Ретрактабельные и коретрактабельные модули

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский федеральный университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: ретрактабельный модуль, коретрактабельный модуль, CC-кольцо, mod-ретрактабельное кольцо, кольцо Каша, полуартиново кольцо, совершенное кольцо, CSL-кольцо.

Аннотация

В статье изучаются mod-ретрактабельные модули, CSL-модули, строгие модули Каша и связи между ними. Описаны правые строгие кольца Каша. Показано, что для модуля M конечной длины равносильны следующие условия. 1. В категории $\sigma(M)$ каждый модуль является ретрактабельным. 2. В категории $\sigma(M)$ каждый модуль является коретрактабельным. 3. M — CSL-модуль. 4. $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$ для любых двух неизоморфных простых модулей $S_1, S_2 \in \sigma(M)$. 5. M является строгим модулем Каша.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Retractable and coretractable modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 5—20.

In this paper, we study mod-retractable modules, CSL-modules, fully Kasch modules, and their interrelations. Right fully Kasch rings are described. It is proved that for a module M of finite length, the following conditions are equivalent. (1) In the category $\sigma(M)$, every module is retractable. (2) In the category $\sigma(M)$, every module is coretractable. (3) M is a CSL-module. (4) $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$ for any two simple nonisomorphic modules $S_1, S_2 \in \sigma(M)$. (5) M is a fully Kasch module.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными.

Модуль M называется *ретрактабельным*, если для каждого его ненулевого подмодуля N выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$. Если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является ретрактабельным, то модуль M называется mod-*ретрактабельным*. Кольцо R называется *правым* mod-*ретрактабельным*, если

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 5—20.

каждый правый R-модуль является ретрактабельным. В [1, теорема 3.5] показано, что класс SV-колец совпадает с классом регулярных mod-ретрактабельных колец, у которых каждый примитивный образ артинов. В [1, 10] было показано, что класс коммутативных mod-ретрактабельных колец совпадает с классом коммутативных полуартиновых колец.

Модуль M называется *коретрактабельным*, если для каждого его собственного подмодуля N выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(M/N, M) \neq 0$. Если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является коретрактабельным, то модуль M называется *CC-модулем*. Кольцо R называется *правым CC-кольцом*, если каждый правый R-модуль является коретрактабельным. Коретрактабельные модули были изучены в [4]. В [1, 17] было дано описание правых CC-колец.

Если каждый простой модуль из категории $\sigma(M)$ вложи́м в модуль M, то модуль M называется *модулем Каша*. Если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является модулем Каша, то модуль M называется *строгим модулем Каша*. Модули Каша были введены в [3]. В этой же работе была поставлена задача описания строгих колец и модулей Каша.

Модуль M называется *CSL-модулем*, если каждый модуль N из категории $\sigma(M)$, у которого $\mathrm{End}_R(N)$ — тело, является простым. Кольцо R называется *правым CSL-кольцом*, если модуль R_R является CSL-модулем. В [14] было показано, что класс коммутативных CSL-колец совпадает с классом коммутативных колец, у которых размерность Крулля равна нулю. Совершенные CSL-кольца были описаны в [2]. Полуартиновы CSL-кольца были описаны в [1].

В настоящей работе изучаются связи между упомянутыми классами колец и модулей. mod-ретрактабельные кольца и модули рассмотрены в разделе 3. В разделе 4 изучаются CC-кольца и строгие кольца Каша. Описание правых строгих колец Каша дано в следствии 4.6. Установлено, что класс строгих колец Каша совпадает с классом CC-колец (теорема 4.9). В разделе 5 рассмотрены CSL-модули и их связи с mod-ретрактабельными модулями.

В работе используются стандартные понятия и обозначения теории колец и модулей (см., например, [12, 15]).

2. Предварительные сведения

Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля M, называется *M-подпорождённым* модулем. Полная подкатегория категории всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорождённых модулей, обозначается через $\sigma(M)$ и называется *категорией Висбауэра* модуля M.

Теорема 2.1 [13, предложение 2.2]. *Пусть M — правый R-модуль и $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *для различных i, j из I модули M_i и M_j не имеют изоморфных ненулевых подфакторов;*
2) *для различных i, j из I имеет место равенство $\sigma(M_i) \cap \sigma(M_j) = 0$;*

3) *для произвольного модуля* $N \in \sigma(M)$ *существует однозначно определённые модули* $N_i \in \sigma(M_i)$, $i \in I$, *для которых выполнено равенство* $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$.

