(n, R, s)$ и $K_2 = M(n, R, t)$. Пусть дан кольцевой изоморфизм $f: K_1 \rightarrow K_2$. Изоморфизм f индуцирует изоморфизм $C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ центров этих колец. Рассмотрим действие этого изоморфизма подробно. Возьмём произвольный элемент $a \in R$. По лемме 9.1 $aE \in C(K_1)$. Следовательно, $f(aE) \in C(K_2)$. Далее, $f(aE) = bE$ для некоторого $b \in R$. Получаем, что f индуцирует такой автоморфизм α кольца R , что $\alpha(a) = b$. Итак, имеем $f(aE) = \alpha(a)E$, $a \in R$.

Теперь возьмём идеал

$$(sE)K_1 = \begin{pmatrix} sR & \dots & sR \\ \dots & \dots & \dots \\ sR & \dots & sR \end{pmatrix}$$

кольца K_1 . Его образом при действии f является идеал $f((sE)K_1)$. Верны равенства

$$f((sE)K_1) = f(sE)K_2 = (\alpha(s)E)K_2 = \begin{pmatrix} \alpha(s)R & \dots & \alpha(s)R \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha(s)R & \dots & \alpha(s)R \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм f индуцирует изоморфизм фактор-колец

$$K_1/(sE)K_1 \rightarrow K_2/(\alpha(s)E)K_2.$$

Первое фактор-кольцо есть кольцо матриц $M(n, R/sR, 0)$ (см. абзац перед леммой 9.2). Второе фактор-кольцо есть кольцо матриц $M(n, R/\alpha(s)R, \bar{t})$, где $\bar{t} = t + \alpha(s)R$. Таким образом, множителями этого кольца являются смежные классы $t_{ijk} + \alpha(s)R$. Применяя лемму 9.2, получаем, что $\bar{t} = 0$ или $t \in \alpha(s)R$ (надо учесть, что t является одним из t_{ijk}). Следовательно, $t = \alpha(s)x$ для некоторого элемента $x \in R$. Взяв обратный изоморфизм к f , получаем, что $s = \alpha^{-1}(t)y$, $y \in R$. Тогда имеем

$$t = \alpha(s)x = t\alpha(y)x, \quad t(1 - \alpha(y)x) = 0.$$

По условию получаем, что

$$1 - \alpha(y)x \in J(R), \quad 1 - (1 - \alpha(y)x) = \alpha(y)x \in U(R).$$

Следовательно, x — обратимый элемент. Поэтому $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент и α — автоморфизм кольца R .

Теперь предположим, что $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент и α — автоморфизм кольца R . Покажем, что кольца K_1 и K_2 изоморфны. Во-первых, из пункта В раздела 5 вытекает изоморфизм $M(n, R, s) \cong M(n, R, \alpha(s))$. Система множителей второго кольца есть $\{\alpha(s_{ijk}) \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$. Мы можем считать, что α — тождественный автоморфизм. Возьмём множество $\{v_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, где $v_{ijk} = v^m$, если $s_{ijk} = s^m$. Это множество является системой множителей. Поэтому имеем кольцо $M(n, R, vs)$ с системой множителей $\{v_{ijk}s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$. По пункту С раздела 5 имеется изоморфизм $M(n, R, vs) \cong M(n, R, s)$. Из равенства $t = vs$ и соглашения о «подобии» систем множителей следует, что $t_{ijk} = v_{ijk}s_{ijk}$ для всех i, j, k . Поэтому $M(n, R, vs) = M(n, R, t)$ и $M(n, R, s) \cong M(n, R, t)$. $\square$

Заметим, что $Z(R) \subseteq J(R)$, если R — область или локальное кольцо.

Следствие 9.4. Пусть R — коммутативное кольцо, являющееся либо областью, либо локальным кольцом. Кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент, α — автоморфизм кольца R .

В [2, 22] доказаны некоторые теоремы изоморфизма для колец формальных матриц порядка 2 (следствие 9.5 в том числе). Г. Танг и И. Чжоу [24] доказали теорему 9.3 для колец, указанных в разделе 7. В этом случае ограничения на элементы s и t , перечисленные перед теоремой 9.3, не нужны. Эти ограничения также не нужны для $n = 2$ (как умножаются матрицы в таком кольце, указано после предложения 5.2).

Следствие 9.5 [2]. Пусть R — коммутативное кольцо, s и t — некоторые элементы этого кольца, причём хотя бы один из этих элементов не является делителем нуля. Кольца $M(2, R, s)$ и $M(2, R, t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент, α — автоморфизм кольца R .

А. Н. Абызов и Д. Т. Тапкин [1] изучали кольца $M(3, R, \Sigma)$ с симметрическими матрицами S_1, S_2 и S_3 , т. е. $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех $i, j, k = 1, 2, 3$ (см. конец раздела 5 о кольцах матриц порядка 3). Авторы получили ряд результатов по проблеме изоморфизма для таких колец. Кроме того, А. Н. Абызов и Д. Т. Тапкин ввели системы множителей более общего вида (по сравнению со случаем $n = 3$) следующим образом. Пусть $s_1, \dots, s_n$ — произвольные центральные элементы кольца R . Для всех $i, j, k = 1, \dots, n$ положим

$$s_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k; \\ s_j, & \text{если } i, j, k \text{ попарно различны;} \\ s_i s_j, & \text{если } i=k, \text{ но } i \neq j. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — система множителей, поскольку Σ удовлетворяет равенствам (5.2). Следовательно, существует кольцо $M(n, R, \Sigma)$. А. Н. Абызов и Д. Т. Тапкин [1] переносят результаты по проблеме изоморфизма, полученные для колец $M(3, R, \Sigma)$, на вышеупомянутые кольца $M(n, R, \Sigma)$. Класс таких колец $M(n, R, \Sigma)$ содержит кольца Танга—Чжоу из начала раздела 7.

Если s и t — любые (без всяких ограничений) два обратимых элемента, то любые два кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$, указанные в начале раздела, являются изоморфными по предложению 5.2. Поэтому можно считать, что один из этих элементов (например, s) необратим. В этом случае если R — область, то $s^k \neq s^l$ при $k \neq l$, что реализуется в следующих двух примерах. Поэтому в этих примерах предполагается, что соответствующие системы множителей $\{s_{ijk}\}$ и $\{t_{ijk}\}$ удовлетворяют только двум условиям, сформулированным перед теоремой 9.3.

