Базисы и размерность векторных пространств над решётками

Е. Е. МАРЕНИЧ
Мурманский государственный педагогический университет
e-mail: marenich1@yandex.ru

В. Е. МАРЕНИЧ
Мурманский государственный педагогический университет
e-mail: vmarenich@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: векторное пространство над решёткой, базис, стандартный базис, размерность.

Аннотация

В работе систематически излагаются свойства базисов и размерности векторных пространств над дистрибутивными решётками. Изучены базисы, состоящие из $\vee$-неразложимых векторов, и доказана их единственность. Доказаны критерии того, что данное множество порождает пространство, что данное множество является базисом пространства, что все базисы содержат одинаковое число векторов. Доказан критерий единственности базиса. Найден базис, содержащий наибольшее число векторов. Дано описание всех стандартных базисов пространства. Доказана теорема, которая позволяет вычислить известными алгоритмами размерность и найти базис, содержащий наименьшее число векторов. Дано применение полученных результатов к пространствам над цепями: доказано существование стандартного базиса, доказано, что базис, состоящий из $\vee$-неразложимых векторов пространства, совпадает со стандартным базисом, доказана единственность стандартного базиса. Вычислена размерность арифметического пространства, описаны все базисы арифметического пространства, содержащие наименьшее число векторов, и доказано, что все такие базисы стандартные.

Abstract

E. E. Marenich, V. E. Marenich, Bases and dimension of vector spaces over lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 151—169.

In this paper, we give a consistent presentation of dimension properties and properties of bases for vector spaces over distributive lattices. The bases consisting of join irreducible vectors are studied and their uniqueness is proved. Criteria for the following are proved: the set of join irreducible vectors is a generating set for a vector space; this set is a vector space basis; all bases contain the same number of vectors. A criterion of uniqueness for the basis is proved. The basis containing the greatest number of vectors is found. We give a description for all standard bases of a vector space. We prove a theorem allowing one to calculate the space dimension and to find the basis of the smallest number of vectors by known algorithms. These results are applied to vector spaces over chains: we prove

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 151—169.

that there exists a standard basis, that the basis of join irreducible vectors is the standard basis, that a standard basis is unique. We calculate the dimension of the arithmetic space and describe all bases containing the smallest number of vectors. It is proved that all such bases are standard.

Введение

В [3—5] доказано существование и единственность базиса столбцового (строчечного) пространства матрицы над двухэлементной решёткой, изучены строчечные и столбцовые ранги матриц (размерности соответствующих пространств). В [3, 4] установлено, что конечно порождённое векторное пространство над нечёткой решёткой может иметь множество базисов, базисы одного пространства могут содержать разное число векторов, доказано существование и единственность стандартного базиса. В данной работе изучаются базисы и размерность векторных пространств над дистрибутивными решётками с нулём и единицей.

В разделе 2 введено общее понятие векторного пространства над дистрибутивной решёткой, рассмотрены примеры пространств, определён наведённый частичный порядок $\preceq$ и исследованы его свойства.

В разделе 3 найдены условия существования базиса, состоящего из $\vee$-неразложимых векторов, и доказана его единственность.

В разделе 4 доказаны критерии того, что данное множество порождает пространство, что данное множество является базисом пространства, что все базисы содержат одинаковое число векторов. Доказан критерий единственности базиса, найден базис, содержащий наибольшее число векторов.

В разделе 5 доказано, что базис, состоящий из $\vee$-неразложимых векторов, является стандартным и найдены условия существование стандартных базисов.

В разделе 6 доказано, что базисы, содержащие наименьшее число векторов, и размерность пространства могут быть найдены алгоритмами решения классической комбинаторной задачи: найти множество, содержащее наименьшее число элементов и пересекающее каждое из данных множеств.

В разделе 7 полученные результаты применяются к пространствам над двухэлементной решёткой.

В разделе 8 описано применение полученных результатов к пространствам над цепями: доказаны существование и единственность стандартного базиса, а также то, что базис из $\vee$-неразложимых векторов совпадает со стандартным базисом пространства.

