

Дескриптивные пространства и присущие им классы функций*

В. К. ЗАХАРОВ, А. В. МИХАЛЁВ, Т. В. РОДИОНОВ

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

e-mail: ttvvr@yandex.ru

УДК 517.517+517.518.2+510.225+515.128

Ключевые слова: измеримые функции, распрелимые функции, равномерные функции, почти измеримые функции, почти распрелимые функции, почти равномерные функции, квазиизмеримые функции, квазираспрелимые функции, квазиравномерные функции, дескриптивное пространство, ансамбль, идеал, покрытие.

Аннотация

Классиками теории функций был введён замечательный класс измеримых функций, нашедший разнообразные применения во многих областях математики. Однако для решения ряда естественных математических задач этот класс оказался слишком ограничительным, поскольку он существенно связан со свойством счётности. Поэтому наряду с ним был введён другой замечательный класс — класс равномерных функций, существенно связанный со свойством конечности. Измеримые функции описываются как на классическом языке прообразов Лебега—Бореля, так и на новом языке покрытий, а равномерные функции описываются исключительно на языке покрытий. И семейства измеримых функций, и семейства равномерных функций определяются через жёсткую структуру своих носителей (дескриптивных пространств). Поэтому математики неоднократно ослабляли жёсткость структуры дескриптивных пространств за счёт использования дополнительного свойства пренебрежимости. Данная статья посвящена современному оформлению указанных идей. В ней также прослеживаются некоторые применения вводимых классов функций к решению ряда известных математических задач.

Abstract

V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, T. V. Rodionov, *Descriptive spaces and proper classes of functions*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 51—107.

The remarkable class of measurable functions was introduced by classics of function theory. It has found different applications in various branches of mathematics. However this class turned out too restrictive for solving some natural mathematical problems because it is essentially connected with the property of countability. Therefore, along with it another remarkable class, essentially connected with the property of finiteness, was introduced. It is the class of uniform functions. Measurable functions are described both in the classical Lebesgue–Borel language of preimages and in the quite new language of covers. Uniform functions are described in the language of covers exclusively. Both the

*Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ (грант 14-01-00417) и гранта Президента РФ НШ-3682.2014.1.

families of measurable functions and the families of uniform functions are determined by the rigid structure of their supports (descriptive spaces). For this reason mathematicians weakened more that once the rigidity of the structure of descriptive spaces at the expense of using the additional property of negligence. The present paper is devoted to a contemporary formalization of the indicated ideas. Some applications of the introduced classes of functions to solving a number of known mathematical problems is traced in the paper.

Введение

Классиками теории функций (Э. Борелем, А. Лебегом, Р. Бэром, В. Юнгом, Ф. Хаусдорфом, Н. Н. Лузиным, К. Куратовским и многими другими) был введён замечательный класс *измеримых функций*, нашедший разнообразные применения во многих областях математики. Однако для решения ряда естественных математических задач этот класс оказался слишком ограничительным, поскольку он существенно связан со свойством *счётности*. Поэтому в [3, 4, 47, 50] был введён другой замечательный класс — класс *равномерных функций*, существенно связанный со свойством *конечности*.

И семейства измеримых функций, и семейства равномерных функций определяются через жёсткую структуру своих носителей (*дескриптивных пространств*). Поэтому математики неоднократно ослабляли жёсткость структуры дескриптивных пространств за счёт использования дополнительного свойства *пренебрежимости*. Самыми выразительными примерами в этом направлении являются характеристика А. Лебегом функций, интегрируемых по Риману, и характеристика Н. Н. Лузиным μ -измеримых функций.

Данная статья посвящена современному оформлению описанных выше идей. Она состоит из пяти разделов.

Два первых раздела являются вводными. В первом разделе излагаются основы теории дескриптивных пространств. Во втором разделе рассматриваются обычные структуры на семействах вещественнозначных функций, а также соответствующие структуры на области задания функций.

В третьем разделе излагаются основы теории измеримых функций на дескриптивных пространствах. Измеримые функции описываются как на классическом языке *прообразов Лебега—Бореля* (мы будем использовать также термин «*прообразный язык*»), так и на совершенно другом языке — языке *покрытий* (мы будем использовать также термин «*покрытийный язык*»), введённом в [3, 10, 50] (в его счётном варианте).

В четвёртом разделе излагаются основы теории равномерных функций на дескриптивных пространствах на родном для них покрытийном языке (в конечном варианте).

Классы измеримых и равномерных функций являются одинаково естественными, поскольку имеют сходные внутренние описания, не связанные с определениями этих функций (см. замечание 2 в конце раздела 3, замечание 4 в конце раздела 4 и работы [11, 23, 24], посвящённые нормальным, вполне нормальным и ограниченно нормальным семействам и оболочкам).

Использование семейств измеримых и равномерных функций позволило получить общее и тонкое соотношение между бэровской и борелевской функциональными иерархиями на произвольном дескриптивном пространстве (см. замечание 1 в разделе 3.5, замечание 1 в разделе 4.4 и работы [9, 22, 41]).

Наиболее ярким представителем класса равномерных функций является семейство функций, интегрируемых по Риману. Описание этих функций как равномерных функций даёт их другую характеристику, отличную от лебеговской (см. замечание 2 в конце раздела 4 и работы [7, 8, 21, 25]).

Другим важным представителем класса равномерных функций является семейство *симметризуемых* (метаполунепрерывных) функций, которое сыграло ключевую роль в решении проблемы Рисса—Радона—Фреше характеристики радоновских интегралов как линейных функционалов для произвольного хаусдорфова пространства (см. замечание 3 в конце раздела 4 и работы [12—20]).

В пятом разделе рассматриваются более широкие семейства функций, присущие дескриптивным пространствам с пренебрежимостями. Естественность таких семейств следует из того, что именно через них даётся описание дедекиндова и канторова пополнений семейства непрерывных функций для произвольного тихоновского пространства (для узкого класса бэровских пространств это дедекиндово пополнение описывается через семейства (измеримых) *функций со свойством Бэра*) [2, 5, 6, 46, 48, 49]. Кроме того, они позволяют дать ещё одну характеристику функций, интегрируемых по Риману (см. конец замечания 2 в разделе 4.4).

1. Дескриптивные пространства (пространства с ансамблями)

1.1. Предварительные сведения

В работе систематически используются понятия и обозначения, принятые в современной теории классов и множеств (см., например, [36]). Для удобства читателя приведём некоторые необходимые определения.

Переобозначение знакосочетания σ знакосочетанием τ обозначается через $\sigma \equiv \tau$ или $\tau \equiv \sigma$. Через $\{t \mid \varphi(t)\}$ обозначается класс, состоящий из таких элементов x , что $\exists y (x \in y) \wedge \varphi(x)$, т. е. состоящий из множеств, обладающих свойством φ . Наряду с $\{t \mid t \in X \wedge \varphi(t)\}$ пишут также $\{t \in X \mid \varphi(t)\}$. Через $\{t \mid \varphi(t)\}$ определяются следующие теоретико-множественные понятия: $\emptyset \equiv \{t \mid t \neq t\}$, $\{x\} \equiv \{t \mid t = x\}$, $\{x, y\} \equiv \{t \mid t = x \vee t = y\}$, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (упорядоченная пара), $\mathcal{P}(X) \equiv \{t \mid t \subset X\}$ (полный ансамбль на X , т. е. семейство всех подмножеств X), $X \times Y \equiv \{t \mid \exists x \in X \exists y \in Y (t = (x, y))\}$.

Натуральные числа определяются как следующие множества:

$$0 \equiv \emptyset, \quad 1 \equiv 0 \cup \{0\}, \quad 2 \equiv 1 \cup \{1\}, \dots, \quad n + 1 \equiv n \cup \{n\}, \dots$$

При таком определении одновременно имеют место два свойства: $m \subset n + 1$ и $m \in n + 1$ для всех $m \leq n$ (т. е. $m \subset n$). Множество всех натуральных чисел обозначается через ω , а всех ненулевых натуральных чисел — через $\mathbb{N}$.

Мы строго отличаем отображение $u: X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y от его значения $y_x \equiv u(x) \in Y$ на элементе $x \in X$. Множество значений отображения u определяется как $\text{rng } u = \{y \in Y \mid \exists x \in X (y = u(x))\}$. Для отображения $u: X \rightarrow Y$ используется также индексное обозначение $u \equiv (y_x \in Y \mid x \in X)$, которое читается как *коллекция* или *семейство элементов* множества Y , индексированных элементами множества X . Множество $\{t \mid \exists x \in X (t = y_x)\}$ элементов коллекции u обозначается $\{y_x \in Y \mid x \in X\}$. Например, для трёхчленной коллекции $u \equiv (a_i \in \mathbb{N} \mid i \in 3)$, такой что $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ и $a_2 = 5$, её множество членов является двухэлементным множеством $\{a_i \mid i \in 3\} = \{4, 5\}$. Для коллекции подмножеств $u \equiv (A_i \in \mathcal{P}(A) \mid i \in I)$ множества A определены операции *объединения*

$$\bigcup (A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \exists i \in I (t \in A_i)\},$$

пересечения

$$\bigcap (A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \forall i \in I (t \in A_i)\}$$

и *произведения*

$$\prod (A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid (t: I \rightarrow \bigcup (A_i \mid i \in I)) \wedge \forall i \in I (t(i) \in A_i)\}.$$

Если на множестве A определена бинарная операция сложения $+: A \times A \rightarrow A$, то для любой коллекции $(a_i \in A \mid i \in n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ по индукции определяется операция сложения:

$$\sum (a_i \in A \mid i \in 2) \equiv a_0 + a_1, \quad \sum (a_i \in A \mid i \in n + 1) \equiv \sum (a_i \in A \mid i \in n) + a_n.$$

Если на множестве A определён порядок $\leq$, то на A определяются частичные бинарные операции *супремума*

$$a \vee b \in \{t \in A \mid (t \geq a) \wedge (t \geq b) \wedge \forall c \in A ((c \geq a) \wedge (c \geq b) \Rightarrow c \geq t)\},$$

и *инфимума*

$$a \wedge b \in \{t \in A \mid (t \leq a) \wedge (t \leq b) \wedge \forall c \in A ((c \leq a) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c \leq t)\}.$$

1.2. Основные понятия

Пусть T — фиксированное множество, а $\mathcal{S}$ — ансамбль на T , т. е. непустое подмножество $\mathcal{P}(T)$. Множество T с ансамблем $\mathcal{S}$ будем называть *дескриптивным пространством* или *пространством с ансамблем* и обозначать $(T, \mathcal{S})$.

Множество $P \subset T$ назовём $\mathcal{S}$ -компактным или *компактным относительно ансамбля* $\mathcal{S}$, если для любой коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такой что $P \subset \bigcup (S_i \mid i \in I)$, найдётся такое конечное множество $J \subset I$, что $P \subset \bigcup (S_i \mid i \in J)$.

Если множество T само является $\mathcal{S}$ -компактным, то дескриптивное пространство $(T, \mathcal{S})$ будем называть *компактным*.

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *замкнутым относительно замыкания*, если $T \setminus S \in \mathcal{S}$ для каждого $S \in \mathcal{S}$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *конечно [счётно, вполне] аддитивным*, если $\bigcup(S_i \mid i \in I) \in \mathcal{S}$ для любой конечной [счётной, произвольной] коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$. Аналогично ансамбль $\mathcal{S}$ называется *конечно [счётно, вполне] мультипликативным*, если $\bigcap(S_i \mid i \in I) \in \mathcal{S}$ для любой конечной [счётной, произвольной] коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$.

Конечно аддитивные и конечно мультипликативные ансамбли иногда будут называться просто *аддитивными* и *мультипликативными* соответственно. Конечно [счётно, вполне] аддитивный ансамбль $\mathcal{S}$ называется также φ -*аддитивным* [σ -аддитивным, τ -аддитивным]. Конечно [счётно, вполне] мультипликативный ансамбль $\mathcal{S}$ называется также η -*мультипликативным* [δ -мультипликативным, ε -мультипликативным].

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *бинарно аддитивным* [*бинарно мультипликативным*], если $Q \cup R \in \mathcal{S}$ [$Q \cap R \in \mathcal{S}$] для каждой пары (Q, R) в $\mathcal{S}$.

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $\mathcal{S}$ бинарно аддитивен [бинарно мультипликативен];
- 2) $\mathcal{S}$ (конечно) аддитивен [мультипликативен].

Доказательство. Докажем импликацию $1) \vdash 2)$. Рассмотрим подмножество X в ω , состоящее из всех таких чисел n , что $\bigcup(S_i \mid i \in I) \in \mathcal{S}$ для всех коллекций $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, где $\text{card } I = n + 2$. Пусть $I = \{j, k\}$ и $j \neq k$. Тогда $\bigcup(S_i \mid i \in I) = S_j \cup S_k \in \mathcal{S}$. Поэтому $0 \in X$.

Пусть $n \in X$ и $\text{card } I = n + 3$. Возьмём $j \in I$ и рассмотрим множество $K \equiv I \setminus \{j\}$. Поскольку $\text{card } K = n + 2$, мы имеем $S \equiv \bigcup(S_k \mid k \in K) \in \mathcal{S}$. Поэтому $\bigcup(S_i \mid i \in I) = S_j \cup S \in \mathcal{S}$. Следовательно, $n + 1 \in X$.

Теперь по принципу натуральной индукции $X = \omega$.

Докажем импликацию $2) \vdash 1)$. Пусть $Q, R \in \mathcal{S}$. Рассмотрим коллекцию $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такую что $S_0 \equiv Q$ и $S_1 \equiv R$. Тогда $Q \cup R = S_0 \cup S_1 = \bigcup(S_i \mid i \in I) \in \mathcal{S}$. $\square$

Множество $\emptyset$ будем называть *левым краем* (или *нулевым элементом*) *полного ансамбля* $\mathcal{P}(T)$. Множество T будем называть *правым краем* (или *единичным элементом*, или *единицей*) *полного ансамбля* $\mathcal{P}(T)$. Если ансамбль $\mathcal{S}$ содержит $\emptyset$ и T , то скажем, что $\mathcal{S}$ — ансамбль с краями или что $\mathcal{S}$ обладает краями. Мультипликативный ансамбль с краями на T называется *основой на T* ; аддитивный ансамбль с краями на T называется *коосновой на T* . Если основа φ -, σ - или τ -аддитивна, то она называется соответственно φ -, σ - или τ -*основой*. Аналогично определяются η -, δ -, ε -*коосновы*.

Всякая τ -основа $\mathcal{G}$ на T обычно называется *открытой топологией на T* или просто *топологией на T* , каждый элемент из $\mathcal{G}$ называется *открытым множеством*, а пара $(T, \mathcal{G})$ — *топологическим пространством*.

Зафиксируем множество T и некоторый ансамбль $\mathcal{S}$ на T . Рассмотрим *коансамбль* $\text{co-}\mathcal{S}$ на T , состоящий из всех таких элементов $P \in \mathcal{P}(T)$, что $P = T \setminus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$. В случае топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ коансамбль $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$ называется ансамблем *замкнутых множеств*.

Рассмотрим также ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$, $\mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{S}_\tau$ на T , состоящие из всех таких $P \in \mathcal{P}(T)$, что $P = \bigcup (S_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной, счётной или произвольной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ соответственно. Эти ансамбли называются также φ -, σ - и τ -оболочками ансамбля $\mathcal{S}$. Ясно, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{S}_\sigma \subset \mathcal{S}_\tau$.

Также будем рассматривать ансамбли $\mathcal{S}_\eta$, $\mathcal{S}_\delta$ и $\mathcal{S}_\varepsilon$ на T , состоящие из всех таких $P \in \mathcal{P}(T)$, что $P = \bigcap (S_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной, счётной или произвольной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ соответственно. Они ещё называются η -, δ -, ε -оболочками ансамбля $\mathcal{S}$. Как и выше, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\eta \subset \mathcal{S}_\delta \subset \mathcal{S}_\varepsilon$.

Лемма 1.1. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$, $\mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{S}_\tau$ конечно, счётно и вполне аддитивны соответственно; ансамбли $\mathcal{S}_\eta$, $\mathcal{S}_\delta$ и $\mathcal{S}_\varepsilon$ конечно, счётно и вполне мультипликативны соответственно;
- 2) $(\mathcal{S}_\varphi)_\sigma = \mathcal{S}_\sigma$, $(\mathcal{S}_\eta)_\delta = \mathcal{S}_\delta$;
- 3) если ансамбль $\mathcal{S}$ мультипликативен, то $\mathcal{S}_\varphi$, $\mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{S}_\tau$ тоже мультипликативны; если $\mathcal{S}$ аддитивен, то $\mathcal{S}_\eta$, $\mathcal{S}_\delta$ и $\mathcal{S}_\varepsilon$ тоже аддитивны.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Возьмём счётную коллекцию $(P_i \in \mathcal{S}_\sigma \mid i \in I)$ и множество $P \equiv \bigcup (P_i \mid i \in I)$. По определению $P_i \equiv \bigcup (S_{ij} \mid j \in J_i)$ для некоторых счётных коллекций $(S_{ij} \in \mathcal{S} \mid j \in J_i)$. Рассмотрим счётное множество $K \equiv \bigcup (J_i \times \{i\} \mid i \in I)$ и определим коллекцию $(S_k \in \mathcal{S} \mid k \in K)$, полагая $S_k \equiv S_{ij}$ для каждого $k = (j, i)$, такого что $j \in J_i$. Тогда из $P = \bigcup (S_k \mid k \in K)$ следует, что $P \in \mathcal{S}_\sigma$. Это и означает, что ансамбль $\mathcal{S}_\sigma$ счётно аддитивен.

Все другие утверждения пункта 1) доказываются аналогично.

Докажем утверждение 2). Так как $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{S}_\sigma$, мы получаем, что $\mathcal{S}_\sigma \subset (\mathcal{S}_\varphi)_\sigma \subset (\mathcal{S}_\sigma)_\sigma$. В силу утверждения 1) ансамбль $\mathcal{S}_\sigma$ σ -аддитивен. Поэтому $(\mathcal{S}_\sigma)_\sigma = \mathcal{S}_\sigma$.

Второе равенство проверяется сходным образом.

Докажем утверждение 3). Предположим, что ансамбль $\mathcal{S}$ мультипликативен. Возьмём два элемента $P \equiv \bigcup (P_i \mid i \in I)$ и $Q \equiv \bigcup (S_j \mid j \in J)$ из $\mathcal{S}_\bullet$, где $\bullet$ означает φ , σ или τ . Тогда $P \cap Q = \bigcup (S_i \cap S_j \mid (i, j) \in I \times J)$. Поскольку $S_i \cap S_j \in \mathcal{S}$ и множество $I \times J$ конечно, счётно или произвольно, заключаем, что $P \cap Q \in \mathcal{S}_\bullet$. Следовательно, ансамбль $\mathcal{S}_\bullet$ мультипликативен по предложению 1.1.

Последнее утверждение проверяется аналогично. $\square$

Пусть $E \subset T$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{S}_E \equiv \{P \in \mathcal{P}(T) \mid P = S \cap E \wedge S \in \mathcal{S}\}$. Он называется *следом ансамбля $\mathcal{S}$ на множестве E* . Легко убедиться, что для основы $\mathcal{S}$ след $\mathcal{S}_E$ также является основой. Для мультипликативного ансамбля $\mathcal{S}$ и $E \in \mathcal{S}$ имеем $\mathcal{S}_E = \{S \in \mathcal{S} \mid S \subset E\}$. Ясно, что $(\mathcal{S}_\varphi)_E = (\mathcal{S}_E)_\varphi$, $(\mathcal{S}_\sigma)_E = (\mathcal{S}_E)_\sigma$. Также ясно, что если $D \subset E \subset T$, то $(\mathcal{S}_E)_D = \mathcal{S}_D$.

Ансамбль $\mathcal{S}$ назовём *совершенным*, если

- 1) $\mathcal{S}$ аддитивен;
- 2) $\mathcal{S}$ содержит края $\emptyset$ и T ;
- 3) $\mathcal{S} \subset (\text{co-}\mathcal{S})_\sigma$.

Топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$ с совершенным $\mathcal{G}$ также называется *совершенным*. Ансамбль $\mathcal{S}$ назовём *косовершенным*, если

- 1) $\mathcal{S}$ мультипликативен;
- 2) $\mathcal{S}$ содержит края $\emptyset$ и T ;
- 3) $\mathcal{S} \subset (\text{co-}\mathcal{S})_\delta$.

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *решёточным* (*решёткой*), если он аддитивен и мультипликативен; ансамбль $\mathcal{S}$ — σ -*решётка*, если он σ -аддитивен и мультипликативен. Если $\mathcal{S}$ — аддитивный ансамбль с краями, замкнутый относительно дополнения, то $\mathcal{S}$ называется *алгеброй*. Если алгебра σ -аддитивна, то она называется σ -*алгеброй*. Ясно, что $[\sigma]$ -алгебра $[\delta]$ -мультипликативна.

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{S}$ — совершенный ансамбль на множестве T с коансамблем $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$. Тогда

- 1) $\mathcal{S}_\eta$ является совершенной основой, а $\mathcal{R}_\varphi = \text{co-}\mathcal{S}_\eta$ — косовершенной коосновой;
- 2) $\mathcal{R}_\sigma$ является совершенной σ -основой, а $\mathcal{S}_\delta = \text{co-}\mathcal{R}_\sigma$ — косовершенной δ -коосновой;
- 3) $\mathcal{R}_\sigma = (\mathcal{R}_\varphi)_\sigma$ и $\mathcal{S}_\delta = (\mathcal{S}_\eta)_\delta$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Ясно, что $\mathcal{S}_\eta$ обладает краями. По лемме 1.1 ансамбль $\mathcal{S}_\eta$ решёточный. Из мультипликативности $\mathcal{R}$ ввиду леммы 1.1 вытекает, что ансамбль $\mathcal{R}_\sigma$ тоже мультипликативен. Следовательно, используя вложение $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\sigma$ и лемму 1.1, получаем, что $\mathcal{S}_\eta \subset (\mathcal{R}_\sigma)_\eta = \mathcal{R}_\sigma = (\mathcal{R}_\varphi)_\sigma$. Переходя к соответствующим коансамблям, получаем, что $\mathcal{R}_\varphi \subset (\mathcal{S}_\eta)_\delta$. Кроме того, $\mathcal{R}_\varphi$ обладает краями и является решёткой.

Докажем утверждение 2). По лемме 1.1 $\mathcal{R}_\sigma$ — σ -основа, а $\mathcal{S}_\delta$ — δ -кооснова. Учтя условие, получаем вложения $\mathcal{R}_\sigma \subset (\mathcal{S}_\delta)_\sigma$ и $\mathcal{S}_\delta \subset (\mathcal{R}_\sigma)_\delta$.

Равенства третьего утверждения следуют из леммы 1.1. $\square$

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *отделимым*, если любые непересекающиеся множества $R, R' \in \text{co-}\mathcal{S}$ содержатся в непересекающихся множествах $S, S' \in \mathcal{S}$. Топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$ с отделимым ансамблем $\mathcal{G}$ называется *нормальным*, если $\{t\} \in \mathcal{F}$ для каждого $t \in T$.

Отделимая совершенная σ -основа была введена А. Д. Александровым [28] как «вполне нормальная база». В [3] она была названа *а-основой*.

Лемма 1.2. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимый ансамбль на множестве T с коансамблем $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$. Тогда для любых множеств $P \in \mathcal{R}$ и $Q \in \mathcal{S}$, таких что $P \subset Q$, найдутся такие множества $X \in \mathcal{S}$ и $Y \in \mathcal{R}$, что $P \subset X \subset Y \subset Q$.

Доказательство. По условию для непересекающихся множеств P и $R \equiv T \setminus Q$ из $\mathcal{R}$ существуют непересекающиеся множества X и Z из $\mathcal{S}$, такие что $P \subset X$ и $R \subset Z$. Взяв $Y \equiv T \setminus Z$, мы получим желаемые включения. $\square$

1.3. Дескриптивные пространства с идеальными пренебрежимостями

Пусть $(T, \mathcal{S})$ — дескриптивное пространство. Ансамбль $\mathcal{N}$ на T назовём *пренебрежимостью относительно ансамбля $\mathcal{S}$* или *пренебрежимостью на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$* , если ни для какого непустого $S \in \mathcal{S} \cup \{T\}$ и ни для какого $N \in \mathcal{N}_\varphi$ не имеет место включение $S \subset N$. В этом случае тройка $(T, \mathcal{S}, \mathcal{N})$ будет называться *дескриптивным пространством с пренебрежимостью*.

Аддитивный ансамбль $\mathcal{J}$ на T называется *идеальным ансамблем* или *идеалом (множеств)*, если $\forall I \in \mathcal{J} \forall P \in \mathcal{P}(T) (P \subset I \Rightarrow P \in \mathcal{J})$. Каждый идеальный ансамбль является решёткой с нулевым элементом $\emptyset$ (см. раздел 1.2). Если идеальный ансамбль σ -аддитивен, то он называется *σ -аддитивным идеалом* (*σ -идеалом*).

Если $\mathcal{J}$ — пренебрежимость на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{J}$ — идеал, то естественно называть $\mathcal{J}$ *идеальной пренебрежимостью*. Заметим, что согласно следующей лемме каждая пренебрежимость $\mathcal{N}$ порождает соответствующую идеальную пренебрежимость $\mathcal{J}(\mathcal{N}_\varphi) \equiv \{I \subset T \mid \exists N \in \mathcal{N}_\varphi (I \subset N)\}$.

Лемма 1.3. Пусть $\mathcal{N}$ — ансамбль на T . Тогда $\mathcal{J}(\mathcal{N}_\varphi)$ — идеал.

Если $\mathcal{N}$ — σ -аддитивный ансамбль, то $\mathcal{J}(\mathcal{N}_\varphi)$ — σ -идеал.

