Первичный радикал для луп и Ω-луп. I

А. В. ГРИБОВ, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexey.gribov@yandex.ru

УДК 512.548.77+512.552.12

Ключевые слова: коммутант нормальных подлуп, первичный радикал лупы, Ω-лупа.

Аннотация

В работе рассмотрены основные свойства коммутантов нормальных подлуп заданной лупы. Предложено понятие первичного радикала для луп и дана его характеризация как множества строго энгелевых элементов. Определён Ω-первичный радикал Ω-луп и дано его поэлементное описание.

Abstract

A. V. Gribov, A. V. Mikhalev, Prime radical of loops and Ω-loops. I, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 25—42.

In this paper, main properties of a commutator of two normal subloops of a loop are considered. The notion of a prime radical of loops is introduced and its characterization as a set of strongly Engel elements is given. Also an Ω-prime radical of Ω-loops is defined and its elementwise characterization is given.

1. Мультипликативная группа и центр лупы

Приведём необходимые определения неассоциативных структур из работ [1, 4, 11, 15].

Определение 1.1. Группоидом называется непустое множество G с заданной бинарной операцией, обозначение $(G, \cdot)$. Группоид $(Q, \cdot)$ называется квазигруппой, если для любых $a, b \in Q$ уравнения $x \cdot a = b$, $a \cdot y = b$ всегда разрешимы, причём однозначно. Группоид $(L, \cdot)$ называется лупой, если $(L, \cdot)$ является квазигруппой с единицей.

Также можно определить лупу как универсальную алгебру: лупой называется универсальная алгебра $(L, 1, \cdot, /, \backslash)$ с тождествами

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad x \backslash (x \cdot y) = y, \quad x \cdot (x \backslash y) = y, \quad (y \cdot x) / x = y, \quad (y / x) \cdot x = y.$$

Определение 1.2. Непустое подмножество H лупы $(L, \cdot)$ называется подлупой, если $(H, \cdot)$ является лупой.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 25—42.

Пусть $(L, \cdot)$ является лупой и H — подлупа лупы L. Если $a \in L$, то определим множества $aH = \{a \cdot h \mid h \in H\}$ и $Ha = \{h \cdot a \mid h \in H\}$. Множества aH и Ha являются подмножествами в L и называются соответственно *левым и правым смежным классом* по подлупе H для элемента $a \in L$.

Будем говорить, что $(L, \cdot)$ *имеет левое* (*правое*) *разложение на классы по модулю* H, если множество всех левых (правых) классов по подлупе H является разбиением лупы L.

Теорема 1.1 [15]. *Пусть* $(H, \cdot)$ — *подлупа лупы* L. *Лупа* $(L, \cdot)$ *имеет левое* (*правое*) *разложение на классы по подлупе* H *тогда и только тогда, когда* $(a \cdot h)H = aH$ $(H(h \cdot a) = Ha)$ *для всех* $a \in L$, $h \in H$.

Определение 1.3. Пусть $(H, \cdot)$ — подлупа лупы $(L, \cdot)$. Тогда H называется нормальной подлупой, если для любых $x, y \in L$

$$xH = Hx, \quad (xH)y = x(Hy), \quad x(yH) = (xy)H.$$

Отметим, что если $(H, \cdot)$ — нормальная подлупа лупы $(L, \cdot)$, то лупа $(L, \cdot)$ имеет левое и правое разложение на смежные классы по подлупе H, причём они совпадают.

Определение 1.4. Пусть $(H, \cdot)$ — нормальная подлупа лупы $(L, \cdot)$. Тогда лупа $L \,/\, H = (\{aH \mid a \in L\}, \cdot)$ с операцией $xH \cdot yH = (xy)H$ называется фактор-лупой по нормальной подлупе $(H, \cdot)$.

Лемма 1.1 [11]. *Пересечение и объединение нормальных подлуп лупы являются нормальными подлупами.*

Рассмотрим понятие мультипликативной группы лупы. Пусть $(L, \cdot)$ — лупа. Для каждого $x \in L$ определим биективные отображения $L_x, R_x, M_x \colon L \to L$:

$$L_x(y) = xy, \quad R_x(y) = yx, \quad M_x(y) = y \setminus x, \quad y \in L.$$

Обратными к данным отображениям являются

$$L_x^{-1}(y) = x \setminus y, \quad R_x^{-1}(y) = y \,/\, x, \quad M_x^{-1}(y) = x \,/\, y, \quad y \in L,$$

поскольку

$$L_x\big(L_x^{-1}(y)\big) = L_x(x \setminus y) = x(x \setminus y) = y$$

и

$$L_x^{-1}\big(L_x(y)\big) = L_x^{-1}(xy) = x \setminus (xy) = y.$$

Аналогичными действиями можно показать корректность введённых отображений $R_x^{-1}(y)$ и $M_x^{-1}(y)$. А именно,

$$\begin{aligned}
R_x\big(R_x^{-1}(y)\big) &= R_x(y \,/\, x) = (y \,/\, x)x = y,\\
R_x^{-1}\big(R_x(y)\big) &= R_x^{-1}(yx) = (yx \,/\, x) = y,\\
M_x\big(M_x^{-1}(y)\big) &= M_x(x \,/\, y) = (x \,/\, y) \setminus x = y,\\
M_x^{-1}\big(M_x(y)\big) &= M_x^{-1}(y \setminus x) = x \,/\, (y \setminus x) = y.
\end{aligned}$$

Определение квазигруппы эквивалентно следующему: квазигруппа — это такой группоид $(Q, \cdot)$, что отображения L_x и R_x являются биекциями для всех $x \in Q$.

Определение 1.5. Мультипликативной группой $\mathrm{Mlt}(L)$ лупы L называется группа, порождённая всеми правыми и левыми трансляциями $\mathrm{Mlt}(L) = \langle L_x, R_x \colon x \in L\rangle$.

Группой внутренних отображений $\mathrm{Inn}(L)$ лупы L называется стабилизатор для 1 в группе $\mathrm{Mlt}(L)$.

Замечание 1.1. Отметим, что группа $\mathrm{Inn}(L)$ может не являться подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L)$, хотя для групп это верно.

Действительно, рассмотрим лупу $(L, \cdot)$ со следующей таблицей умножения:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	5	4	2	1
4	4	3	1	5	2
5	5	4	2	1	3

.

При этом $\mathrm{Inn}(L) = \langle (2,4,5), (3,5)\rangle$, $\mathrm{Aut}(L) \simeq Z_3$. Таким образом, группа $\mathrm{Inn}(L)$ не является подгруппой в $\mathrm{Aut}(L)$.

Определение 1.6. Полной мультипликативной группой $\mathrm{TotMlt}(L)$ лупы L называется группа

$$\mathrm{TotMlt}(L) = \langle L_x, R_x, M_x \colon x \in L\rangle.$$

Аналогично полной группой внутренних отображений $\mathrm{TotInn}(L)$ лупы L называется стабилизатор для 1 в группе $\mathrm{TotMlt}(L)$.