В разделе 9 вычислена размерность арифметического пространства, найдены все базисы арифметического пространства, содержащие наименьшее число векторов, найдены все стандартные базисы арифметического пространства, содержащие наименьшее число векторов, доказан критерий того, что все базисы арифметического пространства содержат одинаковое число векторов.

1. Обозначения и терминология

Множество P вместе с определённым на нём частичным порядком $\leqslant$ будем называть *частично упорядоченным множеством* и обозначать $(P, \leqslant)$. Частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$ для краткости будем обозначать P.

Элемент b называется *наибольшим элементом* частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, если $a \leqslant b$ для всех $a \in P$. Элемент b называется *наименьшим элементом* частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, если $b \leqslant a$ для всех $a \in P$.

Частично упорядоченное множество P называется *цепью*, если любые два элемента множества P сравнимы по отношению частичного порядка $\leqslant$.

Пусть P — частично упорядоченное множество, $B \subseteq P$. Элемент $b \in B$ называется *максимальным* элементом множества B, если для любого элемента $a \in B$ из неравенства $b \leqslant a$ следует, что $b = a$. Множество всех максимальных элементов множества B обозначается $\max\{B, \leqslant\}$. Аналогично определяются минимальные элементы множества B. Множество всех минимальных элементов множества B обозначается $\min\{B, \leqslant\}$.

Если для любых $a, b \in P$ в частично упорядоченном множестве $(P, \leqslant)$ существует точная верхняя грань $a \vee b$, то $(P, \vee, \leqslant)$ называется *верхней полурешёткой*. Полурешётку $(P, \vee, \leqslant)$ для краткости будем обозначать P. Если P — верхняя полурешётка и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subseteq P$, то пишем

$$\bigvee A = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m.$$

Пусть P — верхняя полурешётка. Элемент $a \in P$ называется *$\vee$-неразложимым*, если для любых $b, c \in P$ из равенства $a = b \vee c$ следует, что $a = b$ или $a = c$. Если a — $\vee$-неразложимый элемент и $a = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m \in P$, то $a = a_i$ для некоторого индекса i.

Если для любых $a, b \in P$ в частично упорядоченном множестве $(P, \leqslant)$ существует точная верхняя грань $a \vee b$ и точная нижняя грань $a \wedge b$, то $(P, \vee, \wedge, \leqslant)$ называется *решёткой*. Решётку $(P, \vee, \wedge, \leqslant)$ для краткости будем обозначать P.

Решётка P называется *дистрибутивной*, если для любых элементов $a, b, c \in P$ справедливы равенства

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Наименьший элемент решётки обозначается $\tilde{0}$, наибольший элемент обозначается $\tilde{1}$.

Двухэлементную решётку будем обозначать $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$.

Пусть U — множество. Решётку всех подмножеств множества U будем называть *булеаном* множества U и обозначать

$$\mathrm{Bul}(U) = (2^U, \cup, \cap, \subseteq).$$

Нечёткой решёткой называется решётка $([0;1], \vee, \wedge, \leqslant)$, где $[0;1]$ — числовой интервал, $\leqslant$ — обычный частичный порядок на числовом множестве и для любых $a, b \in [0; 1]$

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

В работе рассматриваются матрицы, элементы которых принадлежат дистрибутивным решёткам.

Обозначим через $P^{m\times n}$ множество всех матриц размера $m \times n$, $m, n \geqslant 1$. Матрица ${}^{\mathrm{t}}A$ получена из матрицы A транспонированием. Сложение и умножение матриц над решёткой P определяются как обычно: вместо операции сложения используется операция объединения $\vee$, а вместо операции умножения — операция пересечения $\wedge$.

Матрицы над нечёткой решёткой называются *нечёткими матрицами*.

Пусть $\lambda \in P$, $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in P^{m\times n}$. Будем писать $C = \lambda A$, если

$$c_{ij} = \lambda \wedge a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Матрица $E \in P^{n\times n}$, на главной диагонали которой расположены единицы $\tilde{1}$, а на остальных местах нули $\tilde{0}$, называется *единичной*.