Лемма 2.2. *Пусть* M — *правый* R-*модуль и* $S \in \sigma(M)$ — *простой модуль. Тогда модуль* S *изоморфен цоколю некоторого фактор-модуля модуля* M.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из того факта, что инъективная оболочка модуля S в категории $\sigma(M)$ порождается модулем M. □

Теорема 2.3. *Пусть* P — *конечно порождённый квазипроективный полуартинов правый* R-*модуль.*

1. $\mathrm{End}_R(P)$ — *полуартиново справа кольцо.*
2. P — *модуль со свойством конечной замены.*
3. P — I_0-*модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $\alpha = \mathrm{Loewy}(P)$. Ясно, что $\mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_\beta(P)\big)$ — идеал кольца $\mathrm{End}_R(P)$ для каждого ординала $\beta \leqslant \alpha$. Так как P конечно порождённый и квазипроективный, то

$$\mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_{\beta+1}(P)\big) / \mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_\beta(P)\big) \cong \mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_{\beta+1}(P) / \mathrm{Soc}_\beta(P)\big) \text{ —}$$

полупростой правый $\mathrm{End}_R(P)$-модуль для каждого ординала $\beta \leqslant \alpha$. Так как P конечно порождённый, то для каждого предельного ординала $\gamma < \alpha$ имеет место равенство

$$\mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_\gamma(P)\big) = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathrm{Hom}_R\big(P, \mathrm{Soc}_\beta(P)\big).$$

Тогда из [7, 3.12] следует полуартиновость справа кольца $\mathrm{End}_R(P)$.

Утверждение 2 следует из утверждения 1 и из [6, 11.17], [5, теорема 1.4].

Докажем утверждение 3. Пусть N — некосущественный подмодуль модуля P. Так как P — конечно порождённый квазипроективный модуль, то для некоторого гомоморфизма $f \in \mathrm{End}_R(P)$, не принадлежащего $J\big(\mathrm{End}_R(P)\big)$, имеет место включение $f(P) \subset N$. Так как каждое полуартиново справа кольцо является I_0-кольцом, то по утверждению 1 $\mathrm{End}_R(P)$ — I_0-кольцо. Поэтому fg — ненулевой идемпотент кольца $\mathrm{End}_R(P)$ для некоторого гомоморфизма $g \in \mathrm{End}_R(P)$ и $fg(P) \subset N$. □

3. mod-ретрактабельные модули

Лемма 3.1. *Для полупримитивного* I_0-*кольца* R *следующие условия равносильны*:

1) *каждый несингулярный правый* R-*модуль является ретрактабельным*;
2) *каждый ненулевой несингулярный правый* R-*модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль*;

3) *каждый ненулевой правый идеал кольца R содержит ненулевой инъективный подмодуль модуля R_R;*
4) *каждый ненулевой подмодуль любого проективного правого R-модуля содержит ненулевой инъективный подмодуль.*

Доказательство. Импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) и 4) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть M — ненулевой несингулярный правый R-модуль и $m \in M$ — ненулевой элемент. Так как $\mathrm{Ann}(m)$ — несущественный правый идеал кольца R, то подмодуль mR содержит ненулевой подмодуль, изоморфный некоторому подмодулю модуля R_R. Следовательно, модуль M содержит ненулевой инъективный подмодуль.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть P_0 — ненулевой подмодуль проективного правого R-модуля P. Так как R — полупримитивное I_0-кольцо, то $E(P)$ — несингулярный модуль. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(E(P), P_0)$. Из [9, теорема 3.2] следует, что $\mathrm{Im}\, f$ содержит ненулевое прямое слагаемое A модуля P. Пусть π — проекция P на A. Тогда ядро гомоморфизма $\pi_{|P_0} f$ является прямым слагаемым в $E(P)$ и, следовательно, подмодуль P_0 содержит ненулевой инъективный подмодуль. □

Модуль M называется $\max$-*модулем*, если каждый ненулевой модуль из категории $\sigma(M)$ обладает максимальным подмодулем.

Лемма 3.2. *Пусть M — mod-ретрактабельный модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *M — $\max$-модуль;*
2) *M — CSL-модуль;*
3) *если M квазипроективный, то M — самопорождающийся модуль.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 3). Из леммы 2.2 следует, что M порождает каждый простой модуль из категории $\sigma(M)$. Тогда из [15, 18.5] следует, что M — самоопрождающийся модуль. □

Теорема 3.3. *Пусть M — проективный полусовершенный модуль в категории $\sigma(M)$. Если M — полуартинов модуль, то следующие условия равносильны:*

1) *M — mod-ретрактабельный модуль;*
2) *$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $\sigma(M_i) \cap \sigma(M_j) = 0$, если $i \neq j$, все простые подфакторы модуля M_i изоморфны и M_i — прямая сумма попарно изоморфных локальных $\max$-модулей для каждого $i \in I$;*
3) *категория $\sigma(M)$ обладает проективным порождающим вида $\bigoplus_{i\in I} P_i$, где $\sigma(P_i) \cap \sigma(P_j) = 0$, если $i \neq j$, и P_i — локальный $\max$-модуль, у которого все простые подфакторы изоморфны для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Согласно [15, 42.5] модуль M представи́м в виде $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где M_i — прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей и модули M_i, M_j не имеют попарно изоморфных локальных прямых слагаемых, если $i \neq j$. Предположим, что $\sigma(M_i)\cap\sigma(M_j) \neq 0$. Тогда из леммы 2.2 следует, что для некоторых различных индексов $i, j \in I$ и некоторых локальных прямых слагаемых L_i, L_j соответственно модулей M_i, M_j имеет место изоморфизм $\mathrm{Soc}(L_i/N_i) \cong \mathrm{Soc}(L_j/N_j)$, где L_i/N_i, L_j/N_j — равномерные ненулевые модули. Тогда либо $L_i/J(L_i) \ncong \mathrm{Soc}(L_j/N_j)$, либо $L_j/J(L_j) \ncong \mathrm{Soc}(L_j/N_j)$. Получили противоречие с условием утверждения 1). Таким образом, $\sigma(M_i) \cap \sigma(M_j) = 0$. Тот факт, что для каждого $i \in I$ все простые подфакторы модуля M_i изоморфны, проверяется аналогично.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из [15, 18.5].