Если $(T, \mathcal{S})$ — дескриптивное пространство и $\mathcal{N}$ — пренебрежимость на нём, то $\mathcal{J}(\mathcal{N}_\varphi)$ — идеальная пренебрежимость на $(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Пусть $I, J \in \mathcal{J} \equiv \mathcal{J}(\mathcal{N}_\varphi)$. Тогда $I \subset M$ и $J \subset N$ для каких-то $M, N \in \mathcal{N}_\varphi$. Из $I \cup J \subset M \cup N \in \mathcal{N}_\varphi$ вытекает, что $I \cup J \in \mathcal{J}$. Для любого $P \subset I$ имеем $P \subset M$. Следовательно, $P \in \mathcal{J}$. Таким образом, $\mathcal{J}$ — идеал.

Пусть $\mathcal{N}$ — σ -аддитивный ансамбль и $(I_l \in \mathcal{J} \mid l \in L)$ — такая счётная коллекция, что $I_l \subset N_l \in \mathcal{N}_\varphi$. Тогда $I \equiv \bigcup (I_l \mid l \in L) \subset \bigcup (N_l \mid l \in L) \in \mathcal{N}_\sigma = \mathcal{N} = \mathcal{N}_\varphi$. Поэтому $I \in \mathcal{J}$.

Пусть $\mathcal{N}$ — пренебрежимость на $(T, \mathcal{S})$. Возьмём какое-нибудь непустое множество $S \in \mathcal{S} \cup \{T\}$. Предположим, что существует такая конечная коллекция $(I_k \in \mathcal{J} \mid k \in K)$, что $S \subset \bigcup (I_k \mid k \in K)$. По определению для каждого $k \in K$ существует конечная коллекция $(N_{\alpha_k} \in \mathcal{N} \mid \alpha_k \in A_k)$, такая что $I_k \subset \bigcup (N_{\alpha_k} \mid \alpha_k \in A_k)$. Из свойства ассоциативности операции объединения вытекает, что

$$\begin{aligned} S &\subset \bigcup \left(\bigcup (N_{\alpha_k} \mid \alpha_k \in A_k) \mid k \in K \right) = \\ &= \bigcup \left(N_{(k, \alpha_k)} \mid (k, \alpha_k) \in \bigcup (\{k\} \times A_k \mid k \in K) \right) \in \mathcal{N}_\varphi, \end{aligned}$$

где $N_{(k, \alpha_k)} \equiv N_{\alpha_k}$. Поскольку $\mathcal{N}$ — пренебрежимость, мы приходим к противоречию. $\square$

Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T и $\mathcal{S} \neq \{\emptyset\}$. Множество $D \subset T$ назовём *плотным относительно ансамбля $\mathcal{S}$* или *$\mathcal{S}$ -плотным*, если $D \cap S \neq \emptyset$ для каждого $S \in \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$. Ансамбль всех $\mathcal{S}$ -плотных множеств $D \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\mathcal{D}(\mathcal{S})$.

Множество $N \subset T$ назовём *нигде не плотным относительно ансамбля $\mathcal{S}$* , если $N \subset T \setminus D$ для некоторого $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$. Ансамбль всех таких множеств обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{S})$. Очевидно, что $\mathcal{N}(\mathcal{S}) = \mathcal{J}(\text{co-}\mathcal{D}(\mathcal{S}))$.

Лемма 1.4. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда ансамбль $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ мультипликативен, а ансамбль $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ является идеалом.

Доказательство. Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Тогда $D \equiv D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Из мультипликативности $\mathcal{S}$ вытекает, что $D \in \mathcal{S}$. Пусть $S \in \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$. Из $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ и $D_2 \cap S \in \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$ следует, что $D \cap S = D_1 \cap (D_2 \cap S) \neq \emptyset$. Поэтому $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$.

Таким образом, ансамбль $\mathcal{D}$ мультипликативен и, следовательно, $\text{co-}\mathcal{D}$ аддитивен. Тогда из леммы 1.3 вытекает, что $\mathcal{N}(\mathcal{S}) = \mathcal{J}(\text{co-}\mathcal{D}) = \mathcal{J}((\text{co-}\mathcal{D})_\varphi)$ является идеалом. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда ансамбли $\mathcal{D}(\mathcal{S}_\varphi)$, $\mathcal{D}(\mathcal{S}_\sigma)$ и $\mathcal{D}(\mathcal{S}_\tau)$ мультипликативны, а ансамбли $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)$, $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\tau)$ идеальны.

Доказательство. По лемме 1.1 ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$, $\mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{S}_\tau$ также являются основами. $\square$

Лемма 1.5. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $D \in \mathcal{S}_\sigma$ [$D \in \mathcal{S}_\varphi$]. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_\sigma)$ [$D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_\varphi)$];
- 2) $S \cap D \neq \emptyset$ для каждого $S \in \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$.

Доказательство. Импликация 1) $\rightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\rightarrow$ 1). По лемме 1.1 ансамбль $\mathcal{S}_\sigma$ [$\mathcal{S}_\varphi$] является основой. Пусть $\emptyset \neq S = \bigcup (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I) \in \mathcal{S}_\sigma$ [$\mathcal{S}_\varphi$]. Тогда $S_i \neq \emptyset$ для некоторого $i \in I$. Из $S_i \cap D \neq \emptyset$ заключаем, что $S \cap D = \bigcup (S_i \cap D \mid i \in I) \neq \emptyset$. $\square$

Множество $X \subset T$ называется *множеством со свойством Стоуна относительно ансамбля $\mathcal{S}$ и идеала $\mathcal{J}$* , если $X = S \cup N$ для некоторых $S \in \mathcal{S}$ и $N \in \mathcal{J}$. Ансамбль всех таких множеств обозначим через $\mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J})$. Частный случай, когда $\mathcal{S} = \mathcal{G}$, $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и $\mathcal{J} = \mathcal{N}(\mathcal{S})$, рассматривался М. Стоуном в [43] (см. также [26, 8.V] и [42, 16.1.6(B), 16.1.7]). Случай, когда $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство и $\mathcal{J}$ — идеал, порождённый ансамблем замкнутых μ -пренебрежимых множеств для положительной ограниченной радоновской меры μ , был рассмотрен в [7, 8] (см. замечание 2 в разделе 4.4).

Лемма 1.6. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $\mathcal{J}$ — идеал на T . Тогда ансамбли $\mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J})$, $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{J})$ и $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{J})$ являются основами. Кроме того, $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{J})$ и $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{J})$ аддитивны.

Доказательство. Поскольку $\emptyset \in \mathcal{S}$ и $\emptyset \in \mathcal{J}$, имеем $\emptyset \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J})$. Из $T \in \mathcal{S}$ и $T = T \cup \emptyset$ следует, что $T \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Пусть $X = P \cup M$ и $Y = Q \cup N$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{S}$ и $M, N \in \mathcal{J}$. Из мультипликативности $\mathcal{S}$ вытекает, что $P \cap Q \in \mathcal{S}$. Так как $\mathcal{J}$ — идеал, мы видим, что $P \cap N, M \cap Y \in \mathcal{J}$ и, следовательно, $(P \cap N) \cup (M \cap Y) \in \mathcal{J}$. Поэтому

$$X \cap Y = (P \cap Q) \cup ((P \cap N) \cup (M \cap Y)) \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J}).$$

Так как по лемме 1.1 $\mathcal{S}_\varphi$ и $\mathcal{S}_\sigma$ — основы, рассуждения для $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{J})$ и $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{J})$ аналогичны.

Пусть $X = P \cup M$ и $Y = Q \cup N$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{S}_\varphi$ и $M, N \in \mathcal{J}$. Из $P \cup Q \in \mathcal{S}_\varphi$ и $M \cup N \in \mathcal{J}$ получаем, что $X \cup Y = (P \cup Q) \cup (M \cup N) \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{J})$.

Для $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{J})$ доказательство вполне аналогично. $\square$

1.4. Дескриптивные пространства с покрытиями

Пусть T — множество и $S \subset T$. Коллекция $(A_i \subset S \mid i \in I)$ называется *покрытием множества S* , если $S = \bigcup (A_i \mid i \in I)$. Покрытие $(A_i \equiv S \mid i \in \{i\})$ называется *одноэлементным покрытием S* .

Непустое семейство $\mathfrak{C}$ покрытий множества T назовём *покрыванием на T* . Тройка $(T, \mathcal{S}, \mathfrak{C})$ будет называться *дескриптивным пространством с покрыванием*, если $\mathcal{S}$ — ансамбль на T и $\mathfrak{C}$ — покрывание на T .

Покрывание $\mathfrak{C}$ на T называется *мультипликативным*, если для любой конечной коллекции $(\pi_\alpha \in \mathfrak{C} \mid \alpha \in A)$ покрытий $\pi_\alpha \equiv (C_{\alpha i} \subset T \mid i \in I_\alpha)$ мы имеем $\bigwedge (\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathfrak{C}$, где $\bigwedge (\pi_\alpha \mid \alpha \in A)$ обозначает такое покрытие $(D_j \mid j \in J)$, что $J \equiv \prod (I_\alpha \mid \alpha \in A)$ и $D_j \equiv \bigcap (C_{\alpha j(\alpha)} \mid \alpha \in A)$ для всех $j \in J$. Для того чтобы не увеличивать этажи индексации, мы здесь и далее считаем, что предшествующие индексы задают область изменения последующих.

Возьмём пару покрытий $\{\varkappa, \rho\}$ и рассмотрим коллекцию $(\pi_\alpha \mid \alpha \in 2)$, где $\pi_0 \equiv \varkappa$ и $\pi_1 \equiv \rho$. Наряду с $\bigwedge (\pi_\alpha \mid \alpha \in 2)$ будем также писать $\pi_0 \wedge \pi_1$ или $\varkappa \wedge \rho$.

Для произвольного семейства покрытий $\mathfrak{C}$ множества T рассмотрим его *η -оболочку $\mathfrak{C}_\eta$* , состоящую из всех коллекций $\pi \equiv (P_u \subset T \mid u \in U)$, таких что для π найдётся конечная коллекция $(\gamma_i \in \mathfrak{C} \mid i \in I)$ таких покрытий $\gamma_i \equiv (C_{im} \mid m \in M_i)$ множества T , что $U = \prod (M_i \mid i \in I)$ и $P_u = \bigcap (C_{iu(i)} \mid i \in I)$ для каждого $u \in U$.

Лемма 1.7. Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство конечных [счётных] покрытий T . Тогда каждая коллекция $\pi \in \mathfrak{C}_\eta$ является конечным [счётным] покрытием T .

Доказательство. Из свойства общей дистрибутивности объединения относительно пересечения вытекают равенства

$$\begin{aligned} \bigcup (P_u \mid u \in U) &= \bigcup \left(\bigcap (C_{iu(i)} \mid i \in I) \mid u \in U \right) = \\ &= \bigcap \left(\bigcup (C_{im} \mid m \in M_i) \mid i \in I \right) = \bigcap (T \mid i \in I) = T. \end{aligned}$$

Поскольку каждое множество M_i конечно [счётно], их произведение $U \equiv \prod(M_i \mid i \in I)$ тоже конечно [счётно]. $\square$

Лемма 1.8. Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство покрытий множества T . Тогда семейство $\mathfrak{C}_\eta$ является мультипликативным.

Доказательство. Пусть $(\pi_\alpha \in \mathfrak{C}_\eta \mid \alpha \in A)$ — конечная коллекция. Тогда по определению $\pi_\alpha \equiv (P_{\alpha u} \subset T \mid u \in U_\alpha)$, $\alpha \in A$, и для каждого π_α существует конечная коллекция $(\gamma_{\alpha i} \in \mathfrak{C} \mid i \in I_\alpha)$ покрытий, такая что $\gamma_{\alpha i} \equiv (C_{\alpha i m} \mid m \in M_{\alpha i})$, $U_\alpha = \prod(M_{\alpha i} \mid i \in I_\alpha)$ и $P_{\alpha u} = \bigcap(C_{\alpha i u(i)} \mid i \in I_\alpha)$ для всякого $u \in U_\alpha$.

Рассмотрим конечное множество $J \equiv \bigcup(I_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in A)$. По свойству общей ассоциативности произведения найдутся биекции

$$W \equiv \prod(U_\alpha \mid \alpha \in A) \twoheadrightarrow \prod\left(\prod(M_{\alpha i} \mid (i, \alpha) \in I_\alpha \times \{\alpha\}) \mid \alpha \in A\right) \twoheadrightarrow \prod(M_j \mid j \in J) \equiv V,$$

где $M_j \equiv M_{\alpha i}$ для $j \equiv (i, \alpha) \in J \equiv I_\alpha \times \{\alpha\}$.

Возьмём конечную коллекцию $(\delta_j \mid j \in J)$ конечных коллекций $\delta_j \equiv (D_{jm} \mid m \in M_j)$, такую что $D_{jm} \equiv C_{\alpha i m}$ для $j \equiv (i, \alpha) \in J_\alpha$ и $m \in M_j \equiv M_{\alpha i}$. Поскольку $\delta_{(i, \alpha)} = (C_{\alpha i m} \mid m \in M_{\alpha i})$, мы заключаем, что $\delta_j \in \mathfrak{C}$ для всех $j \in J$.

Теперь определим множества $Q_v \equiv \bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J)$ и коллекцию $\varkappa \equiv (Q_v \mid v \in V) \in \mathfrak{C}_\eta$. Если $v \in V$ является образом $w \in W$ относительно упомянутых биекций, то

$$\begin{aligned} \bigcap(P_{\alpha w(\alpha)} \mid \alpha \in A) &= \bigcap\left(\bigcap(C_{\alpha i w(\alpha)(i)} \mid i \in I_\alpha) \mid \alpha \in A\right) = \\ &= \bigcap\left(\bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J_\alpha) \mid \alpha \in A\right) = \bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J) = Q_v. \end{aligned}$$

Поэтому $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) = \varkappa$. Следовательно, $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathfrak{C}_\eta$. $\square$

Рассмотрим важный пример покрывания, порождённого дескриптивным пространством $(T, \mathcal{S})$, для которого существует хотя бы одно покрытие $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T . Обозначим непустое семейство всех конечных покрытий $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T через $\text{Cov } \mathcal{S}$. Это покрывание широко используется в разделе 4.1.

Лемма 1.9. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T .

1. Пусть $\text{Cov } \mathcal{S}$ непусто. Тогда справедливы следующие утверждения:

- i) если ансамбль $\mathcal{S}$ аддитивен, то $\mathcal{S}$ содержит T ;
- ii) если ансамбль $\mathcal{S}$ мультипликативен, то $\text{Cov } \mathcal{S}$ мультипликативно.

2. Если $\mathcal{S}$ содержит T , то $\text{Cov } \mathcal{S}$ непусто и содержит одноэлементное покрытие.

3. Если $\mathcal{S}$ — основа, то $\text{Cov } \mathcal{S}$ непусто, мультипликативно и содержит одноэлементное покрытие.

Доказательство. Докажем утверждение i). Из равенства $T = \bigcup (S_i \mid i \in I)$ вытекает, что $T \in \mathcal{S}$.

Утверждения ii) и 2 непосредственно следуют из определений.

Утверждение 3 следует из 2 и ii). $\square$

2. Семейства действительных функций на множестве

2.1. Обычные структуры на семействах функций

Пусть T — множество. Семейство всех действительных функций на T обозначим через $F(T)$. Обычным образом для функции $f \in F(T)$ и множества $X \subset \mathbb{R}$ полагаем $f^{-1}[X] = \{t \in T \mid \exists x \in X (x = f(t))\}$.

Для функции $f \in F(T)$ и множества $E \subset T$ *колебанием функции f на множестве E* называется число $\omega(f, E) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in E\}$.

Функция $f \in F(T)$ называется *ограниченной на $P \subset T$* , если существует такое число $x > 0$, что $|f(t)| \leq x$ для всех $t \in P$. Множество всех ограниченных функций на T обозначим через $F_b(T)$.

Лемма 2.1. Пусть $f \in F(T)$ и $\varepsilon > 0$. Если существует такое конечное покрытие $\pi \equiv (C_i \subset T \mid i \in I)$ множества T , что $\omega(f, C_i) < \varepsilon$ для каждого $i \in I$, то $f \in F_b(T)$.

Доказательство. Для каждого $i \in I$ возьмём некоторую точку $t_i \in C_i$. Тогда $|f(t)| \leq |f(t_i)| + \varepsilon$ для всех $t \in C_i$. Поскольку множество I конечно, имеем $x \equiv \sup(|f(t_i)| + \varepsilon \mid i \in I) \in \mathbb{R}$. Следовательно, $|f(t)| \leq x$ для всех $t \in T$, т. е. функция f ограниченная. $\square$

Для всякого конечного семейства $(f_i \in F(T) \mid i \in I)$ функций на T можно определить *общие операции сложения и умножения*, полагая $(\sum(f_i \mid i \in I))(t) \equiv \sum(f_i(t) \mid i \in I)$ и $(P(f_i \mid i \in I))(t) \equiv P(f_i(t) \mid i \in I)$ для всех $t \in T$. Если $I = k + 1$, то наряду с $\sum(f_i \mid i \in k + 1)$ и $P(f_i \mid i \in k + 1)$ будем также писать $f_0 + \dots + f_k$ и $f_0 \cdot \dots \cdot f_k$. Возьмём пару функций $\{f, g\}$ и рассмотрим коллекцию $(h_i \mid i \in 2)$, где $h_0 \equiv f$ и $h_1 \equiv g$. Наряду с $\sum(h_i \mid i \in 2)$ и $P(h_i \mid i \in 2)$ или $h_0 + h_1$ и $h_0 \cdot h_1$ будем также писать $f + g$ и fg .

Для любых функции f и действительного числа x определим функцию xf , полагая $(xf)(t) \equiv xf(t)$ для всех $t \in T$. Если $m \in \mathbb{N}$, то $mf = \sum(f_i \mid i \in m)$ для коллекции $(f_i \in F(T) \mid i \in m)$, где $f_i \equiv f$ для каждого i .

Определим на T *единичную функцию $\mathbf{1}$* , положив $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ для всех $t \in T$, и *нулевую функцию $\mathbf{0}$* , положив $\mathbf{0}(t) \equiv 0$ для всех $t \in T$. Тогда $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0} = f$ и $\mathbf{1}f = f\mathbf{1} = f$ для любой функции f . Функция $x\mathbf{1}$, где $x \in \mathbb{R}$, называется *постоянной функцией на T , принимающей значение x* .

Для функции f определим *противоположную функцию $-f$* , положив $(-f)(t) \equiv -f(t)$ для каждого $t \in T$. Тогда $f - f = f + (-f) = \mathbf{0}$. Ясно, что

$(-1)f = -f$. Для функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ определим *обратную функцию* $1/f \equiv f^{-1}$, положив $(f^{-1})(t) \equiv 1/(f(t))$ для каждого $t \in T$. Тогда $ff^{-1} = f^{-1}f = 1$. Наряду с gf^{-1} будем также писать g/f .

Определим порядок на $F(T)$, полагая $f \leq g$, если $f(t) \leq g(t)$ для всех $t \in T$. Если $f \leq g$ и $f \neq g$ (т. е. $f(t) < g(t)$ для некоторого $t \in T$), то будем писать $f < g$. Легко убедиться, что $(f \vee g)(t) = f(t) \vee g(t)$ и $(f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t)$. Заметим также, что неравенство $f \leq g$ эквивалентно равенству $f \vee g = g$ и равенству $f \wedge g = f$.

Пусть N — направленное вверх предпорядоченное бесконечное множество и $(f_n \in F(T) \mid n \in N)$ — сеть функций. В случае $N \subset \omega$ имеем последовательность $(f_n \in F(T) \mid n \in N \subset \omega)$.

Функция $f \in F(T)$ называется *поточечным пределом сети* $(f_n \mid n \in N)$, а эта сеть называется *поточечно сходящейся к f* , если $f(t) = \lim(f_n(t) \mid n \in N)$ для каждого $t \in T$. Будем обозначать это как $f = p\text{-}\lim(f_n \mid n \in N)$.

Функция $f \in F(T)$ называется *равномерным пределом сети* $(f_n \in F(T) \mid n \in N)$, а эта сеть — *равномерно сходящейся к f* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in N$, что $|f_p - f| \leq \varepsilon 1$ для всех $p \geq n$. Будем обозначать это как $f = u\text{-}\lim(f_n \mid n \in N)$. Ясно, что равномерный предел сети является одновременно и её поточечным пределом.

Лемма 2.2. Пусть $(f_n \in F_b(T) \mid n \in N)$ — сеть функций, $f \in F(T)$ и $f = u\text{-}\lim(f_n \mid n \in N)$. Тогда $f \in F_b(T)$.

Доказательство. По определению найдётся $n \in N$, такое что $|f_p - f| \leq 1$ для всех $p \geq n$. Тогда $f_n - 1 \leq f \leq f_n + 1$. Поскольку существует такое $x > 0$, что $|f_n(t)| \leq x$ для всех $t \in T$, мы получаем неравенства $-x - 1 \leq f(t) \leq x + 1$, т. е. $|f(t)| \leq x + 1$. Это и означает, что $f \in F_b(T)$. $\square$

Будем рассматривать следующие условия на семейство $A(T) \subset F(T)$:

- 1) $A(T)$ содержит 1 ;
- 1') $A(T)$ содержит 0 ;
- 2) $A(T)$ замкнуто относительно умножения на действительные числа;
- 2') $A(T)$ замкнуто относительно умножения на *обратно-натуральные* числа $1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2'') $A(T)$ замкнуто относительно умножения на число $-1 \in \mathbb{Z}$;
- 3) $A(T)$ замкнуто относительно конечного сложения;
- 4) $A(T)$ замкнуто относительно конечных точных граней (супремума и инфимума);
- 5) $A(T)$ замкнуто относительно конечного умножения;
- 6) $A(T)$ замкнуто относительно равномерной сходимости (последовательностей);
- 7) $A(T)$ замкнуто относительно деления, т. е. $1/f \in A(T)$ для каждой $f \in A(T)$, такой что $0 \notin \text{rng } f$;
- 7') $A(T)$ замкнуто относительно *ограниченного деления*, т. е. $1/f \in A(T)$ для каждой $f \in A(T)$, такой что $0 \notin \text{rng } f$ и $1/f \in F_b(T)$;

- 8) $A(T)$ замкнуто относительно поточечной сходимости (последовательностей).

Ясно, что выполнение условий 1) и 2) влечёт выполнение условий 1'), 2') и 2''), выполнение условий 1), 2'') и 3) влечёт выполнение условия 1'), выполнение условий 1), 2'), 2'') и 3) влечёт замкнутость $A(T)$ относительно умножения на рациональные числа, выполнение условий 2'') и 4) влечёт замкнутость $A(T)$ относительно модуля.

Заметим, что в современной математике семейства функций, удовлетворяющие некоторым комбинациям условий 1)–8), используются обычно под специальными наименованиями. Семейство функций $A(T) \subset F(T)$, удовлетворяющее условиям 2) и 3), называется *линейным $\mathbb{R}$ -пространством (функций)*, семейство, удовлетворяющее условиям 1)–4), — *решёточным линейным $\mathbb{R}$ -пространством (функций) с порядковой единицей*, семейство, удовлетворяющее условиям 1)–3) и 5), — *линейной $\mathbb{R}$ -алгеброй (функций) с мультипликативной единицей*, семейство, удовлетворяющее условиям 1)–5), — *решёточной линейной $\mathbb{R}$ -алгеброй с мультипликативной и порядковой единицей*.

Весь список этих условий был собран Ф. Хаусдорфом в [27]. Семейство $A(T) \subset F(T)$ назовём *нормальным*, если оно удовлетворяет условиям 1)–7). Семейство $A(T) \subset F(T)$ назовём *вполне нормальным*, если оно удовлетворяет условиям 1)–8). Семейство $A(T) \subset F_b(T)$ назовём *ограниченно нормальным*, если оно удовлетворяет условиям 1)–6) и 7').

Ясно, что семейство $F(T)$ нормально и вполне нормально. Лемма 2.2 показывает, что семейство $F_b(T)$ ограничено нормальное.

2.2. Нуль-множества и конуль-множества функций

Пусть f — функция на T . Тогда множества $\text{zer } f \equiv \{t \in T \mid f(t) = 0\}$ и $\text{coz } f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством функции f* соответственно. Заметим, что множество $\text{coz } f$ является объединением *основных лебеговых множеств* $f^{-1}[0, \infty[$ и $f^{-1}[-\infty, 0[$.

Пусть $A(T)$ — семейство функций на T . Тогда ансамбли $\text{Zer } A(T) \equiv \{\text{zer } f \mid f \in A(T)\}$ и $\text{Coz } A(T) \equiv \{\text{coz } f \mid f \in A(T)\}$ называются *ансамблем всех нуль-множеств* и *ансамблем всех конуль-множеств семейства $A(T)$* соответственно.

Лемма 2.3. Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f, g \in F(T)$ и $(f_n \mid n \in \omega)$ — последовательность в $F(T)_+$. Тогда

- 1) $\text{coz } f = \text{coz } |f| = \text{coz } f^2 = \text{coz } (xf)$;
- 2) $\text{coz } (fg) = \text{coz } (|f| \wedge |g|) = \text{coz } f \cap \text{coz } g$;
- 3) $\text{coz } (f^2 + g^2) = \text{coz } (|f| + |g|) = \text{coz } (|f| \vee |g|) = \text{coz } f \cup \text{coz } g$;
- 4) если $f = \text{p-lim}(\sum(f_k \mid k \in n) \mid n \in \omega)$ или $f = \sup(f_n \mid n \in \omega)$, то $\text{coz } f = \bigcup(\text{coz } f_n \mid n \in \omega)$.

Доказательство. Доказательства утверждений 1)–3) тривиальны.

Докажем утверждение 4). Если $f = \text{p-lim}(\sum(f_k \mid k \in n) \mid n \in \omega)$, то выполнено включение $\bigcup(\text{coz } f_n \mid n \in \omega) \subset \text{coz } f$. Пусть $t \in \text{coz } f$. Так как последовательность $(\sum(f_k \mid k \in n) \mid n \in \omega)$ возрастает, имеем $f \geq \sum(f_k \mid k \in n) \geq 0$ для всех n . Поэтому можно взять $\varepsilon \equiv f(t) > 0$. Для этого ε существует такое натуральное число $n = n(\varepsilon)$, что $0 \leq f(t) - \sum(f_k(t) \mid k \in n) < \varepsilon$. Следовательно, $\sum(f_k(t) \mid k \in n) > 0$ и $t \in \text{coz } f_k$ для некоторых $k \in n$. Таким образом, обратное включение $\bigcup(\text{coz } f_n \mid n \in \omega) \supset \text{coz } f$ выполняется и мы имеем равенство.