Матрица $A \in P^{n\times n}$ называется *обратимой справа* (или *слева*) над решёткой P, если существует матрица $B \in P^{n\times n}$, такая что $AB = E$ (или $BA = E$), где E — единичная матрица. Матрица B называется *обратной* к матрице A над решёткой P. Множество всех обратимых матриц образует мультипликативную группу $\mathrm{GL}_n(P)$.

Квадратная $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-матрица называется *подстановочной матрицей*, если каждый столбец и каждая строка матрицы содержит только одну единицу $\tilde{1}$. Множество всех подстановочных матриц образует мультипликативную группу $\mathrm{Per}_n(P)$.

Свойства обратимых матриц описываются следующими теоремами.

Критерий обратимости матриц над дистрибутивными решётками [1, 2]. *Матрица $A \in P^{n\times n}$ обратима над решёткой P тогда и только тогда, когда $A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}A \cdot A = E$, где E — единичная матрица.* $\square$

Теорема Скорнякова об изоморфизме [1]. *Группа $\mathrm{GL}_n(P)$ совпадает с группой подстановочных матриц $\mathrm{Per}_n(P)$ тогда и только тогда, когда только $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ имеют дополнение в решётке P.* $\square$

Матрицу $A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ будем называть i-й строкой матрицы A, $i = 1, 2, \ldots, m$. Матрицу $A^{(j)} = {}^{\mathrm{t}}(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in P^{m\times 1}$ будем называть j-м столбцом матрицы A, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Решёточные векторные пространства и их свойства

Пусть P — дистрибутивная решётка с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$, а $(V, \vee, \leqslant)$ — верхняя полурешётка. В дальнейшем операцию объединения $\vee$ в полурешётке $(V, \vee, \leqslant)$ мы будем обозначать знаком $+$.

Векторным пространством над решёткой P (пространством) называется непустое множество V с бинарной операцией сложения $+$ и операцией умножения на элементы решётки P, обладающее следующими свойствами:

1) $(V, +, \leqslant)$ — верхняя полурешётка с нулём 0;
2) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ для любых $\lambda \in P$, $u, v \in V$;
3) $(\lambda \vee \mu)u = \lambda u + \mu u$ для любых $\lambda, \mu \in P$, $u \in V$;
4) $(\lambda \wedge \mu)u = \lambda(\mu u)$ для любых $\lambda, \mu \in P$, $u \in V$;
5) $\tilde{1}u = u$ для любых $u \in V$;
6) $\tilde{0}u = 0$ для любых $u \in V$.

Элементы множества V будем называть векторами. Пространство $V = \{0\}$ назовём нулевым пространством.

Пример 2.1. Приведём примеры векторных пространств над решётками.

1. Множество P — векторное пространство над решёткой P, в котором операция умножения векторов на элементы решётки совпадает с операцией пересечения.
2. Множество
$$V = P^{m\times 1} = \{{}^{\mathrm{t}}(a_1, a_2, \ldots, a_m) \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in P\}$$
является векторным пространством над решёткой P (арифметическим пространством) относительно операции сложения векторов и операции векторов на элементы решётки.

Суммы вида $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$, $n \geqslant 1$, называются линейными комбинациями векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Линейной оболочкой мультимножества $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ векторов пространства V называется $\mathrm{Lin}(U) = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — множество всех линейных комбинаций векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Теорема 2.1. *Пусть U — конечное непустое мультимножество, состоящее из векторов пространства V. Тогда линейная оболочка $\mathrm{Lin}(U)$ — векторное пространство над решёткой P.* □

Столбцовым пространством матрицы $A \in P^{m\times n}$ называется линейная оболочка столбцов матрицы A. Строчечным пространством матрицы $A \in P^{m\times n}$ называется линейная оболочка строк матрицы A. Столбцовые и строчечные и пространства матрицы A обозначаются соответственно $\mathrm{Column}(A)$ и $\mathrm{Row}(A)$. Имеем

$$\mathrm{Column}(A) = \mathrm{Lin}(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}), \quad \mathrm{Row}(A) = \mathrm{Lin}(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)}).$$

Пусть V — векторное пространство над решёткой P. Множество $Q \subseteq V$, $Q \neq \varnothing$, называется подпространством пространства V, если выполняются два условия:

1) $(Q, +, \leqslant)$ является верхней полурешёткой, где $+$ — сужение операции $+$, а $\leqslant$ — сужение отношения $\leqslant$ верхней полурешётки V на множество Q;

2) множество Q замкнуто относительно операции умножения на элементы решётки P.