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $N \in \sigma(M)$ и S — простой подмодуль модуля N. Тогда согласно теореме 2.1 $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$, где $N_i \in \sigma(P_i)$ для каждого $i \in I$ и $S \subset \sigma(N_{i_0})$ для некоторого $i_0 \in I$. Так как все простые модули в категории $\sigma(N_{i_0})$ изоморфны и M — max-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(N_{i_0}, S) \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Hom}_R(N, S) \neq 0$. □

Следствие 3.4. *Пусть M — проективный и полусовершенный модуль в категории $\sigma(M)$. Если M — конечно порождённый полуартинов модуль, то следующие условия равносильны:*

1) *M — mod-ретрактабельный модуль;*
2) *$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $\sigma(M_i) \cap \sigma(M_j) = 0$, если $i \neq j$, все простые подфакторы модуля M_i изоморфны и M_i — прямая сумма попарно изоморфных локальных max-модулей для каждого $i \in I$;*
3) *категория $\sigma(M)$ эквивалентна категории модулей над кольцом R, которое является конечным прямым произведением полных матричных колец над совершенными локальными кольцами.*

Следствие 3.5. *Для совершенного слева кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — mod-ретрактабельное справа кольцо;*
2) *кольцо R является конечным прямым произведением полных матричных колец над совершенными локальными кольцами.*

Неразложимое фактор-кольцо R/B кольца R называется *максимальным неразложимым фактором* кольца R, если для каждого его идеала B', строго содержащегося в идеале B, фактор-кольцо R/B' не является неразложимым. Модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым в M. Кольцо R называется *строго регулярным*, если $a \in a^2R$ для любого элемента $a \in R$. Кольцо R с радикалом Джекобсона J называется *полурегулярным*, если R/J — регулярное кольцо и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца R.

Теорема 3.6. *Для полурегулярного кольца R, у которого каждый примитивный образ является артиновым, следующие условия равносильны*:

1) *R — mod-ретрактабельное кольцо*;
2) *R — полуартиново CSL-кольцо*;
3) *R — полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом.*

Доказательство. Импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) и 3) $\Longrightarrow$ 1) следуют из [1, теорема 3.3].

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Ясно, что всякое mod-ретрактабельное кольцо является CSL-кольцом. Покажем, что кольцо R является полуартиновым. Из [1, теорема 3.5] следует, что $R/J(R)$ является SV-кольцом. Так как согласно лемме 3.2 кольцо R является $\max$-кольцом, то из [12, лемма 26.2] следует, что $J(R)$ — t-нильпотентный идеал. Тогда согласно [12, замечание 21.3] кольцо R является полуартиновым кольцом. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть P — конечно порождённый квазипроективный модуль и каждый примитивный образ кольца $\mathrm{End}_R(P)$ является артиновым. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *P — mod-ретрактабельный регулярный модуль*;
2) *P — SV-модуль.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из [1, теорема 3.10].

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из [1, теорема 3.10], [1, лемма 1.10] и [15, 46.2] следует, что категория $\sigma(P)$ эквивалентна категории всех правых модулей над регулярным кольцом $\mathrm{End}_R(P)$. Тогда из [1, теорема 3.5] следует, что $\mathrm{End}_R(P)$ — SV-кольцо и, следовательно, P — SV-модуль. $\square$

4. Кольца Каша и CC-кольца

Лемма 4.1. *Если M — самопорождающийся модуль, то следующие условия эквивалентны*:

1) *M — строгий модуль Каша*;
2) *для каждого подмодуля M_0 модуля M модуль M/M_0 является модулем Каша*;
3) *для каждого вполне инвариантного подмодуля M_0 модуля M модуль M/M_0 является модулем Каша.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $N \in \sigma(M)$ и $M_0 = \bigcap\limits_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)} \mathrm{Ker}(f)$. Несложно заметить, что M_0 — вполне инвариантный подмодуль модуля M. Так как $N = \mathrm{Hom}_R(M,N)M$, то $N = \mathrm{Hom}_R(M/M_0,N)(M/M_0)$. Следовательно,

$\sigma(N) \subset \sigma(M/M_0)$. Пусть $S \in \sigma(N)$ — простой модуль. Тогда существует такой элемент $m \in M$, что $(m+M_0)R$ — простой подмодуль модуля M/M_0, изоморфный модулю S. Так как элемент m не принадлежит подмодулю M_0, то существует гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, такой что $f(m) \neq 0$. Поскольку $M_0 \subset \mathrm{Ker}(f)$, то гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_R(M/M_0,N)$, при котором $\bar{f}\big((m+M_0)R\big) \neq 0$. Следовательно, модуль S изоморфен некоторому простому подмодулю модуля N. $\square$

Лемма 4.2. *Для произвольного правого R-модуля M имеют место следующие утверждения:*

1) *если M — конечно порождённый модуль Каша, то M — коретрактабельный модуль;*
2) *если M — самопорождающийся, квазипроективный и коретрактабельный модуль, то M является модулем Каша.*

Доказательство. Утверждение 1) проверяется непосредственно.