В случае $f = \sup(f_n \mid n \in \omega)$ утверждение очевидно. $\square$

Следствие 1. Пусть $A(T)$ — семейство функций на T . Тогда

- 1) если $A(T)$ замкнуто относительно конечного умножения или конечной операции $\inf(|f_i| \mid i \in I)$, то ансамбль $\text{Coz } A(T)$ мультипликативен, а ансамбль $\text{Zer } A(T)$ аддитивен;
- 2) если $A(T)$ замкнуто относительно конечных операций $\sum(f_i^2 \mid i \in I)$, $\sum(|f_i| \mid i \in I)$ или $\sup(|f_i| \mid i \in I)$, то ансамбль $\text{Coz } A(T)$ аддитивен, а $\text{Zer } A(T)$ мультипликативен;
- 3) если $\sup(|f_n| \wedge \mathbf{1} \mid n \in \omega) \in A(T)$ для всякой последовательности $(f_n \in A(T) \mid n \in \omega)$, то ансамбль $\text{Coz } A(T)$ σ -аддитивен, а ансамбль $\text{Zer } A(T)$ δ -мультипликативен;
- 4) если $A(T)$ замкнуто относительно конечных сумм $\sum(2^{-k}(|f_k| \wedge \mathbf{1}) \mid k \in n)$, $\sum(2^{-k}(f_k^2 \wedge \mathbf{1}) \mid k \in n)$, $\sum(|f_k| \wedge (2^{-k}\mathbf{1}) \mid k \in n)$ или $\sum(f_k^2 \wedge (2^{-k}\mathbf{1}) \mid k \in n)$ и, кроме того, замкнуто относительно равномерной сходимости последовательностей, то ансамбль $\text{Coz } A(T)$ σ -аддитивен, а ансамбль $\text{Zer } A(T)$ δ -мультипликативен.

Доказательство. Доказательства утверждений 1)–3) тривиальны.

Докажем утверждение 4). Возьмём последовательность $(f_n \in A(T) \mid n \in \omega)$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $2^{-n+1} < \varepsilon$. Рассмотрим функции $g_n \equiv \sum(2^{-k}(|f_k| \wedge \mathbf{1}) \mid k \in n) \in A(T)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq g_{n+m} - g_n &\leq \sum(2^{-k}\mathbf{1} \mid k \in (n+m) \setminus n) = \\ &= 2^{-n} \sum(2^{-i} \mid i \in m)\mathbf{1} = 2^{-n}(2 - 2^{-m+1})\mathbf{1} \leq 2^{-n+1}\mathbf{1} < \varepsilon\mathbf{1} \end{aligned}$$

для каждого m . Поэтому найдётся такая функция $g \in F(T)$, что $g = \text{u-lim}(g_n \mid n \in \omega)$. Тогда согласно условию $g \in A(T)$. Поскольку $g = \text{p-lim}(\sum(2^{-k}(|f_k| \wedge \mathbf{1}) \mid k \in n) \mid n \in \omega)$, в силу утверждения 4) леммы 2.3

$$\bigcup(\text{coz } f_n \mid n \in \omega) = \bigcup(\text{coz}(2^{-n}(|f_n| \wedge \mathbf{1})) \mid n \in \omega) = \text{coz } g \in \text{Coz } A(T).$$

Для других перечисленных сумм рассуждения аналогичны. $\square$

Следствие 2. Пусть $A(T)$ — семейство функций на T .

1. Если $A(T)$ удовлетворяет условию 1) из раздела 2.1, то $\text{Coz } A(T)$ содержит T .

2. Если $A(T)$ удовлетворяет условию 1'), то $\text{Coz } A(T)$ содержит $\emptyset$.
3. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 2''), 3) и 4) или 3) и 5), то $\text{Coz } A(T)$ — решётка.

Доказательство. Следствие вытекает из утверждений 2) и 3) леммы 2.3 и формулы $|f| = f \vee (-f)$. $\square$

Предложение 2.1. Пусть $A(T)$ — семейство функций на T .

1. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 3) и 4) (или 5)) из раздела 2.1, то $\text{Coz } A(T)$ — φ -основа.
2. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 2'), 3), 4) и 6), то $\text{Coz } A(T)$ — σ -основа.
3. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 2'), 2''), 3), 5) и 8), то $\text{Coz } A(T)$ — σ -основа.
4. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 2'), 2''), 3) и 4), то $\text{Coz } A(T)$ — отделимая совершенная φ -основа.
5. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 2'), 2''), 3), 4) и 6), то $\text{Coz } A(T)$ — α -основа (т. е. отделимая совершенная σ -основа).
6. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1), 1'), 2'), 2''), 3), 4) (или 5)) и 8), то $\text{Coz } A(T)$ — σ -алгебра.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 вытекают из следствия 2 леммы 2.3 и утверждения 4) её следствия 1.

Докажем утверждение 3. Согласно утверждению 1 ансамбль $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$ — φ -основа. Проверим, что он σ -аддитивен.

Возьмём последовательность $(f_n \in A(T) \mid n \in \omega)$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $2^{-n+1} < \varepsilon$. Рассмотрим функции $g_n \equiv \sum (2^{-k} (1 - \exp \circ (-f_k^2)) \mid k \in n)$, где $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — показательная функция. Согласно определению $\exp \circ (-f_k^2) = \text{p-lim}((1 - f_k^2/m)^m \mid m \in \mathbb{N})$. Тогда из условий 1), 2'), 2''), 3), 5) и 8) следует, что $g_n \in A(T)$.

Так как $-f_k^2(t) \leq 0$ для всех $t \in T$ и $k \in \omega$, имеем $0 < \exp(-f_k^2(t)) \leq 1$. Следовательно, для каждого $t \in T$ последовательность $(g_n(t) \mid n \in \omega)$ возрастает и $0 \leq g_n(t) \leq \sum (2^{-k} \mid k \in n) < 2$. Поэтому $(g_n(t) \mid n \in \omega)$ сходится для каждого $t \in T$. Положим $g \equiv \text{p-lim}(g_n \mid n \in \omega)$. Из условия 8) следует, что $g \in A(T)$. Применяя лемму 2.3, из равенства $g = \text{p-lim}(\sum (2^{-k} (1 - \exp \circ (-f_k^2)) \mid k \in n) \mid n \in \omega)$ получаем, что

$$\bigcup (\text{coz } f_n \mid n \in \omega) = \bigcup (\text{coz } 2^{-n} (1 - \exp \circ (-f_n^2)) \mid n \in \omega) = \text{coz } g \in \text{Coz } A(T).$$

Докажем утверждение 4. Согласно утверждению 1 ансамбль $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$ — φ -основа.

Пусть $X, Y \in \mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$ и $X \cap Y = \emptyset$. Тогда $X = \text{zer } f$ и $Y = \text{zer } g$ для некоторых $f, g \in A(T)$. Рассмотрим функции $u = |f| - |f| \wedge |g|$ и $v = |g| - |f| \wedge |g|$, лежащие в $A(T)$. Если $t \in X$, то $v(t) = |g(t)| \neq 0$. Тогда $X \subset \text{coz } v \in \mathcal{S}$.

Аналогично $Y \subset \text{coz } u \in \mathcal{S}$. Из $u \wedge v = |f| \wedge |g| - |f| \wedge |g| = 0$ получаем, что $\text{coz } u \cap \text{coz } v = \emptyset$. Таким образом, ансамбль $\mathcal{S}$ отделимый.

Наконец, пусть $X \equiv \text{coz } f$ и $f \in A(T)$. Рассмотрим функции $g_n \equiv (1/n)\mathbf{1} - |f| \wedge (1/n)\mathbf{1} \in A(T)$. Тогда $|f|^{-1}[[1/n, \infty[] = \text{zer } g_n \in \mathcal{R}$. Следовательно, $X = \bigcup (\text{zer } g_n \mid n \in \mathbb{N})$. Таким образом, ансамбль $\mathcal{S}$ совершенный.

Докажем утверждение 5. Согласно утверждению 4 ансамбль $\mathcal{S}$ совершенный и отделимый. По утверждению 2 $\mathcal{S}$ — σ -основа.

Докажем утверждение 6. Согласно утверждению 2 (или 3) ансамбль $\mathcal{S}$ — σ -основа.

Пусть $S \in \mathcal{S}$. тогда $S = \text{coz } f$ для некоторой $f \in A(T)$, $f \geq 0$. Рассмотрим функции $f_n \equiv nf \wedge \mathbf{1} \in A(T)$, $n \in \omega$. Поскольку последовательность $(f_n \mid n \in \omega)$ возрастает и ограничена сверху $\mathbf{1}$, условие 8) даёт нам, что $g \equiv \chi(S) = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega) \in A(T)$. Тогда $h \equiv -\mathbf{1} + g \in A(T)$. Поэтому $T \setminus S = \text{coz } h \in \mathcal{S}$. $\square$

Следствие 1. Пусть $A(T)$ — семейство функций на T .

1. Если $A(T)$ нормально, то $\text{Coz } A(T)$ — отделимая совершенная σ -основа.
2. Если $A(T)$ вполне нормально, то $\text{Coz } A(T)$ — σ -алгебра.

Лемма 2.4. Пусть $f \in F(T)$ и $x < y$ в $\mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}[]x, y[] = \text{coz } g$ для функции $g \equiv ((f - x\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}) \wedge ((y\mathbf{1} - f) \vee \mathbf{0})$.

Доказательство. Во-первых заметим, что $g \geq 0$.

Пусть $x < f(t) < y$. Тогда из того, что $g(t) = (f(t) - x) \wedge (y - f(t)) > 0$, следует, что $t \in \text{coz } g$.

Обратно, пусть $t \in \text{coz } g$. Тогда из $f(t) - x > 0$ и $y - f(t) > 0$ вытекает, что $x < f(t) < y$. $\square$

3. Семейства измеримых и распределимых функций на дескриптивном пространстве

Понятие измеримой функции обрело свою форму в работах Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега и др. [29—32, 37—39, 44, 45]. Оно стало одним из важнейших понятий современной математики.

3.1. Измеримые и распределимые функции

Пусть T и T' — множества, а $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — ансамбли на T и на T' соответственно. Отображение $\tau: T \rightarrow T'$ называется *измеримым относительно $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$* или *($\mathcal{S}, \mathcal{S}'$)-измеримым*, если $\tau^{-1}[S'] \in \mathcal{S}$ для каждого $S' \in \mathcal{S}'$.

В случае $T' = \mathbb{R}$ будет рассматриваться ансамбль $\mathcal{S}' = \mathcal{G}_{\text{int}} \equiv \{]x, y[\mid x, y \in \mathbb{R} \}$ всех открытых интервалов на $\mathbb{R}$. Таким образом, функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *измеримой относительно ансамбля $\mathcal{S}$* или *$\mathcal{S}$ -измеримой*, если она

$(\mathcal{S}, \mathcal{G}_{\text{int}})$ -измерима. Семейство всех $\mathcal{S}$ -измеримых действительных функций на T обозначается через $M(T, \mathcal{S})$. Его подсемейство всех ограниченных $\mathcal{S}$ -измеримых функций на T обозначается через $M_b(T, \mathcal{S})$.

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -аддитивный ансамбль на множестве T и $f \in F(T)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in M(T, \mathcal{S})$;
- 2) $f^{-1}[]x, y[] \in \mathcal{S}$ для каждого интервала $]x, y[\subset \bar{\mathbb{R}}$;
- 3) $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для каждого $G \in \mathcal{G}_{\text{st}}$, где $\mathcal{G}_{\text{st}}$ — ансамбль всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$ (стандартная топология на $\mathbb{R}$).

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Возьмём $x = -\infty$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда $] -\infty, y[= \bigcup (]n, y[\mid n \in \mathbb{N})$. Следовательно,

$$f^{-1}[] -\infty, y[= f^{-1}\left[\bigcup (]n, y[\mid n \in \mathbb{N})\right] = \bigcup (f^{-1}[]n, y[\mid n \in \mathbb{N}).$$

Так как $S_n \equiv f^{-1}[]n, y[\in \mathcal{S}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и ансамбль $\mathcal{S}$ σ -аддитивный, имеем $f^{-1}[] -\infty, y[= \bigcup (S_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}$. Таким образом, $f^{-1}[] -\infty, y[\in \mathcal{S}$.

Случаи $x \in \mathbb{R}$, $y = \infty$ и $x = \infty$, $y = \infty$ разбираются так же.

Докажем импликацию 2) $\vdash$ 3). Поскольку $\mathcal{G}_{\text{st}} = (\mathcal{G}_{\text{int}})_{\sigma}$, для каждого $G \in \mathcal{G}_{\text{st}}$ имеем $G = \bigcup (]x_i, y_i[\mid i \in I)$ с некоторым счётным множеством I . Отсюда получаем $f^{-1}[G] = \bigcup (f^{-1}[]x_i, y_i[\mid i \in I) \in \mathcal{S}$.

Импликация 3) $\vdash$ 1) очевидна. $\square$

Напомним, что коллекция $(A_i \subset T \mid i \in I)$ называется покрытием множества T , если $T = \bigcup (A_i \mid i \in I)$; число $\omega(f, E) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in E\}$ называется колебанием функции f на множестве E . Если $\pi \equiv (C_i \mid i \in I)$ — покрытие множества T , то число $\omega(f, \pi) \equiv \sup(\omega(f, C_i) \mid i \in I)$ называется колебанием функции f на покрытии π [4].

Все $\mathcal{S}$ -измеримые функции для σ -аддитивного ансамбля $\mathcal{S}$ могут быть охарактеризованы посредством их колебаний на счётных или конечных покрытиях следующим образом.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in M(T, \mathcal{S}_{\sigma})$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T , такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Пусть $f \in M(T, \mathcal{S}_{\sigma})$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и такое $n \in \mathbb{N}$, что $2/n < \varepsilon$. Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ определим множества $X_m \equiv f^{-1}[](m-1)/n, (m+1)/n[\in \mathcal{S}_{\sigma}$. Для всякого X_m существует такая счётная коллекция $(Q_{mp} \in \mathcal{S} \mid p \in P_m)$, что $X_m = \bigcup (Q_{mp} \mid p \in P_m)$. Рассмотрим счётное множество $I \equiv \bigcup (\{m\} \times P_m \mid m \in \mathbb{Z})$. Положим

$S_i \equiv Q_{mp}$ для всякого $i = (m, p) \in I$. Тогда $\omega(f, S_i) \leq \omega(f, X_m) < 2/n < \varepsilon$. Кроме того, мы видим, что

$$\begin{aligned} \bigcup (S_i \mid i \in I) &= \bigcup (Q_{mp} \mid (m, p) \in I) = \\ &= \bigcup \left(\bigcup (Q_{mp} \mid p \in P_m) \mid m \in \mathbb{Z} \right) = \bigcup (X_m \mid m \in \mathbb{Z}) = T, \end{aligned}$$

и следовательно, коллекция $(S_i \mid i \in I)$ является счётным покрытием T .

Докажем импликацию $2) \vdash 1)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим счётное покрытие $\pi_n \equiv (S_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$, такое что $\omega(f, \pi_n) < 1/n$.

Возьмём произвольные действительные числа $x < y$ и рассмотрим множества $E \equiv f^{-1}[[x, y[$, $E_n \equiv f^{-1}[[x + 1/n, y - 1/n[$, $J_n \equiv \{i \in I_n \mid S_{ni} \cap E_n \neq \emptyset\}$ и $F_n \equiv \bigcup (S_{ni} \mid i \in J_n) \in \mathcal{S}_\sigma$. Поскольку π_n — покрытие T , имеем $E_n \subset F_n$. Если $t \in F_n$, то $t \in S_{ni}$ для какого-то $i \in J_n$. Следовательно, найдётся $s \in S_{ni} \cap E_n$. Поэтому $f(t) < f(s) + 1/n < y$ и $f(t) > f(s) - 1/n > x$, т. е. $t \in E$. Отсюда вытекает, что $F_n \subset E$. Таким образом, $E \subset \bigcup (E_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset \bigcup (F_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset E$. В результате получаем, что $E = \bigcup (F_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}_\sigma$. Это означает, что $f \in M(T, \mathcal{S}_\sigma)$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -аддитивный ансамбль на T . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in M(T, \mathcal{S})$ [$f \in M_b(T, \mathcal{S})$];
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое счётное [конечное] покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T , что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \vdash 2)$. Если $f \in M(T, \mathcal{S})$, она следует непосредственно из предложения 3.1.

Предположим, что $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. Тогда $|f| \leq a\mathbf{1}$ для некоторого $a > 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое $n \in \mathbb{N}$, что $2/n < \varepsilon$. Тогда множество $I \equiv \{i \in \mathbb{Z} \mid |i| \leq na\}$ будет конечным. Положим $S_i \equiv f^{-1}[(i-1)/n, (i+1)/n[) \in \mathcal{S}$ и получим, что $\bigcup (S_i \mid i \in I) = T$ и $\omega(f, S_i) < 2/n < \varepsilon$.

Докажем импликацию $2) \vdash 1)$. В силу предложения 3.1 $f \in M(T, \mathcal{S})$. По лемме 2.1 функция f ограничена. $\square$

Утверждение 2) предложения 3.1 даёт основу для введения нового класса функций, обладающего хорошими свойствами для любой основы $\mathcal{S}$, в то время как класс измеримых функций обладает этими свойствами только для σ -основы $\mathcal{S}$ (ср. следствие 2 предложения 3.4 и следствие 2 предложения 3.5 ниже).

Функцию $f \in F(T)$ будем называть *распределимой относительно ансамбля $\mathcal{S}$* или *$\mathcal{S}$ -распределимой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Множество всех таких функций обозначим через $D(T, \mathcal{S})$. Предложение 3.1 показывает, что $D(T, \mathcal{S}) = M(T, \mathcal{S}_\sigma) \supset M(T, \mathcal{S})$ для любого ансамбля $\mathcal{S}$ и $D(T, \mathcal{S}) = M(T, \mathcal{S})$ для σ -аддитивного $\mathcal{S}$.

3.2. Поточечные операции над измеримыми и распределимыми функциями

Класс σ -основ $\mathcal{S}$, видимо, является самым широким классом ансамблей, для которых семейства $\mathcal{S}$ -измеримых функций будут замкнуты относительно поточечных операций.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T , $f, g \in M(T, \mathcal{S})$, $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) $1 \in M(T, \mathcal{S})$;
- 2) $rf \in M(T, \mathcal{S})$;
- 3) $f + g \in M(T, \mathcal{S})$;
- 4) $fg \in M(T, \mathcal{S})$;
- 5) $1/f \in M(T, \mathcal{S})$ для любой функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 6) $\sqrt[m]{f} \in M(T, \mathcal{S})$ для любой функции $f \geq 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Если $1 \in]x, y[$, то $1^{-1}[x, y[= T \in \mathcal{S}$. Если $1 \notin]x, y[$, то $1^{-1}[x, y[= \emptyset \in \mathcal{S}$.

Докажем утверждение 2). Если $r > 0$, то $(rf)^{-1}[x, y[= f^{-1}[x/r, y/r[\in \mathcal{S}$. Если $r < 0$, то $(rf)^{-1}[x, y[= f^{-1}[y/r, x/r[\in \mathcal{S}$. Если $r = 0$, то $(rf)^{-1}[x, y[$ совпадает с $T \in \mathcal{S}$ или с $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Докажем утверждение 3). Пусть $t \in (f + g)^{-1}[x, y[$, т. е. $x - g(t) < f(t) < y - g(t)$. Поскольку существуют такие рациональные числа p и q , что $x - g(t) < p < f(t) < q < y - g(t)$, мы имеем $t \in f^{-1}[p, q[\cap g^{-1}[x - p, y - q[\equiv T_{pq}$. Тогда $(f + g)^{-1}[x, y[\subset \bigcup (T_{pq} \mid p, q \in \mathbb{Q} (p < q)) \in \mathcal{S}$. Обратно, если t принадлежит последнему множеству, то найдутся такие $p, q \in \mathbb{Q}$, что $p < f(t) < q$ и $x - p < g(t) < y - q$. Следовательно, $t \in (f + g)^{-1}[x, y[$. Таким образом, $f + g \in M(T, \mathcal{S})$.

Докажем утверждение 4). Сначала докажем, что $f^2 \in M(T, \mathcal{S})$.

Пусть $0 \leq x < y$. Если $t \in (f^2)^{-1}[x, y[\equiv R$, то $0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{f^2(t)} < \sqrt{y}$, т. е. $0 \leq \sqrt{x} < |f(t)| < \sqrt{y}$. Если $f(t) > 0$, то $0 \leq \sqrt{x} < f(t) < \sqrt{y}$, т. е. $t \in f^{-1}[\sqrt{x}, \sqrt{y}[$. Если $f(t) < 0$, то $0 \leq \sqrt{x} < -f(t) < \sqrt{y}$, т. е. $t \in f^{-1}[-\sqrt{y}, -\sqrt{x}[$. Таким образом, $R \subset f^{-1}[\sqrt{x}, \sqrt{y}[\cup f^{-1}[-\sqrt{y}, -\sqrt{x}[\equiv S$. Обратно, пусть $t \in S$. Если $f(t) > 0$, то $\sqrt{x} < f(t) < \sqrt{y}$. Следовательно, $x < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Если $f(t) < 0$, то $-\sqrt{y} < f(t) < -\sqrt{x}$. Следовательно, $x < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Это означает, что $R = S \in \mathcal{S}$.

Если $x < y \leq 0$, то $(f^2)^{-1}[x, y[= \emptyset \in \mathcal{S}$.

Пусть $x < 0 < y$. Если $t \in (f^2)^{-1}[x, y[\equiv R$, то $x < 0 \leq f^2(t) < y$. Согласно рассуждениям выше $0 \leq \sqrt{f^2(t)} < \sqrt{y}$, т. е. $0 \leq |f(t)| < \sqrt{y}$. Если $f(t) \geq 0$, то $t \in f^{-1}[0, \sqrt{y}[\equiv S_1$. Если $f(t) < 0$, то из $0 < -f(t) < \sqrt{y}$ вытекает, что $t \in f^{-1}[-\sqrt{y}, 0[\equiv S_2$. В обоих случаях $t \in S_1 \cup S_2 = f^{-1}[-\sqrt{y}, \sqrt{y}[\equiv S$. Обратно, пусть $t \in S$, т. е. $-\sqrt{y} < f(t) < \sqrt{y}$. Если $f(t) \geq 0$, то из $0 \leq f(t) < \sqrt{y}$ вытекает, что $x < 0 \leq f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Если $f(t) < 0$, то $-\sqrt{y} < f(t) < 0$. Согласно предыдущим рассуждениям $x < 0 < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Таким образом, $R = S \in \mathcal{S}$.

Теперь предположим, что $f, g \in M(T, \mathcal{S})$. Пользуясь равенством $fg = ((f+g)^2 - (f-g)^2)/4$ и доказанными утверждениями 2) и 3), немедленно получаем, что $fg \in M(T, \mathcal{S})$.

Докажем утверждение 5). Из аддитивности и мультипликативности $\mathcal{S}$ и уже доказанного утверждения 2) получаем, что

$$\begin{aligned} (1/f)^{-1}[x, y] &= (f^{-1}[0, \infty] \cap (xf)^{-1}[-\infty, 1] \cap (yf)^{-1}[1, \infty]) \cup \\ &\cup (f^{-1}[-\infty, 0] \cap (xf)^{-1}[1, \infty] \cap (yf)^{-1}[-\infty, 1]) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Поэтому $1/f \in M(T, \mathcal{S})$.

Докажем утверждение 6). Пусть $X \equiv (\sqrt[m]{f})^{-1}[x, y]$. Если $y \leq 0$, то $X = \emptyset \in \mathcal{S}$. Если $x < 0 < y$, то $X = f^{-1}[0, y^m] = f^{-1}[-y^m, y^m] \in \mathcal{S}$. Если $x \geq 0$, то $X = f^{-1}[x^m, y^m] \in \mathcal{S}$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T и $(f_i \in M(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция. Тогда $\sum(f_i \mid i \in I) \in M(T, \mathcal{S})$ и $P(f_i \mid i \in I) \in M(T, \mathcal{S})$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда семейство $M(T, \mathcal{S})$ $[M_b(T, \mathcal{S})]$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 5) и 7) [7')] из раздела 2.1.

В отличие от семейств $\mathcal{S}$ -измеримых функций семейства $\mathcal{S}$ -распределимых функций замкнуты относительно поточечных операций, перечисленных в теореме 3.1, для любой основы $\mathcal{S}$ (см. лемму 3.4 с соответствующим примером). Более того, для распределимых функций аналог теоремы 3.1 можно доказать существенно иным методом, не используя множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, но пользуясь только определением этих функций. Этот метод окажется важным в разделах 4 и 5.

Понятие $\mathcal{S}$ -распределимой функции предлагает иной метод рассуждения, но ввиду предложения 3.1 не даёт какой-либо новой сущности в сравнении с понятием $\mathcal{S}$ -измеримой функции. Однако положение кардинально меняется при переходе от счётных покрытий к конечным в разделах 4 и 5.