Лемма 1.2 [17]. *Пусть G — транзитивная группа подстановок на множестве X, $c \in X$. Для любого $y \in X$ определим $g_y \in G$ так, чтобы $g_y(c) = y$, причём $g_c = 1$. Если $G = \langle H\rangle$, то $G_c = \big\langle g^{-1}_{h(y)} h g_y \colon h \in H,\ y \in G\big\rangle$.*

Доказательство. Пусть $g \in G_c$. Так как $G = \langle H\rangle$, то существуют такие элементы $h_1, \ldots, h_n \in H \cup H^{-1}$, что $g = h_1 \cdots h_n$. Тогда

$$g = g_{h_1\cdots h_n(c)}\big(g^{-1}_{h_1\cdots h_n(c)} h_1 g_{h_2\cdots h_n(c)}\big) \cdots \big(g^{-1}_{h_{n-1}\cdots h_n(c)} h_{n-1} g_{h_n(c)}\big)\big(g^{-1}_{h_n(c)} h_n g_c\big) g_c^{-1}.$$

Заметим, что $g_{h_1\cdots h_n(c)} = g_{g(c)} = g_c = 1$, поэтому элемент g равен произведению элементов вида $g^{-1}_{h(y)} h g_y$, где $h \in H \cup H^{-1}$. Равенство

$$(g^{-1}_{h(y)} h g_y)^{-1} = g_y^{-1} h^{-1} g_{h(y)} = g^{-1}_{h^{-1}h(y)} h^{-1} g_{h(y)}$$

показывает, что элементы вида $g^{-1}_{h(y)} h g_y$, где $h \in H$, являются системой образующих. □

Определим биективные отображения

$$L_{x,y} = L_{xy}^{-1} L_x L_y, \quad R_{x,y} = R_{xy}^{-1} R_x R_y, \quad M_{x,y} = M_{y\backslash x}^{-1} M_x M_y,$$
$$T_x = R_x^{-1} L_x, \quad U_x = R_x^{-1} M_x.$$

Отображения $A^{\circ}_{x,y}$, $B^{\circ}_{x,y}$ задаются соотношениями

$$(z \cdot x) \circ y = A^{\circ}_{x,y}(z) \cdot (x \circ y), \quad y \circ (z \cdot x) = B^{\circ}_{x,y}(z) \cdot (y \circ x).$$

Лемма 1.3 (см. также [17]). *Пусть L — лупа. Тогда*

$$\mathrm{Inn}(L) = \langle L_{x,y}, R_{x,y}, T_x \colon x, y \in L \rangle = \langle A^{\cdot}_{x,y}, B^{\cdot}_{x,y} \colon x, y \in L \rangle.$$

Доказательство. Мультипликативная группа $G = \mathrm{Mlt}(L)$ транзитивно действует на $X = L$. В условиях леммы 1.2 для $c = 1$, $g_y = R_y$ и $H = \{L_x, R_x \colon x \in L\}$ группа $G_1 = \mathrm{Inn}(L)$ порождается множеством

$$\big\{R^{-1}_{L_x(y)} L_x R_y, R^{-1}_{R_x(y)} R_x R_y \colon x, y \in L\big\} = \{B^{\cdot}_{y,x}, A^{\cdot}_{y,x} \colon x, y \in L\}.$$

Отметим, что $A^{\cdot}_{y,x} = R_{x,y}$ and

$$B^{\cdot}_{y,x} = R^{-1}_{L_x(y)} L_x R_y = (R^{-1}_{xy} L_{xy})(L^{-1}_{xy} L_x L_y)(L_y^{-1} R_y) = T_{xy} L_{x,y} T_y^{-1}. \qquad \square$$

Заметим, что $\mathrm{Inn}(L) = 1$ тогда и только тогда, когда L является абелевой группой. Как и в случае групп, $\mathrm{Inn}(L)$ можно использовать для характеризации нормальных подлуп.

Лемма 1.4 (см. [11]). *Подлупа H лупы $(L, \cdot)$ является нормальной тогда и только тогда, когда $\varphi(H) = H$ для всех $\varphi \in \mathrm{Inn}(L)$.*

Полная группа внутренних отображений $\mathrm{TotInn}(L)$ также может использоваться для характеризации нормальных подлуп.

Лемма 1.5 (см. также [17]). *Пусть L — лупа. Тогда*

$$\mathrm{TotInn}(L) = \langle L_{x,y}, R_{x,y}, M_{x,y}, T_x, U_x \colon x, y \in L \rangle = \langle A^{\cdot}_{x,y}, B^{\cdot}_{x,y}, A^{\backslash}_{x,y} \colon x, y \in L \rangle.$$

Доказательство. Мультипликативная группа $G = \mathrm{TotMlt}(L)$ транзитивно действует на $X = L$. В условиях леммы 1.2 с $c = 1$, $g_y = R_y$ и $H = \{L_x, R_x, M_x \colon x \in L\}$ имеем, что $G_1 = \mathrm{TotInn}(L)$ порождается множеством

$$\big\{R^{-1}_{L_x(y)} L_x R_y, R^{-1}_{R_x(y)} R_x R_y, R^{-1}_{M_x(y)} M_x R_y \colon x, y \in L\big\} = \{B^{\cdot}_{y,x}, A^{\cdot}_{y,x}, A^{\backslash}_{y,x} \colon x, y \in L\}.$$

По лемме 1.3

$$\langle A^{\cdot}_{x,y}, B^{\cdot}_{x,y} \colon x, y \in L \rangle = \langle L_{x,y}, R_{x,y}, T_x \colon x, y \in L \rangle.$$

Теперь отметим, что

$$A^{\backslash}_{y,x} = R^{-1}_{y\backslash x)} M_x R_y = (R^{-1}_{y\backslash x} M_{y\backslash x})(M^{-1}_{y\backslash x} M_x M_y)(M_y^{-1} R_y) = U_{y\backslash x} M_{x,y} U_y^{-1}. \qquad \square$$

Лемма 1.6 (см. также [17]). *Подлупа H лупы $(L, \cdot)$ является нормальной тогда и только тогда, когда $f(H) = H$ для всех $f \in \mathrm{TotInn}(L)$.*

Доказательство. Ввиду лемм 1.4 и 1.5 нужно показать только, что если $N \trianglelefteq L$, то $U_x(a) = (a \setminus x) \,/\, x \in N$ и $M_{x,y}(a) = (y \setminus x) \,/\, \big((a \setminus y)x\big) \in N$ для всех $x, y \in L$ и $a \in N$. Пусть ϕ — гомоморфизм из L в такую лупу, что $N = \ker(\phi)$. Тогда

$$\phi\big(U_x(a)\big) = \big(\phi(a) \setminus \phi(x)\big) \,/\, \phi(x) = U_{\phi(x)}\big(\phi(a)\big) = U_{\phi(x)}(1) = 1.$$

Аналогично

$$\phi\big(M_{x,y}(a)\big) = M_{\phi(x),\phi(y)}\big(\phi(a)\big) = M_{\phi(x),\phi(y)}(1) = 1. \qquad \square$$

В [17] отмечено, что в общем случае ни одно из этих отображений не может быть удалено из приведённых порождающих отображений группы $\mathrm{TotInn}(L)$. Однако для определённых классов луп можно сократить количество порождающих.