Пример 9.6. Пусть $s, t \in \mathbb{Z}$. Изоморфизм $M(n, \mathbb{Z}, s) \cong M(n, \mathbb{Z}, t)$ существует в точности тогда, когда $t = s$ или $t = -s$.

Доказательство. Прежде всего нужно учесть лемму 9.2 и замечание перед примером 9.6. Утверждение следует из теоремы 9.3, поскольку кольцо $\mathbb{Z}$ имеет только тождественный автоморфизм и $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$. $\square$

Пример 9.7. Пусть R — коммутативная область и i, j — натуральные числа. Если $M(n, R[x], x^i) \cong M(n, R[x], x^j)$ или $M(n, R[[x]], x^i) \cong M(n, R[[x]], x^j)$, то $i = j$.

Доказательство. Пусть V — одно из колец $R[x], R[[x]]$. Допустим, что $i < j$. По теореме 9.3 имеем, что $x^i = v(x)\alpha(x^j) = v(x)\alpha(x)^j$, где $v(x)$ — обратимый элемент кольца V и α — автоморфизм кольца V . Далее, $\alpha(x) = x^k(a_0 + a_1x + \dots)$, где $k \geq 0$ и $a_0 \neq 0$. Тогда $x^i = x^{jk}v(x)(a_0 + a_1x + \dots)^j$. Однако $i < j$. Поэтому $k = 0$ и имеем равенство $x^i = v(x)(a_0 + a_1x + \dots)^j$. Так как $a_0 \neq 0$, то $v(x)$ делится на x , что невозможно. $\square$

10. Определители формальных матриц

В двух последних разделах R — коммутативное кольцо, а K обозначает некоторое кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, т. е. $K = M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Напомним правило умножения матриц в кольце K . Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$. Тогда $c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj}a_{ik}b_{kj}$. Мы будем использовать формулы из раздела 5, связывающие множители s_{ijk} . Для удобства чтения мы частично повторим эти формулы. Прежде всего это основные тождества (5.2):

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl}.$$

Из этих тождеств вытекают следующие:

$$s_{iji} = s_{jij}, \quad s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}.$$

Кроме того, для любых $i, j = 1, \dots, n$ мы определили элемент t_{ij} , равный s_{ijl} для какого-то одного $l = 1, \dots, n$. Справедливы тождества

$$t_{ij} \cdot t_{ji} = s_{iji}, \quad t_{ij} \cdot t_{jk} = t_{ik} \cdot s_{ijk}.$$

Теперь мы введём понятие определителя произвольной матрицы из K и покажем, что такой определитель обладает свойствами, аналогичными основным свойствам обычного определителя матриц из кольца $M(n, R)$. Свойства этого обычного определителя мы используем без дополнительных пояснений.

Определители матриц из кольца K встречаются в [1, 10, 11, 23, 24]. В [16] предложен общий подход к понятию определителя произвольной формальной матрицы порядка 2.

Нас интересует следующий вопрос: какие преобразования над строками и столбцами матриц из K можно совершать? Возьмём произвольную матрицу $A = (a_{ij})$ из K .

А. Строки матрицы A можно умножать на элементы из R . Поэтому можно говорить об общих множителях элементов строк.

Имеется гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}: R_{ij} \otimes_{R_j} R_{jk} \rightarrow R_{ik}, \quad \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk}xy = x \circ y$$

(см. разделы 3 и 5). Символ $\circ$ можно рассматривать как операцию в R , однако её результат зависит от индексов i и j . Чтобы подчеркнуть, что элемент r кольца R используется как элемент из R_{ij} , мы будем добавлять к этому элементу индексы i и j . Именно, полагаем $r_{ij} = r$. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — строки матрицы A . Тогда $r_{ij} \circ A_j$ обозначает вектор-строку $(r_{ij} \circ a_{j1}, \dots, r_{ij} \circ a_{jn})$. На самом деле мы имеем дело с некоторым R -модулем $(R, \dots, R)$.

В. Можно умножить (в смысле операции $\circ$) j -ю строку матрицы A на элемент r_{ij} и прибавить к i -й строке. Такое преобразование кратко записываем как $r_{ij} \circ A_j + A_i$.

С. Можно заменить i -ю строку матрицы A на строку $1_{ij} \circ A_j = (s_{ij1}a_{j1}, \dots, s_{ijn}a_{jn})$ и также заменить j -ю строку матрицы A на строку $1_{ji} \circ A_i = (s_{ji1}a_{i1}, \dots, s_{jin}a_{in})$. Переход от матрицы A к полученной матрице назовём *перестановкой* i -й и j -й строк матрицы A . Аналогичные преобразования могут выполняться над столбцами матрицы A .

Будем говорить, что i -я строка и j -я строка матрицы A *пропорциональны*, если $A_j = r_{ji} \circ A_i$ или $A_i = r_{ij} \circ A_j$ для некоторых элементов $r_{ji}, r_{ij} \in R$.

Пусть η — один из гомоморфизмов

$$M(n, R, \{s_{ijk}\}) \rightarrow M(n, R),$$

определённых перед предложением 5.2. Он действует по правилу $(a_{ij}) \rightarrow (t_{ij}a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl}$ для какого-то фиксированного числа $l = 1, \dots, n$.

Обычный определитель матрицы $C \in M(n, R)$ обозначим через $|C|$. Для любой матрицы A из кольца K обозначим $d(A) = |\eta A|$. Мы называем элемент $d(A)$ *определителем матрицы* A в кольце K , а отображение $d: K \rightarrow R, A \rightarrow d(A)$ — *определителем кольца* K .

Изложим эквивалентный способ введения определителей матриц из K . Сначала вернёмся к операции $\circ$. Если $x_{ij}, x_{jk} \in R$, то по нашей договорённости $x_{ij} \circ x_{jk} = s_{ijk} x_{ij} x_{jk}$. Элементу $x_{ij} x_{jk}$ будем приписывать индексы i, k .