Докажем утверждение 2). Пусть S — произвольный простой модуль из категории $\sigma(M)$. Тогда $S \cong A/B$, где A — конечная прямая сумма изоморфных копий модуля M и B — подмодуль модуля A. Из [4, предложение 2.6] следует, что $\mathrm{Hom}_R(A/B,A) \neq 0$, и следовательно, $\mathrm{Hom}_R(S,M) \neq 0$. $\square$

Лемма 4.3. *Для произвольного правого R-модуля M имеют место следующие утверждения:*

1) *если M — строгий модуль Каша, то M — полуартинов модуль;*
2) *если M — конечно порождённый, квазипроективный и строгий модуль Каша, то M — полусовершенный модуль в категории $\sigma(M)$.*

Доказательство. Утверждение 1) проверяется непосредственно.

Докажем утверждение 2). Согласно [15, 18.2] $M/J(M)$ — квазипроективный модуль. Если N — максимальный существенный подмодуль модуля $M/J(M)$, то в силу предположения исходного пункта $\big(M/J(M)\big)/N$ — $M/J(M)$-проективный простой модуль, что, очевидно, невозможно. Таким образом, $M/J(M)$ — полупростой конечно порождённый модуль и из 1) и теоремы 2.3 следует, что M — конечная прямая сумма локальных модулей. Тогда из [15, 42.5] следует, что M — полусовершенный модуль в категории $\sigma(M)$. $\square$

Предложение 4.4. *Если M — проективный полусовершенный модуль в категории $\sigma(M)$, то следующие условия равносильны:*

1) *M — строгий модуль Каша;*
2) *в категории $\sigma(M)$ каждый циклический модуль является коретрактабельным;*
3) *в категории $\sigma(M)$ каждый конечно порождённый модуль является коретрактабельным;*
4) *$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где $\sigma(M_i) \cap \sigma(M_j) = 0$, если $i \neq j$, все простые подфакторы модуля M_i изоморфны и M_i — прямая сумма попарно изоморфных локальных полуартиновых модулей для каждого $i \in I$;*

5) *категория* $\sigma(M)$ *обладает проективным порождающим вида* $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$, *где* $\sigma(P_i)\cap\sigma(P_j)=0$, *если* $i\neq j$, *и* P_i — *локальный полуартинов модуль, у которого все простые подфакторы изоморфны для каждого* $i\in I$.

Доказательство. Доказательство импликации 1) $\Longrightarrow$ 4) аналогично доказательству импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) из теоремы 3.3. Импликации 3) $\Longrightarrow$ 2) и 1) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 5) непосредственно следует из [15, 18.5].

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $N\in\sigma(M)$ и $S\in\sigma(N)$ — простой модуль. Согласно теореме 2.1 $N=\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$, где $N_i\in\sigma(P_i)$ для каждого $i\in I$. Тогда согласно лемме 2.2 $S\cong A_{i_0}/B_{i_0}$, где A_{i_0}, B_{i_0} — подмодули модуля N_{i_0} для некоторого $i_0\in I$. Так как в категории $\sigma(P_{i_0})$ все простые модули изоморфны и $\mathrm{Soc}(N_{i_0})\neq 0$, то модуль S изоморфен некоторому подмодулю модуля N.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $N\in\sigma(M)$ и $S\in\sigma(N)$ — простой модуль. Из леммы 2.2 следует, что $S\cong A/B$, где A, B — подмодули модуля N. Без ограничения общности можно считать, что A — циклический модуль. Так как A — коретрактабельный модуль, то простой модуль S изоморфен некоторому подмодулю модуля N. □

Следующее утверждение непосредственно следует из леммы 4.3, предложения 4.4 и [15, 46.2].

Следствие 4.5. *Если* P — *конечно порождённый квазипроективный модуль, то следующие условия равносильны*:

1) P — *строгий модуль Каша*;
2) *в категории* $\sigma(P)$ *каждый циклический модуль является коретрактабельным*;
3) *в категории* $\sigma(P)$ *каждый конечно порождённый модуль является коретрактабельным*;
4) *категория* $\sigma(P)$ *эквивалентна категории правых модулей над кольцом, являющимся конечным прямым произведением полных матричных колец над совершенными слева локальными кольцами.*

Следующее утверждение непосредственно следует из леммы 4.1 и следствия 4.5.