Подпространство Q векторного пространства V само является векторным пространством над решёткой P.

Рассмотрим свойства векторных пространств.

Лемма 2.1. *Пусть V — векторное пространство над решёткой P. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $u \leqslant v$, то $\lambda u \leqslant \lambda v$ для любых $\lambda \in P$, $u, v \in V$.*
2. *Если $\lambda \leqslant \mu$, то $\lambda u \leqslant \mu u$ для любых $\lambda, \mu \in P$, $u \in V$.*
3. *$\lambda u \leqslant u$ для любых $\lambda \in P$, $u \in V$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 1 заметим, что $\lambda u \leqslant \leqslant \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v) = \lambda v$. □

На множестве V определено бинарное отношение $\preceq$: $u \preceq v$ тогда и только тогда, когда $u = \lambda v$ для некоторого элемента $\lambda \in P$.

Лемма 2.2. *Отношение $\preceq$ является частичным порядком. Частичный порядок $\preceq$ содержится в частичном порядке $\leqslant$. Частично упорядоченное множество $(V, \preceq)$ имеет нуль 0.*

Доказательство. Покажем, что $\preceq$ — отношение частичного порядка.

— Для любого $u \in V$ имеем $u = \tilde{1}u$. Поэтому $u \preceq u$.

— Для любых $u, v, w \in V$ если $u \preceq v$ и $v \preceq w$, то $u \preceq w$. Действительно, $u = \lambda v$, $v = \mu w$ для некоторых $\lambda, \mu \in P$. Поэтому $u = (\lambda \wedge \mu)w$, $u \preceq w$.

— Для любых $u, v \in V$ если $u \preceq v$ и $v \preceq u$, то $u = v$. Действительно, $u \leqslant v$ и $v \leqslant u$, $u = v$.

Если $u \preceq v$, то $u = \lambda v \leqslant v$ для некоторого элемента $\lambda \in P$. Поэтому отношение $\preceq$ содержится в частичном порядке $\leqslant$. □

Частичный порядок $\preceq$ будем называть наведённым частичным порядком векторного пространства V.

Если $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — решётка, то неравенство $u \preceq v$ равносильно равенству $u = 0$ или $u = v$.

3. Базисы векторных пространств

Говорят, что конечное множество U порождает векторное пространство V, если $V = \mathrm{Lin}(U)$.

Конечно порождённое пространство $V = \mathrm{Lin}(U)$ содержит наибольший вектор $\bigvee U$. Конечно порождённые пространства могут содержать подпространства, не являющиеся конечно порождёнными.

Пример 3.1. Пусть $P = [0,1]$ — нечёткая решётка. Арифметическое пространство $P^{m\times 1}$ содержит множество V, состоящее из всех векторов ${}^{\mathrm{t}}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, таких что $0 \leqslant a_1, a_2, \ldots, a_m < 1$. Множество V является векторным пространством. Пространство V не имеет наибольшего вектора и поэтому не является конечно порождённым.

Базисом ненулевого пространства V называется минимальное конечное множество W, такое что $V = \mathrm{Lin}(W)$.

Базисы пространства могут содержать различное число векторов. Разложение вектора по базису не обязательно единственно.

Пример 3.2. Пусть U — конечное множество, $|U| = n \geqslant 1$, $P = \mathrm{Bul}(U)$ — булеан, $E \in P^{m\times m}$ — единичная матрица.