Далее нам пригодится следующая тонкая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ и $0 < y < x$. Тогда

- 1) $(x+y)^m - x^m > x^m - (x-y)^m$,
- 2) $\sqrt[m]{x+y} - \sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{x-y}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). По биномиальной формуле Ньютона

$$\begin{aligned} (x+y)^m - x^m &= \sum (C_m^k x^{m-k} y^k \mid k \in (m+1) \setminus 1) > \\ &> \sum ((-1)^{k+1} C_m^k x^{m-k} y^k \mid k \in (m+1) \setminus 1) = x^m - (x-y)^m. \end{aligned}$$

Докажем утверждение 2). Обозначим $\sqrt[m]{x}$ через a и $\sqrt[m]{x+y} - \sqrt[m]{x}$ через b . Тогда

$$b < \sqrt[m]{2x} - a \leq \sqrt[m]{2^m x} - a = a.$$

Предположим, что $b \geq a - \sqrt[m]{x-y}$, т. е. $0 < a-b \leq \sqrt[m]{x-y}$. Из утверждения 1) следует, что

$$y = x + y - x = (a+b)^m - a^m > a^m - (a-b)^m \geq x - (x-y) = y,$$

что невозможно. Это противоречие доказывает желаемое неравенство. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T , $f, g \in D(T, \mathcal{S})$, $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) $1 \in D(T, \mathcal{S})$;
- 2) $rf \in D(T, \mathcal{S})$;
- 3) $f + g \in D(T, \mathcal{S})$;
- 4) $fg \in D(T, \mathcal{S})$;
- 5) $1/f \in D(T, \mathcal{S})$ для каждой функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 6) $\sqrt[m]{f} \in D(T, \mathcal{S})$ для каждой функции $f \geq 0$.

Доказательство. Обозначим $D(T, \mathcal{S})$ через $A(T)$. Пусть $\varepsilon > 0$.

Для любого покрытия $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ имеем $\omega(1, \pi) = 0$, поэтому справедливо утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in S_i$, то $|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r||f(s) - f(t)| \leq |r|\omega(f, \pi)$. Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leq |r|\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $rf \in A(T)$.

Для $r = 0$ имеем $\omega(rf, \pi) = \omega(0, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$.

Докажем утверждение 3). Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ счётно и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку основа $\mathcal{S}$ мультипликативна, мы заключаем, что $E_k \in \mathcal{S}$. Если $s, t \in E_k$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leq |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Поэтому

$$\omega(f+g, \rho) \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Таким образом, $f+g \in A(T)$.

Докажем утверждение 4). Возьмём такое $m \in \mathbb{N}$, что $1/m < \varepsilon$. Найдутся счётные покрытия $\varkappa_m \equiv (G_{mi} \in \mathcal{S} \mid i \in I_m)$ и $\lambda_m \equiv (H_{mj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_m)$, для которых $\omega(f, \varkappa_m) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_m) < 1/m$.

Определим множества $A_k \equiv f^{-1}[-k, k]$, $B_l \equiv g^{-1}[-l, l]$, $I_{mk} \equiv \{i \in I_m \mid G_{mi} \cap A_k \neq \emptyset\}$ и $J_{ml} \equiv \{j \in J_m \mid H_{mj} \cap B_l \neq \emptyset\}$ для всех $k, l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим счётные коллекции $\varkappa_{mk} \equiv (G_{mi} \mid i \in I_{mk})$ и $\lambda_{ml} \equiv (H_{mj} \mid j \in J_{ml})$, покрывающие множества $\text{rng } \varkappa_{mk} = \bigcup (G_i \mid i \in I_{mk}) \supset A_k$ и $\text{rng } \lambda_{ml} = \bigcup (H_j \mid j \in J_{ml}) \supset B_l$ соответственно. Ясно, что $\omega(f, \varkappa_{mk}) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_{ml}) < 1/m$.

Очевидно, что $\sup\{|f(t)| \mid t \in \text{rng } \varkappa_{mk}\} \leq k + 1/m \equiv a_{mk}$ и $\sup\{|g(t)| \mid t \in \text{rng } \lambda_{ml}\} \leq l + \varepsilon \equiv b_{ml}$. Возьмём натуральные числа $p_{ml} \equiv 2ml + 2$

и $q_{mk} \equiv 2mk + 2$. Для каждой упорядоченной пары $z \equiv (k, l) \in \mathbb{N}^2$ определим множество $W_{mz} \equiv I_{mk} \times J_{ml} \times I_{p_{ml}} \times J_{q_{mk}}$. Для любого набора $w \equiv (i_1, j_1, i_2, j_2) \in W_{mz}$ рассмотрим множество $Q_{mzw} \equiv G_{mi_1} \cap H_{mj_1} \cap G_{p_{ml}i_2} \cap H_{q_{mk}j_2} \in \mathcal{S}$.

Если $s, t \in Q_{mzw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leq |f(t)| |g(t) - g(s)| + |g(s)| |f(t) - f(s)| \leq \frac{a_{mk}}{q_{mk}} + \frac{b_{ml}}{p_{ml}} \leq \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{mzw}) \leq 1/m$. Определим множество $C_m \equiv \bigcup(\{z\} \times W_{mz} \mid z \in \mathbb{N}^2)$, оно является счётным. Тогда счётная коллекция $\mu_m \equiv (S_{mc} \in \mathcal{S} \mid c \in C_m)$, где $S_{mc} \equiv Q_{mzw}$ для $c \equiv (z, w)$, покрывает множество T и $\omega(fg, \mu_m) \leq 1/m < \varepsilon$.

Докажем утверждение 5). Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует счётное покрытие $\pi_m \equiv (S_{mi_m} \in \mathcal{S} \mid i_m \in I_m)$, такое что $\omega(f, \pi_m) < 1/m$. Рассмотрим множества $X_a \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/a\}$ для всех $a \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) = T$.

Возьмём такое $p \in \mathbb{N}$, что $1/p < \varepsilon$. Для каждого $a \in \mathbb{N}$ положим $m_{ap} \equiv 9pa^2$. Тогда $m_{ap} > 2a$ и $4a^2/m_{ap} < 1/2p$.

Рассмотрим множество $J_{m_{ap}} \equiv \{i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}} \mid S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \emptyset\}$ и коллекцию $\mathcal{K}_{m_{ap}} \equiv (S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}})$. Легко убедиться, что $X_a \subset \text{rng } \mathcal{K}_{m_{ap}}$.

Пусть $i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}}$. Возьмём $s', t' \in S_{m_{ap}i_{m_{ap}}}$. Так как $S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \emptyset$, видим, что существуют $s, t \in S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a$.

Если $f(s) > 0$, то $f(s) = |f(s)| > 1/a$. Из того, что $|f(s) - f(s')| < 1/m_{ap} < 1/2a$, следует, что $f(s') > f(s) - 1/2a > 1/a - 1/2a = 1/2a > 0$. Поэтому $|f(s')| = f(s') > 1/2a$.

Если $f(s) < 0$, то из $-f(s) = |f(s)| > 1/a$ вытекает, что $f(s') < f(s) + 1/2a < -1/a + 1/2a = -1/2a < 0$. Поэтому $|f(s')| = -f(s') > 1/2a$.

Таким образом, $|f(s')| > 1/2a$. Аналогично $|f(t')| > 1/2a$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{f(s')} - \frac{1}{f(t')} \right| = \frac{|f(s') - f(t')|}{|f(s')||f(t')|} < \frac{1}{m_{ap}} \cdot 2a \cdot 2a < \frac{1}{2}p.$$

Рассмотрим счётное множество $J_p \equiv \bigcup(\{a\} \times J_{m_{ap}} \mid a \in \mathbb{N})$. Если $j \in J_p$, то $j = (a, i_{m_{ap}})$ для некоторых $a \in \mathbb{N}$ и $i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}$. Обозначим $S_{m_{ap}i_{m_{ap}}}$ через S_j . Таким образом, мы получаем счётную коллекцию $\rho_p \equiv (S_j \in \mathcal{S} \mid j \in J_p)$, такую что $\omega(1/f, \rho_p) < 1/p$. Поскольку

$$T = \bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) \subset \bigcup\left(\bigcup(S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}) \mid a \in \mathbb{N}\right) = (S_j \mid j \in J_p),$$

коллекция ρ_p покрывает множество T .

Докажем утверждение 6). Согласно принципу Архимеда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon^m/2$. Разделим множество $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ точками $x_k = k/n$, $k \in \omega$. Тогда $0 = x_0 < x_1 < \dots$ и $x_{k+1} - x_k = 1/n$.

Возьмём такое счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f, \pi) < 1/n$, и рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}[[x_k, x_{k+1}]]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in \omega \mid S_i \cap X_k \neq \emptyset\}$ непусто. Это множество имеет единственный наименьший элемент $k_i \in K_i$. Предположим, что $s \in S_i$, и возьмём точку

$t \in S_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < \omega(f, S_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geq -\omega(f, S_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[n]{x_{k_i}} < \sqrt[n]{f(s)} < \sqrt[n]{x_{k_i+1} + 1/n}$ для каждого $s \in S_i$. Отсюда следует неравенство $\omega(\sqrt[n]{f}, S_i) < \sqrt[n]{x_{k_i+1} + 1/n} - \sqrt[n]{x_{k_i}}$. Если $k_i \geq 2$, то, пользуясь леммой 3.2, имеем

$$\begin{aligned} \omega(\sqrt[n]{f}, S_i) &< \sqrt[n]{x_{k_i} + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{x_{k_i}} < \sqrt[n]{x_{k_i}} - \sqrt[n]{x_{k_i} - \frac{1}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{x_{k_i-1} + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{x_{k_i-2}} < \sqrt[n]{x_{k_i-1}} - \sqrt[n]{x_{k_i-2} - \frac{1}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{x_{k_i-2} + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{x_{k_i-3}} < \dots < \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_0} = \sqrt[n]{\frac{2}{n}} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[n]{f}, S_i) < \sqrt[n]{x_0 + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{x_0} = \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_0} < \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[n]{f}, S_i) < \sqrt[n]{x_1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{x_1} = \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получили, что $\omega(\sqrt[n]{f}, \pi) < \varepsilon$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда семейство $D(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условиям 1)–3), 5) и 7) из раздела 2.1.

Функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *вполне $\mathcal{S}$ -ступенчатой функцией*, если существует конечное разбиение $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T и коллекция $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$, такие что $f(t) = x_i$ для всех $t \in S_i$. Семейство всех вполне $\mathcal{S}$ -ступенчатых функций обозначается через ${}^q\text{St}(T, \mathcal{S})$.

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T . Тогда ${}^q\text{St}(T, \mathcal{S}) \subset D_b(T, \mathcal{S})$. Если $\mathcal{S}$ аддитивен, то ${}^q\text{St}(T, \mathcal{S}) \subset M_b(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Пусть $f \in {}^q\text{St}(T, \mathcal{S})$, т. е. существуют конечное разбиение $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T и соответствующая коллекция $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$, такие что $f(t) = x_i$ для всех $t \in S_i$. Очевидно, что $\omega(f, S_i) = 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $f \in D_b(T, \mathcal{S})$.

В случае аддитивного ансамбля $\mathcal{S}$ для любого $]a, b[\subset \mathbb{R}$ имеем $f^{-1}[]a, b[= \bigcup (S_i \mid i \in I_{a,b}) \in \mathcal{S}$ с конечным множеством $I_{a,b} \equiv \{i \in I \mid x_i \in]a, b[\}$. Это означает, что $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. $\square$

3.3. Поточечный порядок

между измеримыми и распределимыми функциями

Определим отношения $f \leq g$ и $f < g$ для $f, g \in M(T, \mathcal{S})$ и для $f, g \in D(T, \mathcal{S})$ как поточечные отношения, индуцированные из $F(T)$.

Предложение 3.2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T , $f \in M(T, \mathcal{S})$ и $(f_i \in M(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция. Тогда

- 1) если $g = \sup(f_i \mid i \in I)$ в $F(T)$, то $g \in M(T, \mathcal{S})$;
- 2) если $g = \inf(f_i \mid i \in I)$ в $F(T)$, то $g \in M(T, \mathcal{S})$;
- 3) $f_+, f_-, |f| \in M(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $t \in R \equiv g^{-1}[x, y[$. Тогда $x < \sup(f_i(t) \mid i \in I) < y - 1/n < y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f_i(t) < y - 1/n$ для всех $i \in I$ и найдётся такое $i \in I$, что $f_i(t) > x$. Отсюда вытекает, что

$$t \in \left(\bigcup (f_i^{-1}[x, \infty[\mid i \in I) \cap \left(\bigcup \left(\bigcap (f_i^{-1}[-\infty, y - \frac{1}{n}[\mid i \in I) \mid n \in \mathbb{N} \right) \right) \right) \equiv S.$$

Поэтому $R \subset S$.

Обратно, если $t \in S$, то $f_i(t) > x$. Кроме того, существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $f_i(t) < y - 1/n$ для всех $i \in I$. Следовательно, $g(t) > x$ и $g(t) < y - 1/n$, т. е. $t \in R$. Таким образом, $R = S \in \mathcal{S}$, откуда и вытекает, что $g \in M(T, \mathcal{S})$.

Докажем утверждение 2). Поскольку $\inf(f_i \mid i \in I) = -\sup(-f_i \mid i \in I)$, утверждение 2) следует из 1) и утверждения 1) теоремы 3.1.

Утверждение 3) следует из формул $f_+ = f \vee \mathbf{0}$, $f_- = f \wedge \mathbf{0}$, $|f| = f_+ - f_-$, предыдущих утверждений и теоремы 3.1. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда $M(T, \mathcal{S})$ — решёточное линейное пространство.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда семейство $M(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условию 4) из раздела 2.1.

Предложение 3.3. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T , $f, g \in D(T, \mathcal{S})$. Тогда $f \vee g, f \wedge g \in D(T, \mathcal{S})$ и $f_+, f_-, |f| \in D(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Существуют такие счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon/2$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon/2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку основа $\mathcal{S}$ мультипликативна, имеем $E_k \in \mathcal{S}$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то по неравенству Биркгофа

$$\begin{aligned} |(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| &\leq |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leq \\ &\leq |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leq \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как K счётно, заключаем, что $f \vee g \in D(T, \mathcal{S})$.

Совершенно так же убеждаемся, что $f \wedge g \in D(T, \mathcal{S})$.

Поскольку $f_+ = f \vee \mathbf{0}$, $f_- = f \wedge \mathbf{0}$ и $|f| = f_+ - f_-$, последние утверждения следуют из доказанных выше утверждений и теоремы 3.2. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $(f_i \in D(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция. Тогда $\sup(f_i \mid i \in I) \in D(T, \mathcal{S})$ и $\inf(f_i \mid i \in I) \in D(T, \mathcal{S})$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда семейство $D(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условию 4) из раздела 2.1.

3.4. Поточечная и равномерная сходимости сетей и последовательностей измеримых и распределимых функций

Предложение 3.4. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -аддитивный ансамбль на T , $f \in F(T)$ и $f = u\text{-}\lim(f_n \mid n \in N)$ для некоторой сети $(f_n \in M(T, \mathcal{S}) \mid n \in N)$. Тогда $f \in M(T, \mathcal{S})$. Если, кроме того, все f_n принадлежат $M_b(T, \mathcal{S})$, то $f \in M_b(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$. По условию найдётся такое m , что $|f - f_p| < (1/l)\mathbf{1}$ для всех $p \geq m$. Определим множества $S \equiv f^{-1}[x, y[$ и $S_l \equiv f^{-1}[[x + 3/l, y - 3/l]$, числа $r_k \equiv k/(2l)$ и множества $R_k \equiv f_m^{-1}[r_{k-1}, r_{k+1}[\in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$. Множества R_k покрывают множество T . Рассмотрим множества $Q_l \equiv \bigcup (R_k \mid k \in \mathbb{Z} \wedge R_k \cap S_l \neq \emptyset) \in \mathcal{S}$. Легко убедиться, что $S_l \subset Q_l$. Предположим, что $t \in Q_l$. Тогда найдутся такие $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in T$, что $t \in R_k$ и $s \in R_k \cap S_l$. Поэтому из того, что $f(t) < f_m(t) + 1/l < f_m(s) + 2/l < f_m(s) + 3/l \leq y - 3/l + 3/l = y$ и $f(t) > f_m(t) - 1/l > f_m(s) - 2/l > f_m(s) - 3/l \geq x + 3/l - 3/l = x$, следует, что $t \in S$. Поэтому $Q_l \subset S$ и $S = \bigcup (S_l \mid l \in \mathbb{N}) \subset \bigcup (Q_l \mid l \in \mathbb{N}) \subset S$. Таким образом, $S = \bigcup (Q_l \mid l \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}$ и $f \in M(T, \mathcal{S})$.

В случае ограниченных функций f_n функция f будет ограниченной благодаря лемме 2.2. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -аддитивный ансамбль на T . Тогда семейства $M(T, \mathcal{S})$ и $M_b(T, \mathcal{S})$ удовлетворяют условию 6) из раздела 2.1.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда семейство $M(T, \mathcal{S})$ нормально, а семейство $M_b(T, \mathcal{S})$ ограничено нормально (в смысле раздела 2.1).

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2 теоремы 3.1, следствия 2 предложения 3.2 и следствия 1. $\square$

Теорема 3.3 (теорема Дини). Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T , P — $\mathcal{S}$ -компактное подмножество T и $(f_n \in M(T, \mathcal{S}) \mid n \in N)$ — убывающая сеть с $p\text{-}\lim(f_n \mid n \in N) = \mathbf{0}$. Тогда $u\text{-}\lim(f_n|P \mid n \in N) = \mathbf{0}|P$.

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим такую возрастающую сеть $\pi \equiv (S_n \in \mathcal{S} \mid n \in N)$, что

$$S_n \equiv \{t \in T \mid 0 \leq f_n(t) < \varepsilon\} = \{t \in T \mid -\varepsilon < f_n(t) < \varepsilon\} = f_n^{-1}[x, y[\in \mathcal{S}.$$

Ясно, что π — покрытие T . Благодаря $\mathcal{S}$ -компактности P найдётся такое конечное подмножество $M \subset N$, что $P \subset \bigcup (S_m \mid m \in M)$. Так как π возрастает, можно выбрать такое $k \in N$, что $k \geq m$ для всех $m \in M$. Ясно, что $P \subset S_k$. Поскольку $(f_n \mid n \in N)$ убывает, делаем вывод, что $|f_l|P| \leq \varepsilon \mathbf{1}|P$ для всех $l \geq k$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на множестве T , P — $\mathcal{S}$ -компактное подмножество T , $f \in M(T, \mathcal{S})$ и $(f_n \in M(T, \mathcal{S}) \mid n \in \mathbb{N})$ — возрастающая сеть с $\text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N}) = f$. Тогда $\text{u-lim}(f_n|P \mid n \in \mathbb{N}) = f|P$.

Доказательство. По теореме 3.1 имеем $g_n \equiv f - f_n \in M(T, \mathcal{S})$. Поскольку $(g_n \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow \mathbf{0}$, мы можем применить теорему 3.3. $\square$

Предложение 3.5. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T , $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ для некоторой сети $(f_n \in D(T, \mathcal{S}) \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда $f \in D(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмём такой элемент $m \in \mathbb{N}$, что $|f - f_m| < (\varepsilon/3)\mathbf{1}$ для всех $n \geq m$. Рассмотрим счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &= |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leq \\ &\leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $s, t \in S_i$. Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $f \in D(T, \mathcal{S})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T . Тогда семейство $D(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условию 6) из раздела 2.1.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда семейство $D(T, \mathcal{S})$ нормально (в смысле раздела 2.1).

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 1 теоремы 3.2, следствия 2 предложения 3.3 и следствия 1. $\square$

Следующая лемма показывает, что условие σ -аддитивности $\mathcal{S}$ в теореме 3.1 и в предложении 3.4 весьма существенно, т. е. для некоторых основ $\mathcal{S}$, не являющихся σ -аддитивными, семейство $M(T, \mathcal{S})$ может быть незамкнутым по меньшей мере относительно сложения и равномерной сходимости и, следовательно, $M(T, \mathcal{S})$ [$M_b(T, \mathcal{S})$] может не быть нормальным [ограниченно нормальным].

Лемма 3.4. Существует основа $\mathcal{K}$ на $T \equiv [0, 1[\subset \mathbb{R}$, последовательность $(f_n \in M_b(T, \mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{N})$ и функции $h_1, h_2 \in M_b(T, \mathcal{K})$ и $f, g \in F_b(T)$, такие что $g = h_1 - h_2$, $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $f, g \notin M(T, \mathcal{K})$.

Доказательство. Определим топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$, взяв $T \equiv [0, 1[\subset \mathbb{R}$ и $\mathcal{G} \equiv \{[0, b[\mid 0 < b \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$. Тогда $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G} = \{[a, 1[\mid 0 \leq a < 1\}$. Положим

$$\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\} = \{[a, b[\mid 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{\emptyset\}.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{K}$ — основа.

Для всякого $n \in \omega$ обозначим $\Delta_n \equiv [2^{-(n+1)}, 2^{-n}[$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $f_n: T \rightarrow [0, 1]$, положив $f_n(t) \equiv 2^{-k}$ для всех $t \in \Delta_k$, $k \in n$, и $f_n(t) \equiv 0$ иначе. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если $x \geq 1$ или $y \leq 0$, то $f_n^{-1}[x, y[= \emptyset \in \mathcal{K}$. Если $x < 1$ и $y > 0$, то $f_n^{-1}[x, y[= [a, b[\in \mathcal{K}$ или $f_n^{-1}[x, y[= \emptyset \in \mathcal{K}$. Следовательно, $f_n \in M_b(T, \mathcal{K})$.

Рассмотрим функции $h_1 \equiv f_1$, $h_2 \equiv -f_2$ и $g \equiv h_1 + h_2$. Поскольку $g(t) = -1/2$ для всех $t \in \Delta_1$ и $g(t) = 0$ в других точках, мы видим, что $g^{-1}[]-1/3, 1/3[] = T \setminus \Delta_1 = [0, 1/4[\cup [1/2, 1[\notin \mathcal{K}$, и следовательно, $g \notin M(T, \mathcal{K})$.

Определим функцию $f: T \rightarrow [0, 1]$, положив $f(t) \equiv 2^{-n}$ для всех $t \in \Delta_n$, $n \in \omega$, и $f(0) \equiv 0$. Из того, что $f^{-1}[]0, 2[] =]0, 1[\notin \mathcal{K}$, вытекает, что $f \notin M(T, \mathcal{K})$. Нетрудно заметить, что $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$. $\square$

Следствие 1. Существует основа $\mathcal{K}$ на $T \equiv [0, 1[\subset \mathbb{R}$, такая что $M(T, \mathcal{K}) \neq D(T, \mathcal{K})$.

3.5. Отделимость множеств посредством измеримых и распределимых функций

Добавление условия отделимости σ -основы $\mathcal{S}$ снабжает семейство $M(T, \mathcal{S})$ рядом новых ключевых свойств.

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) если $\mathcal{S}$ — σ -основа, то $\text{Coz } M(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$;
- 2) если $\mathcal{S}$ — σ -алгебра, то $\text{Coz } M(T, \mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Если $f \in M(T, \mathcal{S})$, то

$$\text{coz } f = \bigcup (f^{-1}[]-n, -1/n[] \mid n \in \mathbb{N}) \cup \bigcup (f^{-1}[]1/n, n[] \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}.$$

Докажем утверждение 2). Если $S \in \mathcal{S}$, то $T \setminus S \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\chi(S) \in M(T, \mathcal{S})$. Отсюда вытекает, что $S = \text{coz } \chi(S) \in \text{Coz } M(T, \mathcal{S})$. $\square$

Предложение 3.6. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа. Тогда ансамбль $\text{Coz } M(T, \mathcal{S})$ — отделимая совершенная σ -основа.

Доказательство. Обозначим $\text{Coz } M(T, \mathcal{S})$ через $\mathcal{E}$ и $M(T, \mathcal{S})$ через A . По следствию 2 теоремы 3.1 семейство A удовлетворяет условиям 1), 1'), 2), 3) и 5) из раздела 2.1. По следствию 1 предложения 3.4 оно также удовлетворяет условию 6). Тогда согласно предложению 2.1 можно заключить, что $\mathcal{E}$ — σ -основа.

Пусть X и Y — непересекающиеся множества из $\text{Zer } A = \text{co-}\mathcal{E}$, т. е. $X \equiv \text{zer } f$ и $Y \equiv \text{zer } g$ для некоторых функций $f, g \in A$ и $X \cap Y = \emptyset$. По лемме 2.3 $\text{coz}(|f| + |g|) = \text{coz } f \cup \text{coz } g = T$, поэтому можно определить функцию $h \equiv |f|/(|f| + |g|)$. По предложению 3.2 $|f|, |g| \in A$, следовательно, согласно теореме 3.1 $h \in A$. По определению $h(t) = 0$ для всех $t \in X$ и $h(t) = 1$ для всех $t \in Y$. Рассмотрим функции $v \equiv (h - (1/2)\mathbf{1})_+$ и $u \equiv (h - (1/2)\mathbf{1})_-$. Они лежат в A , и потому $\text{coz } u, \text{coz } v \in \mathcal{E}$. Кроме того, $X \subset \text{coz } u$, $Y \subset \text{coz } v$ и $\text{coz } u \cap \text{coz } v = \emptyset$. Таким образом, ансамбль $\mathcal{E}$ отделимый.

Наконец, предположим, что $X \in \mathcal{E}$, т. е. $X = \text{coz } f$, $f \in A$. Рассмотрим функции $g_n \equiv (1/n)\mathbf{1} - |f| \wedge (1/n)\mathbf{1}$, $n \in \mathbb{N}$, лежащие в A . Тогда $|f|^{-1}[]1/n, \infty[] = \text{zer } g_n \in \text{Zer } A = \text{co-}\mathcal{E}$. Следовательно, $X = \bigcup (\text{zer } g_n \mid n \in \mathbb{N}) \in (\text{co-}\mathcal{E})_\sigma$. Таким образом, ансамбль $\mathcal{E}$ совершенный. $\square$

Лемма 3.6. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа. Тогда $M(T, \mathcal{S}) = M(T, \text{Coz } M(T, \mathcal{S}))$.

