Изоморфизмы и автоморфизмы алгебр матриц над решётками

В. Д. ШМАТКОВ
Рязанский государственный радиотехнический университет
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.56+512.643

Ключевые слова: матрицы, решётки, автоморфизмы.

Аннотация

В работе рассматривается мультипликативный группоид матриц с элементами в решётке с 0 и 1. Примерами таких группоидов являются полугруппы бинарных отношений, полугруппы минимаксных (нечётких) отношений. Показано, что каждый автоморфизм группоида является композицией внутреннего автоморфизма и автоморфизма, определяемого автоморфизмом решётки. Несмотря на то что в общем случае группоид не является ассоциативным, для него выполняется UA-свойство: каждый мультипликативный автоморфизм является аддитивным автоморфизмом. Ранее выполнение UA-свойства рассматривалось в основном для ассоциативных колец и полуколец. Описаны обратимые матрицы, определяющие внутренние автоморфизмы.

Abstract

V. D. Shmatkov, Isomorphisms and automorphisms of matrix algebras over lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 195—204.

In this paper, we consider the multiplicative groupoid of matrices with elements in a lattice with 0 and 1. Examples of such groupoids are the semigroup of binary relations and semigroups of minimax (fuzzy) relations. It is shown that every automorphism of a groupoid is the composition of an inner automorphism and the automorphism defined by an automorphism of the lattice. Despite the fact that, in general, the groupoid is not associative, it satisfies the UA-property: every multiplicative automorphism is an additive automorphism. Earlier, the realization of the UA-property has been considered mainly for associative rings and semirings. We describe the invertible matrices that define inner automorphisms.

1. Основные определения

Пусть L — решётка с 0 и 1. Обозначим через $\mathrm{M}_n(L)$ множество матриц размера $n\times n$, $n\in\mathbb{N}$, таких что $A(i,j)\in L$ для $A\in M_n(L)$. По аналогии с линейной алгеброй определим умножение матриц, сложение матриц и умножение матриц

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 1, с. 195—204.
© 2014 *Издательский дом «Открытые системы»*

на скаляры из L: для $A, B \in M_n(L)$, $\alpha \in L$

$$AB(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(i,j) \wedge B(k,j)\big),$$

$$(A+B)(i,j) = A(i,j) \vee B(i,j), \quad (\alpha A)(i,j) = \alpha \wedge A(i,j).$$

Множество $M_n(L)$ замкнуто относительно операций умножения, сложения и умножения на скаляры. С определёнными выше операциями оно образует алгебру $M_n(L)$. Вместе с операцией умножения множество $M_n(L)$ образует группоид $PM_n(L)$.

Пример 1.1. Если $L = \{0,1\}$ — двухэлементная решётка, то $M_n(L)$ — алгебра бинарных отношений (см. [2]).

Пример 1.2. Если $L = [0,1]$ — интервал действительных чисел и $x \wedge y = \min(x,y)$, $x \vee y = \max(x,y)$ для $x, y \in L$, то $M_n(L)$ — минимаксная (нечёткая) алгебра (см. [5]).

2. Свойства алгебр матриц над решётками

Назовём центром $M_n(L)$ множество

$$Z\big(M_n(L)\big) = \{A \in M_n(L) \mid AB = BA \text{для любого } B \in M_n(L)\}.$$

Пусть $E \in M_n(L)$ — единичная матрица: $E(i,j) = 0$, если $i \neq j$, $E(i,i) = 1$. Для $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ определим $E_{i,j} \in M_n(L)$: $E_{i,j}(i,j) = 1$, $E_{i,j}(k,m) = 0$ в остальных случаях. Заметим, что $E_i = E_{i,j}$, если $i = j$.

Предложение 2.1. $Z\big(M_n(L)\big) = \{\alpha E \mid \alpha \in L\}$.

Доказательство. Так как для любого $\alpha \in L$

$$(\alpha E)A(i,j) = A(\alpha E)(i,j) = \alpha \wedge A(i,j),$$

то $\alpha E \in Z\big(M_n(L)\big)$.