Следствие 1.1. *Пусть $(L, \cdot)$ — лупа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если L — IP-лупа, то $\mathrm{TotInn}(L) = \langle L_{x,y}, T_x, J \colon x, y \in L\rangle$.*
2. *Если L — коммутативная лупа, то $\mathrm{TotInn}(L) = \langle L_{x,y}, M_{x,y}, U_x \colon x, y \in L\rangle$.*
3. *Если L — группа, то $\mathrm{TotInn}(L) = \langle T_x, J \colon x, y \in L\rangle$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть L является IP-лупой. Имеем, что $L_{x^{-1}} = L_x^{-1}$, $R_{x^{-1}} = R_x^{-1}$ и $M_x(y) = y \setminus x = y^{-1}x = R_xJ(y)$ и $J = R_x^{-1}M_x = U_x$. Таким образом, M_x и J являются внутренними отображениями. По лемме 1.5 необходимо показать, что отображения $M_{x,y}$, $R_{x,y}$ можно выразить через $L_{x,y}$, T_x, J. Заметим, что $M_xM_x(y) = M_x(y^{-1}x) = x^{-1}yx = T_{x^{-1}}(y)$. Далее,

$$\begin{aligned} M_{x,y} = M_{y^{-1}x}^{-1}M_xM_y = (R_{y^{-1}x}J)^{-1}R_xJM_y = JR_{y^{-1}x}^{-1}R_xJM_y = \\ = JR_{y^{-1}x}^{-1}R_xR_{y^{-1}}R_yJM_y = JR_{x,y^{-1}}M_yM_y = JR_{x,y^{-1}}T_{y^{-1}}. \end{aligned}$$

Более того, из IP-свойства следует, что

$$L_{x,y}(z)^{-1} = \big((xy)^{-1} \cdot x(yx)\big)^{-1} = (z^{-1}y^{-1})x^{-1} \cdot (y^{-1}x^{-1})^{-1} = R_{x^{-1},y^{-1}}(z^{-1}),$$

т. е. $JL_{x,y}J = R_{x^{-1},y^{-1}}$.

Если L — коммутативная лупа, то $R_{x,y} = L_{x,y}$ и $T_x = 1$, поэтому второе утверждение следует из первого.

Если L является группой, то $L_{x,y} = 1$, поэтому третье утверждение также следует из первого. $\square$

Далее рассмотрим понятие центра лупы.

Определение 1.7. Центром лупы $(L, \cdot)$ называется множество

$$Z(L) = \{a \in L \colon ax = xa,\ a(xy) = (ax)y,\ x(ay) = (xa)y,\ x(ya) = (xy)a\}$$

для всех x, y из L.

Наряду с центром часто рассматривают ядра лупы.

Определение 1.8. Левым, средним и правым ядрами лупы $(L, \cdot)$ называются множества

$$N_\lambda = \{a \in L \mid a(xy) = (ax)y \text{ для всех } x, y \in L\},$$
$$N_\mu = \{a \in L \mid (xa)y = x(ay) \text{ для всех } x, y \in L\},$$
$$N_\rho = \{a \in L \mid (xy)a = x(ya) \text{ для всех } x, y \in L\}$$

соответственно. Ядром лупы L называется множество $N = N_\lambda \cap N_\mu \cap N_\rho$.

Рассмотрим некоторые свойства центра и ядра.

Теорема 1.2 (см. [15]). *Пусть $(L, \cdot)$ — лупа с ядром N и центром Z. Тогда N и Z являются подгруппами, причём Z — коммутативная подгруппа группы $(N, \cdot)$.*

Теорема 1.3 (см. [15]). *Пусть $(L, \cdot)$ — лупа с центром Z. Тогда Z является нормальной подлупой лупы $(L, \cdot)$.*

Некоторые другие свойства центра содержатся в [2].

2. Коммутаторы в лупах, коммутант нормальных подлуп

Рассмотрим определение коммутатора и новое с точки зрения теории групп понятие ассоциатора.

Определение 2.1. Пусть $(L, \cdot)$ — лупа. Коммутатором элементов $x, y \in L$ называется элемент $[x, y] \in L$, такой что $xy = (yx) \cdot [x, y]$.

Ассоциатором элементов $x, y, z \in L$ называется элемент $[x, y, z] \in L$, такой что $(xy)z = \big(x(yz)\big)[x, y, z]$. Ассоциаторной подлупой $A(L)$ называется наименьшая нормальная подлупа лупы $(L, \cdot)$, такая что $L \,/\, A(L)$ является группой, или, что эквивалентно, наименьшая нормальная подлупа лупы $(L, \cdot)$, содержащая все ассоциаторы $[x, y, z]$ лупы $(L, \cdot)$.

Определение 2.2. Производной подлупой L' лупы $(L, \cdot)$ называется наименьшая нормальная подлупа, такая что $L \,/\, L'$ является абелевой группой. Эквивалентно, это наименьшая нормальная подлупа, содержащая все коммутаторы $[x, y]$ и ассоциаторы $[x, y, z]$ лупы L.

Лупа $(L, \cdot)$ называется разрешимой, если $L_{[n]} = 1$ для некоторого n, где $L_{[0]} = L$, $L_{[i+1]} = L'_{[i]}$.

Перечисленные выше понятия (нормальность, производная, центр) сочетаются с обычными теоретико-групповыми определениями. В [11] показано, что обычные теоретико-групповые определения полностью корректны для луп Муфанг.

Однако теория коммутаторов и ассоциаторов в значительной степени отличается от теоретико-группового случая.

Теория коммутаторов в лупах впервые встречается в работе [16]. В [14] теория коммутаторов в лупах рассмотрена с точки зрения коммутаторов конгруэнций лупы как универсальной алгебры. Отметим также ряд результатов из [17].

Рассмотрим лупу как универсальную алгебру A. Множество конгруэнций образует решётку с наибольшим $1_A = A \times A$ и наименьшим $0_A = (a,a)\colon a \in A$ элементами. Пусть α, β, δ — конгруэнции лупы A. Скажем, что α централизует β над δ (обозначение $C(\alpha,\beta;\delta)$), если для любого терма t, любой пары элементов a и b, такой что $a\ \alpha\ b$, и для любых n пар $u_i\ \beta\ v_i$, $i = 1,\dots,n$, из того, что $t(a,u_1,\dots,u_n)\ \delta\ t(a,v_1,\dots,v_n)$, следует, что $t(b,u_1,\dots,u_n)\ \delta\ t(b,v_1,\dots,v_n)$.

Коммутатором $[\alpha,\beta]$ конгруэнций α, β называется наименьшая конгруэнция δ, такая что α централизует β над δ (т. е. $C(\alpha,\beta;\delta)$). В [14] разработана теория данной операции над конгруэнциями.

Обозначим через $\mathrm{Cg}(X)$ конгруэнцию, порождаемую множеством конгруэнций X, и пусть $\bar u = (u_1,\dots,u_n)$.

Теорема 2.1 (см. [17]). *Пусть V — многообразие всех луп, $\mathcal{W}$ — множество отображений, порождающих все полные мультипликативные группы в V. Тогда*

$$[\alpha,\beta] = \mathrm{Cg}\big((w_{\bar u}(a), w_{\bar v}(a))\colon w \in \mathcal{W},\ 1\ \alpha\ a,\ u_i\ \beta\ v_i)$$

для всех конгруэнций α, β любой лупы L из V. □

Ранее было установлено, что порождающим полной мультипликативной группы является множество $\{L_{x,y}, R_{x,y}, M_{x,y}, T_x, U_x\}$.

В следующей теореме рассматривается коммутатор конгруэнций в конечных лупах (для луп с конечными правыми и левыми трансляциями).

