О сильной неразложимости локализации дедекиндова кольца

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: сильно неразложимый модуль, локализация, пополнение, кратность простого идеала, вес множества простых идеалов, k-неразложимость.

Аннотация

В работе изучается вопрос о достаточных условиях сильной неразложимости дедекиндовых колец как модулей конечного ранга над своими дедекиндовыми подкольцами. Этот вопрос рассматривался ранее в частном случае колец целых алгебраических чисел. Для расширений Галуа даны необходимые и достаточные условия сильной неразложимости. Рассматривается также вопрос о k-неразложимости.

Abstract

A. V. Grishin, On strong indecomposability of the Dedekind ring localization, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 43—49.

In this work, we study the question of sufficient conditions for strong indecomposability of Dedekind rings as finite rank modules over their Dedekind subrings. This question was considered earlier in the special case of rings of algebraic integers. Necessary and sufficient conditions are given for Galois extensions. The question of k-indecomposability is also considered.

Введение

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4], где в связи с изучением $\mathcal{E}$-замкнутых абелевых групп без кручения конечного ранга были приведены некоторые достаточные условия сильной неразложимости локализации колец целых алгебраических чисел. Напомним, что $\mathcal{E}$-замкнутая абелева группа — это группа, изоморфная аддитивной группе кольца её эндоморфизмов. При описании таких групп важен следующий вопрос, к которому с точностью до квазиизоморфизма, по существу, всё и сводится. Пусть R — кольцо целых алгебраических чисел в некотором конечном расширении поля рациональных чисел, Π — некоторое множество его простых идеалов. При каких условиях на Π аддитивная группа локализации R_Π является сильно неразложимой, т. е. не содержит в качестве подгруппы конечного индекса прямую сумму своих ненулевых подгрупп?

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 43—49.

Здесь рассматривается гораздо более общая ситуация, включающая как конечные расширения поля рациональных чисел (арифметический случай), так и конечные сепарабельные расширения поля рациональных функций от одной переменной (геометрический случай). По существу, мы имеем дело с произвольными дедекиндовыми кольцами. Это отражает тот факт, что, по-видимому, теория $\mathcal{E}$-замкнутых абелевых групп, как и вся теория абелевых групп, является весьма частным случаем теории модулей над дедекиндовыми кольцами.

В работе используется ряд фактов о конечных расширениях дедекиндовых колец и их пополнениях, которые можно найти в [1—3, 5]. Некоторые из них можно рассмотреть как полезные упражнения.

1. Вес множества простых идеалов

Пусть A — дедекиндово кольцо, B — его конечное сепарабельное расширение, т. е. кольцо целых над A элементов в конечном сепарабельном расширении L поля частных $Q(A)$ кольца A. Ясно, что B тоже дедекиндово кольцо и $L = Q(B)$. Пусть $n = [Q(B) : Q(A)]$ — степень расширения, и следовательно, B является A-модулем ранга n. С каждым простым идеалом $\mathfrak{P}$ кольца B связан простой идеал $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ кольца A, а также однозначное разложение по степеням простых идеалов кольца B

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_r^{e_r},$$

где $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$. Будем говорить, что идеалы $\mathfrak{P}_i$ *лежат над* $\mathfrak{p}$. Пусть $f_i = [B/\mathfrak{P}_i : A/\mathfrak{p}]$ — степени идеалов $\mathfrak{P}_i$ над $\mathfrak{p}$ и e_i — *индексы ветвления*. Назовём *кратностью* идеала $\mathfrak{P}_i$ над $\mathfrak{p}$ число $m_i = e_i f_i$. Имеет место соотношение

$$n = m_1 + \ldots + m_r,$$

являющееся прямым следствием изоморфизма

$$B/\mathfrak{p}B \cong B/\mathfrak{P}_1^{e_1} \oplus \ldots \oplus B/\mathfrak{P}_r^{e_r}.$$