Теперь пусть даны элементы $a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_{k-1} i_k}$ кольца R . Выражение

$$a_{i_1 i_2} \circ a_{i_2 i_3} \circ \dots \circ a_{i_{k-1} i_k} \quad (10.1)$$

имеет точный смысл. Действительно, любая расстановка скобок в (10.1) правомерна. При этом результат не зависит от расстановки скобок, т. е. $\circ$ — ассоциативная операция. Это доказывается индукцией по числу элементов. При $k = 3$ утверждение следует из основных тождеств, указанных в начале раздела.

Выражению (10.1) можно придать значение с помощью тензорного произведения $R_{i_1 i_2} \otimes_R \dots \otimes_R R_{i_{k-1} i_k}$. Гомоморфизмы φ_{ijk} индуцируют гомоморфизм φ этого произведения в R . Тогда

$$a_{i_1 i_2} \circ \dots \circ a_{i_{k-1} i_k} = \varphi(a_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_{k-1} i_k}).$$

Ещё можно поступить следующим образом. Как и раньше, пусть E_{ij} — матричная единица. Тогда $E_{ij} E_{jk} = s_{ijk} E_{ik}$. Если

$$(a_{i_1 i_2} E_{i_1 i_2}) \cdot \dots \cdot (a_{i_{k-1} i_k} E_{i_{k-1} i_k}) = c E_{i_1 i_k}, \quad c \in R,$$

то $a_{i_1 i_2} \circ \dots \circ a_{i_{k-1} i_k} = c$.

Пусть ещё дан элемент $a_{i_k i_1}$. Индексы элементов $a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_{k-1} i_k}, a_{i_k i_1}$ образуют цикл; обозначим его σ . Запишем его, начиная с другого элемента. В таком случае выражение $a_{i_1 i_2} \circ \dots \circ a_{i_{k-1} i_k} \circ a_{i_k i_1}$ будет равно соответствующему выражению для другой записи цикла σ (надо учесть равенство $s_{iji} = s_{jij}$).

Теперь мы можем придать точное значение выражению $a_{i_1 i_1} \circ \dots \circ a_{i_n i_n}$ при условии, что вторые индексы множителей образуют перестановку чисел от 1 до n . Для этого запишем подстановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

в виде произведения независимых циклов $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Если $c_1, \dots, c_m$ — произведения (в смысле операции $\circ$) элементов, индексы которых входят в циклы $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ соответственно, то полагаем

$$a_{i_1 i_1} \circ \dots \circ a_{i_n i_n} = c_1 \cdot \dots \cdot c_m.$$

Мы утверждаем, что

$$d(A) = \sum_{n!} (-1)^q a_{i_1 i_1} \circ \dots \circ a_{i_n i_n},$$

где q — число инверсий в перестановке $i_1, \dots, i_n$. Так как

$$d(A) = |\eta A| = \sum_{n!} (-1)^q t_{i_1 i_1} a_{i_1 i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_n i_n} a_{i_n i_n},$$

то достаточно проверить, что соответствующие слагаемые двух сумм равны между собой. Возьмём два таких слагаемых. Разложим подстановку индексов

множителей этих слагаемых в произведение независимых циклов. Покажем, что произведения элементов, индексы которых составляют какой-то цикл, равны между собой. Возьмём один из циклов $(i_1 i_2 \dots i_k)$. Произведение $a_{i_1 i_2} \circ \dots \circ a_{i_k i_1}$ равно

$$s_{i_1 i_2 i_1} \cdot s_{i_2 i_3 i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_{k-1} i_k i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1}.$$

Соответствующее произведение для определителя ηA есть

$$t_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot t_{i_k i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1}.$$

Индукцией по длине цикла покажем, что

$$t_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot t_{i_k i_1} = s_{i_1 i_2 i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_{k-1} i_k i_1}.$$

Если $k = 2$, то $t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_1} = s_{i_1 i_2 i_1}$. Пусть $k \geq 3$. Имеем $t_{i_{k-1} i_k} t_{i_k i_1} = t_{i_{k-1} i_1} s_{i_{k-1} i_k i_1}$; далее применяем предположение индукции. В итоге получаем соотношение

$$d(A) = \sum_{n!} (-1)^q a_{i_1 i_1} \circ \dots \circ a_{n i_n}.$$

Можно сказать, что для определителя $d(A)$ имеет место *формула полного развёртывания*. Как следствие, получаем, что первое определение определителя $d(A)$ не зависит от выбора гомоморфизма η .

Запишем несколько основных свойств определителя $d(A)$. Каждое из них можно проверить, исходя из первого или второго определения определителя. Мы чаще используем второе определение, чтобы не повторять общеизвестные рассуждения.

1. $d(E) = 1$.

2. Определитель d является полилинейной функцией строк матрицы.

Доказательство. Свойство вытекает из равенства $d(A) = \eta A$ и аналогичного свойства обычного определителя. $\square$

3. Если матрица A' получена из матрицы A перестановкой i -й и j -й строк, то $d(A') = -s_{ij} d(A)$.

Доказательство. Для матрицы A' i -я строка равна $1_{ij} \circ A_j$ и j -я строка равна $1_{ji} \circ A_i$. Для матрицы $\eta(A')$ i -я строка равна $(t_{i1} s_{ij1} a_{j1}, \dots, t_{in} s_{ijn} a_{jn})$. Для каждого k теперь получаем, что

$$t_{ik} s_{ijk} = s_{ikl} s_{ijk} = s_{ijl} s_{jkl} = s_{ijl} t_{jk}.$$

Можно проделать то же самое для j -й строки матрицы $\eta(A')$. Получаем, что

$$|\eta(A')| = s_{ijl} s_{jil} |A''| = s_{iji} |A''|,$$

где матрица A'' получается из ηA перестановкой i -й строки и j -й строки. Поэтому $|A''| = -|\eta A|$. Теперь получаем

$$d(A') = |\eta(A')| = s_{iji} |A''| = -s_{iji} |\eta A| = -s_{iji} d(A). \quad \square$$

4. Если некоторые две строки матрицы A пропорциональны, то $d(A) = 0$.