Доказательство. По лемме 3.5 $M(T, \text{Coz } M(T, \mathcal{S})) \subset M(T, \mathcal{S})$. Обратно, если $f \in M(T, \mathcal{S})$, то по лемме 2.4 $f^{-1}[x, y] = \text{coz } g$ для функции $g \equiv ((f - x\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}) \wedge ((y\mathbf{1} - f) \vee \mathbf{0}) \in M(T, \mathcal{S})$. Следовательно, $f \in M(T, \text{Coz } M(T, \mathcal{S}))$. $\square$

Следующая теорема обобщает лемму Урысона о нормальных топологических пространствах [26, 14.IV], берущую своё начало в лебеговской конструкции канторовой лестницы (лебеговской сингулярной мере) на отрезке (см., например, [35, 8.28] и [42, глава II, 8.3.2]).

Теорема 3.4 (теорема Лебега—Урысона о канторовой лестнице). Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая основа на множестве T . Тогда для любых непустых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{R}$ существует такая функция $f \in D_b(T, \mathcal{S})$, что $\mathbf{0} \leq f \leq \mathbf{1}$, $f[A] = \{0\}$ и $f[B] = \{1\}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим множества $K_n \equiv 2^n$, т. е. $K_n = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Определим по индукции две последовательности $(\gamma_n \mid n \in \omega)$ и $(\delta_n \mid n \in \omega)$ конечных коллекций $\gamma_n \equiv (G_{nk} \in \mathcal{S} \mid k \in K_n)$ и $\delta_n \equiv (F_{nk} \in \mathcal{R} \mid k \in K_n)$ со следующими свойствами:

- 1) $A \subset F_{n,k-1} \subset G_{nk} \subset F_{nk} \subset G_{n,k+1} \subset B' \equiv T \setminus B$ для всех $k = 1, \dots, 2^n - 2$;
- 2) $G_{n+1,2k} = G_{nk}$ и $F_{n+1,2k} = F_{nk}$ для всех $k \in K_n$.

По лемме 1.2 для любых множеств $P \in \mathcal{R}$ и $Q \in \mathcal{S}$ множество $U(P, Q) \equiv \{(X, Y) \mid X \in \mathcal{S} \wedge Y \in \mathcal{R} \wedge (P \subset X \subset Y \subset Q)\}$ непусто. По аксиоме выбора существует отображение $p: \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{R}$, такое что $p(E) \in E$.

Для $n = 0$ берём пару $(X_0, Y_0) \equiv p(U(A, B'))$ и коллекции $\gamma_0 \equiv (G_{0k} \in \mathcal{S} \mid k \in 1)$ и $\delta_0 \equiv (F_{0k} \in \mathcal{R} \mid k \in 1)$, где $G_{00} \equiv X_0$ и $F_{00} \equiv Y_0$. Тогда $A \subset G_{00} \subset F_{00} \subset B'$.

Предположим теперь, что такие коллекции построены для n . Определим коллекции $\gamma_{n+1} \equiv (G_{n+1,k} \mid k \in K_{n+1})$ и $\delta_{n+1} \equiv (F_{n+1,k} \mid k \in K_{n+1})$ следующим образом. Если $k = 2m$, то возьмём $G_{n+1,2m} \equiv G_{nm}$ и $F_{n+1,2m} \equiv F_{nm}$ для всех $m \in K_n$. Тогда $G_{n+1,2m} \subset F_{n+1,2m}$. Если $k = 2m + 1$, то рассмотрим пару $(X_k, Y_k) \equiv p(U(F_{n+1,2m}, G_{n+1,2m+2}))$ и возьмём $G_{n+1,2m+1} \equiv X_k$ и $F_{n+1,2m+1} \equiv Y_k$. Тогда $F_{n+1,2m} \subset G_{n+1,2m+1} \subset F_{n+1,2m+1} \subset G_{n+1,2m+2}$ для всех $m = 0, \dots, 2^n - 1$.

Ясно, что γ_n и δ_n возрастают. Можно проверить по индукции, что $G_{mj} = G_{m+i,k}$ и $F_{mj} = F_{m+i,k}$ для $k = j2^i$. Из этого следует, что если $r \equiv j/2^m = k/2^n$, то для $p \equiv j2^n = k2^m \equiv q$ имеем $G_{mj} = G_{m+n,p} = G_{n+m,q} = G_{nk}$. Поэтому можно корректно определить для множества $D \equiv \{k/2^n \mid n \in \omega \wedge k \in 2^n\}$ коллекцию $(G_r \in \mathcal{S} \mid r \in D)$, положив $G_r \equiv G_{nk}$ для всех $r \equiv k/2^n$. Аналогично можно определить коллекцию $(F_r \in \mathcal{R} \mid r \in D)$, положив $F_r \equiv F_{nk}$. Тогда $G_r \subset F_r$ для каждого r .

Пусть $r, s \in D$ и $r < s$. По определению $r = j/2^m$, $s = k/2^n$. Следовательно, из $p \equiv j2^n < k2^m \equiv q$ вытекает, что $G_r \equiv G_{mj} = G_{m+n,p} \subset G_{m+n,q} = G_{nk} \equiv G_s$. Аналогично $F_r \subset F_s$. Значит, эти коллекции возрастают.

2. Теперь определим функцию $f: T \rightarrow [0, 1]$, положив $f(t) \equiv 0$ для всех $t \in G_0 = G_{n0}$, $f(t) \equiv 1$ для всех $t \in B$ и $f(t) \equiv \sup\{r \in D \mid t \notin G_r\}$ для прочих t . Зафиксируем число n и рассмотрим множество $S_k \equiv G_{n,k+1} \setminus F_{n,k-1}$ для $k = 1, \dots, 2^n - 2$. Поскольку ансамбль $\mathcal{S}$ мультипликативен, $S_k \in \mathcal{S}$. Пусть $t \in S_k$. Тогда из того, что $t \notin F_{n,k-1}$, выводим, что $t \notin G_{n,k-1}$. Следовательно, $f(t) \geq (k-1)/2^n$. Предположим, что $f(t) > (k+1)/2^n$. Тогда найдётся $r \in D$, такое что $f(t) \geq r > (k+1)/2^n$ и $t \notin G_r$, но $t \in G_{n,k+1} \subset G_r$. Из этого противоречия получаем, что $f(t) \leq (k+1)/2^n$. Следовательно, $\omega(f, S_k) \leq 2/2^n$.

Возьмём $t \in B'$. Цепочка

$$A \subset G_{n0} \subset F_{n0} \subset G_{n1} \subset F_{n1} \subset G_{n2} \subset F_{n2} \subset \dots \subset F_{n,k-2} \subset \\ \subset G_{n,k-1} \subset F_{n,k-1} \subset G_{nk} \subset F_{nk} \subset G_{n,k+1} \subset \dots \subset G_{n\kappa} \subset F_{n\kappa} \subset B',$$

где $\kappa \equiv 2^n - 1$, даёт, что либо $t \in S_\kappa \equiv B' \setminus F_{n,\kappa}$, либо $t \in S_0 \equiv G_{n1}$, либо $t \in F_{nk} \setminus G_{nk} \subset S_k$, либо $t \in G_{n,k+1} \setminus F_{nk} \subset S_k$ для некоторого $k = 0, \dots, 2^n - 2$. В первом случае $t \notin G_{n\kappa}$ влечёт $f(t) \geq \kappa/2^n$. Следовательно, $\omega(f, S_\kappa) \leq 1/2^n$ и $S_\kappa \in \mathcal{S}$. Во втором случае $f(t) \leq 1/2^n$. Действительно, предположим, что $f(t) > 1/2^n$. Тогда существует такое $r \in D$, что $f(t) \geq r > 1/2^n$ и $t \notin G_r$, но $t \in G_{n1} \subset G_r$. Таким образом, приходим к противоречию. Следовательно, $\omega(f, S_0) \leq 1/2^n$. В остальных случаях $t \in S_k$ для некоторого $k = 1, \dots, 2^n - 2$.

В результате мы установили, что $B' \subset \bigcup (S_k \mid k \in K_n)$ и $\omega(f, S_k) \leq 2/2^n$. Наконец, если $t \in S_{\kappa+1} \equiv T \setminus F_{n\kappa}$, то $t \notin G_{n\kappa}$ влечёт $f(t) \geq \kappa/2^n$. Следовательно, $\omega(f, S_{\kappa+1}) \leq 1/2^n$ и $S_{\kappa+1} \in \mathcal{S}$. Так как $B \subset S_{\kappa+1}$, мы имеем покрытие $(S_k \in \mathcal{S} \mid k \in 2^n + 1)$ множества T с колебаниями $\omega(f, S_k) \leq 2/2^n$ для всех k . Таким образом, $f \in D_b(T, \mathcal{S})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая σ -основа на множестве T . Тогда для любых непустых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{R}$ существует функция $f \in M_b(T, \mathcal{S})$, такая что $0 \leq f \leq 1$, $f[A] = \{0\}$ и $f[B] = \{1\}$.

Доказательство. Теорема 3.4 даёт функцию $f \in D_b(T, \mathcal{S})$. Пользуясь следствием 1 предложения 3.1, приходим к выводу, что $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая σ -основа на множестве T . Тогда для любых непустых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{R}$ и любых действительных чисел $a \leq b$ существует функция $f \in M_b(T, \mathcal{S})$, такая что $\text{rng } f \subset [a, b]$, $f[A] = \{a\}$ и $f[B] = \{b\}$.

Доказательство. Возьмём функцию f из следствия 1. Тогда функция $f' \equiv a1 + (b-a)f$ обладает желаемыми свойствами. $\square$

Замечание 1. Теорема 3.4 является одним из основных средств для получения соотношения между бэровской и борелевской функциональными иерархиями на произвольном дескриптивном пространстве (см. [9, 22]).

Докажем теперь, что все a -основы (т. е. отделимые совершенные σ -основы) могут быть представлены в виде $\text{Coz } M(T, \mathcal{S})$ из предложения 3.6. Следующий результат получен А. Д. Александровым [28].

Теорема 3.5 (теорема Александрова). Пусть $\mathcal{S}$ — α -основа на множестве T . Тогда для любого множества $S \in \mathcal{S}$ найдётся такая положительная функция $f \in M_b(T, \mathcal{S})$, что $S = \text{coz } f$.

Доказательство. По условию $S = \bigcup (R_n \mid n \in \omega)$ для некоторой последовательности $(R_n \in \mathcal{R} \mid n \in \omega)$, где $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$. По теореме 3.4 множество

$$U_n \equiv \{f \in M_b(T, \mathcal{S}) \mid 0 \leq f \leq 1 \wedge (f[T \setminus S] = \{0\}) \wedge (f[R_n] = \{1\})\}$$

непусто для каждого $n \in \omega$. Пусть $A(T) \equiv \{f \in F(T) \mid 0 \leq f \leq 1\}$. По аксиоме выбора существует отображение $p: \mathcal{P}(A(T)) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A(T)$, такое что $p(E) \in E$. Для каждого n возьмём функцию $f_n \equiv p(U_n)$. Рассмотрим последовательность $(g_n \in M_b(T, \mathcal{S}) \mid n \in \omega)$, такую что $g_n \equiv \sum ((1/2)^m f_m \mid m \in n)$. Тогда для каждого $t \in T$ имеем $0 \leq g_{n+1}(t) - g_n(t) \leq (1/2)^n$. Следовательно, последовательность $(g_n \mid n \in \omega)$ равномерно сходится к некоторой функции $f \in F(T)$. По предложению 3.4 $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. Ясно, что $S = \text{coz } f$. $\square$

Следующий результат даёт характеристику α -основ в классе всех σ -основ.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{S}$ — α -основа;
- 2) $\mathcal{S} = \text{Coz } M_b(T, \mathcal{S}) = \text{Coz } M(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Очевидно, $\text{Coz } M_b(T, \mathcal{S}) \subset \text{Coz } M(T, \mathcal{S})$. Включение $\mathcal{S} \subset \text{Coz } M_b(T, \mathcal{S})$ следует из теоремы 3.5, а включение $\text{Coz } M(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ — из леммы 3.5.

Импликация 2) $\vdash$ 1) вытекает из предложения 3.6. $\square$

Замечание 2. Семейства функций, измеримых относительно σ -основ и σ -алгебр, и ансамбли их конуль-множеств использовались в [11, 24, 34, 40] для характеристики классов всех нормальных семейств и всех вполне нормальных семейств и для описания нормальной оболочки и вполне нормальной оболочки произвольного семейства функций.

4. Семейства равномерных функций на дескриптивном пространстве с покрыванием

Новый класс функций был введён в [3—7, 10, 46, 47, 50]. Этот класс расширяет класс ограниченных измеримых функций и играет важную роль в современном анализе. Эти функции были введены в перечисленных работах под названиями *почти полунепрерывных*, *метаполунепрерывных*, *мало колеблющихся* и *равномерных функций*.

Семейства $M(T, \mathcal{S})$ и $M_b(T, \mathcal{S})$ $\mathcal{S}$ -измеримых функций обладают хорошими свойствами, только если $\mathcal{S}$ — σ -основа (см. разделы 3.2—3.4). Но иногда свойство σ -аддитивности оказывается слишком ограничительным. В более общем

случае, когда $\mathcal{S}$ — только лишь основа, семейство $\mathcal{S}$ -равномерных функций имеет те же хорошие свойства, что и семейства $M_b(T, \mathcal{S})$ для σ -основ $\mathcal{S}$ (см. разделы 4.2 и 4.3).

4.1. Равномерные функции и их свойства

Напомним, что для функции $f \in F(T)$ и множества $E \subset T$ число $\omega(f, E) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in E\}$ называется колебанием функции f на множестве E (см. раздел 2.1). Согласно разделу 3.1, если $\pi \equiv (C_i \mid i \in I)$ — покрытие множества T , то число $\omega(f, \pi) \equiv \sup(\omega(f, C_i) \mid i \in I)$ называется колебанием функции f на покрытии π .

Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство конечных покрытий множества T . Функция f называется *равномерной относительно семейства $\mathfrak{C}$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\pi \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Семейство всех таких функций обозначим через $U(T, \mathfrak{C})$. По лемме 2.1 $U(T, \mathfrak{C}) \subset F_b(T)$.

Функция f называется *равномерной относительно ансамбля $\mathcal{S}$* , если она равномерна относительно семейства $\text{Cov } \mathcal{S}$. Семейство $U(T, \text{Cov } \mathcal{S})$ всех таких функций обозначим через $U(T, \mathcal{S})$. Ясно, что $U(T, \mathcal{S}) \subset D(T, \mathcal{S})$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T . Тогда $U(T, \mathcal{S}) = U(T, \mathcal{S}_\varphi)$.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определения. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $(T, \mathcal{S})$ — компактное дескриптивное пространство. Тогда

$$U(T, \mathcal{S}) = D(T, \mathcal{S}) = D_b(T, \mathcal{S}) = M_b(T, \mathcal{S}_\sigma) = M(T, \mathcal{S}_\sigma).$$

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определений и предложения 3.1. $\square$

В частности, это утверждение обобщает следующий классический результат: $C(T, \mathcal{G}) = C_b(T, \mathcal{G})$ для любого компактного топологического пространства $(T, \mathcal{G})$.

Докажем теперь две простые леммы о связях равномерных и измеримых функций.

Лемма 4.3. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -аддитивный ансамбль на множестве T . Тогда $U(T, \mathcal{S}) = M_b(T, \mathcal{S}) = D_b(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 1 предложения 3.1. $\square$

Лемма 4.4. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T . Тогда $M_b(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S}) \subset M_b(T, \mathcal{S}_\sigma)$.

Доказательство. Пусть $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. Тогда $f[T] \subset]-a, a[$ для некоторого $a > 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положительное натуральное число n , такое что $2a/n < \varepsilon$. Рассмотрим множества $C_i \equiv f^{-1}[]a(i-1)/n, a(i+1)/n[) \in \mathcal{S}$,

$|i| \in n$. Ясно, что $\bigcup(C_i \mid |i| \in n) = T$ и $\omega(f, C_i) \leq 2a/n < \varepsilon$. Таким образом, $f \in U(T, \mathcal{S})$.

Второе включение следует из леммы 4.3 и тривиального включения $U(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S}_\sigma)$. $\square$

Для ансамбля $\mathcal{S}$, не являющегося σ -аддитивным, оба включения в лемме 4.4 могут быть строгими (см. [23]).

Следствие 1 предложения 3.1 характеризует семейства $M(T, \mathcal{S})$ и $M_b(T, \mathcal{S})$ $\mathcal{S}$ -измеримых функций для σ -аддитивного ансамбля $\mathcal{S}$ через их колебания на счётных или конечных покрытиях, т. е. на покрытийном языке. Также возможно охарактеризовать равномерные функции на прообразном языке, т. е. через прообразы некоторых множеств. В этом смысле следующий результат обладает отдалённым сходством с предложением 3.1.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $f \in F_b(T)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{S})$;
- 2) если $[x', y'] \subset]x, y[$, то существует такое множество $X \in \mathcal{S}_\varphi$, что $f^{-1}[[x', y']] \subset X \subset f^{-1}[x, y[$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Пусть $[x', y'] \subset]x, y[$. Возьмём $\varepsilon \equiv ((y - y') \wedge (x' - x))/2$. Найдётся такое конечное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Рассмотрим множества $Y \equiv f^{-1}[[x', y']]$, $Z \equiv f^{-1}[x, y[$, $J \equiv \{i \in I \mid S_i \cap Y \neq \emptyset\}$ и $X \equiv \bigcup(S_j \mid j \in J) \in \mathcal{S}_\varphi$. Очевидно, $Y \subset X$. Если $t \in X$, то $t \in S_j$ для некоторого $j \in J$. Возьмём точку $s \in S_j \cap Y$. По построению $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Тогда $f(t) \leq f(s) + \varepsilon \leq y' + \varepsilon \leq y' + (y - y')/2 < y$ и $f(t) \geq f(s) - \varepsilon \geq x' - \varepsilon \geq x' - (x' - x)/2 > x$. Следовательно, $X \subset Z$.

Докажем импликацию 2) $\vdash$ 1). Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдутся такие $a, b \in \mathbb{R}$, что $\text{rng } f \subset [a, b]$. По принципу Архимеда существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $n > (b - a)/\varepsilon$. Возьмём точки $x_i \equiv a + (b - a)i/(3n)$ для $i \in 3n + 2$ и $x_{-1} \equiv a - (b - a)/(3n)$. Рассмотрим множества $Y_i \equiv f^{-1}[[x_i, x_{i+1}]]$ и $Z_i \equiv f^{-1}[x_{i-1}, x_{i+2}[$ для $i \in 3n$. Так как $[a, b] = \bigcup([x_i, x_{i+1}] \mid i \in 3n)$, коллекция $(Y_i \mid i \in 3n)$ покрывает T . По условию $X_i \equiv \{X \in \mathcal{S}_\varphi \mid Y_i \subset X \subset Z_i\} \neq \emptyset$ для $i \in 3n$. Положим $\mathcal{X} \equiv \bigcup(X_i \mid i \in 3n)$. Согласно аксиоме выбора существует функция $p: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{X}$, такая что $p(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$. Рассмотрим множества $X_i \equiv p(X_i) \in \mathcal{X}_i$. Поскольку $Y_i \subset X_i \subset Z_i$, коллекция $\xi \equiv (X_i \in \mathcal{S}_\varphi \mid i \in 3n)$ покрывает T . Из того, что $\omega(f, Z_i) < x_{i+2} - x_{i-1} < \varepsilon$, вытекает, что $\omega(f, \xi) < \varepsilon$. Таким образом, $f \in U(T, \mathcal{S}_\varphi) = U(T, \mathcal{S})$. $\square$

Лемма 3.3 показывает, что вполне $\mathcal{S}$ -ступенчатые функции $\mathcal{S}$ -измеримы для аддитивного ансамбля $\mathcal{S}$. Следующая лемма показывает, что эти функции $\mathcal{S}$ -равномерны для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$.

Лемма 4.5. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T . Тогда ${}^q\text{St}(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. По определению вполне ступенчатой функции существуют такие конечные разбиения $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T и коллекция

$(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$, что $f(t) = x_i$ для всех $t \in S_i$. Это разбиение является покрытием T и $\omega(f, \pi) = 0$. $\square$

4.2. Поточечные операции над равномерными функциями

Следующие теоремы показывают, что $U(T, \mathfrak{C})$ и $U(T, \mathfrak{S})$ имеют те же хорошие свойства, что и $M_b(T, \mathfrak{S})$ (см. разделы 3.2 и 3.3).

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий множества T . Если $f, g \in U(T, \mathfrak{C})$ и $r \in \mathbb{R}$, то

- 1) $\mathbf{1} \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 2) $rf \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 3) $f + g \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 4) $fg \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 5) $\mathbf{1}/f \in U(T, \mathfrak{C})$ для каждой такой функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $\mathbf{1}/f \in F_b(T)$;
- 6) $f \vee g, f \wedge g \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 7) $f_+, f_-, |f| \in U(T, \mathfrak{C})$;
- 8) $\sqrt[n]{f} \in U(T, \mathfrak{C})$ для любой $f \geq 0$.

Доказательство. Обозначим $U(T, \mathfrak{C})$ через $A(T)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмём такие положительные числа a и b , что $|f| \leq a\mathbf{1}$ и $|g| \leq b\mathbf{1}$.

Соотношение 1) вытекает из того, что для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$ имеем $\omega(\mathbf{1}, \pi) = 0$.

Докажем соотношение 2). Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то $|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r||f(s) - f(t)| \leq |r|\omega(f, \pi)$. Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leq |r|\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $rf \in A(T)$.

При $r = 0$ имеем $\omega(rf, \pi) = \omega(\mathbf{0}, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$.

Докажем утверждение 3). Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leq |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Следовательно,

$$\omega(f+g, \pi \wedge \varkappa) \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Так как семейство $\mathfrak{C}$ мультипликативно, мы заключаем, что $\pi \wedge \varkappa \in \mathfrak{C}$. Таким образом, $f+g \in A(T)$.

Докажем утверждение 4). Возьмём числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/(2b)$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/(2a)$ и рассмотрим такие покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$\begin{aligned} |(fg)(s) - (fg)(t)| &= |(f(s)g(s) - f(t)g(s)) + (f(t)g(s) - f(t)g(t))| \leq \\ &\leq |g(s)||f(s) - f(t)| + |f(t)||g(s) - g(t)| \leq b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa). \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega(fg, \pi \wedge \varkappa) \leq b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa) < \varepsilon,$$

и следовательно, $fg \in A(T)$.

Докажем утверждение 5). Пусть $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $1/|f| \leq c1$ для некоторого положительного числа c . Для $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/c^2$ найдётся такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то

$$|(1/f)(s) - (1/f)(t)| = |f(s) - f(t)|/(|f(s)||f(t)|) \leq c^2\omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(1/f, \pi) \leq c^2\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Таким образом, $1/f \in A(T)$.

Докажем утверждение 6). Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют такие покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то по неравенству Биркгофа

$$\begin{aligned} |(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| &\leq |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leq \\ &\leq |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leq \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega(f \vee g, \pi \wedge \varkappa) \leq \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon,$$

и мы видим, что $f \vee g \in A(T)$.

Вполне аналогично проверяется, что $f \wedge g \in A(T)$.

Поскольку $f_+ = f \vee 0$, $f_- = f \wedge 0$ и $|f| = f_+ - f_-$, утверждение 7) следует из доказанных выше.

Докажем утверждение 8). Согласно принципу Архимеда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $a/n < \varepsilon^m/2$. Разделим интервал $[0, a]$ точками $x_k = ak/n$, $k \in n+1$. Тогда $0 = x_0 < \dots < x_n = a$ и $x_{k+1} - x_k = a/n$.

Возьмём такое $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < a/n$. Рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}[[x_k, x_{k+1}]]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in n \mid C_i \cap X_k \neq \emptyset\}$ непусто и конечно. Пусть k_i — наименьший элемент K_i . Предположим, что $s \in C_i$, и возьмём точку $t \in C_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < \omega(f, C_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geq -\omega(f, C_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{f(s)} < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + a/n}$ для всех $s \in C_i$. Отсюда вытекает неравенство $\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + a/n} - \sqrt[m]{x_{k_i}}$. Если $k_i \geq 2$, то используя лемму 3.2 получаем

$$\begin{aligned} \omega(\sqrt[m]{f}, C_i) &< \sqrt[m]{x_{k_i} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{x_{k_i}} - \sqrt[m]{x_{k_i} - \frac{a}{n}} = \\ &= \sqrt[m]{x_{k_i-1} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2}} < \sqrt[m]{x_{k_i-1}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2} - \frac{a}{n}} = \\ &= \sqrt[m]{x_{k_i-2} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-3}} < \dots < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{2\frac{a}{n}} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) < \sqrt[m]{x_0 + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{x_1} - \sqrt[m]{x_0} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[n]{f}, C_i) < \sqrt[n]{x_1 + \frac{a}{n}} - \sqrt[n]{x_1} = \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы установили, что $\omega(\sqrt[n]{f}, \pi) < \varepsilon$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий множества T и $(f_i \in U(T, \mathfrak{C}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция. Тогда $\sum(f_i \mid i \in I)$, $P(f_i \mid i \in I)$, $\sup(f_i \mid i \in I)$ и $\inf(f_i \mid i \in I)$ принадлежат $U(T, \mathfrak{C})$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий множества T . Тогда семейство $U(T, \mathfrak{C})$ удовлетворяет условиям 1)–5) и 7') из раздела 2.1.

Следствие 3. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T . Если $f, g \in U(T, \mathcal{S})$ и $r \in \mathbb{R}$, то

- 1) $1 \in U(T, \mathcal{S})$;
- 2) $rf \in U(T, \mathcal{S})$;
- 3) $f + g \in U(T, \mathcal{S})$;
- 4) $fg \in U(T, \mathcal{S})$;
- 5) $1/f \in U(T, \mathcal{S})$ для каждой такой функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $1/f \in F_b(T)$;
- 6) $f \vee g, f \wedge g \in U(T, \mathcal{S})$;
- 7) $f_+, f_-, |f| \in U(T, \mathcal{S})$;
- 8) $\sqrt[n]{f} \in U(T, \mathcal{S})$ для любой $f \geq 0$.

Доказательство. Все утверждения следуют из леммы 1.9 и теоремы 4.1. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $(f_i \in U(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция. Тогда $\sum(f_i \mid i \in I)$, $P(f_i \mid i \in I)$, $\sup(f_i \mid i \in I)$ и $\inf(f_i \mid i \in I)$ принадлежат $U(T, \mathcal{S})$.