Идеалы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$, лежащие над $\mathfrak{p}$, назовём *сопряжёнными*. Имеет место очевидное взаимно-однозначное соответствие между простыми идеалами $\mathfrak{p}$ кольца A и классами сопряжённых простых идеалов в B. Если $Q(A) \subset Q(B)$ — расширение Галуа, то его группа Галуа, как известно, транзитивно действует на множестве сопряжённых простых идеалов, и следовательно, $e_1 = \ldots = e_r$, $f_1 = \ldots = f_r$. Если все кратности m_i равны 1, то будем говорить, что идеал $\mathfrak{p}$ *вполне распадается* в B.

Пусть Ω — множество всех простых идеалов кольца B, которое разбито на классы Ω_i сопряжённых идеалов: $\Omega = \bigcup\limits_i \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть, далее, Π — некоторое множество простых идеалов в B и $\Sigma_i = \Omega_i \cap \Pi$. Рассмотрим одно из множеств Σ_i. Пусть $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ — все элементы множества Σ_i, для удобства занумерованные индексами от 1 до s, где $0 \leqslant s \leqslant r$, и $m_1, \ldots, m_s$ — их кратности над $\mathfrak{p}$. Назовём *весом* множества Σ_i число

$$w(\Sigma_i) = m_1 + \ldots + m_s.$$

В частности, нас будет интересовать случай, когда Σ_i состоит всего из одного идеала кратности 1. Назовём *весом* множества Π наименьшее из чисел $w(\Sigma_i)$ по всем непустым Σ_i. Обозначим это число через $w(\Pi)$.

В [4] рассмотрен случай, когда $w(\Pi) = 1$ (так называемый *экстремальный случай*). При этом $A = \mathbb{Z}$, B — кольцо целых алгебраических чисел.

2. Дополнительная локализация. Переход от сильной неразложимости к обычной

Пусть G_1 и G_2 — абелевы группы без кручения конечного ранга. Говорят, что они *квазиизоморфны*, если G_1 вкладывается в G_2 в качестве подгруппы конечного индекса. Ясно, что это отношение эквивалентности. Если вложение $G_1 \subset G_2$ осуществляет квазиизоморфизм, то существует такое натуральное число a, что $aG_2 \subset G_1$.

Мы примем здесь следующее определение. Два A-модуля без кручения M_1 и M_2 назовём *квазиизоморфными*, если существует такое изоморфное вложение $M_1 \subset M_2$ и такой ненулевой элемент a из A, что $aM_2 \subset M_1$. При этом A-модуль M назовём *сильно неразложимым*, если он не является квазиизоморфным прямой сумме ненулевых модулей, т. е. не существует вложения $M_1 \oplus M_2 \subset M$, для которого $aM \subset M_1 \oplus M_2$ при некотором ненулевом a. В противном случае назовём модуль M *квазиразложимым*.

Для исследования вопроса о сильной неразложимости A-модуля B_Π нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_r^{e_r}$ и элемент a кольца B не лежит ни в одном из простых идеалов $\mathfrak{P}_i$. Тогда если $a^{(1)} = a$, $a^{(r)}, \ldots, a^{(n)}$ — все сопряжённые к a элементы относительно изоморфизмов поля $Q(B)$ над $Q(A)$, то $N(a) = a^{(1)} \ldots a^{(n)}$ не лежит в $\mathfrak{p}$.*

Доказательство. По условию элемент a обратим по модулю идеала $\mathfrak{p}B$. Следовательно, имеют место соотношения

$$a^{(i)} b^{(i)} \in 1 + (\mathfrak{p}B)^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где b — некоторый элемент из B, $b^{(i)}$ — сопряжённые элементы и $(\mathfrak{p}B)^{(i)}$ — образ идеала $\mathfrak{p}B$ при соответствующем изоморфизме. Отсюда вытекает, что

$$N(a)N(b) \in 1 + I,$$

где идеал I — идеал кольца A, содержащийся в $\mathfrak{p}$. Следовательно, $N(a)$ не лежит в $\mathfrak{p}$. □

Доказанная лемма позволяет при рассмотрении элементов b/a, где a — элемент из B, не лежащий ни в одном из идеалов $\mathfrak{P}_i$, переходить к равному ему элементу $c/N(a)$, где элемент $N(a)$ не лежит в $\mathfrak{p}$.

Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s\}$ — одно из множеств Σ_i из предыдущего раздела и $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$. Очевидно, имеют место следующие соотношения:

$$B_\Pi \subset B_\Sigma, \quad \pi B_\Sigma = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{e_s} B_\Sigma,$$

где π — порождающий элемент идеала $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, т. е. $\pi A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Это означает, что элемент из кольца B_Σ делится на π тогда и только тогда, когда он лежит в $\mathfrak{p}B_\mathfrak{P}$. Ясно, что кольцо B_Σ получается из B_Π локализацией по мультипликативной системе S, порождённой всеми элементами из A, не лежащими ни в одном из идеалов $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$.

Если $M_1 \oplus M_2$ — прямая сумма ненулевых A-подмодулей в B_Π, для которой $tB_\Pi \subset M_1 \oplus M_2$ при некотором ненулевом t, то $tB_\Sigma \subset (M_1)_S \oplus (M_2)_S$. Таким образом, достаточно доказать сильную неразложимость для A-модуля B_Σ, что и будет сделано в следующем разделе в предположении, что Σ состоит из одного идеала кратности 1, т. е. $w(\Sigma) = 1$. Это означает, что $B_\mathfrak{P}/\pi B_\mathfrak{P}$ — одномерное векторное пространство над полем $A_\mathfrak{p}/\pi A_\mathfrak{p}$. Покажем сначала, что при этом условии сильная неразложимость и неразложимость равносильны. Заметим, что все встречающиеся ниже модули являются делимыми на элементы, не лежащие в $\mathfrak{p}$. Следовательно, можно считать, что t — некоторая степень π.

Лемма 2. *Пусть $M_1 \subset M_2 \subset Q(B)$ — цепочка $A_\mathfrak{p}$-подмодулей, $M_1 \neq M_2$, $M_1/\pi M_1$ — одномерное векторное пространство над полем $A_\mathfrak{p}/\pi A_\mathfrak{p}$ и $M_2 \subset 1/\pi^N M_1$ для достаточно большого N. Тогда $1/\pi M_1 \subset M_2$.*

Доказательство. Пусть $(1/\pi)a$ — произвольный элемент из $1/\pi M_1$, причём $a \notin \pi M_1$. Так как $M_1 \neq M_2$, то найдётся такой элемент b из M_1, что $(1/\pi)b \in M_2$ и $b \notin \pi M_1$. Так как пространство $M_1/\pi M_1$ над $A_\mathfrak{p}/\pi A_\mathfrak{p}$ одномерно, найдётся такой элемент λ из A, что $\lambda b = a + c$, где $c = \pi d$, $d \in M_1$. Следовательно, $(\lambda/\pi)b = (1/\pi)a + d$. Отсюда вытекает, что $(1/\pi)a \in M_2$, что и доказывает лемму. □

Лемма 3. *Пусть $M_1 = M_2$ или выполнены условия леммы 2. Тогда для некоторого целого неотрицательного числа l имеет место равенство $1/\pi^l M_1 = M_2$, т. е. $M_1 \cong M_2$.*

Доказательство. Если $M_1 \neq M_2$, то по лемме 2 можно найти такое наибольшее натуральное l, что $1/\pi^l M_1 \subset M_2$. Если $1/\pi^l M_1 \neq M_2$, то, учитывая изоморфизм $1/\pi^l M_1 \cong M_1$ и лемму 2, получаем, что $1/\pi^{l+1} M_1 \subset M_2$. Это противоречит выбору l. □