Теорема 2.2 (см. [17]). *Пусть V — многообразие всех луп, $\mathcal{W}$ — множество отображений, порождающих все мультипликативные группы в V. Если для $L \in V$ существует такое $n > 0$, что $L_x^n = R_x^n = 1$ для любого $x \in L$, то*

$$[\alpha,\beta] = \mathrm{Cg}\Big(\big(w_{\bar u}(a), w_{\bar v}(a)\big)\colon w \in \mathcal{W},\ 1\ \alpha\ a,\ u_i\ \beta\ v_i\Big)$$

для всех конгруэнций α, β лупы L. □

Лемма 2.1 (см. также [17]). *Пусть $\mathcal{W}$ — множество всех внутренних отображений, $w \in \mathcal{W}$. Также пусть $\equiv$ — конгруэнция, которая индуцируется множеством $\mathcal{W} \setminus \{w\}$, обозначим её $\mathrm{Cg}\Big(\big(w_{\bar u}(a), w_{\bar v}(a)\big)\colon w \in \mathcal{W} \setminus \{w\},\ 1\ \alpha\ a,\ u_i\ \beta\ v_i\Big)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение $w = U_x$ может быть удалено из множества $\mathcal{W}$, если $[a,x,b] \equiv 1$ для каждой лупы L с конгруэнциями α, β и $1\ \alpha\ a$, $1\ \beta\ b$, $x \in L$.*
2. *Отображение $w = T_x$ может быть удалено из множества $\mathcal{W}$, если $[a,b] \equiv 1$, $[a,b,x] \equiv 1$, $[b,a,x] \equiv 1$, $[x,b,a] \equiv 1$ для каждой лупы L с конгруэнциями α, β и $1\ \alpha\ a$, $1\ \beta\ b$, $x \in L$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Тождество $[a,x,b] \equiv 1$ может быть записано как $ax \cdot b \equiv a \cdot xb$ или $R_bR_x(a) = R_{xb}(a)$. Заменив x на $a \setminus x$ и разделив обе части слева на a, получим $a \setminus (xb) = (a \setminus x)b$ или $M_{xb} = R_bM_x(a)$ для каждого $1 \; \alpha \; a$, $1 \; \beta \; b$, $x \in L$. Заметим, что если $1 \; \alpha \; a$, $u \; \beta \; v$, то $1 = M_v^{-1}R_v(1) \; \alpha \; M_v^{-1}R_v(a)$ и $(v \setminus u) \; \beta \; 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} U_uU_v^{-1}(a) &= R_u^{-1}M_uM_v^{-1}R_v(a) = R_u^{-1}M_{v(v\setminus u)}M_v^{-1}R_v(a) \equiv \\ &\equiv R_u^{-1}R_{v\setminus u}M_vM_v^{-1}R_v(a) = R_u^{-1}R_{v\setminus u}R_v(a) \equiv \\ &\equiv R_u^{-1}R_{v(v\setminus u)}(a) = R_u^{-1}R_u(a) = a. \end{aligned}$$

Таким образом, $U_u(a) \equiv U_v(a)$.

Докажем утверждение 2. Условия могут быть записаны как $ab \equiv ba$, $a \cdot bx \equiv ab \cdot x$, $b \cdot ax \equiv ba \cdot x$, $x \cdot ba \equiv xb \cdot a$ или $L_b(a) = R_b(a)$, $R_{bx}(a) = R_xR_b(a)$, $L_bR_x(a) = R_xL_b(a)$, $L_xL_b(a) = L_{xb}(a)$ для всех $1 \; \alpha \; a$, $1 \; \beta \; b$, $x \in L$. Заметим, что если $1 \; \alpha \; a$, $u \; \beta \; v$, то $1 = L_v^{-1}R_v(1) \; \alpha \; L_v^{-1}R_v(a)$ и $(v \setminus u) \; \beta \; 1$. В этом случае

$$T_uT_v^{-1}(a) = R_u^{-1}L_uL_v^{-1}R_v(a) = R_u^{-1}L_{(u/v)v}L_v^{-1}R_v(a).$$

Так как $[u \,/\, v, v, L_v^{-1}R_v(a)] \equiv 1$, то

$$R_u^{-1}L_{(u/v)v}L_v^{-1}R_v(a) \equiv R_u^{-1}L_{u/v}L_vL_v^{-1}R_v(a) = R_u^{-1}L_{u/v}R_v(a).$$

Так как $[u \,/\, v, a, v] \equiv 1$, то

$$R_u^{-1}L_{u/v}R_v(a) \equiv R_u^{-1}R_vL_{u/v}(a).$$

Так как $[a, u \,/\, v] \equiv 1$, то

$$R_u^{-1}R_vL_{u/v}(a) \equiv R_u^{-1}R_vR_{u/v}(a).$$

Наконец, так как $[a, u \,/\, v, v] \equiv 1$, то

$$R_u^{-1}R_vR_{u/v}(a) \equiv R_u^{-1}R_{(u/v)v}(a) = R_u^{-1}R_u(a) = a.$$

Таким образом, $T_u(a) \equiv T_v(a)$. □

Теперь предположим, что $R_{x,y} \in \mathcal{W}$. Тогда $R_{b,x}(a) \equiv R_{1,x}(a) = 1$, где $1 \; \alpha \; a$, $1 \; \beta \; b$, $x \in L$, значит, $[a,x,b] \equiv 1$.

Из теоремы 2.1 и леммы 2.1 с учётом вида порождающих отображений для мультипликативных групп выводим следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть L — лупа и α, β — конгруэнции на L. Тогда*

$$[\alpha,\beta] = \mathrm{Cg}\Big(\big(w_{\bar u}(a), w_{\bar v}(a)\big) \colon w \in \mathcal{W},\ 1 \; \alpha \; a,\ u_i \; \beta \; v_i\Big)$$

для всех конгруэнций α, β лупы L, причём

1) *если L — лупа, то $\mathcal{W} = \{L_{x,y}, R_{x,y}, T_x, M_{x,y}\}$;*
2) *если L — IP-лупа, то $\mathcal{W} = \{L_{x,y}, T_x\}$;*
3) *если L — коммутативная лупа, то $\mathcal{W} = \{L_{x,y}, M_{x,y}\}$;*
4) *если L — группа, то $\mathcal{W} = \{T_x\}$.*

Теперь определим зависимость между нормальными подлупами и некоторыми конгруэнциями. Пусть N — нормальная подлупа лупы L, и пусть γ_N — конгруэнция, заданная на лупе L следующим образом:

$$a\, \gamma_N\, b \Longleftrightarrow a \,/\, b \in N.$$

Если α — конгруэнция на L, то $N_\alpha = \{a \in L \colon a\ \alpha\ 1\}$ — нормальная подлупа лупы L.

Соответствие $\alpha \to N_\alpha$, $N \to \gamma_N$ между нормальными лупами и конгруэнциями позволяет сформулировать теорему 2.1 в терминах нормальных подлуп.

Вначале определим коммутант двух нормальных подлуп A, B лупы L:

$$[A, B]_L = N_{[\gamma_A, \gamma_B]}.$$

В этих определениях теорема 2.1 примет следующий вид.

Теорема 2.3. *Пусть L — лупа и $\mathcal{W}$ — множество отображений, порождающих группу $\mathrm{TotInn}(L)$. Тогда*

$$[A, B]_L = \mathrm{Ng}(w_{\bar{u}}(a) \,/\, w_{\bar{v}}(a) \colon w \in W,\ a \in A,\ u_i \,/\, v_i \in B),$$

где $\mathrm{Ng}(X)$ — наименьшая нормальная подлупа, содержащая множество X.

Отметим, что данная характеризация сочетается с определением коммутанта для групп. Пусть L — группа и A, B — нормальные подгруппы L. Тогда $T_y(x) = y^{-1}xy$. По следствию 2.1 получим

$$[A, B]_L = \langle [a, u] \,/\, [a, v] \colon a \in A,\ u \,/\, v \in B \rangle.$$

Пусть

$$N_1 = \langle [a, u] \,/\, [a, v] \colon a \in A,\ u \,/\, v \in B \rangle, \quad N_2 = \langle [a, b] \colon a \in A,\ b \in B \rangle.$$

Выберем $u = b \in B$ и $v = 1$. Тогда получим, что $[a, b] = [a, u] \,/\, [a, v]$ и $u \,/\, v \in B$, т. е. $N_2 \subseteq N_1$. Обратно, $[a, u] \,/\, [a, v] = a^{-1}u^{-1}auv^{-1}a^{-1}va = 1$ в группе $L \,/\, N_2$. Значит, множители $uv^{-1} \in B$ и $a \in A$ коммутируют и $N_1 \subseteq N_2$.