Пусть $A \in Z\big(M_n(L)\big)$. Предположим, что $A(i,j) \neq 0$, $i \neq j$. Тогда $(AE_j)(i,j) = A(i,j)$ и $(E_jA)(i,j) = 0$ — противоречие с тем, что $A \in Z\big(M_n(L)\big)$. Поэтому если $i \neq j$, то $A(i,j) = 0$.

Так как

$$A(i,i) = AE_{i,j}(i,j) = E_{i,j}A(i,j) = E_{i,j}A(i,j) = A(j,j),$$

то $A = \alpha E$ для $\alpha = A(i,i) = A(j,j)$. □

Определим $0 \in M_n(L)$: $0(i,j) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Для $A \in M_n(L)$ определим

$$A_{nn}(A) = \{B \in M_n(L) \mid AB = 0 \text{ и } BA = 0\}.$$

Определим множество диагональных матриц

$$D\big(M_n(L)\big) = \{A \in M_n(L) \mid A(i,j) = 0, \text{ если } i \neq j\}.$$

Предложение 2.2. *Пусть $A \in M_n(L)$ и для любой $B \in M_n(L)$ из того, что $A_{nn}(A) \subseteq A_{nn}(B)$, следует, что $BB = B$. Тогда $A \in D\big(M_n(L)\big)$.*

Доказательство. Пусть $A \in M_n(L)$ и для любой $B \in M_n(L)$ из того, что $A_{nn} \subseteq A_{nn}(B)$, следует, что $BB = B$. Предположим, что $i \neq j$ и $A(i,j) \neq 0$.

Рассмотрим $B = A(i,j)E_{i,j}$. Если $C \in M_n(L)$ и $AC = 0$, то $AC(i,j) = 0$ и $A(i,j)E_{i,j} = 0$. Если $C \in M_n(L)$ и $CA = 0$, то $CA(i,j) = 0$ и $CA(i,j)E_{i,j} = 0$. Следовательно, $A_{nn}(A) \subseteq A_{nn}(B)$. Но если $i \neq j$, то $BB = 0 \neq B$ — противоречие. Поэтому если $i \neq j$, то $A(i,j) = 0$ и $A \in D\big(M_n(L)\big)$. □

Центром решётки L с 0 и 1 будем называть множество элементов $e \in L$, таких что $e = (1,0)$ при некотором представлении L в виде прямого произведения двух множителей $L = L_1L_2$. Обозначим центр решётки L через $C(L)$. Легко проверить непосредственно (см. также [2, п. 8, 9]) следующее утверждение: для любой решётки L с 0 и 1 множество $C(L)$ — булева подрешётка решётки L.

Обозначим через $M_n\big(C(L)\big)$ множество всех $A \in M_n(L)$, таких что $A(i,j) \in C(L)$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

Предложение 2.3.

1. *$x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ для любых $x \in C(L)$, $a, b \in L$.*
2. *Для $a_1, \ldots, a_n, b \in L$ и $x_1, \ldots, x_n \in C(L)$, таких что если $i \neq j$, то $x_i \wedge x_j = 0$, справедливо $(a_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n) \wedge b = (a_1 \wedge x_1 \wedge b) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n \wedge b)$.*

Доказательство. Представив $x = (1,0)$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, легко проверить, что $x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ (см. также [4, гл. 3, § 2]).

Из [4, гл. 3, § 4, следствие 3] следует, что существует такое представление L в виде прямого произведения $L = L_1 \times \ldots \times L_m$, что все $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n \in C(L)$ можно представить в виде $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{im})$, где все x_{ij} единицы или нули, т. е. для любого k существует не более одного i, такого что $x_{ik} = 1$. Если такой i с x_{ik} существует, то k-я координата элементов $\big((a_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n)\big) \wedge b$ и $\big((a_1 \wedge x_1 \wedge b) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n \wedge b)\big)$ в представлении $L = L_1 \times \ldots \times L_m$ равна $a_{ik} = b_k$, где $a_{i,k}$, b_k — k-е координаты элементов a_i, b, или равна 0, если $x_{ik} = 0$ для всех i. Поэтому $\big((a_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n)\big) \wedge b = \big((a_1 \wedge x_1 \wedge b) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n \wedge b)\big)$. □