Следствие 4.6. *Для кольца* R *следующие условия равносильны*:

1) R — *строгое справа кольцо Каша*;
2) *над кольцом* R *каждый правый конечно порождённый модуль является коретрактабельным*;
3) *над кольцом* R *каждый правый циклический модуль является коретрактабельным*;
4) *всякое фактор-кольцо кольца* R *является правым кольцом Каша*;
5) *кольцо* R *изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец над локальными совершенными слева кольцами.*

Следствие 4.7. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — полуартиново справа кольцо, над которым все простые правые модули изоморфны*;
2) *R — строгое справа кольцо Каша, над которым все простые правые модули изоморфны*;
3) *каждый ненулевой инъективный правый R-модуль является порождающим объектом в категории всех правых R-модулей*;
4) *кольцо R изоморфно полному матричному кольцу над локальным совершенным слева кольцом.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 4) $\Longrightarrow$ 3) проверяются непосредственно.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 4) вытекает из следствия 4.6.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть S — простой правый R-модуль. Рассмотрим произвольный ненулевой правый R-модуль M. Тогда из условия следует, что модуль S изоморфен некоторому простому подмодулю модуля $E(M)$. Таким образом, R — полуартиново справа кольцо, над которым все простые правые модули изоморфны модулю S. $\square$

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 3.2 из [4].

Лемма 4.8. *Для кольца R, над которым каждый правый свободный модуль является коретрактабельным, следующие условия равносильны*:

1) *R — $\max$-кольцо*;
2) *каждый подмодуль модуля R_R обладает максимальным подмодулем.*

Теорема 4.9. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *для каждого идеала I кольца R каждый свободный правый модуль над кольцом R/I является коретрактабельным*;
2) *кольцо R изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец над совершенными локальными кольцами.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Ясно, что каждое фактор-кольцо кольца R является правым кольцом Каша. Тогда из следствия 4.6 и леммы 4.1 следует, что кольцо R изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец над локальными совершенными слева кольцами. Поэтому достаточно показать, что R — правое $\max$-кольцо. Пусть I — сумма всех радикальных подмодулей модуля R_R. Предположим, что $I \neq 0$. Ясно, что I — идеал, и поскольку R — полуартиново справа кольцо, то из [5, теорема 3.1] следует, что $I^2 \neq I$. Тогда I/I^2 является ненулевым радикальным правым R/I-модулем. Пусть A/I — ненулевой подмодуль модуля $R/I_{R/I}$. Тогда A содержит максимальный подмодуль M. Поскольку $AJ(R) = J(A)$ и $I = IJ(R)$, то $I \subset J(A)$ и, следовательно, $I \subset M$. Таким образом, каждый ненулевой подмодуль модуля $R/I_{R/I}$ содержит максимальный подмодуль и, следовательно, согласно лемме 4.8

R/I — $\max$-кольцо. С другой стороны, правый R/I-модуль I/I^2 является ненулевым радикальным модулем. Полученное противоречие показывает, что $I = 0$, и следовательно, согласно лемме 4.8 R — правое $\max$-кольцо. □

Следующее утверждение непосредственно следует из предыдущих результатов и [1, 17].

Теорема 4.10. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — строгое кольцо Каша;*
2) *для каждого идеала I кольца R фактор-кольцо R/I является кольцом Каша;*
3) *над кольцом R каждый правый или левый конечно порождённый модуль является коретрактабельным;*
4) *над кольцом R каждый правый или левый циклический модуль является коретрактабельным;*
5) *R — правое CC-кольцо;*
6) *R — левое CC-кольцо;*
7) *кольцо R изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец над совершенными локальными кольцами.*

5. CSL-кольца и модули

Лемма 5.1. *Для полуартинова правого R-модуля M, у которого все простые подфакторы изоморфны, следующие условия равносильны:*

1) *M — CSL-модуль и $\max$-модуль;*
2) *M — mod-ретрактабельный модуль.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть N — ненулевой модуль из категории $\sigma(M)$. Так как M — $\max$-модуль, то существует наименьший непредельный ординал α, такой что $\mathrm{Soc}_\alpha(N) \nsubseteq J(N)$. Тогда $\mathrm{Soc}_\alpha(N)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N) \nsubseteq J(N)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N)$. Следовательно, некоторый простой подмодуль S модуля $N/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N)$ является прямым слагаемым в $N/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N)$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_R(N/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N), S) \neq 0$. Поскольку все простые подфакторы модуля N изоморфны, то N — ретрактабельный модуль.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) проверяется непосредственно. □

Несложно заметить, что для каждого простого числа p $\mathbb{Z}$-модуль C_{p^∞} является CSL-модулем, но не является mod-ретрактабельным модулем.