Лемма 4. *Пусть M — $A_\mathfrak{p}$-подмодуль в $B_\mathfrak{P}$, причём $\pi^N B_\mathfrak{P} \subset M$ для некоторого N. Тогда $M \cong B_\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Из условия следует, что $\pi^N M$ — подмодуль модуля $\pi^N B_{\mathfrak{P}}$. Из изоморфности $\pi^N B_{\mathfrak{P}}$ и $B_{\mathfrak{P}}$ и из того, что $\mathfrak{P}$ — идеал кратности 1 над $\mathfrak{p}$, следует, что выполнены условия леммы 2. Следовательно, по лемме 3 $B_{\mathfrak{P}} \cong M$. □

Замечание. Лемма 4 показывает, что в случае кратности 1 для доказательства сильной неразложимости достаточно доказать обычную неразложимость.

3. Сильная неразложимость локализаций веса 1

Для дальнейшего нам понадобятся следующие хорошо известные из коммутативной алгебры факты.

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — пополнения колец A и B по простым идеалам $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}$ соответственно. Тогда $\hat{B} = \hat{B}_{\mathfrak{P}} = \hat{A}B$ — свободный $\hat{A}$-модуль ранга $m = ef$. Выберем элементы $g_1, \ldots, g_m$ из B, для которых

$$\hat{B} = \hat{A}g_1 \oplus \ldots \oplus \hat{A}g_m.$$

В частности, если $m = 1$, то $\hat{A}$-модуль $\hat{B}$ неразложим. Отсюда легко вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если $w(\Pi) = 1$, то B_Π — сильно неразложимый A-модуль.*

Доказательство. Из рассуждений раздела 2 следует, что нужно доказать только неразложимость A-модуля $B_{\mathfrak{P}}$, где $\mathfrak{P} \in \Pi$ и $w(\mathfrak{P}) = 1$. Как мы видели, $\hat{B}_{\mathfrak{P}} = \hat{B}$ — свободный модуль ранга 1. С другой стороны, если $B_{\mathfrak{P}} = M_1 \oplus M_2$ — прямая сумма ненулевых A-модулей, то из известных свойств пополнений следует, что $\hat{B}_{\mathfrak{P}} = \hat{B} = \hat{A}M_1 \oplus \hat{A}M_2$, т. е. ранг модуля $\hat{B}$ больше 1. Полученное противоречие и доказывает теорему. □

Замечание. Кратность 1 возникает, например, когда идеал $\mathfrak{p}$ вполне распадается в B. Это даёт довольно большой запас примеров сильной неразложимости.

4. Разложение при $m > 1$

Пусть теперь $Q(A) \subset Q(B)$ — расширение Галуа полей частных степени n. Покажем, что если $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца B, имеющий над $\mathfrak{p}$ кратность $m > 1$, то разложение $B_{\mathfrak{P}}$ всегда возможно. Для этого рассмотрим промежуточное кольцо $C = \hat{A} \cap B_{\mathfrak{P}}$ и цепочку $A_{\mathfrak{p}} \subset C \subset B_{\mathfrak{P}}$. Удобнее перейти к полям частных

$$Q(A) \subset Q(C) \subset Q(B), \quad Q(\hat{A}) \subset Q(\hat{B}).$$

Последнее расширение имеет степень m, и следовательно, его группа Галуа имеет порядок m. Эта группа действует и на $Q(B)$ и имеет подполе неподвижных элементов $Q(C)$. Следовательно,

$$[Q(B) : Q(C)] = m, \quad [Q(C) : Q(A)] = \frac{n}{m}.$$

Таким образом, C — A-модуль ранга $l = n/m$. Пусть $h_1, \ldots, h_l$ — элементы из C, составляющие базис $Q(C)$ над $Q(A)$. Тогда, очевидно, $\{g_i h_j\}$ — базис $Q(B)$ над $Q(A)$. Рассмотрим разложение в прямую сумму