Множество $W = \{E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(m)}\}$ есть базис пространства $P^{m\times 1}$, содержащий m векторов. Любой вектор пространства $P^{m\times 1}$ единственным образом раскладывается по базису W.

Множество

$$\big\{\{u\}E^{(1)} \mid u \in U\big\} \cup \big\{\{u\}E^{(2)} \mid u \in U\big\} \cup \ldots \cup \big\{\{u\}E^{(m)} \mid u \in U\big\}$$

образует базис пространства $P^{m\times 1}$, содержащий mn векторов. Если $n \geqslant 2$, то разложение по этому базису не единственно.

Теорема 3.1. *Если $V = \mathrm{Lin}(U)$, где U — конечное множество, то пространство V имеет базис, состоящий из некоторых векторов множества U.*

Доказательство. Минимальное подмножество W множества U, такое что $V = \mathrm{Lin}(W)$, является базисом пространства V. $\square$

Следствие 3.1. *Пространство V является конечно порождённым тогда и только тогда, когда оно имеет базис.* $\square$

Определим следующие множества:

$\mathrm{join}(V)$ — множество всех $\vee$-неразложимых векторов из V,

$\mathrm{J}(V) = \mathrm{join}(V) - \{0\}$,

$\mathrm{MJ}(V) = \max\{\mathrm{J}(V), \preceq\}$,

$\mathrm{M}(V) = \max\{V, \preceq\}$.

Пример 3.3. Пусть $P = \{0, 1, 2\}$ — трёхэлементная цепь, $\leqslant$ — обычный частичный порядок на числовом множестве,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in P^{3\times 2}.$$

Имеем

$$V = \mathrm{Column}(A) = \{\tilde{0}, a, b, c, d, e, \tilde{1}\},$$

где $\tilde{0} = (0,0,0)$, $a = (0,1,1)$, $b = (0,1,2)$, $c = (1,1,1)$, $d = (1,1,2)$, $e = (2,1,1)$, $\tilde{1} = (2,1,2)$.

Диаграммы Хассе решётки $(V, \leqslant)$, частично упорядоченного множества $(V, \preceq)$ и частично упорядоченного множества $(\mathrm{J}(V), \preceq)$ изображены на рис. 1.

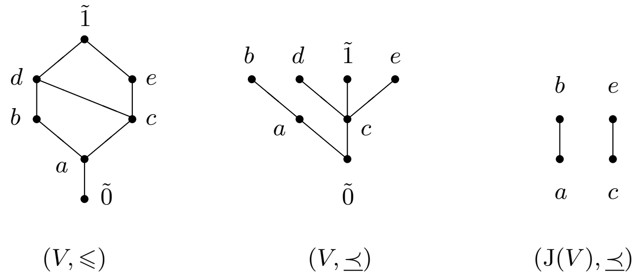

Рис. 1

Полезно следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть конечное множество U порождает пространство V. Тогда для любого вектора $v \in \mathrm{J}(V)$ существует вектор $u \in U$, такой что $v \preceq u$.*

Доказательство. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Поскольку $v \in \mathrm{Lin}(U)$, то $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$. Так как $v \in \mathrm{J}(V)$, то $v = \lambda_r u_r$ для некоторого индекса r. $\square$

Укажем условия, при которых множество $\mathrm{MJ}(V)$ является базисом пространства V, и докажем единственность базиса, состоящего из $\vee$-неразложимых векторов.

Теорема 3.2. *Если базис U пространства V состоит из $\vee$-неразложимых векторов, то $U = \mathrm{MJ}(V)$.*

Доказательство. Предположим, что $U \neq \mathrm{MJ}(V)$. Тогда для некоторого вектора $u \in U$ существует вектор $w \in \mathrm{MJ}(V)$, такой что $u \prec w$. Из леммы 3.1 следует, что $w \preceq u_1$ для некоторого вектора $u_1 \in U$. Получаем, что $u \prec u_1$, — противоречие с минимальностью множества U. $\square$

Следствие 3.2. *Если V — конечное ненулевое пространство, то множество $\mathrm{MJ}(V)$ — базис пространства V.*