Доказательство. Пусть j -я строка матрицы A равна $r_{ji} \circ A_i$ для некоторого $r_{ji} \in R$. По свойству 2 можно считать, что эта строка имеет вид $(s_{ji1}a_{i1}, \dots, s_{jinn}a_{in})$. Для матрицы ηA строка с номером i равна $(s_{i1l}a_{i1}, \dots, s_{inl}a_{in})$ для некоторого l , а строка с номером j равна $(s_{j1l}s_{ji1}a_{i1}, \dots, s_{jnl}s_{jinn}a_{in})$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ имеем $s_{jik}s_{jkl} = s_{jil}s_{ikl}$. Теперь ясно, что i -я строка матрицы ηA пропорциональна j -й строке ηA . Следовательно, $d(A) = |\eta A| = 0$. $\square$

5. Если умножить (в смысле операции $\circ$) j -ю строку матрицы A на некоторый элемент $r_{ij} \in R$ и прибавить произведение к i -й строке матрицы A , то определитель полученной матрицы будет равен $d(A)$.

Доказательство. Используются стандартные рассуждения, основанные на свойствах 2 и 4. $\square$

6. Для любых матриц A и B верно равенство $d(AB) = d(A)d(B)$.

Доказательство. Ясно, что верны равенства

$$d(AB) = |\eta(AB)| = |\eta(A)\eta(B)| = |\eta(A)||\eta(B)| = d(A)d(B). \quad \square$$

7. Если $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех i, j, k , то $d(A) = d(A^t)$ для любой матрицы A . Если все элементы s_{ijj} не являются делителями нуля в R , то верно и обратное.

Доказательство. Можно использовать гомоморфизм η или формулу полного развёртывания, это практически одно и то же. Будем использовать первый способ. Верны равенства $d(A) = |\eta A|$ и $d(A^t) = |\eta(A^t)|$. Имеется известное соответствие между слагаемыми определителей $|\eta A|$ и $|\eta(A^t)|$. Возьмём некоторое слагаемое c определителя $|\eta A|$. Пусть τ — подстановка индексов этого слагаемого. Верно равенство $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_m$, где σ_i — попарно независимые циклы (в том числе длины 1). Пусть c_i — произведение множителей, индексы которых входят в σ_i , $i = 1, \dots, m$. Тогда $c = c_1 \dots c_m$.

Пусть слагаемое d определителя $|\eta(A^t)|$ соответствует c . Подстановка его индексов есть $\tau^{-1} = \sigma_m^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$. Запишем соответствующее представление $d = d_1 \dots d_m$ элемента d . Проверим, что $c_1 = d_1, \dots, c_m = d_m$. С этой целью возьмём какой-то цикл $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$. Без ограничения общности можно считать, что $k \geq 2$. Тогда $\sigma^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1)$. Теперь достаточно проверить, что произведение $t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \dots t_{i_{k-1} i_k} t_{i_k i_1}$ равно произведению $t_{i_k i_{k-1}} t_{i_{k-1} i_{k-2}} \dots t_{i_2 i_1} t_{i_1 i_k}$. Эти произведения равны

$$(t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \dots t_{i_{k-2} i_{k-1}} t_{i_{k-1} i_1}) s_{i_{k-1} i_k i_1}$$

и

$$(t_{i_2 i_1} t_{i_3 i_2} \dots t_{i_{k-1} i_{k-2}} t_{i_1 i_{k-1}}) s_{i_1 i_k i_{k-1}}$$

соответственно. Вид выражений в скобках подсказывает, что можно провести индукцию по длине цикла σ . Случай $k = 2$ очевиден.

Теперь предположим, что все множители s_{ijj} не являются делителями нуля и $d(A) = d(A^t)$ для каждой матрицы A . Если какие-то два из трёх индексов i ,

j, k совпадают, то $s_{ikj} = s_{jki}$. Поэтому считаем, что индексы i, j, k попарно различны. Возьмём матрицу

$$A = E + E_{ik} + E_{kj} + E_{ji} - E_{ii} - E_{kk} - E_{jj}.$$

Определитель $d(A)$ равен $1_{ik} \circ 1_{kj} \circ 1_{ji} = s_{ikj}s_{iji}$, а определитель $d(A^t)$ равен $s_{jki}s_{jij}$. Следовательно, $s_{ikj} = s_{jki}$. $\square$

Верна известная формула для определителя с углом, состоящим из нулей.

8. Если матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B и C — матрицы порядков m и $n - m$ соответственно, то $d(A) = d(B)d(C)$.

Доказательство. Дадим некоторые пояснения. Матрица B имеет систему множителей $\{s_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq m\}$, а матрица C имеет систему множителей $\{s_{ijk} \mid m+1 \leq i, j, k \leq n\}$ (все индексы можно уменьшить на m). Для колец $M(m, R, \{s_{ijk}\})$ и $M(n-m, R, \{s_{ijk}\})$ считаем, что соответствующие гомоморфизмы η являются ограничениями гомоморфизма η для кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. Имеется в виду, что матрица B отождествляется с матрицей

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица C отождествляется с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать равенства

$$d(A) = |\eta A| = |\eta B| \cdot |\eta C| = d(B)d(C). \quad \square$$

Если среди множителей s_{ijk} есть делители нуля, то это часто затрудняет работу с матрицами. Определим одно кольцо формальных матриц, которое иногда помогает избежать этих трудностей. В одном случае подобное кольцо введено в [24] (см. ниже).

Зафиксируем коммутативное кольцо R и целое число $n \geq 2$. Пусть $X = \{x_{ijk}\}$ — множество из $n(n^2 - 1)$ переменных, где $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$, $j \neq k$. Пусть $R[X]$ — кольцо многочленов от переменных x_{ijk} с коэффициентами в кольце R .

Пусть I — идеал кольца $R[X]$, порождённый всеми разностями вида $x_{ijk}x_{ikl} - x_{ijl}x_{jkl}$. Обозначим через $\overline{R[X]}$ фактор-кольцо $R[X]/I$. Отождествим элементы кольца R с их образами в $\overline{R[X]}$. Для упрощения записи смежный класс $x_{ijk} + I$ обозначим через x_{ijk} . В дальнейшем будет важно то, что элементы x_{ijk} не являются делителями нуля в $\overline{R[X]}$.