Обозначим через $\mathrm{Int}\big((L)\big)$ множество всех $A \in M_n(L)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $A \in M_n\big(C(L)\big)$;
2) $\bigvee\limits_{j=1}^{n} A(i,j) = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$;
3) $\bigvee\limits_{i=1}^{n} A(i,j) = 1$ для любого $j = 1, \ldots, n$;
4) для любого $i = 1, \ldots, n$ если $j_1 \neq j_2$, то $A(i,j_1) \wedge A(i,j_2) = 0$;
5) для любого $j = 1, \ldots, n$ если $i_1 \neq i_2$, то $A(i_1,j) \wedge A(i_2,j) = 0$.

Для матрицы A транспонированная матрица A^{T} — это матрица, у которой $A^{\mathrm{T}}(i,j) = A(j,i)$.

Предложение 2.4. *Для* $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, $B, C \in M_n(L)$

1) $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E$;
2) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$;
3) $A(BC) = (AB)C$, $(BC)A = B(CA)$;
4) $(BA)C = B(AC)$;
5) *отображение* $\varphi\colon M_n(L) \to M_n(L)$, $\varphi(B) = (AB)A^{\mathrm{T}}$ *является автоморфизмом* $M_n(L)$ *относительно операций сложения и умножения.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Из свойства 5) определения $\mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ следует, что если $i \neq j$, то

$$AA^{\mathrm{T}}(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(i,k) \wedge A^{\mathrm{T}}(k,j)\big) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(i,k) \wedge A(j,k)\big) = 0.$$

Из свойства 4) определения $\mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ следует, что если $i \neq j$, то

$$A^{\mathrm{T}}A(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A^{\mathrm{T}}(i,k) \wedge A(k,j)\big) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(k,i) \wedge A(k,j)\big) = 0.$$

Из свойства 2) определения $\mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ следует, что

$$AA^{\mathrm{T}}(i,i) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(i,k) \wedge A^{\mathrm{T}}(k,i)\big) = \bigvee_{k=1}^{n} \big(A(i,k) \wedge A(i,k)\big) = 1.$$

Из свойства 3) определения $\mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ следует, что

$$A^{\mathrm{T}}A(i,i) = \bigvee_{k=1}^{n} A^{\mathrm{T}}(i,k) \wedge A(k,i) = \bigvee_{k=1}^{n} A(k,i) \wedge A(k,i) = 1.$$

Докажем утверждение 2). Учитывая пункт 1 предложения 2.3, имеем

$$A(B+C)(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} \Big(A(i,k) \wedge \big(B(k,j) \vee C(k,j)\big)\Big) = \\ = \bigvee_{k=1}^{n} \Big(\big(A(i,k) \wedge B(k,j)\big) \vee \big(A(i,k) \wedge C(k,j)\big)\Big) = (AB + AC)(i,j).$$

Аналогично показывается, что $(B+C)A = BA + CA$.

Докажем утверждение 3). Используя пункты 1, 2 предложения 2.3, имеем

$$(BA)C(i,j) = \bigvee_{s=1}^{n} \left(\bigvee_{k=1}^{n} B(i,k) \wedge A(k,s)\right) \wedge C(s,j) = \\ = \bigvee_{s=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{n} B(i,k) \wedge A(k,s) \wedge C(s,j) = \\ = \bigvee_{k=1}^{n} B(i,k) \wedge \left(\bigvee_{s=1}^{n} A(k,s) \wedge C(s,j)\right) = B(AC)(i,j).$$

Докажем утверждение 4). Из пунктов 2), 3) данного предложения следует, что

$$\big(A(B+C)\big)A^{\mathrm{T}} = (AB+AC)A^{\mathrm{T}} = ABA^{\mathrm{T}} + ACA^{\mathrm{T}}.$$