В [17] приведён пример лупы, показывающий, что в общем случае нельзя уменьшить множество порождающих элементов коммутанта.

Следствие 2.2. *Пусть L — лупа, A, B — нормальные подлупы лупы L. Тогда*

$$[A, B]_L = \mathrm{Ng}([a, b], [b, a, x], w_{u_1, u_2}(a) \,/\, w_{v_1, v_2}(a) \colon \\ w \in \{L, R, M\},\ a \in A,\ b \in B,\ u_i \,/\, v_i \in B),$$

причём

1) *если L — IP-лупа, то*

$$[A, B]_L = \mathrm{Ng}([a, b], L_{u_1, u_2}(a) \,/\, L_{v_1, v_2}(a) \colon a \in A,\ b \in B,\ u_i \,/\, v_i \in B);$$

2) *если L — коммутативная лупа, то*

$$[A, B]_L = \mathrm{Ng}(w_{u_1, u_2}(a) \,/\, w_{v_1, v_2}(a) \colon w \in \{L, M\},\ a \in A,\ u_i \,/\, v_i \in B);$$

3) *если* L — *группа, то*

$$[A, B]_L = \langle [a, b] \colon a \in A, \ b \in B \rangle.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2.1. Пусть N — подлупа лупы L относительно умножения справа.

Проверим, что N удовлетворяет условиям 1) и 2) леммы 2.1. В лупе L/N для всех $a \in A$, $b \in B$, $x \in L$ выполнено $R_{x,b}(a) = R_{x,1}(a) = a$, поэтому $[a, x, b] = 1$ и $R_{b,x}(a) = R_{1,x}(a) = a$. Следовательно, $[a, b, x] = 1$ и $L_{x,b}(a) = L_{x,1}(a) = a$. Значит, $[x, b, a] = 1$. Теперь по теореме 2.1, с исключением отображений U_x, T_x из порождающих, первое утверждение верно.

Для доказательства пункта 1) достаточно показать, что $[b, a, x] \in N$ для всех $a \in A$, $b \in B$, $x \in L$. Данное условие эквивалентно тому, что $b \cdot ax = ba \cdot x$, $ax = b^{-1}(ba \cdot x)$. Далее, $a \cdot (ba)^{-1}x = b^{-1}x$, $(ba)^{-1}x = a^{-1} \cdot b^{-1}x$, и по IP-условию $[a^{-1}, b^{-1}, x] = 1$.

Пункт 2) следует из предыдущего при условии, что $L_{x,y} = 1$.

Пункт 3) вытекает из пункта 3) следствия 2.1. □

Рассмотрим лупу, в которой подлупа, порождённая частными, не является нормальной. Пусть L — коммутативная лупа со следующей таблицей умножения:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	1	0	6	7	4	5
3	3	2	0	1	7	6	5	4
4	4	5	6	7	3	0	1	2
5	5	4	7	6	0	3	2	1
6	6	7	4	5	1	2	3	0
7	7	6	5	4	2	1	0	3

Подлупа $A = \{0, 1, 2, 3\}$ является нормальной в L. Однако подлупа

$$[A, A]_L = \langle L_{u_1,u_2}(a) \,/\, L_{v_1,v_2}(a), M_{u_1,u_2}(a) \,/\, M_{v_1,v_2}(a) \colon a \in A, \ u_i \,/\, v_i \in A \rangle = \{0, 1\}$$

не является нормальной.

Таким образом, нельзя отказаться от нормального замыкания множества частных. Однако если группа внутренних отображений является подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Inn}(L) \subseteq \mathrm{Aut}(L)$, то подлупа, порождённая частными, будет нормальной.

Рассмотрим одно необходимое в дальнейшем свойство коммутанта.

Лемма 2.2. *Пусть* A, U, V — *нормальные подлупы лупы* $(L, \cdot)$. *Тогда в фактор-лупе* $L \,/\, A$ *неравенство* $[\bar{U}, \bar{V}] \neq \bar{E}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $[U, V] \nsubseteq A$.

3. Первичный радикал лупы

При рассмотрении алгебраических систем основной задачей является построение структурной теории, которая сводит изучение к более простым системам. Одной из конструкций, осуществляющих такое сведение, является радикал. После того как в 1950-х годах А. Г. Курош [5] и С. Амицур [9] ввели аксиоматическое понятие радикала для колец и алгебр, теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры. Понятие радикала в теории групп, пережив ряд редакций, окончательно оформилось к началу шестидесятых годов в определении, предложенном А. Г. Курошем в [3]. Тогда же А. Г. Курош обратил внимание на аналогию между разрешимыми нормальными подгруппами и нильпотентными идеалами, позволившую К. К. Щукину ввести определение первичного радикала групп [8] по аналогии с определением первичного радикала колец. Характеризация первичного радикала группы как множества строго энгелевых элементов крайне близка к его кольцевому прототипу, применяемому в теории ассоциативных колец и алгебр.

Пусть A, B — нормальные подлупы лупы $(L,\cdot)$. Тогда из соотношения $[A,B] \subseteq P$ в общем случае не следует хотя бы одно из включений $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. В связи с этим рассмотрим следующее определение.

Определение 3.1. Нормальная подлупа P лупы $(L,\cdot)$ называется первичной нормальной подлупой, если из соотношения $[A,B] \subseteq P$ следует, что либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$.

Пусть теперь $[\mathrm{Ng}(a),\mathrm{Ng}(b)] \subseteq P$, где P — первичная нормальная подлупа и $a,b \in L$. Если $a \notin P$, то $\mathrm{Ng}(a) \nsubseteq P$. Ввиду первичности нормальной подлупы P $\mathrm{Ng}(b) \nsubseteq P$, значит, $b \in P$. Аналогично если $b \notin P$, то $\mathrm{Ng}(a) \nsubseteq P$, значит, $a \in P$.

Обратно, предположим, что для нормальной подлупы P лупы L из соотношения $[\mathrm{Ng}(a),\mathrm{Ng}(b)] \subseteq P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$, где $a,b \in L$. Теперь если для нормальных подлуп A, B лупы L выполняется включение $[A,B] \subseteq P$ и, например, $A \nsubseteq P$, то выберем такой элемент b, что $b \in B$, но $b \notin P$. Для любого $a \in A$ выполняется включение $[\mathrm{Ng}(a),\mathrm{Ng}(b)] \subseteq [A,B] \subseteq P$. Так как $b \notin P$ и $\mathrm{Ng}(b) \nsubseteq P$, то ввиду определения первичной подлупы $\mathrm{Ng}(a) \subseteq P$ и $a \in P$.

Таким образом, мы получаем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Нормальная подлупа P лупы $(L,\cdot)$ является первичной нормальной подлупой, если из соотношения $[\mathrm{Ng}(a),\mathrm{Ng}(b)] \subseteq P$ для $a,b \in L$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$.*

Определение 3.2. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ элементов лупы L называется $\mathfrak{m}$-последовательностью, если в L существуют элементы $b_0, b_1, \ldots$, такие что $a_{i+1} = [b_i', b_i'']$, где $b_i', b_i'' \in \mathrm{Ng}(a_i)$.

Теперь определим первичную лупу.

Определение 3.3. Лупа $(L,\cdot)$ называется первичной, если для любых двух её нормальных подлуп A, B из равенства $[A,B]_L = E$ следует, что либо $A = E$, либо $B = E$, где E — единичная подлупа лупы L.

Пример 3.1. Примером первичной лупы является простая некоммутативная и неассоциативная лупа.