Полагаем $x_{iik} = 1 = x_{ikk}$ для всех $i, k = 1, \dots, n$. В кольце $\overline{R[X]}$ верны равенства $x_{ijk}x_{ikl} = x_{ijl}x_{jkl}$ для всех значений индексов. Поэтому существует кольцо формальных матриц $M(n, \overline{R[X]}, \{x_{ijk}\})$. Обозначим это кольцо через $M(n, \overline{R[X]}, X)$. Имеется известный гомоморфизм

$$\eta: M(n, \overline{R[X]}, X) \rightarrow M(n, \overline{R[X]})$$

(см. абзац перед предложением 5.2). Кроме того, ранее был введён определитель $d: M(n, \overline{R[X]}, X) \rightarrow \overline{R[X]}$. В определённом смысле кольцо $M(n, \overline{R[X]}, X)$ и определитель d являются коуниверсальным объектом для колец формальных матриц порядка n над R и их определителей. Придадим точный смысл этой фразе.

Пусть дано конкретное кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. В таком случае появляются несколько гомоморфизмов, которые мы называем *гомоморфизмами подстановки* и обозначаем одной буквой θ . Каждый такой гомоморфизм заменяет символ x_{ijk} на элемент s_{ijk} . Прежде всего это гомоморфизм $\theta: R[X] \rightarrow R$. Поскольку R вкладывается в $R[X]$, то θ расщепляется, т. е. $R[X] = R \oplus \text{Ker}(\theta)$.

Из основных тождеств (5.2) вытекает включение $I \subseteq \text{Ker}(\theta)$. После отождествления можно считать, что $\overline{R[X]} = R \oplus (\text{Ker}(\theta)/I)$. Кроме того, θ индуцирует гомоморфизм $\overline{R[X]} \rightarrow R$, обозначим его той же буквой θ .

Более общим образом, имеется расщепляющийся гомоморфизм подстановки $\theta: M(n, \overline{R[X]}) \rightarrow M(n, R)$, при котором θ применяется к каждому элементу матрицы, и также имеется разложение $M(n, \overline{R[X]}) = M(n, R) \oplus \text{Ker}(\theta)$. Далее, θ индуцирует гомоморфизм подстановки

$$\theta: M(n, \overline{R[X]}) \rightarrow M(n, R)$$

и разложение

$$M(n, \overline{R[X]}) = M(n, R) \oplus (\text{Ker}(\theta)/M(n, I)). \quad (10.2)$$

Последний гомоморфизм θ будет также гомоморфизмом колец формальных матриц

$$M(n, \overline{R[X]}, X) \rightarrow M(n, R, \{s_{ijk}\}).$$

Замечания.

1. Разложение (10.2) является только аддитивным.
2. Гомоморфизм θ сюръективен. Более точно, каждая матрица $(a_{ij}) \in M(n, R)$ является образом матрицы (a_{ij}) из $M(n, \overline{R[X]})$ (мы отождествляем матрицы (a_{ij}) и $(a_{ij} + I)$).

Теперь можно записать две коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{\eta} & M(n, \overline{R[X]}) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}) & \xrightarrow{\det} & \overline{R[X]} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R) & \xrightarrow{\det} & R \end{array},$$

где $\det$ — обычный определитель. Коммутативность второй диаграммы непосредственно проверяется с помощью формулы полного развёртывания определителя. Также имеем коммутативную диаграмму, которая соединяет две предыдущие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{d} & \overline{R[X]} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R \end{array} .$$

Мы имели в виду существование последней диаграммы, когда говорили, что пара $(M(n, \overline{R[X]}, X), d)$ коуниверсальна.

В одном важном случае можно упростить конструкцию кольца $M(n, \overline{R[X]}, X)$. Рассмотрим такие кольца формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что каждый множитель s_{ijk} является целой неотрицательной степенью некоторого ненулевого элемента s . Обозначим через $M(n, R, s)$ некоторое такое кольцо. В разделах 7 и 8 мы подробно изучали такие кольца $M(n, R, s)$, что любой множитель s_{ijk} равен 1 или s . В разделе 9 мы считали, что $s_{ijk} = s^m$, $m \geq 1$, при $i \neq j$ и $j \neq k$.

Относительно элемента s также предположим, что $s^k \neq s^l$ для любых различных неотрицательных k и l . Пусть x — переменная. Для любых i, j, k обозначим $x_{ijk} = x^m$ при условии, что $s_{ijk} = s^m$. Множество $\{x_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ является системой множителей в кольце многочленов $R[x]$. Следовательно, имеется кольцо формальных матриц $M(n, R[x], \{x_{ijk}\})$; обозначим его $M(n, R[x], x)$. Три записанные выше диаграммы превращаются в диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M(n, R[x], x) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R[x]) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R, s) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R) \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} M(n, R[x], x) & \xrightarrow{d} & R[x] \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R, s) & \xrightarrow{d} & R \end{array} .$$

В этих диаграммах d — определитель, θ — гомоморфизм подстановки, который заменяет букву x на букву s . Г. Танг и И. Чжоу определили и использовали кольцо $M(n, R[x], x)$ в [24].

11. Некоторые теоремы о формальных матрицах

Мы сохраняем все обозначения предыдущего раздела. По-прежнему считаем, что дано некоторое кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, где R — коммутативное кольцо. Покажем, что верны аналоги теоремы Гамильтона—Кэли и одного известного критерия обратимости матрицы.

Напомним, что $t_{ij} = s_{ijl}$ для некоторого фиксированного l . Всё время используем гомоморфизм

$$\eta: M(n, R, \{s_{ijk}\}) \rightarrow M(n, R), \quad (a_{ij}) \rightarrow (t_{ij}a_{ij})$$

(см. раздел 5).

Пусть $A = (a_{ij})$ — некоторая матрица. Обозначим через $\eta(A)^*$ присоединённую матрицу для ηA . Тогда

$$\eta(A)\eta(A)^* = \eta(A)^*\eta(A) = |\eta(A)|E.$$

Далее запишем $\eta(A)^* = (A'_{ji})$, где A'_{ji} — алгебраическое дополнение элемента $t_{ji}a_{ji}$. Напомним, что A'_{ji} — определитель матрицы, которая получается из матрицы ηA заменой элемента $t_{ji}a_{ji}$ на 1 и заменой всех остальных элементов j -й строки и i -го столбца на 0.