Следствие 5. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T . Тогда семейство $U(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условиям 1)–5) и 7') из раздела 2.1.

4.3. Равномерная сходимость последовательностей равномерных функций

Предложение 4.2. Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство конечных покрытий множества T , $f \in F(T)$ и $f = u\text{-}\lim(f_n \mid n \in N)$ для некоторой сети $(f_n \in U(T, \mathfrak{C}) \mid n \in N)$. Тогда $f \in U(T, \mathfrak{C})$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in N$, такое что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n \geq m$. Рассмотрим такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &= |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leq \\ &\leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $s, t \in C_i$. Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $f \in U(T, \mathfrak{C})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство конечных покрытий множества T . Тогда семейство $U(T, \mathfrak{C})$ удовлетворяет условию 6) из раздела 2.1.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий множества T . Тогда семейство $U(T, \mathfrak{C})$ ограничено нормально (в смысле раздела 2.1).

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2 теоремы 4.1 и предыдущего следствия. $\square$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T , содержащий T , $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$ для некоторой сети $(f_n \in U(T, \mathcal{S}) \mid n \in N)$. Тогда $f \in U(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.9 и предложения 4.2. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда семейство $U(T, \mathcal{S})$ ограничено нормально (в смысле раздела 2.1).

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5 теоремы 4.1 и предыдущего следствия. $\square$

Следствие 3 показывает, что семейства $U(T, \mathcal{S})$ $\mathcal{S}$ -равномерных функций замкнуты относительно равномерной сходимости для любой основы $\mathcal{S}$ без требования σ -аддитивности $\mathcal{S}$. Напротив, лемма 3.4 продемонстрировала, что для семейств $\mathcal{S}$ -измеримых функций это условие существенно.

4.4. Отделимость множеств посредством равномерных функций

Здесь аналогично разделу 3.5 мы увидим, что добавление условия отделимости основы $\mathcal{S}$ снабжает семейство $U(T, \mathcal{S})$ рядом новых ключевых свойств.

Предложение 4.3. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство покрытий множества T . Тогда ансамбль $\text{Coz } U(T, \mathfrak{C})$ — α -основа (т. е. отделимая совершенная σ -основа).

Доказательство. По следствию 2 теоремы 4.1 и следствию 1 предложения 4.2 семейство $U(T, \mathfrak{C})$ удовлетворяет условиям 1)–4) и 6) из раздела 2.1. Тогда из предложения 2.1 вытекает, что $\text{Coz } U(T, \mathfrak{C})$ — α -основа. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа. Тогда ансамбль $\text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ — α -основа.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.9 и предложения 4.3. $\square$

Представим теперь теорему Лебега—Урысона (теорему 3.4) в новой формулировке.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая основа на множестве T . Тогда для любых двух непустых непересекающихся множеств $A, B \in \text{co-}\mathcal{S}$ существует такая функция $f \in U(T, \mathcal{S})$, что $0 \leq f \leq 1$, $f[A] = \{0\}$ и $f[B] = \{1\}$.

Доказательство. Заметим, что в доказательстве теоремы 3.4 мы построили конечные покрытия T и, следовательно, уже доказали, что $f \in U(T, \mathcal{S})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая основа на множестве T . Тогда для любых двух непустых непересекающихся множеств $A, B \in \text{co-}\mathcal{S}$ и любых действительных чисел $a \leq b$ существует такая функция $f \in U(T, \mathcal{S})$, что $\text{rng } f \subset [a, b]$, $f[A] = \{a\}$ и $f[B] = \{b\}$.

Доказательство. Возьмём функцию f из теоремы 4.2. Тогда функция $f' \equiv a1 + (b - a)f$ будет обладать нужными свойствами. $\square$

Замечание 1. Теорема 4.2 является одним из основных средств для получения тонкого соотношения между бэровской и борелевской функциональными иерархиями на произвольном дескриптивном пространстве [41] (ср. с замечанием 1 в разделе 3.5).

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая совершенная основа на T . Тогда для любого множества $S \in \mathcal{S}$ найдётся положительная функция $f \in U(T, \mathcal{S})$, такая что $S = \text{coz } f$.

Доказательство. Поскольку основа $\mathcal{S}$ совершенна, $S = \bigcup (R_n \mid n \in \omega)$ для некоторой последовательности $(R_n \in \mathcal{R} \mid n \in \omega)$, где $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$. По теореме 4.2 множество

$$V_n \equiv \{f \in U(T, \mathcal{S}) \mid 0 \leq f \leq 1 \wedge (f[T \setminus S] = \{0\}) \wedge (f[R_n] = \{1\})\}$$

непусто при каждом $n \in \omega$. Пусть $A(T) \equiv \{f \in F(T) \mid 0 \leq f \leq 1\}$. По аксиоме выбора существует отображение $p: \mathcal{P}(A(T)) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A(T)$, такое что $p(E) \in E$. Для каждого n возьмём функцию $f_n \equiv p(V_n)$. Определим последовательность $(g_n \mid n \in \omega)$, полагая $g_n \equiv \sum((1/2)^m f_m \mid m \in n)$. По следствию 3 теоремы 4.1 $g_n \in U(T, \mathcal{S})$. Для любого $t \in T$ имеем $0 \leq g_{n+1}(t) - g_n(t) \leq (1/2)^n$. Следовательно, последовательность $(g_n \mid n \in \omega)$ равномерно сходится к некоторой $f \in F(T)$. По следствию 3 предложения 4.2 $f \in U(T, \mathcal{S})$. Ясно, что $S = \text{coz } f$. $\square$

Следующий результат даёт характеристику a -основ в классе всех основ (ср. со следствием 1 теоремы 3.5).

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathcal{S}$ — a -основа (т. е. отделимая совершенная σ -основа);
- 2) $\mathcal{S} = \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \vdash 2)$. Включение $\mathcal{S} \subset \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ следует из теоремы 4.3. Поскольку $\mathcal{S}$ — σ -основа, леммы 4.3 и 3.5 дают $\text{Coz } U(T, \mathcal{S}) = \text{Coz } M_b(T, \mathcal{S}) \subset \text{Coz } M(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

Импликация $2) \vdash 1)$ следует из предложения 1. $\square$

Проясним связь между произвольной основой $\mathcal{S}$ и соответствующей a -основой $\text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ в одном частном случае.

Лемма 4.6. Пусть $(\mathcal{S}_\alpha \mid \alpha \in A)$ — коллекция отделимых совершенных основ на T . Тогда $\text{Coz } U(T, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} \equiv \bigcup (\mathcal{S}_\alpha \mid \alpha \in A)$ — наименьшая a -основа на T , содержащая все $\mathcal{S}_\alpha$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathcal{S}_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$. Так как $\mathcal{S}_\alpha$ — отделимая совершенная основа, из теоремы 4.3 следует, что найдётся функция $f \in U(T, \mathcal{S}_\alpha) \subset U(T, \mathcal{S})$, такая что $S = \text{coz } f$. Поэтому $S \in \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ и, таким образом, $\mathcal{S}_\alpha \subset \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$.

Если $\mathcal{E}$ — a -основа, содержащая все $\mathcal{S}_\alpha$, то $U(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{E})$. Пользуясь следствием 1 теоремы 4.3, находим, что $\text{Coz } U(T, \mathcal{S}) \subset \text{Coz } U(T, \mathcal{E}) = \mathcal{E}$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая совершенная основа на T . Тогда $\text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ — наименьшая a -основа на T , содержащая $\mathcal{S}$, т. е. a -оболочка $A(\mathcal{S})$ ансамбля $\mathcal{S}$.

К сожалению, описание a -оболочки $A(\mathcal{S})$ в виде $\text{Coz } U(T, \mathcal{S})$ не является внутренним. Поэтому ниже мы предлагаем некоторое внутреннее описание $A(\mathcal{S})$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий T . Рассмотрим семейство $U(T, \mathfrak{C})$ всех $\mathfrak{C}$ -равномерных функции на T и a -основу $\text{Coz } U(T, \mathfrak{C})$ всех конуль-множеств семейства $U(T, \mathfrak{C})$ (см. предложение 4.3).

Напомним, что $\text{rng } \varkappa = \bigcup (Q_i \mid i \in I)$ для любой коллекции $\varkappa \equiv (Q_i \subset T \mid i \in I)$.

Конечное покрытие $\varkappa \equiv (Q_i \subset T \mid i \in I)$ множества T назовём *покрытием с градуировкой* $(\underline{\varkappa}(k), \overline{\varkappa}(k) \mid k \in l+1)$, если $\underline{\varkappa}(k) \equiv (Q_i \subset T \mid i \in \underline{I}(k) \subset I)$ и $\overline{\varkappa}(k) \equiv (Q_i \subset T \mid i \in \overline{I}(k) \subset I)$ — такие подколлекции коллекции $\varkappa$, что

- 1) $\emptyset = \underline{I}(0) \subset \underline{I}(1) \subset \dots \subset \underline{I}(l) \subset I$, $I \supset \overline{I}(0) \supset \overline{I}(1) \supset \dots \supset \overline{I}(l) = \emptyset$;
- 2) $\text{rng } \underline{\varkappa}(k) \cap \text{rng } \overline{\varkappa}(k) = \emptyset$ для всех $k \in l$;
- 3) $\text{rng } \underline{\varkappa}(k+1) \cup \text{rng } \overline{\varkappa}(k) = T$ для всех $k \in l$ [6, 1.2.2].

Следующая теорема даёт внутреннее описание a -основы $\text{Coz } U(T, \mathfrak{C})$, порождённой мультипликативным семейством $\mathfrak{C}$.

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное семейство конечных покрытий множества T и $G \subset T$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in \text{Coz } U(T, \mathfrak{C})$;
- 2) существует последовательность конечных покрытий $(\varkappa_n \in \mathfrak{C} \mid n \in \mathbb{N})$ с градуировками $(\underline{\varkappa}_n(k), \overline{\varkappa}_n(k) \mid k \in 2^n + 1)$, такая что
 - а) $G = \bigcup (\text{rng } \overline{\varkappa}_n(2) \mid n \in \mathbb{N})$;
 - б) $\text{rng } \underline{\varkappa}_{n+1}(2k) \supset \text{rng } \underline{\varkappa}_n(k)$ и $\text{rng } \overline{\varkappa}_{n+1}(2k) \supset \text{rng } \overline{\varkappa}_n(k)$ для всех $k \in 2^n + 1$;
 - в) $\text{rng } \underline{\varkappa}_{n+1}(2k+1) \cup \text{rng } \overline{\varkappa}_n(k) = T$ и $\text{rng } \overline{\varkappa}_{n+1}(2k+1) \cup \text{rng } \underline{\varkappa}_n(k+1) = T$ для всех $k \in 2^{n-1} + 1$.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \vdash 2)$. Пусть $G = \text{coz } f$ для некоторой функции $f \in U(T, \mathfrak{C})$. Без ограничения общности можно предположить, что $0 \leq f \leq 1$. Рассмотрим множества $X_n(k) \equiv f^{-1}[[0, k/2^n - 1/2^{n+2}]]$ и $Y_n(k) \equiv f^{-1}[[k/2^n + 1/2^{n+2}, 1]]$. Очевидно, $X_n(k) \subset X_n(k+1)$ и $Y_n(k) \supset Y_n(k+1)$. Пользуясь аксиомой выбора, мы можем для каждого n взять такое покрытие $\varkappa_n \equiv (Q_{ni} \subset T \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/2^{n+3}$. Рассмотрим множества

$$\underline{I}_n(k) \equiv \{i \in I_n \mid Q_{ni} \cap X_n(k) \neq \emptyset\}, \quad \bar{I}_n(k) \equiv \{i \in I_n \mid Q_{ni} \cap Y_n(k) \neq \emptyset\}$$

и соответствующие коллекции

$$\underline{\varkappa}_n(k) \equiv (Q_{ni} \mid i \in \underline{I}_n(k)), \quad \bar{\varkappa}_n(k) \equiv (Q_{ni} \mid i \in \bar{I}_n(k)).$$

Ясно, что $\underline{I}_n(k) \subset \underline{I}_n(k+1)$ и $\bar{I}_n(k) \supset \bar{I}_n(k+1)$. Предположим, что $s \in Q_{ni}$ для некоторого $i \in \underline{I}_n(k)$. Тогда найдётся точка $r \in Q_{ni} \cap X_n(k)$. Следовательно, $f(s) < f(r) + 1/2^{n+3} \leq k/2^n - 1/2^{n+3}$. Аналогично $f(s) > k/2^n + 1/2^{n+3}$ для всех $s \in Q_{ni}$ и всех $i \in \bar{I}_n(k)$. Поэтому $\text{rng } \underline{\varkappa}_n(k) \cap \text{rng } \bar{\varkappa}_n(k) = \emptyset$ для всех $k \in 2^n$. Так как $X_n(k+1) \cup Y_n(k) = T$, имеем $\underline{I}_n(k+1) \cup \bar{I}_n(k) = I_n$ для всех $k \in 2^n$. Кроме того, из $X_n(0) = \emptyset$ следует, что $\underline{I}_n(0) = \emptyset$, а из $Y_n(2^n) = \emptyset$ — что $\bar{I}_n(2^n) = \emptyset$. Таким образом, $\varkappa_n$ — покрытие с градуировкой $(\underline{\varkappa}(k), \bar{\varkappa}(k) \mid k \in 2^n + 1)$.

Ясно, что $G = \bigcup (\text{rng } \bar{\varkappa}_n(k) \mid n \in \mathbb{N})$ для всех k . Если $s \in Q_{ni}$ для некоторого $i \in \underline{I}_n(k)$, то $f(s) < 2k/2^{n+1} - 1/2^{n+3}$ влечёт $s \in X_{n+1}(2k)$. Следовательно, $\text{rng } \underline{\varkappa}_n(k) \subset \text{rng } \underline{\varkappa}_{n+1}(2k)$. Если $s \in Q_{ni}$ для некоторого $i \in \bar{I}_n(k)$, то $f(s) > 2k/2^{n+1} - 1/2^{n+3}$ влечёт $s \in Y_{n+1}(2k)$. Следовательно, $\text{rng } \bar{\varkappa}_n(k) \subset \text{rng } \bar{\varkappa}_{n+1}(2k)$. Поскольку $Y_n(k) = f^{-1}[[2k/2^{n+1} + 1/2^{n+2}, 1]]$ и $X_{n+1}(2k+1) = f^{-1}[[0, (2k+1)/2^{n+1} - 1/2^{n+3}]]$, мы имеем $X_n(2k+1) \cup Y_n(k) = T$. Поэтому $\text{rng } \underline{\varkappa}_{n+1}(2k+1) \cup \text{rng } \bar{\varkappa}_n(k) = T$. Наконец, из $X_n(k+1) = f^{-1}[[0, (2k+2)/2^{n+1} - 1/2^{n+2}]]$ и $Y_{n+1}(2k+1) = f^{-1}[[2k/2^{n+1} + 1/2^{n+3}, 1]]$ вытекает, что $X_n(k+1) \cup Y_{n+1}(2k+1) = T$, и следовательно, $\text{rng } \bar{\varkappa}_{n+1}(2k+1) \cup \text{rng } \underline{\varkappa}_n(k+1) = T$.

Докажем импликацию $2) \vdash 1)$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in 2^n + 1$ определим множества $E_n(k) \equiv \text{rng } \underline{\varkappa}_n(k)$, $G_n(k) \equiv \text{rng } \bar{\varkappa}_n(k)$ и $Z_n(k) \equiv T \setminus G_n(k)$. По определению градуировки $E_n(k) \subset E_n(k+1)$, $G_n(k) \supset G_n(k+1)$ и $E_n(k) \cap G_n(k) = \emptyset$, а потому $E_n(k) \subset Z_n(k)$ и $Z_n(k) \subset Z_n(k+1)$. Определим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f(s) \equiv \sup\{k/2^n \mid s \notin E_n(k+1)\}$ для любого $s \in T$. Тогда $0 \leq f \leq 1$. Рассмотрим множества $D_n(k) \equiv E_n(k+1) \setminus Z_n(k-1)$ для $k \in 2^n \setminus 1$. Пусть $s \in D_n(k)$. Тогда из $s \notin Z_n(k-1)$ вытекает $s \notin E_n(k-1)$. Следовательно, $f(s) \geq (k-2)/2^n$. Докажем, что $f(s) \leq (k+1)/2^n$. Предположим обратное. Поскольку $s \in E_n(k+1)$ и $f(s) > (k+1)/2^n$, найдётся двоично-рациональное число $l/2^m$, такое что $l/2^m > (k+1)/2^n$ и $s \notin E_m(l+1)$. Если мы соединим это с условием б) и неравенством $2^n 2l/2^{m+n+1} > 2^{m+1}(k+1)/2^{m+n+1}$, то получим

$$\begin{aligned} s \in E_n(k+1) &\subset E_{m+n+1}(2^{m+1}(k+1)) \subset \\ &\subset E_{m+n+1}(2^n 2l) \subset Z_{m+n+1}(2^n 2l) \subset Z_{m+n+1}(2^n(2l+1)). \end{aligned}$$

С другой стороны, по условию в) из $s \notin E_m(l+1)$ следует, что $s \in G_{m+1}(2l+1)$, т. е. $s \notin Z_{m+1}(2l+1) \supset Z_{m+n+1}(2^n(2l+1))$. Это противоречие доказывает неравенство $f(s) \leq (k+1)/2^n$. Следовательно, $(k-2)/2^n \leq f(s) \leq (k+1)/2^n$ для $s \in D_n(k)$, $k \in 2^n \setminus 1$, и $f(s) \leq 1/2^n$ для $s \in E_n(1)$. Кроме того, мы установили, что $f(s) \geq (2^n-2)/2^n$ для $s \in G_n(2^n-1) = T \setminus Z_n(2^n-1)$. Таким образом, $\omega(f, D_n(k)) \leq 3/2^n$, $\omega(f, E_n(1)) \leq 1/2^n$ и $\omega(f, G_n(2^n-1)) \leq 2/2^n$.

Пусть Q_{ni} — член коллекции $\varkappa_n$. Если $i \in \underline{I}_n(1)$, то $Q_{ni} \subset E_n(1)$. Если $i \in I_n \setminus \underline{I}_n(2^n)$, то из $I_n = \underline{I}_n(2^n) \cup \bar{I}_n(2^n-1)$ вытекает, что $i \in \bar{I}_n(2^n-1)$, и следовательно, $Q_{ni} \subset G_n(2^n-1)$. Если два предыдущих случая не реализуются, то $i \in \underline{I}_n(k+1) \setminus \underline{I}_n(k)$ для некоторого $k \in 2^n \setminus 1$. Тогда из $I_n = \underline{I}_n(k) \cup \bar{I}_n(k-1)$ следует, что $i \in \bar{I}_n(k-1)$. Поэтому $Q_{ni} \subset E_n(k+1) \cap G_n(k-1)$. Следовательно, $\omega(f, Q_{ni}) < 4/2^n$. Таким образом, $f \in U(T, \mathfrak{C})$.

Пусть $s \in G$. По условию а) имеем $s \notin Z_n(2)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $f(s) \geq 1/2^n > 0$. Пусть $s \notin G$. Вновь по условию а) имеем $s \in \bigcap (E_n(2) \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда $f(s) \leq \inf(2/2^n \mid n \in \mathbb{N})$, т. е. $f(s) = 0$. Следовательно, $G = \text{coz } f$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $G \subset T$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$;
- 2) существует последовательность конечных покрытий $(\varkappa_n \in \text{Cov } \mathcal{S} \mid n \in \mathbb{N})$ с градуировками $(\underline{\varkappa}_n(k), \bar{\varkappa}_n(k) \mid k \in 2^n+1)$, обладающая свойствами а)—в) из теоремы 4.4.

Доказательство. Семейство $\mathfrak{C} \equiv \text{Cov } \mathcal{S}$ мультипликативно в силу леммы 1.9. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T и $G \subset T$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in \text{Coz } M_b(T, \mathcal{S})$;
- 2) существует последовательность конечных покрытий $(\varkappa_n \in \text{Cov } \mathcal{S} \mid n \in \mathbb{N})$ с градуировками $(\underline{\varkappa}_n(k), \bar{\varkappa}_n(k) \mid k \in 2^n+1)$, обладающая свойствами а)—в) из теоремы 4.4.

Доказательство. По лемме 4.3 $U(T, \mathcal{S}) = M_b(T, \mathcal{S})$. $\square$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая совершенная основа на T и $G \subset T$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in A(\mathcal{S})$;
- 2) существует последовательность конечных покрытий $(\varkappa_n \in \text{Cov } \mathcal{S} \mid n \in \mathbb{N})$ с градуировками $(\underline{\varkappa}_n(k), \bar{\varkappa}_n(k) \mid k \in 2^n+1)$, обладающая свойствами а)—в) из теоремы 4.4.

Доказательство. По следствию 1 леммы 4.6 $A(\mathcal{S}) = \text{Coz } U(T, \mathcal{S})$. $\square$

Замечание 2. Использование понятия равномерной функции позволило дать другую (отличную от лебеговской) характеристику функций, интегрируемых по Риману. Приведём эту характеристику.

Пусть $(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — тихоновское топологическое пространство с ансамблем $\mathcal{G}$ всех открытых множеств и положительной ограниченной радоновской мерой $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, a] \subset \mathbb{R}$, заданной на σ -алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств, порождённой ансамблем $\mathcal{G}$. Рассмотрим пренебрежимый ансамбль $\mathcal{N} \equiv \{F \in \mathcal{F} \mid \mu F = 0\}$ и порождённый им идеал $\mathcal{N}_\mu \equiv \mathcal{I}(\mathcal{N}) \equiv \{I \subset T \mid \exists F \in \mathcal{N} (I \subset F)\}$. Использование свойства Стоуна для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}_\mu$ даёт ансамбль $\mathcal{ZP}_\mu \equiv \mathcal{SP}(\mathcal{G}, \mathcal{N}_\mu) \equiv \{G \cup N \mid G \in \mathcal{G} \wedge N \in \mathcal{N}_\mu\}$ всех *множеств со свойством Захарова*. В [7, 8, 21, 25] доказано, что следующие утверждения равносильны:

- 1) функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману;
- 2) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Из доказанного ниже предложения 5.6 следует, что эти утверждения также равносильны утверждению

- 3) $f \in \text{QU}_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{N}_\mu)$.

Замечание 3. Использование понятия равномерной функции позволило выделить основное семейство *симметризуемых функций* $S(T, \mathcal{G})$, пригодное для решения проблемы Рисса—Радона—Фреше характеристики радоновских интегралов как линейных функционалов для произвольного хаусдорфова топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ (см. [14—20]).

А именно, в качестве семейства $S(T, \mathcal{G})$ было взято семейство $\mathcal{K}$ -равномерных функций $U(T, \mathcal{K})$ для ансамбля всех *симметризованных множеств* $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$. Для него в [50] было доказано, что $S(T, \mathcal{G})$ является равномерным замыканием решёточного линейного пространства Φ . Хаусдорфа [34] $SC_b(T, \mathcal{G}) \equiv \{f + g \mid f \in SC_b^l(T, \mathcal{G}) \wedge g \in SC_b^u(T, \mathcal{G})\}$, порождённого конусами верхне- и нижнеполунепрерывных функций. Это описание оправдывает употребление термина «метapolунепрерывный» по отношению к симметризуемым функциям.

Замечание 4. Использование более общих семейств $U(T, \mathcal{E})$ функций, равномерных относительно мультипликативных покрываний $\mathcal{E}$, явилось необходимым для характеристики класса всех ограниченно нормальных семейств и для описания ограниченно нормальной оболочки произвольного семейства функций в [23] (ср. с замечанием 2 в конце раздела 3).

5. Семейства функций на дескриптивном пространстве с пренебрежимостью

Если $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью, то оно определяет несколько более обширных семейств функций (в сравнении с се-

мествами, присущими дескриптивным пространствам), обладающих рассмотренными свойствами измеримости, распределимости и равномерности всюду за исключением пренебрежимых множеств.

5.1. Почти измеримые, почти распределимые и почти равномерные функции

Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Функция $f \in F(T)$ называется *почти измеримой* на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если существует такое множество $E \in \text{co-}\mathcal{I}$, что $f|E \in M(E, \mathcal{S}_E)$. Семейство всех почти измеримых функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $\text{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Функция $f \in F(T)$ называется *почти распределимой* [*почти равномерной*] на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если для некоторого множества $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётное [конечное] покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S}_E \mid i \in I)$ множества E , такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Семейство всех почти распределимых [почти равномерных] функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $\text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ [$\text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$].

Два следующих утверждения являются прямыми следствиями определений.

Лемма 5.1. Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Тогда $f \in \text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ [$f \in \text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$] тогда и только тогда, когда существует такое множество $E \in \text{co-}\mathcal{I}$, что $f|E \in D(E, \mathcal{S}_E)$ [$f|E \in U(E, \mathcal{S}_E)$].

Лемма 5.2. Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Тогда

$$\text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset \text{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset \text{AM}(T, \mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}) = \text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}).$$

Семейства $\text{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma))$, $\text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma))$ и $\text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma))$ обозначаются также через $\text{AM}(T, \mathcal{S})$, $\text{AD}(T, \mathcal{S})$ и $\text{AU}(T, \mathcal{S})$ соответственно. Их элементы называются *почти измеримыми*, *почти распределимыми* и *почти равномерными функциями относительно ансамбля $\mathcal{S}$* .

Эти семейства являются расширениями классического семейства функций со свойством Бэра (см., например, [26, § 32] и [42, 15.6]) с узкого класса бэровских (топологических) пространств $(T, \mathcal{G})$ на широкий класс дескриптивных пространств $(T, \mathcal{S})$; они расширяют также семейство почти непрерывных (т. е. непрерывных на плотных открытых множествах) функций, впервые использованное в [33].