Лемма 5.2. *Пусть P — конечно порождённый квазипроективный полуартинов $\max$-модуль, для которого выполнены следующие условия:*

1) *для каждых попарно неизоморфных простых модулей $S_1, S_2 \in \sigma(P)$ имеет место равенство $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$;*

2) *$P = P_1 \oplus P_2$, где P_1 — прямая сумма локальных модулей, P_2 — подмодуль модуля P и модули P_1, P_2 не имеют изоморфных ненулевых прямых слагаемых.*

Тогда $\mathrm{Hom}_R(P_1, P_2) = 0$, $\mathrm{Hom}_R(P_2, P_1) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{Hom}_R(P_2, P_1) \neq 0$. Тогда из теоремы 2.3 следует, что $P_0 = \mathrm{Hom}_R(P_2, P_1)P_2 \subset J(P_1)$. Пусть M — максимальный подмодуль модуля P_0 и P' — дополнение по пересечению модуля P_0/M в модуле P_1/M. Тогда $L = (P_1/M)/P'$ — равномерный модуль, у которого $\mathrm{Soc}(L) \cong P_0/M$ и $\mathrm{Soc}(L) \subset J(L)$. Так как P квазипроективен, то $\mathrm{Hom}_R(P_2, L)P_2 = \mathrm{Soc}(L)$ и $\mathrm{Hom}_R\big(P_2, L/\mathrm{Soc}(L)\big)P_2 = 0$. Поскольку P — полуартинов модуль, то модуль L содержит локальный подмодуль L_0 длины 2. Поскольку $\mathrm{Hom}_R\big(P_2, \mathrm{Soc}(L_0)\big) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}_R\big(P_2, L_0/J(L_0)\big) = 0$, то простые модули $\mathrm{Soc}(L_0)$, $L_0/J(L_0)$ не изоморфны и $\mathrm{Ext}^1_R\big(\mathrm{Soc}(L_0), L_0/J(L_0)\big) \neq 0$. Получили противоречие с условием исходной леммы. Аналогично доказывается равенство $\mathrm{Hom}_R(P_1, P_2) = 0$. □

Теорема 5.3. *Пусть P — конечно порождённый полуартинов квазипроективный модуль. Если каждый примитивный образ кольца $\mathrm{End}(P)$ является артиновым, то следующие условия равносильны:*

1) *P — самопорождающийся CSL-модуль, являющийся $\max$-модулем;*
2) *P — mod-ретрактабельный модуль;*
3) *P — самопорождающийся $\max$-модуль и если $S_1, S_2 \in \sigma(P)$ — простые неизоморфные модули, то $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$;*
4) *категория $\sigma(P)$ эквивалентна категории правых модулей над полуартиновым кольцом, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из леммы 3.2.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 2) следует из [1, теорема 3.3].

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Согласно [15, 46.2] достаточно показать, что $\mathrm{End}_R(P)$ — полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом. С помощью трансфинитной индукции построим в модуле P для каждого ординала α вполне инвариантный подмодуль P_α следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $P_0 = 0$. Если $\alpha = \beta+1$, то $P_{\beta+1}/P_\beta = \sum\limits_{\pi \in I_\beta} \pi(P/P_\beta)$, где I_β — множество всех таких ненулевых неразложимых центральных идемпотентов $\pi \in \mathrm{End}(P/P_\beta)$, что $\pi(P/P_\beta)$ — конечная прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей. Когда α — предельный ординал, положим $P_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta$. Из теоремы 2.3, леммы 5.2 и [1, лемма 1.2] следует, что для некоторого ординала τ имеет место равенство $P_\tau = P$. Несложно заметить, что для произвольного ординала β и для каждого $\pi \in I_\beta$ модуль $\pi(P/P_\beta)$ является самопорождающимся и квазипроективным. Поскольку P — $\max$-модуль, то из [15, 46.2] следует, что $\mathrm{End}_R\big(\pi(P/P_\beta)\big)$ — полное матричное кольцо над совершенным локальным кольцом. Тогда из квазипроективности и конечной порождённости модуля P следует, что $\mathrm{Hom}(P, P_{\alpha+1})/\mathrm{Hom}(P, P_\alpha)$ — прямая сумма полных матричных колец над совершенными локальными кольцами. Так как $\mathrm{End}_R(P) = \bigcup\limits_{\beta\leqslant\tau} \mathrm{Hom}(P, P_\beta)$, то $\mathrm{End}_R(P)$ — полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом. □

Следствие 5.4. *Пусть P — проективный полусовершенный модуль в категории $\sigma(P)$. Если P — конечно порождённый полуартинов модуль, то следующие условия равносильны:*

1) *P — самопорождающийся CSL-модуль, являющийся $\max$-модулем;*
2) *P — mod-ретрактабельный модуль;*
3) *категория $\sigma(P)$ эквивалентна категории модулей над кольцом S, которое является конечным прямым произведением полных матричных колец над совершенными локальными кольцами.*

Следствие 5.5. *Если R — полуартиново справа кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым, то следующие условия равносильны:*

1) *R — правое CSL-кольцо и правое $\max$-кольцо;*
2) *R — правое mod-ретрактабельное кольцо;*
3) *R — полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом.*

Теорема 5.6. *Для квазиинвариантного справа или слева кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — mod-ретрактабельное кольцо;*
2) *R — полуартиново CSL-кольцо;*
3) *R — полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является локальным совершенным кольцом.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По [16, следствие 2.4] получаем, что $R/J(R)$ — редуцированное кольцо. Тогда [11, теорема 3.2] даёт, что $R/J(R)$ — полуартиново строго регулярное кольцо. Поскольку R — $\max$-кольцо, то по [12, замечание 21.3, лемма 26.2] получаем, что кольцо R полуартиново. Таким образом, R — полуартиново кольцо, у которого каждый примитивный образ является телом, и следовательно, согласно лемме 3.2 R — SCL-кольцо.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) непосредственно следует из правой квазиинвариантности кольца R и [1, теорема 3.3].