Временно считаем, что все элементы s_{ijk} — неделители нуля. Сначала мы также предполагаем, что $n \geq 3$. Возьмём произвольное слагаемое определителя A'_{ji} , где $j \neq i$. Это слагаемое обязательно содержит множитель $t_{ik}a_{ik}t_{kj}a_{kj}$ для некоторого $k \neq i, j$. Так как $t_{ik}t_{kj} = s_{ikj}t_{ij}$, то можно записать $A'_{ji} = t_{ji}A_{ji}$, где A_{ji} — вполне определённый элемент кольца R , получаемый из A'_{ji} каноническим способом. Если $i = j$, то $t_{ij} = 1$ и $A_{ji} = A'_{ji}$. Для $n = 2$ существование такого элемента t_{ij} доказывается непосредственно.

Составим матрицу $A^* = (A_{ji})$. Для неё $\eta(A^*) = \eta(A)^*$. Далее,

$$\eta(AA^*) = \eta(A)\eta(A^*) = \eta(A)\eta(A)^* = |\eta(A)| \cdot E = d(A)E = \eta(d(A)E);$$

аналогично имеем

$$\eta(A^*A) = \eta(d(A)E).$$

Так как все s_{ijk} — неделители нуля, то $\text{Ker}(\eta) = 0$ по предложению 5.2. Следовательно, $AA^* = A^*A = d(A)E$.

Как построить матрицу A^* , если не все элементы s_{ijk} являются неделителями нуля? Воспользуемся коммутативной диаграммой из раздела 10:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{d_X} & \overline{R[X]} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R \end{array} \quad (11.1)$$

(в первой строке диаграммы мы поставили d_X вместо d). Так как все s_{ijk} — неделители нуля, то из изложенного следует, что имеется такая однозначно определённая матрица $A_X^* \in M(n, \overline{R[X]}, X)$, что $AA_X^* = A_X^*A = d_X(A)E$. Отсюда вытекает, что

$$\theta(A)\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)\theta(A) = \theta(d_X(A)E)$$

или

$$A\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)A = \theta(d_X(A)E).$$

Из диаграммы вытекает, что $\theta d_X(A) = d\theta(A) = d(A)$, откуда получаем, что $\theta(d_X(A)E) = d(A)E$. В итоге имеем равенства

$$A\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)A = d(A)E.$$

Остаётся обозначить $A^* = \theta(A_X^*)$. Если все элементы s_{ijk} являются неделителями нуля, то эта матрица A^* совпадает с матрицей A^* , определённой в тексте перед диаграммой. Если сравнить похожие процедуры построения матрицы A^* перед диаграммой (11.1) и матрицы A_X^* , то ясно, что $A^* = \theta(A_X^*)$.

Мы завершаем первую часть раздела 11 следующими результатами.

Теорема 11.1. Пусть дано кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, и пусть A — матрица из этого кольца. Тогда

- 1) $AA^* = AA^* = d(A)E$;
- 2) матрица A обратима в точности тогда, когда $d(A)$ — обратимый элемент кольца A ;
- 3) если A — обратимая матрица, то $A^{-1} = d(A)^{-1}A^*$.

Для определителя $d(A)$ верны аналоги разложения определителя по элементам строки и свойство ортогональности строк и алгебраических дополнений. Имеются в виду равенства

$$\begin{aligned} a_{i1} \circ A_{i1} + a_{i2} \circ A_{i2} + \dots + a_{in} \circ A_{in} &= d(A), \\ a_{i1} \circ A_{j1} + a_{i2} \circ A_{j2} + \dots + a_{in} \circ A_{jn} &= 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

вытекающие из равенства $AA^* = d(A)E$.

Известная теорема Гамильтона—Кэли утверждает, что каждая матрица является корнем своего характеристического многочлена. Распространим эту теорему на матрицы из кольца матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Пусть x — переменная. Имеем кольцо формальных матриц $M(n, R[x], \{s_{ijk}\})$ и гомоморфизм $\eta: M(n, R[x], \{s_{ijk}\}) \rightarrow M(n, R[x])$ из предложения 5.2. Этот гомоморфизм продолжает гомоморфизм $\eta: M(n, R, \{s_{ijk}\}) \rightarrow M(n, R)$.

Теперь возьмём какой-нибудь символ λ . Пусть A — матрица из кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. С помощью равенства $f(\lambda) = d(\lambda E - A)$ определим характеристический многочлен $f(\lambda)$ матрицы A (относительно кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$), где $d(\lambda E - A)$ — определитель матрицы $\lambda E - A$ в кольце $M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\})$. Так как

$$d(\lambda E - A) = |\eta(\lambda E - A)| = |\lambda E - \eta A|,$$

то $f(\lambda)$ является характеристическим многочленом матрицы ηA в кольце $M(n, R)$. По теореме Гамильтона—Кэли $f(\eta A) = 0$. Используя равенство

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad a_i \in R,$$

получаем, что $\eta(fA) = f(\eta A) = 0$. Если η — инъективное отображение (т. е. все s_{ijk} — неделители нуля), то $f(A) = 0$, что и требуется.