Лемма 5.3. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $E \subset T$. Если $f \in M(T, \mathcal{S})$, $f \in D(T, \mathcal{S})$ или $f \in U(T, \mathcal{S})$, то $f|E \in M(E, \mathcal{S}_E)$, $f|E \in D(E, \mathcal{S}_E)$ или $f|E \in U(E, \mathcal{S}_E)$ соответственно.

Доказательство. Пусть $f \in M(T, \mathcal{S})$ и $]x, y[\subset \mathbb{R}$. Тогда $S \equiv f^{-1}[]x, y[\in \mathcal{S}$. Поэтому $(f|E)^{-1}[]x, y[= S \cap E \in \mathcal{S}_E$, и следовательно, $f|E \in M(E, \mathcal{S}_E)$.

Теперь пусть $f \in D(T, \mathcal{S})$ [$f \in U(T, \mathcal{S})$] и $\varepsilon > 0$. Тогда существует счётное [конечное] покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T , такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Рассмотрим счётное [конечное] покрытие $\varkappa \equiv (S_i \cap E \mid i \in I)$ множества E .

Из того, что $S_i \cap E \in \mathcal{S}_E$ и $\omega(f|E, \mathcal{I}) < \varepsilon$, заключаем, что $f|E \in D(E, \mathcal{S}_E)$ [$f|E \in U(E, \mathcal{S}_E)$]. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{I}$ — ансамбль на T . Тогда $M(T, \mathcal{S}) \subset AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, $D(T, \mathcal{S}) \subset AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $U(T, \mathcal{S}) \subset AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Лемма 5.4. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа и $\mathcal{I}$ — ансамбль на множестве T . Тогда $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $AU_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = AM_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Доказательство. Для любого $E \subset T$ основа $\mathcal{S}_E$ σ -аддитивна. Поэтому из леммы 4.3 вытекает, что $M_b(E, \mathcal{S}_E) = U(E, \mathcal{S}_E)$. По предложению 3.1 имеем $M(E, \mathcal{S}_E) = D(E, \mathcal{S}_E)$. $\square$

Предложение 5.1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{I}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ [$AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$] удовлетворяет условиям 1)–5) и 7) [7')] из раздела 2.1. Если, кроме того, основа $\mathcal{S}$ является σ -аддитивной, то семейство $AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ удовлетворяет условиям 1)–5) и 7). Более того, если $\mathcal{I}$ является σ -аддитивным, то семейства $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, $AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ удовлетворяют условию 6).

Доказательство. Прямо из определения следует, что $\mathbf{1} \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Пусть $f, g \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Тогда $f|D \in U(D, \mathcal{S}_D)$ и $g|E \in U(E, \mathcal{S}_E)$ для некоторых $D, E \in \text{co-}\mathcal{I}$. Из аддитивности $\mathcal{I}$ следует мультипликативность $\text{co-}\mathcal{I}$. Следовательно, $H \equiv D \cap E \in \text{co-}\mathcal{I}$. По лемме 5.3 $f|H \in U(H, \mathcal{S}_H)$ и $g|H \in U(H, \mathcal{S}_H)$. По следствию 4 предложения 4.2 семейство $U(H, \mathcal{S}_H)$ ограничено нормально. Поэтому функции $rf|H$ (для $r \in \mathbb{R}$), $(f + g)|H$, $(fg)|H$, $(f \vee g)|H$, $(f \wedge g)|H$ принадлежат $U(H, \mathcal{S}_H)$. Следовательно, функции rf , $f + g$, fg , $f \vee g$, $f \wedge g$ принадлежат $AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Пусть $f \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\mathbf{1}/f \in F_b(T)$. Тогда существует $D \in \text{co-}\mathcal{I}$, такое что $f|D \in U(D, \mathcal{S}_D)$. По следствию 3 теоремы 4.1 $(\mathbf{1}/f)|D \in U(D, \mathcal{S}_D)$, откуда выводим, что $\mathbf{1}/f \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Пусть ансамбль $\mathcal{I}$ σ -аддитивен и $f = u\text{-}\lim(f_n \mid n \in \omega)$ для некоторой последовательности $(f_n \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \mid n \in \omega)$. Тогда $f_n|D_n \in U(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$ для некоторого $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$. Из σ -аддитивности $\mathcal{I}$ вытекает δ -мультипликативность $\text{co-}\mathcal{I}$. Следовательно, $H \equiv \bigcap(D_n \mid n \in \omega) \in \text{co-}\mathcal{I}$. По лемме 5.3 $f_n|H \in U(H, \mathcal{S}_H)$ для всех $n \in \omega$. По следствию 3 предложения 4.2 получаем, что $f \in U(H, \mathcal{S}_H)$.

Для $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ рассуждения аналогичны. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T . Тогда семейство $AD(T, \mathcal{S})$ [$AU(T, \mathcal{S})$] удовлетворяет условиям 1)–5) и 7) [7')] из раздела 2.1. Если, кроме того, основа $\mathcal{S}$ является σ -аддитивной, то семейство $AM(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет условиям 1)–5) и 7).

Доказательство. По следствию 1 леммы 1.4 ансамбли $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)$ аддитивны. $\square$

Это предложение порождает естественный вопрос о каком-либо функциональном описании равномерной оболочки рассмотренных семейств $AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Оно будет предложено в следующем разделе.

5.2. Квазиизмеримые, квазираспределимые и квазиравномерные функции

Здесь мы рассмотрим несколько более широких классов функций, чем классы почти измеримых, почти распределимых и почти равномерных функций.

Определения и свойства

Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Функцию $f \in F(T)$ назовём *квазиизмеримой* на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и $g \in M(E, \mathcal{S}_E)$, что $|f|E - g| < \varepsilon \mathbf{1}|E$. Семейство всех квазиизмеримых функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Непосредственно из определений следует, что $AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Функцию $f \in F(T)$ назовём *квазираспределимой* [квазиравномерной] на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и счётное [конечное] покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества E , что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Семейство всех квазираспределимых [квазиравномерных] функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ [$QU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$]. Ясно, что $QU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Непосредственно из определений следует, что $AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset QU(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $AD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Семейства $QM(T, \mathcal{S}, N(\mathcal{S}_\sigma))$, $QD(T, \mathcal{S}, N(\mathcal{S}_\sigma))$ и $QU(T, \mathcal{S}, N(\mathcal{S}_\varphi))$ обозначаются также через $QM(T, \mathcal{S})$, $QD(T, \mathcal{S})$ и $QU(T, \mathcal{S})$ соответственно. Их элементы называются *квазиизмеримыми*, *квазиравномерными* и *квазираспределимыми функциями относительно ансамбля $\mathcal{S}$* . Эти функции были введены в [1, 2], чтобы заменить классические семейства функций со свойством Бэра (см., например, [26, § 32] и [42, 15.6]), обладающие хорошими свойствами только для узкого класса бэровских (топологических) пространств. Эти семейства позволили решить задачи Файна—Гилмана—Ламбека о функциональном описании равномерного пополнения ограниченной части классического кольца частных и рационально полного кольца частных кольца непрерывных функций и Накано—Шимогаки о функциональном описании дедекиндова и канторова пополнений решёточного линейного пространства непрерывных функций не только для бэровских, но для общих тихоновских пространств [2, 5—8, 48, 49].

Лемма 5.5. Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Тогда $QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмём такие $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и $g \in M(E, \mathcal{S}_E)$, что $|f|E - g| < (\varepsilon/2)\mathbf{1}|E$. По предложению 3.1 существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S}_E \mid i \in I)$ множества E , такое что $\omega(g, \pi) < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $s, t \in S_i \subset E$ и каждого $i \in I$. Таким образом, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. $\square$

Предложение 5.2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T и $\mathcal{J}$ — ансамбль на T . Тогда $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) = \text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Мы должны только установить включение $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) \subset \text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Пусть $f \in \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ и $\text{rng } f \subset [-z, z]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют такие множество $D_n \in \text{co-}\mathcal{J}$ и счётное покрытие $\pi_n \equiv (R_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n , что $\omega(f, \pi_n) < 1/n < \varepsilon$. По принципу Архимеда существует такое $k_n \in \mathbb{N}$, что $k_n > 6nz$. Рассмотрим точки $x_{kn} \equiv -z + k/(3n) \in \mathbb{R}$ для любых $k \in k_n$. Имеем $\bigcup([x_{nk}, x_{n,k+1}] \mid k \in k_n) \supset [-z, z]$. Определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}([x_{nk}, x_{n,k+1}])$, $J_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \emptyset\}$ и $E_{nk} \equiv \bigcup(R_{3n,i} \mid i \in J_{nk}) \in \mathcal{S}$. Тогда коллекция $\lambda_n \equiv (E_{nk} \mid k \in k_n)$ является конечным покрытием D_n .

Пусть $s, t \in E_{nk}$. Тогда $s \in R_{3n,i}$ и $t \in R_{3n,j}$ для некоторых i и j , таких что $X \equiv R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \emptyset$ и $Y \equiv R_{3n,j} \cap A_{nk} \neq \emptyset$. Возьмём некоторые точки $s_i \in X$ и $s_j \in Y$. Тогда

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(t)| < \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\omega(f, \lambda_n) < 1/n < \varepsilon$. Следовательно, $f \in \text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T . Тогда $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}) = \text{QU}_b(T, \mathcal{S})$.

Доказательство. Так как $\mathcal{S}_\varphi = \mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$, мы имеем

$$\begin{aligned} \text{QD}_b(T, \mathcal{S}) &\equiv \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)) = \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)) = \\ &= \text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)) \equiv \text{QU}_b(T, \mathcal{S}). \end{aligned} \quad \square$$

Предложение 5.3. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейства $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ и $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ удовлетворяют условиям 1)–4), 6) и 7') из раздела 2.1. Если, кроме того, основа $\mathcal{S}$ является σ -аддитивной, то и семейство $\text{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ удовлетворяет тем же условиям.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. Положим $A(T) \equiv \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. Взяв $D \in \mathcal{J}$ и одноэлементное покрытие $(D_i \equiv D \mid i \in \{i\})$ множества $D \subset T$, видим, что $\mathbf{1} \in A(T)$.

Пусть $f, g \in A(T)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют $D_n, E_n \in \text{co-}\mathcal{J}$ и счётные покрытия $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_n)$ множества E_n , такие что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$.

Для каждого $r \in \mathbb{R}$ положим $p(r, n) \equiv \min\{l \in \mathbb{N} \mid |r|/l < 1/n\}$ и $\pi_n \equiv \varkappa_{p(r, n)}$. Тогда $\omega(rf, \pi_n) < 1/n$, и следовательно, $rf \in A(T)$.

Рассмотрим счётную коллекцию $\nu_n \equiv (G_{2n,i} \cap H_{2n,j} \in \mathcal{S} \mid (i, j) \in I_{2n} \times J_{2n})$. Эта коллекция является покрытием множества $D_{2n} \cap E_{2n} \in \text{co-}\mathcal{J}$, и $\omega(f+g, \nu_n) \leq \omega(f, \nu_n) + \omega(g, \nu_n) < 1/n$. Поэтому $f+g \in A(T)$.

Если $t, s \in G_{2n,i} \cap H_{2n,j}$, то

$$\begin{aligned} |f(t) \vee g(t) - f(s) \vee g(s)| &\leq |f(t) \vee g(t) - f(t) \vee g(s)| + |f(t) \vee g(s) - f(s) \vee g(s)| \leq \\ &\leq |g(t) - g(s)| + |f(t) - f(s)| < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

и следовательно, $\omega(f \vee g, \nu_n) < 1/n$. Отсюда вытекает, что $f \vee g \in A(T)$. Аналогично $f \wedge g \in A(T)$.

Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_q \mid q \in \mathbb{N})$ для некоторой последовательности $(f_q \in A(T) \mid q \in \mathbb{N})$. Возьмём такое $m \in \mathbb{N}$, что $|f(t) - f_q(t)| < 1/(3n)$ для всех $t \in T$ и $q \geq m$. Для функции $h \equiv f_m$ существуют $V_n \in \text{co-J}$ и коллекция $\mu_n \equiv (S_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$, покрывающая V_n , такие что $\omega(h, \mu_n) < 1/(3n)$. Тогда

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - h(s)| + |h(s) - f(s)| < \frac{1}{n}$$

для всех $s, t \in S_{ni}$. Поэтому $\omega(f, \mu_n) < 1/n$, и следовательно, $f \in A(T)$.

Предположим, что $f \in A(T)$, $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $1/|f| \leq c1$ для некоторого положительного числа c . Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $D \in \text{co-J}$ и счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества D , такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon/c^2$. Если $s, t \in S_i$, то

$$\left| \frac{1}{f}(s) - \frac{1}{f}(t) \right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)||f(t)|} \leq c^2 \omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(1/f, \pi) \leq c^2 \omega(f, \pi) < \varepsilon$. Таким образом, $1/f \in A(T)$.

Для $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ рассуждения аналогичны.

Теперь рассмотрим случай σ -аддитивной $\mathcal{S}$. Поскольку $0|D, 1|D \in M(D, \mathcal{S}_D)$ для любого $D \subset T$, имеем $0, 1 \in B(T) \equiv \text{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Пусть $f \in B(T)$, $\varepsilon > 0$ и $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда найдутся $D \in \text{co-J}$ и $g \in M(D, \mathcal{S}_D)$, такие что $|f|D - g| < (\varepsilon/|r|)1|D$. Из $rg \in M(D, \mathcal{S}_D)$ следует, что $|(rf)|D - (rg)| < \varepsilon 1|D$, т. е. $rf \in B(T)$.

Для $f_1, f_2 \in B(T)$ и $\varepsilon > 0$ возьмём $D_1, D_2 \in \text{co-J}$, $g_1 \in M(D_1, \mathcal{S}_{D_1})$ и $g_2 \in M(D_2, \mathcal{S}_{D_2})$, такие что $|f_1|D_1 - g_1| < (\varepsilon/2)1|D_1$ и $|f_2|D_2 - g_2| < (\varepsilon/2)1|D_2$. Рассмотрим множество $D \equiv D_1 \cap D_2 \in \text{co-J}$ и функции $f \equiv (f_1 + f_2)|D$, $g \equiv (g_1 + g_2)|D$, $\tilde{f} \equiv (f_1 \vee f_2)|D$ и $\tilde{g} \equiv (g_1 \vee g_2)|D$. По лемме 5.3 $g_1|D, g_2|D \in M(D, \mathcal{S}_D)$. Теорема 3.1 показывает, что $g \in M(D, \mathcal{S}_D)$. Тогда из того, что

$$|f - g| \leq |f_1|D - g_1|D + |f_2|D - g_2|D < \frac{\varepsilon}{2}1|D + \frac{\varepsilon}{2}1|D = \varepsilon 1|D,$$

следует, что $f \in B(T)$. Предложение 3.2 даёт $\tilde{g} \in M(T, \mathcal{S}_D)$. Из неравенства Биркгофа следует, что

$$\begin{aligned} |\tilde{f} - \tilde{g}| &\leq |(f_1 \vee f_2)|D - (f_1 \vee g_2)|D + |(f_1 \vee g_2)|D - (g_1 \vee g_2)|D| \leq \\ &\leq |f_2|D - g_2|D + |f_1|D - g_1|D < \frac{\varepsilon}{2}1|D + \frac{\varepsilon}{2}1|D = \varepsilon 1|D, \end{aligned}$$

и мы заключаем, что $\tilde{f} \in B(T)$. Для $f_1 \wedge f_2$ доказательство аналогично.

Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_q \mid q \in \mathbb{N})$ для некоторой последовательности $(f_q \in B(T) \mid q \in \mathbb{N})$. Возьмём такое $m \in \mathbb{N}$, что $|f(t) - f_q(t)| < \varepsilon/2$ для всех $t \in T$ и $q \geq m$. Пусть $D \in \text{co-}\mathcal{I}$ и $g \in M(D, \mathcal{S}_D)$ таковы, что $|f_q|D - g| < (\varepsilon/2)\mathbf{1}|D$. Тогда $|f|D - g| \leq |f|D - f_q|D| + |f_q|D - g| < \varepsilon\mathbf{1}|D$. Таким образом, $f \in B(T)$.

Пусть $f \in B(T)$, $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leq c\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа c . Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\beta \equiv (\varepsilon/(2c^2)) \wedge (1/2c)$. Существуют такие $D \in \text{co-}\mathcal{I}$ и $g \in M(D, \mathcal{S}_D)$, что $|f|D - g| < \beta\mathbf{1}|D$. Следовательно, $|g| > (1/c - \beta)\mathbf{1}|D$. Из того, что

$$\left| \frac{1}{f} \right| D - \frac{1}{g} = \frac{|f|D - g|}{|f|D| |g|} < \left(\frac{c\beta}{1/c - \beta} \right) \mathbf{1}|D \leq \left(\frac{\varepsilon}{2 - 2c\beta} \right) \mathbf{1}|D \leq \varepsilon\mathbf{1}|D,$$

получаем, что $1/f \in B(T)$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T . Тогда семейства $\text{QD}(T, \mathcal{S})$ и $\text{QU}(T, \mathcal{S})$ удовлетворяют условиям 1)–4), 6) и 7') из раздела 2.1. Если, кроме того, основа $\mathcal{S}$ является σ -аддитивной, то и семейство $\text{QM}(T, \mathcal{S})$ удовлетворяет тем же условиям.

Лемма 5.6. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на множестве T и $\mathcal{I}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $\text{QM}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ удовлетворяет условию 5) из раздела 2.1.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in \text{QM}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $c > 0$, что $|f_1| \leq c\mathbf{1}$ и $|f_2| \leq c\mathbf{1}$. Положим $\beta \equiv (\varepsilon/3c) \wedge (\sqrt{\varepsilon}/2)$. Существуют такие $D_1, D_2 \in \text{co-}\mathcal{I}$, $g_1 \in M(D_1, \mathcal{S}_{D_1})$ и $g_2 \in M(D_2, \mathcal{S}_{D_2})$, что $|f_1|D_1 - g_1| < \beta\mathbf{1}|D_1$ и $|f_2|D_2 - g_2| < \beta\mathbf{1}|D_2$. Рассмотрим множество $D \equiv D_1 \cap D_2 \in \text{co-}\mathcal{I}$ и функции $f \equiv (f_1 f_2)|D$ и $g \equiv (g_1 g_2)|D$. По лемме 5.3 $g_1|D, g_2|D \in M(D, \mathcal{S}_D)$. По теореме 3.1 имеем, что $g \in M(D, \mathcal{S}_D)$. Очевидно, что $|g_2| < (c + \beta)\mathbf{1}|D$. Тогда из того, что

$$\begin{aligned} |f - g| &\leq |(f_1 f_2)|D - (f_1 g_2)|D| + |(f_1 g_2)|D - (g_1 g_2)|D| < \\ < c|f_2|D - g_2|D| + (c + \beta)|f_2|D - g_2|D| < (2c\beta + \beta^2)\mathbf{1}|D \leq \left(\frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{4} \right) \mathbf{1}|D < \varepsilon\mathbf{1}|D, \end{aligned}$$

следует, что $f \in \text{QM}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на множестве T и $\mathcal{I}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $\text{QM}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ ограничено нормально.

Предложение 5.4. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{I}$ — идеальный ансамбль на T . Тогда семейства $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ удовлетворяют условию 5) из раздела 2.1.

Доказательство. Пусть $f, g \in \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Возьмём такие положительные числа c и d , что $|f| \leq c\mathbf{1}$ и $|g| \leq d\mathbf{1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $(c + d)/n < \varepsilon/2$ и такие $D_n, E_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и счётные покрытия $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_n)$ множества E_n , что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$.

Рассмотрим счётное множество $W_n \equiv I_n \times J_n$. Для каждой пары $w \equiv (i, j) \in W_n$ рассмотрим множество $Q_{nw} \equiv G_{ni} \cap H_{nj} \in \mathcal{S}$. Если $s, t \in Q_{nw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leq |f(t)| |g(t) - g(s)| + |g(s)| |f(t) - f(s)| \leq \frac{c}{n} + \frac{d}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{nw}) \leq \varepsilon/2$.

Рассмотрим множество $F_n \equiv \bigcup (Q_{nw} \mid w \in W_n)$ и его счётное покрытие $\mu_n \equiv (Q_{nw} \in \mathcal{S} \mid w \in W_n)$. Для него $\omega(fg, \mu_n) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Кроме того,

$$\begin{aligned} F_n &\equiv \bigcup (Q_{nw} \mid w \in W_n) = \bigcup (G_{ni} \cap H_{nj} \mid (i, j) \in I_n \times J_n) = \\ &= \bigcup (G_{ni} \mid i \in I_n) \cap \bigcup (H_{nj} \mid j \in J_n) \supset D_n \cap E_n. \end{aligned}$$

Следовательно, $T \setminus F_n \subset (T \setminus D_n) \cup (T \setminus E_n)$. Поскольку $\mathcal{J}$ — идеал, видим, что $T \setminus F_n \in \mathcal{J}$. Таким образом, $fg \in \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Пусть $f, g \in \text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют такие $D_n, E_n \in \text{co-}\mathcal{J}$ и конечные покрытия $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_n)$ множества E_n , что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$. По лемме 2.1 функции $f|_{D_n}$ и $f|_{E_n}$ ограниченные.

Положим $a_n \equiv \sup\{|f(t)| \mid t \in D_n\}$ и $b_n \equiv \sup\{|g(t)| \mid t \in E_n\}$. По принципу Архимеда существуют $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, такие что $p_n > 2nb_n$ и $q_n > 2na_n$. Рассмотрим конечное множество $W_n \equiv I_n \times J_n \times I_{p_n} \times J_{q_n}$. Для любого набора $w \equiv (i_1, j_1, i_2, j_2) \in W_n$ рассмотрим множество $Q_{nw} \equiv G_{ni_1} \cap H_{nj_1} \cap G_{p_n i_2} \cap H_{q_n j_2} \in \mathcal{S}$.

Если $s, t \in Q_{nw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leq |f(t)| |g(t) - g(s)| + |g(s)| |f(t) - f(s)| \leq \frac{a_n}{q_n} + \frac{b_n}{p_n} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{nw}) \leq 1/n$. Рассмотрим конечную коллекцию $\mu_n \equiv (Q_{nw} \mid w \in W_n)$, покрывающую множество $F_n \equiv \text{rng } \mu_n \equiv \bigcup (Q_{nw} \mid w \in W_n)$. Тогда $\omega(fg, \mu_n) \leq 1/n < \varepsilon$.

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} F_n &\equiv \bigcup (Q_{nw} \mid w \in W_n) = \\ &= \bigcup (G_{ni_1} \cap H_{nj_1} \cap G_{p_n i_2} \cap H_{q_n j_2} \mid (i_1, j_1, i_2, j_2) \in I_n \times J_n \times I_{p_n} \times J_{q_n}) = \\ &= \bigcup (G_{ni_1} \mid i_1 \in I_n) \cap \bigcup (H_{nj_1} \mid j_1 \in J_n) \cap \bigcup (G_{p_n i_2} \mid i_2 \in I_{p_n}) \cap \\ &\cap \bigcup (H_{q_n j_2} \mid j_2 \in J_{q_n}) \subset D_n \cap E_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T \setminus F_n \subset T \setminus (D_n \cap E_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n}) = (T \setminus D_n) \cup (T \setminus E_n) \cup (T \setminus D_{p_n}) \cup (T \setminus E_{q_n}).$$

Поскольку $\mathcal{J}$ — идеальный ансамбль, мы видим, что $T \setminus F_n \in \mathcal{J}$. Таким образом, $fg \in \text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T . Тогда семейства $\mathcal{QD}_b(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{QU}(T, \mathcal{S})$ удовлетворяют условию 5) из раздела 2.1.

Доказательство. По следствию 1 леммы 1.4 ансамбли $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)$ являются идеалами. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — идеальный ансамбль на T . Тогда семейства $\mathcal{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ и $\mathcal{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ ограничено нормальны.

Следующее предложение является модульным вариантом обобщения предложения 5.4 для квазираспределимых функций.

Предложение 5.5. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — идеальный ансамбль на T . Тогда для любых $f \in \mathcal{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ и $g \in \mathcal{AD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ имеем $fg \in \mathcal{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Возьмём такое $E \in \text{co-}\mathcal{J}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует счётное покрытие $\lambda_n \equiv (H_{nj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_n)$ множества E , такое что $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$. Пусть b — такое положительное число, что $|g| \leq b\mathbf{1}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем какое-нибудь $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $(b+1)/n < \varepsilon$. Найдутся такие $D_n \in \text{co-}\mathcal{J}$ и счётное покрытие $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n , что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$.

Для всех $k \in \mathbb{N}$ определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}[-k, k] \cap D_n$ и $I_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid G_{ni} \cap A_{nk} \neq \emptyset\}$. Рассмотрим счётные коллекции $\varkappa_{nk} \equiv (G_{ni} \mid i \in I_{nk})$, покрывающие множества $\text{rng } \varkappa_{nk} \equiv \bigcup (G_{ni} \mid i \in I_{nk}) \supset A_{nk}$. Ясно, что $\omega(f, \varkappa_{nk}) < 1/n$.

Также ясно, что $\sup\{|f(t)| \mid t \in \text{rng } \varkappa_{nk}\} \leq k + 1/n \equiv a_{nk}$. Возьмём натуральные числа $q_{nk} \equiv 2nk + 2$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим множество $W_{nk} \equiv I_{nk} \times J_{q_{nk}}$. Для любой пары $w \equiv (i, j) \in W_{nk}$ рассмотрим множество $Q_{nkw} \equiv G_{ni} \cap H_{q_{nk}j} \in \mathcal{S}$.

