Замечание
о коммутативных арифметических кольцах

Е. С. ГОЛОД
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: moizhess@crc.umos.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: арифметическое кольцо, аннулятор модуля, дистрибутивность.

Аннотация

Доказывается, что коммутативное кольцо с единицей R является арифметическим (т. е. решётка его идеалов дистрибутивна) в том и только том случае, когда для любого конечно порождённого (или любого конечно представимого) R-модуля M и всякого идеала I в R выполняется равенство $I + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/IM)$.

Abstract

E. S. Golod, A remark on commutative arithmetic rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 21—23.

It is proved that a commutative ring with identity R is arithmetic (i.e., the ideal lattice of R is distributive) if and only if for any finitely generated (or any finitely presented) R-module M and any ideal I of R the equality $I + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/IM)$ holds.

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, M — конечно порождённый R-модуль и I — некоторый идеал в R. Очевидно, что

$$I + \operatorname{Ann} M \subseteq \operatorname{Ann}(M/IM).$$

Хорошо известно (и очевидно), что идеалы слева и справа в этом соотношении имеют один и тот же радикал. В этой заметке доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны*:

1) *для любого конечно порождённого R-модуля M и всякого идеала I в R имеет место равенство*

$$I + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/IM); \qquad (*)$$

2) *для любого конечно представимого R-модуля M и всякого идеала I в R имеет место равенство* $(*)$;
3) *кольцо R арифметическое* (*т. е. решётка его идеалов дистрибутивна, подробности см. в* [1]);

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 21—23.

4) *для любого 2-порождаемого конечно представимого R-модуля M и всякого идеала I в R имеет место равенство* $(*)$.

Доказательство. Импликация $1) \Longrightarrow 4)$ проверяется непосредственно.

Докажем импликацию $4) \Longrightarrow 3)$. Пусть I — произвольный, а J, K — конечно порождённые идеалы в R. Применим равенство $(*)$ к идеалу I и 2-порождаемому конечно представимому модулю $M = R/J \oplus R/K$. Получим

$$I + J \cap K = I + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/IM) = (I + J) \cap (I + K).$$

Это доказывает дистрибутивность решётки идеалов в R.

Докажем импликацию $3) \Longrightarrow 2)$. Для доказательства равенства $(*)$ достаточно показать, что оно выполняется для локализации в любом максимальном идеале кольца R. Поэтому кольцо R можно считать локальным. Арифметическое локальное кольцо является цепным (множество идеалов упорядоченно по включению), и всякий конечно представимый модуль над таким кольцом разлагается в прямую сумму конечного числа циклических модулей:

$$M \cong R/I_1 \oplus \ldots \oplus R/I_s,$$

где можно считать, что

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_s.$$

Тогда

$$M/IM \cong R/(I + I_1) \oplus \ldots \oplus R/(I + I_s)$$

и

$$\operatorname{Ann}(M/IM) = I + I_1 = I + \operatorname{Ann} M.$$

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 1)$. Если F — конечно порождённый модуль, $\{N_i\}$ — некоторое направленное по включению множество подмодулей в F и

$$N = \bigcup_i N_i,$$

то

$$\operatorname{Ann}(F/N) = \bigcup_i \operatorname{Ann}(F/N_i).$$

Пусть теперь M — конечно порождённый R-модуль и $M \cong F/N$, где F — конечно порождённый свободный R-модуль и N — некоторый подмодуль в F. Пусть $\{N_i\}$ — множество всех конечно порождённых подмодулей в N. Тогда

$$N = \bigcup_i N_i$$

и

$$M/IM \cong F/(IF + N) = F/\bigcup_i (IF + N_i).$$

Так как согласно условию 2) для конечно представимых R-модулей F/N_i равенство $(*)$ выполняется, то имеем

$$\operatorname{Ann}(M/IM) = \operatorname{Ann}(F/IF+N) = \bigcup_i \operatorname{Ann}(F/IF+N_i) = \bigcup_i \bigl(I + \operatorname{Ann}(F/N_i)\bigr) = \\ = I + \bigcup_i \operatorname{Ann}(F/N_i) = I + \operatorname{Ann}(F/N) = I + \operatorname{Ann} M.$$

Таким образом, выполняется условие $(*)$. □

Выражаю признательность А. А. Туганбаеву за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 14-01-00416.

Литература

[1] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.