Отметим связь между понятиями первичной лупы и первичной нормальной подлупы.

Лемма 3.2. *Нормальная подлупа* $(P,\cdot)$ *лупы* $(L,\cdot)$ *является первичной тогда и только тогда, когда фактор-лупа* $L\,/\,P$ *первична.*

Доказательство. Пусть $L\,/\,P$ — первичная подлупа и A, B — нормальные подлупы лупы L, такие что $[A,B]\subseteq P$. Тогда по лемме 2.2 $[\bar{A},\bar{B}]=\bar{E}$. Значит, либо $\bar{A}=\bar{E}$, либо $\bar{B}=\bar{E}$, откуда следует, что $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$, т. е. нормальная подлупа P первична.

Обратно, если P — первичная нормальная подлупа лупы L и нормальные подлупы $\bar{A}=A\,/\,P$, $\bar{B}=B\,/\,P$ лупы $\bar{L}=L\,/\,P$ удовлетворяют равенству $[\bar{A},\bar{B}]=\bar{E}$, то $[A,B]\subseteq P$, что означает, что $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$. Следовательно, $\bar{A}=\bar{E}$ или $\bar{B}=\bar{E}$, т. е. L — первичная лупа. □

Теперь введём понятие первичного радикала.

Определение 3.4. Пересечение всех нормальных первичных подлуп лупы $(L,\cdot)$ называется первичным радикалом $\mathrm{rad}(L)$ лупы L.

Замечание 3.1. Пусть $\{P_i\}$, $i\in I$, — убывающая цепочка нормальных первичных подлуп лупы L. Тогда $\bigcap P_i$ — нормальная первичная подлупа. Согласно лемме Цорна каждая первичная подлупа содержит минимальную первичную подлупу. Поэтому первичный радикал — это пересечение всех минимальных первичных подлуп.

Определение 3.5. Пусть $(L,\cdot)$ — лупа. Элемент $a\in L$ называется *строго энгелевым*, если в любой последовательности $a_0,a_1,\ldots$ элементов лупы L, удовлетворяющей условию $a_0=a$, $a_{i+1}\in[\mathrm{Ng}(a_i),\mathrm{Ng}(a_i)]_L$, все элементы начиная с некоторого номера равны 1.

Данное определение согласуется с определением строго энгелевых элементов для групп (элемент g группы $(G,\cdot)$ называется *строго энгелевым*, если в любой последовательности $g_0,g_1,\ldots$ элементов группы G, удовлетворяющей условию $a_0=a$, $a_{i+1}\in\big[[l_i,g_i],g_i\big]$ для всех $l_i\in G$, начиная с некоторого номера все элементы равны 1). В случае если G является группой, множества $\big[[G,g],g\big]$ и $[\mathrm{Ng}(g),\mathrm{Ng}(g)]$ совпадают [8].

Замечание 3.2. Если элемент a_r из последовательности для строго энгелевых элементов принадлежит нормальной подлупе A лупы L, то все элементы этой последовательности a_i, $i>r$, содержатся в A. Рассмотрим ещё одну нормальную подлупу B, пересекающуюся с последовательностью $a_0,a_1,\ldots$, т. е. содержащую начиная с некоторого a_s все последующие члены этой последовательности. Тогда все члены последовательности, начиная с a_t, $t=\max(r,s)$, содержатся в $A\cap B$.

Теорема 3.1. *Первичный радикал* $\mathrm{rad}(L)$ *лупы* $(L,\cdot)$ *совпадает с множеством всех строго энгелевых элементов.*

Доказательство. Покажем сначала, что если элемент a лупы L не принадлежит первичному радикалу, то он не является сторого энгелевым. Пусть $a \notin \mathrm{rad}(L)$, т. е. существует нормальная первичная подлупа A, такая что $a \notin A$. Тогда $\mathrm{Ng}(a) \nsubseteq A$. Следовательно, образ нормальной подлупы $\mathrm{Ng}(a)$ в фактор-лупе $L \,/\, A$ не является единицей: $\overline{\mathrm{Ng}(a)} \neq \bar{e}$. Поэтому согласно определению первичной лупы $\left[\overline{\mathrm{Ng}(a)}, \overline{\mathrm{Ng}(a)}\right] \neq \bar{e}$. Значит, $[\mathrm{Ng}(a), \mathrm{Ng}(a)] \nsubseteq A$. Пусть $a_0 = a$. Выберем элемент $a_1 \in [\mathrm{Ng}(a), \mathrm{Ng}(a)] \setminus A$. Элемент a_1 не принадлежит первичному радикалу $\mathrm{rad}(L)$. Продолжая процесс, построим необрывающуюся последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_i \in [\mathrm{Ng}(a_{i-1}), \mathrm{Ng}(a_{i-1})]$. Таким образом, элемент a не является строго энгелевым.

Пусть теперь элемент $a \in L$ не является строго энгелевым. Тогда существует последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_i \in [\mathrm{Ng}(a_{i-1}), \mathrm{Ng}(a_{i-1})]$, все элементы которой отличны от единицы. Рассмотрим максимальную нормальную подлупу P, не содержащую ни одного элемента данной последовательности. Пусть U, V — нормальные подлупы лупы L, строго содержащие подлупу P. Ввиду максимальности подлупы P подлупы U, V пересекаются с данной последовательностью. Значит, начиная с какого-то натурального числа k выполняются условия $a \in U \cap V$. Таким образом, $a_k \in [U, V]$ и коммутант $[U, V]$ образов подлуп U, V в фактор-лупе $L \,/\, P$ не равен единичной подлупе E. Тогда $L \,/\, P$ — первичная лупа, и следовательно, P — первичная нормальная подлупа. Возникает противоречие с определением первичного радикала. □

Теорема 3.2. *Если $R = \mathrm{rad}(L)$ — первичный радикал лупы $(L, \cdot)$, то первичный радикал $\mathrm{rad}(L \,/\, R)$ фактор-лупы $L \,/\, R$ совпадает с единичной подлупой, т. е.*

$$\mathrm{rad}\big(L \,/\, \mathrm{rad}(L)\big) = E.$$

Доказательство. Пусть элемент $\bar{a}$ принадлежит радикалу лупы $L \,/\, R$. Тогда этот элемент содержится в каждой первичной подлупе лупы $L \,/\, R$. Если элемент $\bar{a}$ лупы $L \,/\, R$ отличен от единичного элемента, то элемент a лупы L не содержится в её радикале R. Следовательно, в лупе L существует такая первичная нормальная подлупа P, что $a \notin P$. Но фактор-лупа $P \,/\, R$ является первичной нормальной подлупой лупы L/R, причём $\bar{a}$ не содержится в P/R. Это противоречит выбору элемента $\bar{a}$. Таким образом, элемент $\bar{a}$ равен единице. □

4. Первичный радикал Ω-лупы

Понятия операторных групп и Ω-группы используют аналогию между нормальными подгруппами группы и идеалами колец. В [4, 10, 13] были отмечены различные свойства Ω-группы.

В [10, 11] предполагалась возможность выполнения некоторых свойств Ω-групп и для Ω-луп, однако детально это понятие не рассматривалось.

По аналогии с определением Ω-группы введём понятие Ω-лупы.

Определение 4.1. Лупа $(L, +)$ (необязательно коммутативная или ассоциативная) называется лупой с операторами или Ω-лупой, если в L задана, помимо сложения, ещё система n-арных алгебраических операций Ω, причём для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие $00\ldots0\omega = 0$.

Для удобства будем использовать для лупы $(L, +)$ аддитивную запись; в частности, нулевой элемент этой лупы будет обозначаться символом 0.