Доказательство. Так как $\mathrm{J}(V)$ — конечное порождающее множество пространства V, то пространство имеет базис U, состоящий из $\vee$-неразложимых векторов. Значит, $U = \mathrm{MJ}(V)$. $\square$

Следствие 3.3. *Если $\mathrm{MJ}(V)$ — конечное непустое множество и каждый вектор пространства V есть сумма конечного числа $\vee$-неразложимых векторов, то $\mathrm{MJ}(V)$ — базис пространства V.*

Доказательство. Каждый вектор пространства есть сумма некоторого числа $\vee$-неразложимых векторов. Каждый $\vee$-неразложимый вектор u можно представить в виде $u = \lambda w$ для некоторого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$ и некоторого $\lambda \in P$.

Поэтому каждый вектор пространства V является линейной комбинацией векторов множества $\mathrm{MJ}(V)$. Множество $\mathrm{MJ}(V)$ порождает пространство V. Пространство V имеет базис, состоящий из $\vee$-неразложимых векторов. $\square$

Пример 3.4. Приведём пример конечно порождённого пространства V, для которого множество $\mathrm{MJ}(V)$ не является базисом.

Пусть U — бесконечное множество. Рассмотрим векторное пространство $V = \mathrm{Bul}(U)$ над решёткой $P = \mathrm{Bul}(U)$. Пространство V конечно порождённое, одноэлементное множество $\{U\}$ — базис пространства. Бесконечное множество $\mathrm{MJ}(V) = U$ не является базисом пространства V.

4. Свойства базисов

Для векторов $v \in V$ обозначим через $[v)_\preceq = \{z \mid z \in V,\ v \preceq z\}$ полуинтервалы частично упорядоченного множества $(V, \preceq)$.

Рассмотрим условия, определяющие порождающие множества.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V*. Конечное множество* U*,* $U \subseteq V$*, порождает пространство* V *тогда и только тогда, когда* $U \cap [w)_\preceq \neq \varnothing$ *для любого вектора* $w \in \mathrm{MJ}(V)$*.*

Доказательство. Пусть множество U порождает пространство V. Тогда для каждого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$ существует вектор $u \in U$, такой что $w \preceq u$. Значит, $u \in U \cap [w)_\preceq$ и $U \cap [w)_\preceq \neq \varnothing$.

Пусть $U \cap [w)_\preceq \neq \varnothing$ для любого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$. Для каждого вектора w существует вектор $u \in U$, такой что $w = \lambda u$, где $\lambda \in P$. Значит, $\mathrm{MJ}(V) \subseteq \mathrm{Lin}(U)$. Так как $\mathrm{MJ}(V)$ — базис пространства V, то $V = \mathrm{Lin}(U)$. $\square$

Из теоремы 4.1 получаем критерий, определяющий базисы пространства.

Следствие 4.1. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V*. Конечное множество* U *является базисом пространства* V *тогда и только тогда, когда* U *— минимальное множество, такое что* $U \cap [w)_\preceq \neq \varnothing$ *для любого вектора* $w \in \mathrm{MJ}(V)$*.*

Следствие 4.2. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V*. Конечное множество* U*,* $U \subseteq V$*, является базисом пространства* V *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $U \cap [w)_\preceq \neq \varnothing$ *для любого вектора* $w \in \mathrm{MJ}(V)$*;*
2) *для любого вектора* $u \in U$ *существует вектор* $w \in \mathrm{MJ}(V)$*, такой что* $U \cap [w)_\preceq = u$*.*

Единственность базиса определяет следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V*. Пространство* V *имеет единственный базис тогда и только тогда, когда* $\mathrm{MJ}(V) \subseteq \mathrm{M}(V)$*.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{MJ}(V) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

Пусть $\mathrm{MJ}(V)$ — единственный базис пространства V. Предположим, что существует вектор $w_i \notin \mathrm{M}(V)$. Тогда $w_i \prec v$ для некоторого вектора $v \in \mathrm{M}(V)$. Пусть $w_i = \lambda v$, $\lambda \in P$.