Если $s, t \in Q_{nkw}$, то

$$\begin{aligned} |(fg)(t) - (fg)(s)| &\leq |f(t)| |g(t) - g(s)| + |g(s)| |f(t) - f(s)| \leq \\ &\leq \frac{a_{nk}}{q_{nk}} + \frac{b}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{b}{n} < \frac{b+1}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{nzw}) \leq (b+1)/n$. Положим $C_n \equiv \bigcup (\{k\} \times W_{nk} \mid k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим множество $F_n \equiv \bigcup (Q_{nkw} \mid (k, w) \in C_n)$ и его счётное покрытие $\mu_n \equiv (S_{nc} \in \mathcal{S} \mid c \in C_n)$, где $S_{nc} \equiv Q_{nkw}$ для $c \equiv (k, w)$. Тогда $\omega(fg, \mu_n) \leq (b+1)/n < \varepsilon$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} F_n &\equiv \bigcup (Q_{nkw} \mid (k, w) \in C_n) = \bigcup \left(\bigcup (Q_{nkw} \mid w \in W_{nk}) \mid k \in \mathbb{N} \right) = \\ &= \bigcup \left(\bigcup (G_{ni} \cap H_{q_{nk}j} \mid (i, j) \in I_{nk} \times J_{q_{nk}}) \mid k \in \mathbb{N} \right) = \\ &= \bigcup \left(\bigcup (G_{ni} \mid i \in I_{nk}) \cap \bigcup (H_{q_{nk}j} \mid j \in J_{q_{nk}}) \mid k \in \mathbb{N} \right) \supset \\ &\supset \bigcup (A_{nk} \cap E \mid k \in \mathbb{N}) = \bigcup (A_{nk} \mid k \in \mathbb{N}) \cap E = D_n \cap E. \end{aligned}$$

Следовательно, $T \setminus F_n \subset (T \setminus D_n) \cup (T \setminus E)$. Из идеальности $\mathcal{I}$ вытекает, что $T \setminus F_n \in \mathcal{I}$. Таким образом, $fg \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. $\square$

Вопрос 1. Является ли семейство $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ кольцом, т. е. удовлетворяет ли оно условию 5) из раздела 2.1 при каких-нибудь предположениях о $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$?

Вопрос 2. Если такое пространство $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ существует, то удовлетворяет ли соответствующее $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ условию 7)?

Замечательно, что ограниченно нормальные семейства $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ ограниченных квазираспределимых и квазиравномерных функций могут быть представлены как семейства функций, равномерных относительно некоторых производных основ. Это вновь подчёркивает принципиальную важность понятия равномерной функции.

Лемма 5.7. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T , $\mathcal{I}$ — идеал на T и $]x, y[\subset \mathbb{R}$. Если $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, то $f^{-1}[]x, y[\in (\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))_\sigma$. Если $f \in \text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, то $f^{-1}[]x, y[\in (\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I}))_\sigma$.

Доказательство. Пусть $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и счётное покрытие $\pi_n \equiv (S_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества D_n , что $\omega(f, \pi_n) < 1/n$. Рассмотрим множества $X \equiv f^{-1}[]x, y[$, $X_n \equiv f^{-1}[]x + 1/n, y - 1/n[$, $J_n = \{i \in I_n \mid S_{ni} \cap X_n \neq \emptyset\}$ и $G_n \equiv \bigcup (S_{ni} \mid i \in J_n) \in \mathcal{S}_\sigma$. Понятно, что $X_n \cap D_n \subset G_n$. Из того, что $N_n \equiv X \setminus D_n \subset \subset T \setminus D_n \in \mathcal{I}$, следует, что $N_n \in \mathcal{I}$. Пусть $s \in G_n$. Тогда найдутся такие $i \in J_n$ и $t \in T$, что $s \in S_{ni}$ и $t \in S_{ni} \cap X_n$. Поэтому из того, что $x \leq f(t) - 1/n < f(s) < f(t) + 1/n \leq y$, вытекает, что $G_n \subset X$. Следовательно,

$$\begin{aligned} X &= \bigcup (X_n \mid n \in \mathbb{N}) = \bigcup ((X_n \cap D_n) \cup (X_n \setminus D_n) \mid n \in \mathbb{N}) \subset \\ &\subset \bigcup (G_n \cup N_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset X \end{aligned}$$

влечёт $X = \bigcup (G_n \cup N_n \mid n \in \mathbb{N}) \in (\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))_\sigma$.

Доказательство для $f \in \text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ аналогично. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $\mathcal{I}$ — идеал на T . Тогда $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset M(T, (\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))_\sigma) = D(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))$ и $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset M(T, (\mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I}))_\sigma) = D(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I}))$.

Предложение 5.6. Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $\mathcal{I}$ — идеал на T . Тогда $\text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))$ и $\text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I}))$.

Доказательство. Пусть $f \in \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\text{rng } f \subset [-z, z]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют множество $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и его счётное покрытие $\pi_n \equiv (R_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$, такие что $\omega(f, \pi_n) < 1/n < \varepsilon$. Пусть $k_n \in \mathbb{N}$ таково, что $k_n > 6nz$. Рассмотрим точки $x_{kn} \equiv -z + k/(3n) \in \mathbb{R}$ для всех $k \in k_n$. Тогда $\bigcup ([x_{kn}, x_{n,k+1}] \mid k \in k_n) \supset [-z, z]$. Определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}[x_{nk}, x_{n,k+1}]$, $J_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \emptyset\}$, $E_{nk} \equiv \bigcup (R_{3n,i} \mid i \in J_{nk}) \in \mathcal{S}_\sigma$ и $N_{nk} \equiv A_{nk} \setminus D_n$. Так как $\mathcal{I}$ — идеал и $N_{nk} \subset T \setminus D_n \in \mathcal{I}$, имеем

$N_{nk} \in \mathcal{I}$. Поэтому $S_{nk} \equiv E_{nk} \cup N_{nk} \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I})$. Кроме того, мы видим, что коллекция $\varkappa_n \equiv (S_{nk} \mid k \in k_n)$ является конечным покрытием T .

Пусть $s, t \in S_{nk}$. Если $s, t \in E_{nk}$, то $s \in R_{3n,i}$ и $t \in R_{3n,j}$ для некоторых i и j , таких что $X \equiv R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \emptyset$ и $Y \equiv R_{3n,j} \cap A_{nk} \neq \emptyset$. Пусть $s_i \in X$ и $s_j \in Y$. Тогда $|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(t)| < 1/n$. Если $s \in E_{nk}$ и $t \in N_{nk}$, то из $s \in R_{3n,i}$ вытекает, что $|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(t)| < 2/(3n)$. Наконец, если $s, t \in N_{nk}$, то $|f(s) - f(t)| < 1/(3n)$. Таким образом, $\omega(f, S_{nk}) < 1/n < \varepsilon$. Это означает, что $f \in U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))$.

Пусть $f \in U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}))$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\varkappa \equiv (X_i \in \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}) \mid i \in I)$ множества T , что $\omega(f, X_i) < \varepsilon$. По определению $X_i = S_i \cup N_i$, где $S_i \in \mathcal{S}_\sigma$ и $N_i \in \mathcal{I}$.

Рассмотрим множества $N \equiv \bigcup (N_i \mid i \in I) \in \mathcal{I}$ и $D \equiv T \setminus N$.

По определению $S_i = \bigcup (S_{ij} \mid j \in J_i)$ для некоторых счётных коллекций $(S_{ij} \in \mathcal{S} \mid j \in J_i)$. Рассмотрим счётное множество $K \equiv \bigcup (\{i\} \times J_i \mid i \in I)$. Счётная коллекция $(R_k \in \mathcal{S} \mid k \in K)$, где $R_k \equiv S_{ij}$ для $k = (i, j) \in K$, формирует покрытие множества D , такое что $\omega(f, R_k) \leq \omega(f, X_i) < \varepsilon$. Следовательно, $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Согласно лемме 4.4 любая равномерная функция является ограниченной, и потому $f \in \text{QD}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Рассуждения для равенства $\text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I}))$ аналогичны. Нужно только заменить $\mathcal{S}_\sigma$ на $\mathcal{S}_\varphi$, QD_b на QU_b и «счётные» на «конечные». $\square$

Некоторые взаимосвязи между «квази-» и «почти» функциями

Лемма 5.8. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на множестве T , $\mathcal{I}$ — ансамбль на T и $f \in F(T)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$;
- 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие множество $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и его счётное покрытие $\varkappa_n \equiv (S_{nk} \in \mathcal{S} \mid k \in \mathbb{Z})$, что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$, а из условия $S_{nk} \cap S_{nl} \neq \emptyset$ вытекает $|k - l| \leq 2$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\rightarrow$ 2). Пусть $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. По определению для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют множество $E_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и его счётное покрытие $\pi_n \equiv (R_{nk} \in \mathcal{S} \mid k \in I_n)$, такие что $\omega(f, \pi_n) < 1/n$.

Рассмотрим точки $a_{kn} \equiv k/(3n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}[[a_{nk}, a_{n,k+1}]]$, $J_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \emptyset\}$ и $S_{nk} \equiv \bigcup (R_{3n,i} \mid i \in J_{nk}) \in \mathcal{S}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ коллекция $\varkappa_n \equiv (S_{nk} \mid k \in \mathbb{Z})$ является покрытием множества $D_n \equiv E_{3n}$ и $\omega(f, S_{nk}) \leq a_{n,k+1} - a_{nk} < 1/n$.

Пусть $s \in S_{nk} \cap S_{nl}$. Тогда из условий $f(s) \in]k/(3n) - 1/(3n), (k+1)/(3n) + 1/(3n)[$ и $f(s) \in]l/(3n) - 1/(3n), (l+1)/(3n) + 1/(3n)[$ вытекает, что либо $(k-1)/(3n) < f(s) < (k+2)/(3n)$, либо $(l-1)/(3n) < f(s) < (l+2)/(3n)$. Следовательно, либо $l - k < 3$, либо $k - l < 3$. Таким образом, $|k - l| \leq 2$.

Импликация 2) $\rightarrow$ 1) следует непосредственно из определения. $\square$

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{S}$ — α -основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ является равномерным замыканием в $F(T)$ семейства $\text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) = \text{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Пусть $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})_+$. Возьмём множества D_n и покрытия $\mathcal{K}_n \equiv (S_{nk} \in \mathcal{S} \mid k \in \mathbb{Z})$ из леммы 5.8. Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$.

По теореме 3.5 для каждого $k \in \mathbb{Z}$ найдётся положительная функция $\varphi_k \in M_b(T, \mathcal{S})$, такая что $\text{coz } \varphi_k = S_{nk}$. Определим функцию $\psi: T \rightarrow]0, \infty]$, положив $\psi(t) \equiv \sum(\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z})$. Пусть $t \in S_{nk}$. Если $t \in S_{nl}$, то $|k - l| \leq 2$. Следовательно, $\psi(t) = \sum(\varphi_l(t) \mid |k - l| \leq 2) \in]0, \infty[$ для любой точки $t \in S_{nk}$. Рассмотрим функции $\psi_k \equiv \sum(\varphi_l \mid |k - l| \leq 2) \in M_b(T, \mathcal{S})$. Поскольку $\psi|_{S_{nk}} = \psi_k|_{S_{nk}}$, делаем вывод, что $\psi|_{D_n} \in M(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Действительно, если $x < y$, то

$$\begin{aligned} \psi^{-1}[x, y[\cap D_n &= \bigcup(\psi^{-1}[x, y[\cap S_{nk} \mid k \in \mathbb{Z}) = \\ &= \bigcup(\psi_k^{-1}[x, y[\cap S_{nk} \mid k \in \mathbb{Z}) \in \mathcal{S}_{D_n}. \end{aligned}$$

Введём функции g_{nk} на T , положив $g_{nk}(t) \equiv \varphi_k(t)/\psi(t)$ для $t \in D_n$ и $g_{nk}(t) \equiv 0$ для $t \notin D_n$. По теореме 3.1 $g_{nk}|_{D_n} \in M(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$.

Пусть $t \in D_n$. Предположим, что $g_{nk}(t) < 1/5$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Найдётся такое $k \in \mathbb{Z}$, что $t \in S_{nk}$. Если $t \in S_{nl}$, то $|k - l| \leq 2$. Если $t \notin S_{nl}$, то $g_{nl}(t) = 0$. Следовательно,

$$1 = \sum(g_{nl}(t) \mid l \in \mathbb{Z}) = \sum(g_{nl}(t) \mid |k - l| \leq 2) < \frac{5}{5} = 1,$$

но это невозможно. Следовательно, $g_{nk}(t) \geq 1/5$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, поэтому $t \in G_{nk} \equiv \{t \in D_n \mid g_{nk}(t) > 1/6\}$. Таким образом, $\lambda_n \equiv (G_{nk} \mid k \in \mathbb{Z})$ покрывает D_n .

Пусть $x_{nk} \equiv \inf\{f(t) \mid t \in S_{nk}\}$. Рассмотрим функции $h_{nk} \equiv (6x_{nk}g_{nk}) \wedge (x_{nk}\mathbf{1})$. По предложению 3.2 $h_{nk}|_{D_n} \in M(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Определим функции $f_n: T \rightarrow [0, \infty]$, положив $f_n(t) \equiv \sup(h_{nk}(t) \mid k \in \mathbb{Z})$ для $t \in D_n$ и $f_n(t) \equiv f(t)$ для $t \notin D_n$. Пусть $t \in S_{nk}$. Если $t \in S_{nl}$, то $|k - l| \leq 2$. Следовательно, $f_n(t) = \sup(h_{nl}(t) \mid |k - l| \leq 2)$. Рассмотрим функции $p_{nk} \equiv \sup(h_{nl} \mid |k - l| \leq 2)$. По предложению 3.2 $g_{nk}|_{D_n} \in M(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Поскольку $f_n|_{S_{nk}} = p_{nk}|_{S_{nk}}$, как и выше, делаем вывод, что $f_n|_{D_n} \in M(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Следовательно, $f_n \in \text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Если $t \in S_{nk}$, то $h_{nk}(t) \leq x_{nk} \leq f(t)$. Если $t \notin S_{nk}$, то $h_{nk}(t) = 0 \leq f(t)$. Следовательно, $h_{nk} \leq f$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $f_n \leq f$. Если $t \in G_{nk}$, то $h_{nk}(t) = x_{nk}$. Поэтому $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - h_{nk}(t) \leq x_{nk} + 1/n - x_{nk} = 1/n$. Поскольку λ_n покрывает D_n , получаем, что $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in D_n$. Таким образом, $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in T$.

Если $f \in \text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$, то $f = f_+ + f_-$. Как было показано выше, существуют такие $g_n, h_n \in \text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$, что $0 \leq f_+(t) - g_n(t) \leq 1/n$ и $0 \leq -f_-(t) - h_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in T$. Положим $f_n \equiv g_n - h_n$. Эта функция принадлежит $\text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ по предложению 5.1. Тогда $|f(t) - f_n(t)| \leq |f_+(t) - g_n(t)| + |f_-(t) + h_n(t)| \leq 2/n$. Таким образом, $\text{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ равномерно плотно в $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. Согласно предложению 5.3 семейство $\text{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ равномерно замкнуто. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — a -основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $QD_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ является равномерным замыканием в $F_b(T)$ семейства $AD_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — a -основа на множестве T . Тогда семейство $QD(T, \mathcal{S})$ является равномерным замыканием в $F(T)$ семейства $AD(T, \mathcal{S}) = AM(T, \mathcal{S})$.

Следствие 3. Пусть $\mathcal{S}$ — a -основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда $QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) = QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Включение $QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) \subset QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ справедливо по лемме 5.5. Докажем обратное включение. Пусть $f \in QD(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ и $\varepsilon > 0$. По теореме 5.1 существует такая $g \in AM(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$, что $|f - g| < \varepsilon \mathbf{1}$. По определению существует такое $D \in \text{co-}\mathcal{J}$, что $g|D \in M(T, \mathcal{S}_D)$. Следовательно, $|f|D - g|D| < \varepsilon \mathbf{1}|D$. Таким образом, $f \in QM(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathcal{S}$ — a -основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — идеал на T . Тогда $QM_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J}) = U(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{J}))$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 3 и предложения 5.6. $\square$

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{S}$ — отделяемая совершенная основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $QU(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ является равномерным замыканием в $F(T)$ семейства $AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Пусть $f \in QU(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})_+$. Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и возьмём такие множество $D_n \in \text{co-}\mathcal{J}$ и его конечное покрытие $\varkappa_n \equiv (S_{nk} \in \mathcal{S} \mid k \in K_n)$, что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$.

По теореме 4.3 для каждого $k \in K_n$ существует положительная функция $\varphi_k \in U(T, \mathcal{S})$, такая что $\text{coz } \varphi_k = S_{nk}$. Определим функцию $\psi \equiv \sum(\varphi_k \mid k \in K_n)$. Лемма 5.3 и следствие 3 теоремы 4.1 обеспечивают принадлежность функции $\psi|D_n$ семейству $U(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$.

Определим функции g_{nk} на T , положив $g_{nk}(t) \equiv \varphi_k(t)/\psi(t)$ для $t \in D_n$ и $g_{nk}(t) \equiv 0$ для $t \notin D_n$. По следствию 3 теоремы 4.1 имеем $g_{nk}|D_n \in U(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$.

Пусть $t \in D_n$. Положим $m_n \equiv \text{card } K_n$. Предположим, что $g_{nk}(t) < 1/m_n$ для всех $k \in K_n$. Следовательно, $1 = \sum(g_{nk}(t) \mid k \in K_n) < m_n/m_n = 1$, что невозможно. Тогда $g_{nk}(t) \geq 1/m_n$ для некоторого $k \in K_n$, и потому $t \in G_{nk} \equiv \{t \in D_n \mid g_{nk}(t) > 1/(m_n + 1)\}$. Таким образом, $\lambda_n \equiv (G_{nk} \mid k \in K_n)$ покрывает D_n .

Пусть $x_{nk} \equiv \inf\{f(t) \mid t \in S_{nk}\}$. Рассмотрим функции $h_{nk} \equiv ((m_n + 1)x_{nk}g_{nk}) \wedge (x_{nk}\mathbf{1})$. По следствию 3 теоремы 4.1 имеем $h_{nk}|D_n \in U(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Определим функции $f_n: T \rightarrow [0, \infty[$, положив $f_n(t) \equiv \sup(h_{nk}(t) \mid k \in K_n)$ для $t \in D_n$ и $f_n(t) \equiv f(t)$ для $t \notin D_n$. По следствию 4 теоремы 4.1 $f_n|D_n \in U(D_n, \mathcal{S}_{D_n})$. Следовательно, $f_n \in AU(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Если $t \in S_{nk}$, то $h_{nk}(t) \leq x_{nk} \leq f(t)$. Если $t \notin S_{nk}$, то $h_{nk}(t) = 0 \leq f(t)$. Следовательно, $h_{nk} \leq f$ для всех $k \in K_n$. Отсюда следует, что $f_n \leq f$. Если $t \in G_{nk}$, то $h_{nk}(t) = x_{nk}$. Тогда $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - h_{nk}(t) \leq x_{nk} + 1/n - x_{nk} = 1/n$.

Поскольку λ_n покрывает D_n , имеем $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in D_n$. Таким образом, $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in T$.

Если $f \in \text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$, то $f = f_+ + f_-$. Как было показано выше, существуют такие $g_n, h_n \in \text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$, что $0 \leq f_+(t) - g_n(t) \leq 1/n$ и $0 \leq -f_-(t) - h_n(t) \leq 1/n$ для всех $t \in T$. Функция $f_n \equiv g_n - h_n$ принадлежит $\text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ по предложению 5.1. Тогда $|f(t) - f_n(t)| \leq |f_+(t) - g_n(t)| + |f_-(t) + h_n(t)| \leq 2/n$. Таким образом, $\text{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ равномерно плотно в $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. Согласно предложению 5.3 семейство $\text{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ равномерно замкнуто. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая совершенная основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $\text{QU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ является равномерным замыканием в $F_b(T)$ семейства $\text{AU}_b(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{S}$ — отделимая совершенная основа на множестве T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T . Тогда семейство $\text{QU}(T, \mathcal{S})$ является равномерным замыканием в $F(T)$ семейства $\text{AU}(T, \mathcal{S})$.

Литература

- [1] Захаров В. К. Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счётно-плотного модулей частных модуля непрерывных функций // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 4. — С. 187—188.
- [2] Захаров В. К. Функциональная характеристика абсолюта, векторные решётки функций со свойством Бэра и квазинормальных функций и модули частных непрерывных функций // Тр. ММО. — 1982. — Т. 45, № 1. — С. 68—104.
- [3] Захаров В. К. Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 928—956.
- [4] Захаров В. К. Расширение Аренса кольца непрерывных функций // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 1. — С. 135—153.
- [5] Захаров В. К. Расширения кольца непрерывных функций, порождённые классическим, рациональным и регулярным кольцами частных как делимые оболочки // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 12. — С. 81—118.
- [6] Захаров В. К. Расширения кольца непрерывных функций, порождённые регулярным, счётно-делимым и полным кольцами частных, и соответствующие им прообразы // Изв. РАН. Сер. мат. — 1995. — Т. 59, № 4. — С. 15—60.
- [7] Захаров В. К. Связь между классическим кольцом частных кольца непрерывных функций и функциями, интегрируемыми по Риману // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 1. — С. 161—176.
- [8] Захаров В. К. Связи между расширением Римана и классическим кольцом частных и между прообразом Семадени и секвенциальным абсолютом // Тр. ММО. — 1996. — Т. 57. — С. 239—262.
- [9] Захаров В. К. Классификация борелевских множеств и функций для произвольного пространства // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 5. — С. 596—598.
- [10] Захаров В. К. Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 2. — С. 167—171.

- [11] Захаров В. К. Теоремы Хаусдорфа об измеримых функциях и новый класс равномерных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 3–8.
- [12] Захаров В. К., Михалёв А. В. Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, № 4. — С. 1135–1172.
- [13] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема Радона для регулярных мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, № 3. — С. 801–808.
- [14] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 37–82.
- [15] Захаров В. К., Михалёв А. В. Связь между интегральными радоновскими представлениями для локально компактного и хаусдорфова пространств // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, № 1. — С. 33–46.
- [16] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 6. — С. 3–18.
- [17] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Описание радоновских интегралов как линейных функционалов // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, № 8. — С. 87–161.
- [18] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеристики интегралов // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 153–178.
- [19] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема характеристики общих радоновских интегралов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 433, № 6. — С. 731–735.
- [20] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Характеризация интегралов по всем радоновским мерам с помощью индексов ограниченности // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, № 1. — С. 107–126.
- [21] Захаров В. К., Михалёв А. В., Серединский А. А. Характеризация пространства функций, интегрируемых по Риману, посредством сечений пространства непрерывных функций. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 11–20.
- [22] Захаров В. К., Родионов Т. В. Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 6. — С. 49–84.
- [23] Захаров В. К., Родионов Т. В. Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 809–824.
- [24] Захаров В. К., Родионов Т. В. Естественность класса измеримых функций в смысле Лебега—Бореля—Хаусдорфа // Мат. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 554–563.
- [25] Захаров В. К., Серединский А. А. Новая характеристика функций, интегрируемых по Риману // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, № 3. — С. 73–83.
- [26] Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
- [27] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: УРСС, 2004.
- [28] Aleksandrov A. D. Additive set functions on abstract spaces // Мат. сб. — 1940. — Т. 8, № 2. — С. 303–348; 1941. — Т. 9, № 2-3. — С. 563–628; 1943. — Т. 13, № 3. — С. 169–238.

- [29] Baire R. Sur les fonctions de variables réelles // *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IIIa.* — 1899. — Vol. 3. — P. 1–122.
- [30] Baire R. *Leçons sur les fonctions discontinues.* — Paris: Gauthier-Villars, 1905.
- [31] Borel E. *Leçons sur la théorie des fonctions.* — Paris: Gauthier-Villars, 1898.
- [32] Borel E. *Leçons sur les fonctions de variables réelles.* — Paris: Gauthier-Villars, 1905.
- [33] Fine N. T., Gillman I., Lambek J. *Rings of Quotients of Rings of Functions.* — Montreal: McGill Univ. Press, 1965.
- [34] Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre.* — Leipzig: Viet, 1914.
- [35] Hewitt E., Stromberg K. *Real and Abstract Analysis.* — Berlin: Springer, 1965.
- [36] Jech T. *Set Theory.* — Berlin: Springer, 2002.
- [37] Lebesgue H. Integral, longueur, aire // *Ann. Math. (3).* — 1902. — Vol. 7. — P. 231–359.
- [38] Lebesgue H. Sur les séries trigonométriques // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3).* — 1903. — Vol. 20. — P. 453–485.
- [39] Lebesgue H. *Leçons sur la l'integration et recherche des fonctions primitives.* — Paris: Gauthier-Villars, 1904.
- [40] Regoli G. Some characterization of sets of measurable functions // *Am. Math. Month.* — 1977. — Vol. 84, no. 6. — P. 455–458.
- [41] Rodionov T. V., Zakharov V. K. A fine correlation between Baire and Borel functional hierarchies // *Acta Math. Hungar.* — 2014. — Vol. 142, no. 2. — P. 384–402.
- [42] Semadeni Z. *Banach Spaces of Continuous Functions.* — Warszawa: PWA, 1971. — (Mon. Mat.; Vol. 55).
- [43] Stone M. N. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // *Trans. Am. Math. Soc.* — 1937. — Vol. 41. — P. 375–481.
- [44] Young W. H. On upper and lower integration // *Proc. London Math. Soc. Ser. 2.* — 1905. — Vol. 2. — P. 52–66.
- [45] Young W. H. A new method in the theory of integration // *Proc. London Math. Soc. Ser. 2.* — 1911. — Vol. 9. — P. 15–50.
- [46] Zakharov V. K. Functional characterization of absolute and Dedekind completion // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.* — 1981. — Vol. 39, no. 5-6. — P. 293–297.
- [47] Zakharov V. K. Some perfect preimages connected with extensions of the family of continuous functions // *Coll. Math. Soc. János Bolyai.* — 1985. — Vol. 41. — P. 703–728.
- [48] Zakharov V. K. On functions connected with absolute, Dedekind completion, and divisible envelope // *Period. Math. Hungar.* — 1987. — Vol. 18, no. 1. — P. 17–26.
- [49] Zakharov V. K. On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients // *Period. Math. Hungar.* — 1988. — Vol. 19, no. 2. — P. 113–133.
- [50] Zakharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpiński extension // *Stud. Sci. Math. Hungar.* — 1989. — Vol. 24, no. 2-3. — P. 93–117.