При пустой системе операций Ω мы получаем понятие лупы. Ω-лупа превращается в кольцо, если аддитивная лупа этой Ω-лупы коммутативна и ассоциативна (т. е. является абелевой), а система операций Ω состоит из одного бинарного умножения, связанного со сложением законами дистрибутивности.

Ω-лупу L можно также считать универсальной алгеброй относительно операций аддитивной лупы и операций из Ω. Всякая подалгебра этой алгебры будет подлупой аддитивной лупы и поэтому содержит 0, при этом она сама является Ω-лупой. Поэтому можно говорить не о подалгебрах, а об Ω-подлупах Ω-лупы L.

Определение 4.2. Непустое подмножество A Ω-лупы L называется идеалом в L, если выполняются следующие два условия:

1) A является нормальной подлупой аддитивной лупы;
2) для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$, любого элемента $a \in A$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место включение

$$-(x_1x_2\ldots x_n\omega) + x_1\ldots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1}\ldots x_n\omega \in A.$$

Для луп понятие идеала совпадает с понятием нормальной подлупы, так как ввиду пустоты системы операций Ω условие 2) отпадает.

Заметим, что условие 2) может быть переписано в виде

$$x_1\ldots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1}\ldots x_n\omega \in (x_1x_2\ldots x_n\omega) + A$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$, где справа стоит смежный класс по нормальной подлупе A, порождённый элементом $x_1x_2\ldots x_n\omega$. Применяя это включение несколько раз, мы получим следующеее утверждение.

Лемма 4.1. *Для любого идеала A Ω-лупы L, любой n-арной операции $\omega \in \Omega$, любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ имеет место включение*

$$(a_1 + x_1)(a_2 + x_2)\ldots(a_n + x_n)\omega \in x_1x_2\ldots x_n\omega + A.$$

Лемма 4.2. *Всякий идеал Ω-лупы L является её нормальной Ω-подлупой.*

Доказательство. По определению идеал A является нормальной подлупой аддитивной лупы, а из предыдущей леммы при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ следует, что для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ справедливо включение $a_1a_2\ldots a_n\omega \in A$. $\square$

Ясно, что идеалами Ω-лупы L будут, в частности, сама L и нулевая подлупа O. Если в L нет других идеалов, то это будет простая Ω-лупа. Пересечение любой системы идеалов Ω-лупы L само будет идеалом, а поэтому можно говорить об идеале, порождённом любой системой элементов M. Заметим, что идеал, порождённый системой идеалов A_i, $i \in I$, Ω-лупы L, совпадает с порождённой этими идеалами нормальной подлупой B аддитивной лупы. Действительно, подлупа $B = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ является нормальной подлупой аддитивной лупы L как объединение нормальных подлуп. Теперь пусть даны n-арная операция $\omega \in \Omega$, элемент $b \in B$ и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$. Так как $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ — идеалы, то

$$x_1 \ldots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega \in (x_1x_2 \ldots x_n\omega) + A,$$

что и требовалось показать.

Под разложением Ω-лупы L по идеалу A мы будем понимать разложение аддитивной лупы этой Ω-лупы по A как по нормальной подлупе.

Теорема 4.1. *Все конгруэнции произвольной Ω-лупы L исчерпываются её разложениями по различным идеалам.*

Доказательство. Пусть A — произвольный идеал Ω-лупы L. Для любых $a_1, a_2 \in A$ и $x_1, x_2 \in L$ по определению нормальной подлупы выполняется включение

$$(x_1 + a_1) + (x_2 + a_2) \in (x_1 + x_2) + A.$$

С другой стороны, для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$, любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ имеет место включение

$$(a_1 + x_1)(a_2 + x_2) \ldots (a_n + x_n)\omega \in x_1x_2 \ldots x_n\omega + A.$$

Эти включения показывают, что разложение L в смежные классы по A действительно является конгруэнцией в Ω-лупе L.

Пусть теперь в L дана произвольная конгруэнция π. Обозначим через A тот класс разбиения π, в котором содержится нуль аддитивной лупы; элементы $a \in A$ характеризуются, следовательно, тем, что $a \;\pi\; 0$. Если $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 \;\pi\; 0$, $a_2 \;\pi\; 0$, а поэтому по определению конгруэнции $(a_1{+}a_2) \;\pi\; (0{+}0)$, т. е. $(a_1{+}a_2)\pi 0$, откуда следует, что $a_1 + a_2 \in A$. Если $a \in A$, то $[0 + (-a)] \;\pi\; [a + (-a)]$, т. е. $-a \;\pi\; 0$, откуда следует, что $-a \in A$. Если $a_1, a_2 \in A$, $x \in L$, то $(x + a_1) \;\pi\; (x + 0)$ и $(0 + x) \;\pi\; (a_2 + x)$, значит, $(x + a_1) \;\pi\; (a_2 + x)$, откуда следует, что $x + a \in A + x$. Наконец, можно показать, что $(x + y) + a \in x + (y + A)$ и $(x + a) + y \in x + (A + y)$. Этим доказано, что A является нормальной подлупой аддитивной лупы.

Если теперь даны n-арная операция $\omega \in \Omega$, элемент $a \in A$ и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$, то $(a + x_i) \;\pi\; (0 + x_i)$, т. е. $(a + x_i) \;\pi\; x_i$, откуда следует, что

$$[x_1 \ldots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega] \;\pi\; (x_1x_2 \ldots x_n\omega),$$

а поэтому

$$-(x_1x_2 \ldots x_n\omega) + x_1 \ldots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega \in A,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, класс A будет также идеалом Ω-лупы L.

Рассмотрим, наконец, произвольный класс B разбиения π. Если $b \in B$, $a \in A$, т. е. $a \ \pi \ 0$, то $(b+a) \ \pi \ (b+0)$, т. е. $(b+a) \ \pi \ b$. Значит, для смежного класса $b+A$ имеем включение $b+a \subseteq B$. С другой стороны, если b' — произвольный элемент из класса B, то из $b' \ \pi \ b$ следует, что $(-b+b') \ \pi \ 0$, или $-b+b' \in A$, т. е. $b' \in b+A$. Этим доказано равенство $B = b+A$, т. е. всякий класс разбиения является смежным классом по идеалу A. □

Далее рассмотрим вопрос об определении первичного радикала Ω-лупы L.

Определение 4.3. Идеал P в Ω-лупе L называется Ω-первичным, если для любой операции $\omega \in \Omega$ и любых идеалов $I_1, \ldots, I_n \subseteq L$ из включения $(I_1, \ldots, I_n)\omega \subseteq P$ следует, что $I_j \subseteq P$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, n$. Пересечение всех Ω-первичных идеалов Ω-лупы L называется первичным радикалом $\Omega\text{-rad}(L)$ лупы L.

Обозначим через $\{a\}^L$ идеал Ω-лупы L, порождённый элементом $a \in L$. Заметим, что этот идеал также является нормальной подлупой $\mathrm{Ng}(a)$, порождённой элементом a аддитивной лупы L.

По аналогии с Ω-группами введём определение Ω-m-системы.

Определение 4.4. Подмножество M Ω-лупы L называется Ω-m-системой, если для любой операции $\omega \in \Omega$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in M$ существуют $a_i' \in \{a_i\}^L$, такие что $a_1' \ldots a_n' \omega \in M$.

Каждому элементу $a \in L$ поставим в соответствие подмножество $M_a \subseteq L$, которое получается следующим образом:

$$M_a = \bigcup_i A_i,$$

где

$$A_0 = a, \quad A_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{i,\lambda}, A_{i,\lambda} = \{a_{i,j_1 \ldots j_n} = a'_{i-1,j_1} \ldots a'_{i-1,j_n} \omega_\lambda\},$$

ω_λ — n-арная операция, $a'_{i,j_k} \in \{a_{i,j_k}\}^L$, $a_{i,j_1}, \ldots, a_{i,j_n}$ — всевозможные наборы по n элементов из A_i.