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) следует из [1, теорема 3.3]. □

Следствие 5.7. *Для правого (или левого) инвариантного кольца R, следующие условия равносильны*:

1) R — mod-*ретрактабельное кольцо*;
2) R — *полуартиново CSL-кольцо*;
3) R — *полуартиново кольцо.*

Теорема 5.8. *Пусть M — правый модуль конечной длины над кольцом R. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *всякий модуль N конечной длины из категории $\sigma(M)$, у которого $\mathrm{End}(N)$ — тело, является простым*;
2) M — *CSL-модуль*;
3) *всякий модуль конечной длины из категории $\sigma(M)$ является ретрактабельным*;
4) M — mod-*ретрактабельный модуль*;
5) *если $S_1, S_2 \in \sigma(M)$ — простые неизоморфные модули, то $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$*;
6) M — *строгий модуль Каша*;
7) M — *CC-модуль*;
8) *у каждого неразложимого модуля конечной длины из категории $\sigma(M)$ все простые подфакторы изоморфны*;
9) *у каждого неразложимого модуля из категории $\sigma(M)$ все простые подфакторы изоморфны.*

Доказательство. Импликации $2) \Longrightarrow 1)$, $4) \Longrightarrow 3)$, $1) \Longrightarrow 5)$, $2) \Longrightarrow 5)$, $3) \Longrightarrow 5)$, $6) \Longrightarrow 7)$, $7) \Longrightarrow 1)$, $9) \Longrightarrow 1)$, $9) \Longrightarrow 2)$, $9) \Longrightarrow 8)$ очевидны. Импликации $9) \Longrightarrow 4)$, $9) \Longrightarrow 6)$, $8) \Longrightarrow 9)$ следуют из теоремы 2.1.

Докажем импликацию $5) \Longrightarrow 8)$. Предположим, что в категории $\sigma(M)$ существует неразложимый модуль конечной длины, у которого имеются неизоморфные простые подфакторы. Пусть N — неразложимый модуль наименьшей длины из категории $\sigma(M)$, для которого не выполнено условие пункта 8). Тогда $J(N) = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$, где $\sigma(N_i) \cap \sigma(N_j) = 0$, если $i \neq j$, N_i — ненулевой подмодуль модуля N и все простые подфакторы модуля N_i изоморфны для каждого i.

Пусть $k = 1$ и модуль N не является локальным. Тогда фактор-модуль $N/J(N)$ содержит такой простой подмодуль S, что $S \notin \sigma\big(J(N)\big)$. Пусть N_0 — такой подмодуль модуля N, что $N_0/J(N) = S$. Ясно, что $\lg(N_0) < \lg(N)$. Следовательно, для модуля N_0 имеет место разложение $N_0 = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$, где для каждого i A_i — неразложимый модуль, у которого все простые подфакторы изоморфны. Так как $\mathrm{Soc}(N_0) \subset \mathrm{Soc}(N) \subset J(N)$, то $\mathrm{Soc}(N_0) \in \sigma\big(J(N)\big)$. Поскольку $N_0/J(N) = S$, то для некоторого индекса i_0 модуль A_{i_0} имеет простой подфактор, изоморфный модулю S. Таким образом, неразложимый модуль A_{i_0} обладает двумя неизоморфными простыми подфакторами, что противоречит выбору модуля N.

Несложно заметить, что если N — локальный модуль, то для некоторого его подмодуля N_0 модуль N/N_0 является локальным модулем длины 2, у которого

$\mathrm{Soc}(N/N_0) \not\cong N/\mathrm{Soc}(N/N_0)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что N — нелокальный модуль и $k > 1$. Пусть $\overline{N_i}$ — замыкание модуля N_i в модуле N для каждого i и $S = N_0/J(N)$ — произвольный простой подмодуль полупростого модуля $N/J(N)$. Так как $l(N_0) < l(N)$, то $N_0 = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$, где все простые подфакторы модуля A_i изоморфны для каждого i, $\sigma(A_i) \cap \sigma(A_j) = 0$, если $i \neq j$, и каждый простой подфактор модуля A_s изоморфен модулю S. Выберем такой индекс i_0, что все простые подфакторы модуля N_{i_0} изоморфны модулю S. Так как $l(\overline{N_{i_0}}) < l(N)$ и все простые подмодули модуля $\overline{N_{i_0}}$ изоморфны, то согласно выбору модуля N все простые подфакторы модуля $\overline{N_{i_0}}$ изоморфны. Тогда $\overline{N_{i_0}} + A_s$ — существенное расширение модуля N_{i_0}. Следовательно, $\overline{N_{i_0}} + A_s = \overline{N_{i_0}}$ и $A_s \subset \overline{N_{i_0}}$. Так как $A_1 \oplus \ldots \oplus A_{s-1} \subset J(N)$, то $N_0 = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s \subset \overline{N_1} \oplus \ldots \oplus \overline{N_k}$. Поскольку модуль N, очевидно, представи́м в виде $N = B_1 + \ldots + B_t$, где $J(N) \subset B_i$ и $B_i/J(N)$ — простой подмодуль для каждого i, то $N = \overline{N_1} \oplus \ldots \oplus \overline{N_k}$, что противоречит неразложимости модуля N. □