Если отображение η не является инъективным, то снова рассмотрим кольцо $M(n, \overline{R[X]}, X)$ из раздела 10; для этого кольца соответствующий гомоморфизм η

инъективен. Существует кольцо $M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X)$. Гомоморфизм $\theta: \overline{R[X]} \rightarrow R$ из раздела 10 индуцирует гомоморфизм $\theta: (\overline{R[X]})[\lambda] \rightarrow R[\lambda]$, который применяет θ к коэффициентам многочленов. Наконец, последний гомоморфизм θ индуцирует гомоморфизм

$$\theta: M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X) \rightarrow M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\}).$$

Также имеется следующая коммутативная диаграмма, аналогичная диаграмме из раздела 10:

$$\begin{array}{ccc} M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X) & \xrightarrow{d} & (\overline{R[X]})[\lambda] \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R[\lambda] \end{array} \quad . \quad (11.2)$$

Вернёмся к характеристическому многочлену $f(\lambda)$ матрицы $A = (a_{ij})$. Возьмём матрицу $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ из кольца $M(n, \overline{R[X]}, X)$ со свойством $\theta(\bar{A}) = A$, где θ взято из диаграммы (11.1). Пусть $F(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $\bar{A}$, т. е. $F(\lambda) = d(\lambda E - \bar{A})$, где $\lambda E - \bar{A} \in M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X)$. Тогда $\theta(\lambda E - \bar{A}) = \lambda E - A$, где θ взято из диаграммы (11.2). Из диаграммы (11.2) вытекает, что

$$\theta d(\lambda E - \bar{A}) = d\theta(\lambda E - \bar{A}) = d(\lambda E - A).$$

Иными словами, $\theta(F(\lambda)) = f(\lambda)$, где

$$F(\lambda) \in (\overline{R[X]})[\lambda], \quad f(\lambda) \in R[\lambda], \quad \theta: (\overline{R[X]})[\lambda] \rightarrow R[\lambda].$$

Представим многочлен $F(\lambda)$ подробнее:

$$F(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \lambda + \bar{a}_n, \quad \bar{a}_i \in \overline{R[X]}.$$

Имеем

$$f(\lambda) = \theta(F(\lambda)) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Теперь из доказанного выше следует, что

$$F(\bar{A}) = \bar{A}^n + \bar{a}_1 \bar{A}^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \bar{A} + \bar{a}_n E = 0.$$

Поэтому

$$0 = \theta(F(\bar{A})) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E = f(A).$$

Мы доказали следующий результат.

Теорема 11.2. Если A — матрица из кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ и $f(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A , то $f(A) = 0$.

Г. Танг и И. Чжоу [24] доказали теорему 11.2 для своих колец формальных матриц (см. начало раздела 7).

В заключение рассмотрим свойство единственности определителя. Для обычного определителя матрицы некоторые комбинации свойств 1—8 раздела 10 являются характеристическими. Мы имеем в виду, что если некоторое отображение $f: M(n, R) \rightarrow R$ обладает некоторым набором из свойств 1—8, то f совпадает с определителем. Покажем, что при некоторых ограничениях для введённого в разделе 10 определителя свойства 1—3 являются характеристическими в указанном смысле.

Теорема 11.3. Пусть $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц, где кольцо R не имеет элементов аддитивного порядка 2 и все множители s_{ijk} не являются делителями нуля. Кроме того, пусть $f: M(n, R, \{s_{ijk}\}) \rightarrow R$ — отображение, для которого верны следующие свойства:

- 1) $f(E) = 1$;
- 2) f — полилинейная функция строк матрицы;
- 3) если поменять местами строки с номерами i и j в произвольной матрице $A \in M(n, R, \{s_{ijk}\})$ и обозначить полученную матрицу через A' , то $f(A') = -s_{iji}f(A)$.

Тогда f совпадает с определителем d кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица. Используя несколько раз полилинейность функции f , представим элемент $f(A)$ в виде суммы элементов вида $f(C)$, где C — матрица, i -я строка которой содержит элемент a_{ij} на позиции (i, j) , а остальные элементы равны нулю. Далее из каждой строки матрицы C вынесем этот элемент a_{ij} за знак отображения f . Полученную матрицу обозначим через D (в каждой строке матрицы D не более чем в одной позиции стоит 1, а на остальных позициях стоят нули). Учитывая 2), получаем, что $f(C) = a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} f(D)$.

Покажем, что если среди индексов $j_1, \dots, j_n$ есть равные, то $f(D) = 0$. Например, пусть 1 стоит в позициях (i, k) и (j, k) , $i \neq j$. В матрице D переставим строки с номерами i и j ; обозначим полученную матрицу через D' . По 3) $f(D') = -s_{iji}f(D)$. Из 2) вытекает, что

$$f(D') = s_{ijk}s_{jik}f(D) = s_{iji}f(D).$$

Поэтому имеем равенства

$$s_{iji}f(D) = -s_{iji}f(D), \quad 2s_{iji}f(D) = 0, \quad 2f(D) = 0, \quad f(D) = 0.$$

Итак, остались только такие элементы из $f(C)$, что индексы элементов $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}$ образуют подстановку. Кроме того, если некоторая строка матрицы D состоит из нулей, то $f(D) = 0$ по свойству 2). Поэтому мы считаем, что каждая строка любой матрицы D содержит ровно один элемент, равный 1, а остальные элементы равны нулю; это означает, что D — матрица перестановки. Пусть τ — подстановка индексов ненулевых элементов матрицы D . Запишем $\tau = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m$, где σ_i — попарно независимые циклы. Обозначим один из этих циклов через σ ; пусть $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$. Переставляя строки с номерами

$i_1, i_2, \dots, i_k$, сделаем так, что единицы из этих строк окажутся на главной диагонали. Как при этом изменится элемент $f(D)$? Мы выясним это с помощью индукции по длине цикла σ .

Для $m = 2$ и $m = 3$ предположение индукции проверяется непосредственно. Предположим, что для любого цикла σ длины m , где $3 \leq m < k$, верно равенство

$$f(D) = (-1)^{m-1} s_{i_1 i_2 i_3} s_{i_1 i_3 i_4} \cdot \dots \cdot s_{i_1 i_{m-1} i_m} s_{i_1 i_m i_1} f(V).$$

Матрица V отличается от D тем, что строки матрицы V с номерами $i_1, \dots, i_m$ имеют 1 на главной диагонали.