Из пунктов 3), 4) данного предложения следует, что

$$(ABA^{\mathrm{T}})(ACA^{\mathrm{T}}) = \big(A(BA^{\mathrm{T}})\big)\big(A(CA^{\mathrm{T}})\big) = \Big(A\big((BA^{\mathrm{T}})A\big)\Big)CA^{\mathrm{T}} =$$
$$= \big((AB)(A^{\mathrm{T}}A)\big)(CA^{\mathrm{T}}) = (AB)(CA^{\mathrm{T}}) = A(BC)A^{\mathrm{T}}.$$

Ясно, что отображение φ взаимно-однозначно. Поэтому φ — автоморфизм. $\square$

Предложение 2.5. *Для любой E_i выполнены следующие свойства.*

1. *Для любой $A \in M_n(L)$ существует скаляр $\alpha \in L$, такой что $E_iAE_i = \alpha E_i$.*
2. *Множество $\{E_iAE_i \mid A \in M_n(L)\}$ относительно операции умножения матриц изоморфно L как $\wedge$-полурешётка.*
3. *$\alpha E_i \neq E_i$ для $\alpha \in L$, $\alpha \neq 1$.*
4. *Если $A_{nn}(E_i) \subseteq A_{nn}(A)$, то существует скаляр $\alpha \in L$, такой что $A = \alpha E_i$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение: $(E_iA)E_i = A(i,i)E_i$, $A(i,i) = \alpha$.

Второе утверждение следует из первого.

Третье утверждение очевидно.

Докажем четвёртое утверждение. Предположим, что существуют такие r, s, что $A(r,s) \neq 0$, $s \neq i$. Тогда $AE_s(r,s) = A(r,s) \neq 0$, $E_iE_s = 0$ — противоречие. Аналогично противоречие получается и в том случае, когда $A(r,s) \neq 0$, $r \neq i$. Поэтому $A(r,s) \neq 0$ только тогда, когда $r = s = i$. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Id}\big(M_n(L)\big)$ множество таких матриц $D \in D\big(M_n(L)\big)$, что $D \in M_n\big(C(L)\big)$ и для любых i, j, $i \neq j$, выполнено $D(i,i) \wedge D(j,j) = 0$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{n} D(i,i) = 1$.

Предложение 2.6. *Пусть $A \in D\big(M_n(L)\big)$ удовлетворяет следующим условиям.*

1. *$(AB)A = \alpha A$, $\alpha \in L$, для любой матрицы $B \in M_n(L)$.*
2. *Если $\alpha \in L$, $\alpha \neq 1$, то $\alpha A \neq A$.*
3. *Множество $\{ABA \mid B \in M_n(L)\}$ относительно операции произведения матриц изоморфно $\wedge$-полурешётке L.*

Тогда $A \in \mathrm{Id}\big(M_n(L)\big)$.

Доказательство. Если выполнено условие 1, то для любых i, j, $i \neq j$, и любой матрицы $B \in M_n(L)$ выполняется $(AB)A(i,j) = 0$. Предположим, что существуют такие i, j, $i \neq j$, что $A(i,i) \wedge A(j,j) \neq 0$. Тогда $(AE_{i,j})A(i,j) = A(i,i) \wedge A(j,j) \neq 0$ — противоречие. Если $\bigvee\limits_{i=1}^{n} A(i,i) = \alpha$,

$\alpha \neq 1$, то $\alpha A = A$ — противоречие с условием 2. Если $i \neq j$, то $ABA(i,j) = A(i,i) \wedge B(i,j) \wedge A(j,j) = 0$. Для любого i справедливо $ABA(i,i) = A(i,i) \wedge B(i,i) \leqslant A(i,i)$. Рассмотрим $d_i \in L$, $i = 1, \ldots, n$, такие что $d_i \leqslant A(i,i)$. Пусть $D \in M_n(L)$, $D(i,i) = d_i$. Тогда $ADA(i,i) = A(i,i) \wedge D(i,i) = D(i,i)$. Следовательно,

$$\{ABA \mid B \in M_n(L)\} = \bigl\{D \in D\bigl(M_n(L)\bigr) \mid D(i,i) \leqslant A(i,i)\bigr\}.$$