Следствие 5.9. *Для артинова модуля M следующие условия равносильны:*

1) *M — mod-ретрактабельный модуль;*
2) *M — CSL-модуль и $\max$-модуль;*
3) *модуль M имеет конечную длину и $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где M_i — неразложимой модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и простые подфакторы модуля M_i изоморфны.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из леммы 3.2. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) следует из теоремы 5.8.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). С помощью индукции для модуля M определим для каждого неотрицательного целого числа n подмодуль $J^{(n)}(M)$ согласно следующему правилу: $J^{(0)}(M) = M$, $J^{(n+1)}(M) = J\big(J^{(n)}(M)\big)$. Так как M является артиновым $\max$-модулем, то для некоторого целого неотрицательного числа n_0 имеем, что $J^{(n_0)}(M) = 0$ и $J^{(n+1)}(M)/J^{(n)}(M)$ — полупростой модуль конечной длины для каждого неотрицательного целого числа n. Таким образом, M — модуль конечной длины, и импликация следует из теоремы 5.8. □

Следующее утверждение аналогично теореме 1.2 из [8]. Отметим, что предыдущая теорема и теорема 1.2 из [8] доказаны различными способами.

Следствие 5.10. *Пусть M — правый модуль над кольцом R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *всякий модуль N конечной длины из категории $\sigma(M)$, у которого $\mathrm{End}(N)$ — тело, является простым;*
2) *всякий модуль N конечной длины из категории $\sigma(M)$ является ретрактабельным;*
3) *если $S_1, S_2 \in \sigma(M)$ — простые неизоморфные модули, то $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$;*
4) *у каждого неразложимого модуля конечной длины из категории $\sigma(M)$ все простые подфакторы изоморфны.*

Следствие 5.11. *Пусть P — квазипроективный модуль конечной длины. Тогда следующие условия равносильны*:

1) P — *CSL-модуль*;
2) P — mod-*ретрактабельный модуль*;
3) *если* $S_1, S_2 \in \sigma(P)$ — *простые неизоморфные модули, то* $\mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_2) = 0$;
4) *категория* $\sigma(P)$ *эквивалентна категории правых модулей над полуартиновым кольцом, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является полным матричным кольцом над совершенным локальным кольцом.*

Литература

[1] Абызов А. Н. О некоторых классах полуартиновых колец // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 955-966.

[2] Alaoui M., Haily A. Perfect rings for which the converse of Schur's lemma holds // Publ. Mat. — 2001. — Vol. 45, no. 1. — P. 219—222.

[3] Albu T., Wisbauer R. Kasch modules // Advances in Ring Theory (Granville, OH, 1996) / S. K. Jain, S. Tariq Rizvi, eds. — Boston: Birkhäuser, 1997. — (Trends Math.). — P. 1—16.

[4] Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 2009. — Vol. 86, no. 3. — P. 289—304.

[5] Baccella G. Exchange property and the natural preorder between simple modules over semi-Artinian rings // J. Algebra. — 2002. — Vol. 253. — P. 133—166.

[6] Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R. Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. — Boston: Birkhäuser, 2006. — (Frontiers Math.).

[7] Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R. Extending Modules. — London: Pitman, 1994.

[8] Greg M., Markus S. Extensions of simple modules and the converse of Schur's lemma // Advances in Ring Theory. — Boston: Birkhäuser, 2010. — (Trends Math.). — P. 229—237.

[9] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[10] Kosan M. T., Zemlicka J. Mod-retractable rings // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42, no. 3. — P. 998—1010.

[11] Tolooei Y., Vedadi M. R. On rings whose modules have nonzero homomorphisms to nonzero submodules // Publ. Mat. — 2013. — Vol. 57, no. 1. — P. 107—122.

[12] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[13] Vanaja N. All finitely generated M-subgenerated modules are extending // Commun. Algebra. — 1996. — Vol. 24, no. 2. — P. 543—572.

[14] Ware R., Zelmanowitz J. Simple endomorphism rings // Am. Math. Mon. — 1970. — Vol. 77, no. 9. — P. 987—989.

[15] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[16] Yu H. P. On quasiduo rings // Glasgow Math. J. — 1995. — Vol. 37. — P. 21—31.
[17] Zemlicka J. Completely coretractable rings // Bull. Iran. Math. Soc. — 2013. — Vol. 39, no. 3. — P. 523—528.