$$\hat{B} = \hat{A}g_1 \oplus \ldots \oplus \hat{A}g_m.$$

Оно содержит подразложение

$$D = Cg_1 \oplus \ldots \oplus Cg_m,$$

лежащее, очевидно, в $B_{\mathfrak{P}}$. Покажем, что $B_{\mathfrak{P}} = D$. В самом деле, ранги этих модулей равны n. Произвольный элемент b из $B_{\mathfrak{P}}$ можно представить в виде

$$b = \pi^{-s} \sum_{i,j} \alpha_{ij} g_i h_j = \sum_i \beta_i g_i,$$

где $\alpha_{ij} \in A_{\mathfrak{p}}$, π — порождающий элемент идеала $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, $\beta_i = \pi^{-s} \sum\limits_j \alpha_{ij} h_j$.

Покажем, что элементы β_i лежат в C. В силу однозначности разложения коэффициенты β_i лежат в $\hat{A}$, а в силу целозамкнутости кольца $B_{\mathfrak{P}}$ эти коэффициенты лежат в $B_{\mathfrak{P}}$, т. е. $\beta_i \in \hat{A} \cap B_{\mathfrak{P}} = C$ и $b \in D$. Так как b — произвольный элемент из $B_{\mathfrak{P}}$, то $B_{\mathfrak{P}} = D$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если $Q(A) \subset Q(B)$ — расширение Галуа и кратность m идеала $\mathfrak{P}$ над $\mathfrak{p}$ больше 1, то A-модуль $B_{\mathfrak{P}}$ разложим в прямую сумму m изоморфных слагаемых.*

Следствие 1. *Если $Q(A) \subset Q(B)$ — расширение Галуа, то A-модуль $B_{\mathfrak{P}}$ сильно неразложим тогда и только тогда, когда $m = 1$.*

5. Обобщение на k-неразложимость

Назовём A-модуль *k-неразложимым*, если его нельзя представить в виде прямой суммы k ненулевых слагаемых.

Теорема 3. *Если $k = w(\Pi) + 1$, то модуль B_Π является k-неразложимым.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s\}$ — класс сопряжённых идеалов из Π, для которого $w(\Sigma) = k - 1$. Согласно рассуждениям раздела 2 достаточно доказать, что модуль B_Σ не является прямой суммой k ненулевых подмодулей. Допустим, что

$$B_\Sigma = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k,$$

и выберем в каждом из M_i по элементу a_i, не лежащему в $\mathfrak{p}B_\Sigma = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{e_s}$, т. е. не делящемуся на π. По условию система $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависима по модулю $\mathfrak{p}B_\Sigma$, т. е. найдутся элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ из A, не все лежащие в $\mathfrak{p}$, такие что $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ лежит в $\mathfrak{p}B_\Sigma$, т. е. делится на π. Но это противоречит тому, что все слагаемые $\lambda_i a_i$, согласно свойствам прямой суммы, делятся на π

и, следовательно, все λ_i делятся на π. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\square$

Следствие 2. *Пусть $Q(A) \subset Q(B)$ — расширение Галуа и кратность простого идеала $\mathfrak{P}$ из B над $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ равна m. Тогда A-модуль $B_{\mathfrak{P}}$ разложим в прямую сумму m слагаемых, но не разложим в прямую сумму $m+1$ слагаемого.*

В заключение автор выражает свою признательность Е. С. Голоду за весьма полезные обсуждения.

Литература

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

[2] Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1966.

[3] Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry. — Berlin: Springer, 1995. — (Grad. Texts Math.; Vol. 150).

[4] Grishin A. V. Strongly indecomposable localizations of the ring of algebraic integers // Commun. Algebra. — 2015. — Vol. 43, no. 7.

[5] Lang S. Algebra. — Berlin: Springer, 2002. — (Grad. Texts Math.; Vol. 211).