Поэтому множество $\{ABA \mid B \in M_n(L)\}$ относительно произведения матриц изоморфно прямому произведению полурешёток $L_1 \times \ldots \times L_i \times \ldots \times L_n$, где $L_i = \{d_i \in L \mid d_i \leqslant A(i,i)\}$. Прямое произведение $\wedge$-полурешёток — это прямое произведение решёток. По условию прямое произведение $L_1 \times \ldots \times L_n$ изоморфно L. Так как $A(i,i)$ — наибольший элемент L_i, то $A(i,i) \in C(L)$. □

Предложение 2.7. *Если $D \in \mathrm{Id}\bigl(M_n(L)\bigr)$, то существуют $A \in \mathrm{Int}\bigl(M_n(L)\bigr)$, E_i, такие что $ADA^{\mathrm{T}} = E_i$.*

Доказательство. Если существует только одно i, такое что $D(i,i) = 1$, то $D = E_i$. Предположим, что $D(i,i) = a$, $\bigvee\limits_{k \neq j} D(k,k) = b$. Ясно, что $a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$, $a, b \in C(L)$.

Определим $A \in M_n(L)$ следующим образом: $A(i,j) = A(j,i) = a$, $A(i,i) = A(j,j) = b$, $A(k,k) = 1$, $k \neq i,j$, $A(k,m) = 0$ в остальных случаях. Легко убедиться, что $A \in \mathrm{Int}\bigl(M_n(L)\bigr)$. Учитывая, что $D(i,j) = 0$, если $i \neq j$, имеем

$$ADA^{\mathrm{T}}(k,m) = \bigvee_{s=1}^{n} \bigl(A(k,s) \wedge D(s,s) \wedge A^{\mathrm{T}}(s,m)\bigr) = \bigvee_{s=1}^{n} \bigl(A(k,s) \wedge D(s,s) \wedge A(m,s)\bigr).$$

Так как $A(k,s) \wedge A(m,s) = 0$, если $m \neq k$, то $ADA^{\mathrm{T}}(k,m) = 0$ при $k \neq m$. Если $k \neq i,j$, то

$$ADA^{\mathrm{T}}(k,k) = A(k,k) \wedge D(k,k) \wedge A(k,k) = D(k,k).$$

Учитывая, что $D(i,i) \leqslant b$, имеем

$$\begin{aligned}
ADA^{\mathrm{T}}(j,j) &= \bigl(A(j,i) \wedge D(i,i) \wedge A(j,i)\bigr) \vee \bigl(A(j,j) \wedge D(j,j) \wedge A(j,j)\bigr) = \\
&= \bigl(a \wedge D(i,i)\bigr) \vee (b \wedge a) = 0, \\
ADA^{\mathrm{T}}(i,i) &= \bigl(A(i,j) \wedge D(j,j) \wedge A(j,i)\bigr) \vee \bigl(A(i,i) \wedge D(i,i) \wedge A(i,i)\bigr) = \\
&= a \vee \bigl(b \wedge D(i,i)\bigr) = a \vee D(i,i) = D(j,j) \vee D(i,i).
\end{aligned}$$

Действуя аналогично, найдём такие $A = A_1, \ldots, A_r \in \mathrm{Int}\bigl(M_n(L)\bigr)$, что для $B = A_r \cdot \ldots \cdot A_1 \in \mathrm{Int}\bigl(M_n(L)\bigr)$ имеем $BDB^{\mathrm{T}}(i,i) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} D(i,i) = 1$, $BDB^{\mathrm{T}}(k,m) = 0$ в остальных случаях, т. е. $BDB^{\mathrm{T}} = E_i$. □

Предложение 2.8. *Пусть $B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{Id}\bigl(M_n(L)\bigr)$ и если $i \neq j$, то $B_iB_j = B_jB_i = 0$. Тогда существует матрица $A \in \mathrm{Int}\bigl(M_n(L)\bigr)$, такая что $AB_iA^{\mathrm{T}} = E_i$ для любого i.*

Доказательство. Если $B_1 \in \mathrm{Id}\big(M_n(L)\big)$, то по предложению 2.7 существует $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такая что $A_1 B_1 A_1^{\mathrm{T}} = E_i$.