Пусть теперь σ имеет длину k . Переставим строки матрицы D с номерами i_1 и i_2 . Обозначим полученную матрицу через D' . Матрицы D и D' связаны соотношением $f(D') = -s_{i_1 i_2 i_1} f(D)$. В матрице D' вынесем за знак f элемент $s_{i_1 i_2 i_3}$ из строки i_1 и элемент $s_{i_2 i_1 i_3}$ из строки i_2 . Обозначим полученную матрицу через D'' . Имеет место равенство $f(D') = s_{i_2 i_1 i_2} s_{i_1 i_2 i_3} f(D'')$. Из двух последних равенств вытекает, что $f(D) = -s_{i_1 i_2 i_3} f(D'')$. На позиции (i_2, i_2) матрицы D'' стоит 1, а индексы элементов (т. е. единиц) из оставшихся строк образуют цикл $(i_1 i_3 \dots i_k)$ длины $k-1$. По предположению индукции получаем равенство

$$f(D'') = (-1)^{k-2} s_{i_1 i_3 i_4} s_{i_1 i_4 i_5} \cdot \dots \cdot s_{i_1 i_{k-1} i_k} s_{i_1 i_k i_1} f(W),$$

где W — матрица, у которой в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ на главной диагонали стоит 1, а остальные строки те же, что у матрицы D . В итоге получаем равенство

$$f(D) = (-1)^{k-1} s_{i_1 i_2 i_3} s_{i_1 i_3 i_4} \cdot \dots \cdot s_{i_1 i_{k-1} i_k} s_{i_1 i_k i_1} f(W).$$

Так как функция определителя d обладает свойствами 1)–3), то аналогичное равенство верно для d .

Далее мы поступаем аналогично с остальными циклами σ_i из разложения подстановки τ . В конечном итоге мы получим, что соответствующая матрица W совпадает с E . Поэтому $f(W) = d(W)$. Окончательно получаем, что

$$f(D) = d(D), \quad f(C) = d(C), \quad f(A) = d(A). \quad \square$$

Замечания.

1. Матрица $A = (a_{ij})$, не являющаяся обратимой в кольце $M(n, R)$, может быть обратимой в кольце $M(n, R, \Sigma)$, где Σ — некоторая система множителей. Сформулируем задачу: охарактеризовать матрицы A , обратимые в некотором кольце $M(n, R, \Sigma)$. Учитывая существование гомоморфизма

$$\eta: M(n, R, \Sigma) \rightarrow M(n, R)$$

из раздела 5, можно придать иную форму этой задаче. Для каких матриц A и систем множителей $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ матрица $A' = (s_{ijl} a_{ij})$ обратима в кольце $M(n, R)$ для некоторого числа $l = 1, 2, \dots, n$?

2. Можно определить и изучать перманент матрицы A в кольце $M(n, R, \Sigma)$. Стоит отметить, что для различных задач об определителе и перманенте есть возможность для вариаций, связанная с существованием многих систем множителей Σ . Например, в случае известной проблемы Поля о конвертации перманента и определителя можно требовать, чтобы перманент матрицы A в кольце $M(n, R, \Sigma)$ совпадал с определителем какой-то другой матрицы в кольце $M(n, R, \Sigma')$ для некоторой (в общем случае другой) системы множителей Σ' .
3. Пусть F — поле и $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей $s_{ijk} \in F$. Если все s_{ijk} не равны нулю, то по предложению 5.2 имеется изоморфизм $M(n, F, \Sigma) \cong M(n, F)$. Этот случай не очень интересен. Если же некоторые множители s_{ijk} равны нулю, то свойства кольца $M(n, F, \Sigma)$ могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n, F)$. Выделим частный случай, когда каждый множитель s_{ijk} равен 1 или 0. Для соответствующих колец $M(n, F, \Sigma)$ можно исследовать проблемы I—III, сформулированные в разделе 5. Кроме того, можно рассматривать представленные выше вопросы 1 и 2.

Литература

- [1] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — Принято к печати.
- [2] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — Р. 456—463.
- [3] Крылов П. А. О группе K_0 кольца обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 3. — Р. 370—385.
- [4] Крылов П. А. Вычисление группы K_1 кольца обобщённых матриц // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55, № 4. — С. 783—789.
- [5] Туганбаев А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
- [6] Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian Rings and Related Topics. — London: World Scientific, 2009.
- [7] Climent J.-J., Navarro P. R., Tortosa L. On the arithmetic of the endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // Appl. Algebra Eng. Comm. Comput. — 2011. — Vol. 22, no. 2. — P. 91—108.
- [8] Cohen M. Morita context related to finite automorphism groups of rings // Pacific J. Math. — 1982. — Vol. 98. — P. 37—54.
- [9] Fossum R. M., Griffith P. A., Reiten I. Trivial extensions of Abelian categories // Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Categories with Applications to Ring Theory. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 456). — P. 1—122.
- [10] Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A. Quasipolarity of generalized matrix rings. — 2013. — [arXiv:1303.3173\[math.RA\]](#).
- [11] Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A. Strong J-cleanness of formal matrix rings. — 2013. — [arXiv:1308.4105v1\[math.RA\]](#).

- [12] Horn R. A., Johnson Ch. R. *Matrix Analysis*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.
- [13] Huang Q., Tang G. Quasipolar property of trivial Morita context // *Int. J. Pure Appl. Math.* — 2014. — Vol. 90, no. 4. — P. 423–431.
- [14] Huang Q., Tang G., Zhou Y. Quasipolar property of generalized matrix rings // *Commun. Algebra*. — 2014. — Vol. 42, no. 9. — P. 3883–3894.
- [15] Kim K. H. *Boolean Matrix Theory and Applications*. — New York: Marcel Dekker, 1982.
- [16] Krylov P. A. Determinants of generalized matrices of order 2 // *J. Math. Sci.* — To appear.
- [17] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.
- [18] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. *Modules over Discrete Valuation Domains*. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 43).
- [19] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Modules over formal matrix rings // *J. Math. Sci.* — 2010. — Vol. 171, no. 2. — P. 248–295.
- [20] Palmer I. The global homological dimension of semi-trivial extensions of rings // *Math. Scand.* — 1975. — Vol. 37. — P. 223–256.
- [21] Sands A. D. Radicals and Morita contexts // *J. Algebra*. — 1973. — Vol. 24. — P. 335–345.
- [22] Tang G., Li Ch., Zhou Y. Study of Morita contexts // *Commun. Algebra*. — 2014. — Vol. 42. — P. 1668–1681.
- [23] Tang G., Zhou Y. Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // *Linear Algebra Appl.* — 2012. — Vol. 437. — P. 2546–2559.
- [24] Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings // *Linear Algebra Appl.* — 2013. — Vol. 438, no. 12. — P. 4672–4688.
- [25] Tuganbaev A. *Semidistributive Modules and Rings*. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