Лемма 4.3. *Для любого элемента $a \in L$ множество M_a является Ω-m-системой.*

Доказательство. Пусть $\omega_\lambda \in \Omega$ — это n-арная операция и $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in M_a$, где $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Покажем, что для каждого a_{i_k} найдётся элемент в A_{i_n}, принадлежащий $\{a_{i_k}\}^L$. Действительно, если $a_i \in A_i$, то по построению существует элемент $a_{i+1} \in A_{i_1}$, такой что $a_{i+1} = a'_{i,j_1} \ldots a'_{i,j_n} \omega_\lambda$, где $a'_{i,j_k} \in \{a_i\}^L$ и, следовательно, $a_{i+1} \in \{a_i\}^L$, $a_{i+1} \in A_{i+1}$.

Рассуждая аналогично, получаем, что существуют элементы $b_{i_n}^{(1)}, \ldots, b_{i_n}^{(n)}$, где $b_{i_n}^{(k)} \in A_{i_n}$ и $b_{i_n}^{(k)} \in \{a_{i_k}\}^L$, $k = 1, \ldots, n$. Но тогда найдётся элемент $c = b_1' \ldots b_n' \omega_\lambda$, где $b_k' \in \{b_{i_n}^{(k)}\}^L \subseteq \{a_{i_k}\}^L$, такой что $c \in A_{i_n+1}$. Отсюда вытекает, что M_a — Ω-m-система. □

Теорема 4.2. *Пусть L — Ω-лупа, $a \in L$. Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) $a \in \Omega\text{-rad}(L)$;
2) *любая Ω-m-система, содержащая элемент a, содержит* 0;
3) *любая Ω-m-система M_a, соответствующая элементу a, содержит* 0.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть элемент $a \in L$ такой, что любая Ω-m-система, содержащая его, не содержит 0. Тогда существует последовательность $M = \{a_0 = a, a_1, \ldots\}$, все элементы которой отличны от 0, такая что $a'_1 \ldots a'_n\omega \in M$ для всех $a'_i \in \{a_i\}^L$. В множестве идеалов L, которые не содержат ни одного элемента последовательности M, выберем максимальный идеал I. Покажем, что I является Ω-первичным идеалом Ω-лупы L. Если U_1, U_2 — идеалы, строго содержащие идеал I, то ввиду максимальности I каждый из идеалов пересекается с последовательностью M, т. е. найдутся натуральные числа k и l, такие что $a_k \in U_1$ и $a_l \in U_2$. Пусть $m_1 = \max(k, l)$. Тогда все элементы последовательности a_i, $i \geqslant m_1$, начиная с номера $m_1 + 1$ лежат в пересечении $U_1 \cap U_2$. Таким образом выберем n идеалов U_i, $i = 1, \ldots, n$, таких что $U_i \nsubseteq I$ и с некоторого m_n все элементы последовательности M лежат в $\bigcap_{i=1}^n U_i$. Из построения идеала I следует, что $U_1 U_2 \ldots U_n \omega \nsubseteq I$, следовательно, по определению I является Ω-первичным идеалом. В то же время I не содержит ни одного элемента последовательности M. Возникает противоречие с определением Ω-первичного радикала.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из предыдущей леммы.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Докажем, что для элемента, который не принадлежит Ω-первичному радикалу, любая Ω-m-система M_a не содержит 0. Пусть $a \notin \Omega\text{-rad}(L)$. Тогда существует Ω-первичный идеал $I \subseteq L$, такой что $a \notin I$. В этом случае для любой операции $\omega \in \Omega$ найдутся элементы $a'_1, \ldots, a'_n \in \{a\}^L$, такие что $a'_1 \ldots a'_n\omega \in A_1$ и $a'_1 \ldots a'_n\omega \notin I$. Таким образом, A_1 состоит из элементов, не принадлежащих I. Продолжая этот процесс, построим подмножество A_k, $k > 1$. Таким образом, $M_a = \bigcup\limits_i A_i$ не содержит 0, так как имеет пустое пересечение с I. $\square$

Определение 4.5. Элемент a Ω-лупы L, удовлетворяющий одному из эквивалентных условий теоремы 4.2, называется Ω-строго энгелевым.

Следствие 4.1. *В Ω-лупе L первичный радикал $\Omega\text{-rad}(L)$ совпадает с множеством Ω-строго энгелевых элементов.*

Случай, когда L является группой, подробно рассмотрен в [7, 12]. Случай градуированной Ω-группы разобран в [6].

Теорема 4.3. *Пусть L — Ω-лупа, $\Omega = \{\omega\}$, где ω — операция коммутирования. Тогда $\text{rad}(L)$ — первичный радикал лупы L и для $a \in L$ эквивалентны следующие условия*:

1) $a \in \text{rad}(L)$;

2) *элемент a строго энгелев, т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} \in [\mathrm{Ng}(a_i), \mathrm{Ng}(a_i)]$, $\mathrm{Ng}(a)$ — нормальная подлупа, порождённая элементом a, содержит единичный элемент*;
3) *элемент a Ω-строго энгелев, т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} \in [\{a\}^L, \{a\}^L]$, содержит единичный элемент.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из теоремы 3.1.

Эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3) следует из того, что нормальная подлупа Ω-лупы L, порождённая элементом a, совпадает с идеалом Ω-лупы L, порождённым элементом a. Таким образом, совпадают и определения строго энгелевых элементов. □

Литература

[1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
[2] Белявская Г. Б. Ассоциаторы, коммутаторы и линейность квазигрупп // Дискрет. мат. — 1995. — Т. 4, № 7. — С. 116—125.
[3] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Мат. сб. — 1953. — Т. 33, № 1. — С. 13—26.
[4] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
[5] Курош А. Г., Черников С. Н. Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. — 1947. — Т. 2, № 3. — С. 18—59.
[6] Михалёв А. В., Балаба И. Н., Пихтильков С. А. Первичный радикал градуированной Ω-группы // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 159—174.
[7] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω-групп и Ω-l-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1405—1413.
[8] Щукин К. К. RI^*-разрешимый радикал групп // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.
[9] Amitsur S. A general theory of radicals. II. Radicals in rings and bicategories // Amer. J. Math. — 1954. — Vol. 76, no. 1. — P. 100—125.
[10] Brown B., McCoy N. Some theorems on groups with applications to ring theory // Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — Vol. 69. — P. 302—311.
[11] Bruck R. A Survey of Binary Systems. — Berlin: Springer, 1958.
[12] Buys A., Gerber G. K. The prime radical for Ω-groups // Commun. Algebra. — 1982. — Vol. 10. — P. 1089—1099.
[13] Higgins P. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. — 1956. — Vol. 3, no. 6. — P. 366—416.
[14] McKenzie R., Snow J. Congruence modular varieties commutator theory and its uses // Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebras. — Berlin: Springer, 2005. — (Nato Sci. Ser. II; Vol. 207). — P. 273—329.
[15] Pflugfelder H. Quasigroups and Loops: Introduction. — Heldermann, 1991. — (Sigma Ser. Pure Math.; Vol. 7).
[16] Smith J. On the nilpotence class of commutative Moufang loops // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1978. — Vol. 84, no. 3. — P. 387—404.
[17] Stanovsky D., Vojtechovsky P. Commutator theory for loops // J. Algebra. — 2014. — Vol. 399. — P. 290—322.