Матрица перестановок — это матрица, состоящая из 0 и 1 с ровно одной единицей в каждой строке и каждом столбце. Рассмотрим матрицу перестановок $P \in M_n(L)$, такую что $P(j,j) = 1$, если $j \neq 1, i$; $P(i,1) = 1$; $P(k,m) = 0$ в остальных случаях.

Так как $PE_iP^{\mathrm{T}}(k,m) = P(k,i) \wedge E_i(i,i) \wedge P^{\mathrm{T}}(i,m) = 1$ тогда и только тогда, когда $k = m = 1$, то $PE_iP^{\mathrm{T}} = E_1$ и $A_1B_1A_1^{\mathrm{T}} = E_1$ для $A_1 = PA$.

Так как $B_1B_2 = 0$, то

$$0 = A_1B_1B_2A_1^{\mathrm{T}} = A_1B_1A_1^{\mathrm{T}}A_1B_2A_1^{\mathrm{T}} = E_1A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому для любого i аналогично из того, что $B_2B_1 = 0$, следует, что $A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}(i,1) = 0$ для любого i. Кроме того, $A_1B_2A_1^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Id}\big(M_n(L)\big)$.

Если рассмотреть матрицы, состоящие из строк $2,\ldots,n$ и столбцов $2,\ldots n$, то существует матрица $A_2' \in \mathrm{Int}\big(M_{n-1}(L)\big)$, такая что $A_2'(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})'A_2^{\mathrm{T}} = E_2$, где $(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})'(i,j) = (A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})(i,j)$, если $i = 2,\ldots,n$, $j = 2,\ldots,n$.

Будем считать, что $A_2' \in M_n(L) - A_2'(1,i) = A_2'(i,1) = 0$ для любого i. Рассмотрим $A_2 = E_1 + A_2'$. Обозначим $C = A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}$. Так как

$$E_1CE_1 = 0, \quad A_2'CA_2'^{\mathrm{T}} = E_2,$$

$$E_1CA_1'^{\mathrm{T}}(1,i) = \bigvee_{j=1}^{n} C(1,j) \wedge A_1'^{\mathrm{T}}(j,i) = 0,$$

$$E_1CA_1'^{\mathrm{T}} = 0, \quad A_1'CE_1 = 0,$$

то $(E_1 + A_2')C(E_1 + A_2'^{\mathrm{T}}) = E_2$.

Кроме того,

$$(E_1 + A_2')A_1B_1A_1^{\mathrm{T}}(E_1 + A_2'^{\mathrm{T}}) = (E_1 + A_2')E_1(E_1 + A_2'^{\mathrm{T}}) = E_1.$$

Поэтому для $A = A_2A_1$

$$A_1B_1A_1^{\mathrm{T}} = E_1, \quad A_2B_2A_2^{\mathrm{T}} = E_2,$$

$$A_2A_1B_1(A_2A_1)^{\mathrm{T}} = E_1, A_2A_1B_2(A_2A_1)^{\mathrm{T}} = E_2.$$

Действуя аналогично, найдём $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такую что $AB_iA^{\mathrm{T}} = E_i$ для любого i. □

3. Автоморфизмы алгебр матриц над решётками

Предложение 3.1. *Пусть φ — автоморфизм группоида $P\big(M_n(L)\big)$. Тогда существует матрица $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такая что $A\varphi(E_i)A^{\mathrm{T}} = E_i$ для любого i.*

Доказательство. Ясно, что $\varphi\Big(Z\big(M_n(L)\big)\Big) = Z\big(M_n(L)\big)$, $\varphi(E) = E$, $\varphi(0) = 0$.

По предложениям 2.2, 2.5 $\varphi(E_i) \in D\big(M_n(L)\big)$. По предложениям 2.5, 2.6 $\varphi(E_i) \in \mathrm{Id}\big(M_n(L)\big)$.

Для $i \neq j$ справедливо $E_iE_j = 0$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(E_i)\varphi(E_j) = 0$. По предложению 2.8 существует матрица $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такая что $A\varphi(E_i)A^{\mathrm{T}} = E_i$ для всех i. $\square$

Назовём матрицу $A \in M_n(L)$ обратимой, если существует матрица $B \in$ $\in M_n(L)$, такая что $AB = BA = E$. Обозначим $B = A^{-1}$. Ясно, что если $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, то $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

Следствие 3.1. *Если $A \in M_n(L)$ обратима и для любых $B, C \in M_n(L)$ выполнено $A(BC) = (AB)C$, $(BC)A = B(CA)$, $(BA)C = B(AC)$, то $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$.*

Доказательство. Пусть A удовлетворяет условиям следствия. Тогда отображение $\varphi\colon M_n(L) \to M_n(L)$, $\varphi(B) = ABA^{-1}$ — автоморфизм $M_n(L)$. По предложению 3.1 существует $C \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такая что для любого i $C(AE_iA^{-1})C^{\mathrm{T}} = E_i$, $(CA)E_i(CA)^{-1} = E_i$, $(CA)E_i = E_i(CA)$. Тогда для $i \neq j$ выполнено $(CA)E_i(i,j) = 0$, $E_i(CA)(i,j) = CA(i,j) = 0$. Следовательно, $(CA) \in D\big(M_n(L)\big)$. Так как матрица AC обратима, это возможно только в том случае, когда $(CA)(i,i) = 1$ для любого i. Следовательно, $A = C^{-1} = C^{\mathrm{T}}$, $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$. $\square$

Следствие 3.2 [9]. *Если L дистрибутивна, то $A \in M_n(L)$ обратима тогда и только тогда, когда $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$.*

С каждой матрицей $A \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ связан автоморфизм φ алгебры $M_n(L)$: $\varphi(B) = ABA^{-1}$. Назовём такой автоморфизм внутренним. Обозначим группу всех внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$. С каждым автоморфизмом решётки L $\lambda\colon L \to L$ связан автоморфизм $\psi(\lambda)\colon M_n(L) \to M_n(L)$ алгебры $M_n(L)$: $\psi(\lambda)B(i,j) = \lambda\big(B(i,j)\big)$. Обозначим группу таких автоморфизмов $\Phi\big(M_n(L)\big)$.

Теорема 3.1. *Каждый автоморфизм φ группоида $PM_n(L)$ можно представить в виде $\varphi = \tau\psi$, где $\tau \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, $\psi \in \Phi\big(M_n(L)\big)$.*

Доказательство. Из предложения 3.1 следует, что для любого автоморфизма группоида $PM_n(L)$ существует $\tau \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, такой что $\tau\varphi(E_i) = E_{I_i}$ для любого i. Обозначим $\tau\varphi = \varphi_1$. Так как $\varphi_1\Big(Z\big(M_n(L)\big)\Big) = Z\big(M_n(L)\big)$ и для любых $\alpha, \beta \in E$

$$\varphi_1\big((\alpha\beta)E\big) = \varphi_1\big((\alpha E)(\beta E)\big) = \varphi_1(\alpha E) \cdot \varphi_1(\beta E),$$

то для отображения $\lambda\colon L \to L$ справедливо $\lambda(\alpha) = \beta$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1(\alpha E) = \beta E$ является изоморфизмом $\wedge$-полурешётки L. Каждый изоморфизм $\wedge$-полурешётки является изоморфизмом решётки.

Пусть λ^{-1} — автоморфизм решётки L, такой что $\lambda^{-1}\lambda = e$ — тождественный автоморфизм L. Тогда $\psi(\lambda^{-1}) \in \Phi\big(M_n(L)\big)$ и для любого $\alpha \in L$

$$\psi(\lambda^{-1})\varphi_1(\alpha E) = \psi(\lambda^{-1})(\beta E) = \alpha E.$$

Обозначим $\varphi_2 = \psi(\lambda^{-1})\varphi_1$. Так как $E_i E_{i,j} E_j = E_{i,j}$, то $E_i \varphi_2(E_{i,j}) E_j = \varphi_2(E_{i,j})$. Поэтому $\varphi_2(E_{i,j}) = \alpha E_{i,j}$, где $\alpha \in L$.

Существует матрица $A \in M_n(L)$, такая что

$$\varphi_2(A) = E_{i,j}, \quad \varphi_2(E_i A E_j) = E_{i,j}, \quad \varphi_2\big(A(i,j)E_{i,j}\big) = E_{i,j},$$
$$\varphi_2\big(A(i,j)E\varphi_2(E_{i,j})\big) = \big(A(i,j) \wedge \alpha\big)E_{i,j},$$
$$\varphi_2\big(A(i,j)E\varphi_2(E_{i,j})\big) = (A(i,j) \wedge \alpha)E_{i,j}.$$

Следовательно, $A(i,j) = \alpha = 1$ и $\varphi_2(E_{i,j}) = E(i,j)$. Пусть для $A \in M_n(L)$ выполнено $\varphi_2(A) = A_1$. Тогда

$$E_i\varphi_2(A)E_j = \varphi_2(E_i A E_j) = \varphi_2(A(i,j)E_{i,j}) =$$
$$= \varphi_2(A(i,j)E)\varphi_2(E_{i,j}) = A(i,j)E_{i,j} = E_i A_1 E_j = A_1(i,j)E_{i,j}.$$

Поэтому $A(i,j) = A_1(i,j)$ и $A = A_1$. Следовательно, $\varphi_2 = I$ — тождественный автоморфизм. Значит, $\psi(\lambda^{-1})\tau\varphi = I$, $\varphi = \tau^{-1}\psi(\lambda)$, где $\tau^{-1} \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, $\psi(\lambda) \in \Phi\big(M_n(L)\big)$. □

Автоморфизм φ группоида $PM_n(L)$ назовём автоморфизмом, сохраняющим скаляры, если $\varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A)$ для любых $\alpha \in L$, $A \in M_n(L)$. Если $B \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$, то

$$B(\alpha A)B^{-1} = (B\alpha E B^{-1})(BAB^{-1}) = \alpha BAB^{-1}.$$

Поэтому автоморфизм $\varphi(B) \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ сохраняет скаляры. Ясно, что каждый $\psi(\lambda) \in \Phi\big(M_n(L)\big)$ сохраняет скаляры только тогда, когда $\psi(\lambda)$ — тождественный автоморфизм. Поэтому справедливо следствие 3.3.

Следствие 3.3. *Автоморфизм φ группоида $PM_n(L)$ сохраняет скаляры тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$.*

Так как любые $\varphi \in \mathrm{Int}\big(M_n(L)\big)$ и $\psi(\lambda) \in \Phi\big(M_n(L)\big)$ являются автоморфизмами алгебры $M_n(L)$ относительно операций сложения и умножения, то справедливо следствие 3.4.

Следствие 3.4. *$M_n(L)$ — алгебра с однозначным сложением, т. е. каждый автоморфизм группоида $PM_n(L)$ является автоморфизмом алгебры $M_n(L)$.*

Пример 3.1 [3]. Если $L = \{0, 1\}$ — двухэлементная решётка, то любой автоморфизм φ группоида $PM_n(L)$ является внутренним.

Ясно также, что справедливо следствие 3.5.

Следствие 3.5. *Если группоиды $PM_n(L_1)$, $PM_m(L_2)$ изоморфны, то $L_1 \cong$ $\cong L_2$, $n = m$.*

Литература

[1] Артамонова И. И. Об однозначности сложения в полукольцах // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1093—1100.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
[3] Глускин Л. М. Автоморфизмы полугрупп бинарных отношений // Мат. записки Урал. гос. унив. — 1967. — Т. 6. — С. 44—54.
[4] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.
[5] Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств. — М.: Радио и связь, 1982.
[6] Кумаров В. Г., Маренич Е. Е. Обратимые матрицы над решётками с псевдодополнениями // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, № 3. — С. 139—154.
[7] Михалёв А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб. — 1988. — Т. 135, № 2. — С. 210—233.
[8] Шматков В. Д. Алгебры инцидентности над решётками // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 217—218.
[9] Giveon J. Lattice matrices // Inform. Control. — 1964. — Vol. 7. — P. 477—484.
[10] Jonsson R. E. Ring with unique addition // Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — Vol. 9. — P. 55—61.
[11] Ricart C. E. One-to-one mappings of rings and lattices // Bull. Am. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 578—764.