Пусть множество U получено из множества $\mathrm{MJ}(V)$ удалением вектора w_i и добавлением вектора v.

Имеем $V = \mathrm{Lin}\big(\mathrm{MJ}(V)\big) \subseteq \mathrm{Lin}(U)$, $\mathrm{Lin}(U) = V$. Так как $\mathrm{MJ}(V)$ — единственный базис, то $\mathrm{MJ}(V) \subseteq U$ — противоречие. Доказано, что $w_i \in \mathrm{M}(V)$ для всех i. Значит, $\mathrm{MJ}(V) \subseteq \mathrm{M}(V)$.

Пусть $\mathrm{MJ}(V) \subseteq \mathrm{M}(V)$, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — некоторый базис пространства V. Так как вектор w_i является $\vee$-неразложимым, то $w_i \preceq u_j$ для некоторого индекса j. Значит, $w_i = u_j$. Доказано, что $\mathrm{MJ}(V) \subseteq U$. Из минимальности множества U следует, что $U = \mathrm{MJ}(V)$. $\square$

Пример 4.1. Пусть $P = [0,1]$ — нечёткая решётка, $V = P^{m\times 1}$ — арифметическое пространство. Имеем, что $\mathrm{MJ}(V) = \{E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(m)}\}$, где $E \in P^{m\times m}$ — единичная матрица. Множество $\mathrm{M}(V)$ состоит из векторов столбцов, у которых некоторые элементы равны единице $\tilde{1}$. Так как $\mathrm{MJ}(V) \subseteq \mathrm{M}(V)$, то $\mathrm{MJ}(V)$ — единственный базис пространства V.

Найдём базис, содержащий наибольшее число векторов.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V. *Тогда для любого базиса* U *пространства* V *справедливо неравенство*

$$|\mathrm{MJ}(V)| \geqslant |U|.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathrm{MJ}(V) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}, \quad U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}.$$

Так как w_i — $\vee$-неразложимый вектор, то $w_i = \lambda_{ir(i)} u_{r(i)}$ для некоторого индекса $r(i)$. Имеем

$$V = \mathrm{Lin}\big(\mathrm{MJ}(V)\big) = \mathrm{Lin}\big(\lambda_{1r(1)} u_{r(1)}, \lambda_{2r(2)} u_{r(2)}, \ldots, \lambda_{nr(n)} u_{r(n)}\big) \subseteq \\ \subseteq \mathrm{Lin}\big(u_{r(1)}, u_{r(2)}, \ldots, u_{r(n)}\big) \subseteq \mathrm{Lin}(U) = V.$$

Поэтому

$$\mathrm{Lin}\big(u_{r(1)}, u_{r(2)}, \ldots, u_{r(n)}\big) = \mathrm{Lin}(U) = V.$$

Из минимальности множества U следует, что $n \geqslant k$ и $|\mathrm{MJ}(V)| \geqslant |U|$. $\square$

Рассмотрим свойства базиса $\mathrm{MJ}(V)$.

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис* V, $n = |\mathrm{MJ}(V)|$. *Каждый базис пространства* V *содержит* n *векторов тогда и только тогда, когда полуинтервалы* $[w)_{\preceq}$, *где* $w \in \mathrm{MJ}(V)$, *попарно не пересекаются.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{MJ}(V) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Пусть все базисы пространства V имеют мощность n. Предположим, что $[w_i)_{\preceq} \cap [w_j)_{\preceq} \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$. Удалив из множества $\mathrm{MJ}(V)$ векторы w_i, w_j и добавив некоторый вектор $u \in [w_i)_{\preceq} \cap [w_j)_{\preceq}$, получим множество U. Так как $U \cap [w)_{\preceq} \neq \varnothing$

для любого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$, то U — порождающее множество пространства V. Поэтому пространство V имеет базис, содержащий не более $|U| = n-1$ векторов, — противоречие.

Пусть полуинтервалы $[w)_{\preceq}$, где $w \in \mathrm{MJ}(V)$, попарно не пересекаются и множество U — базис пространства V. Тогда $U \cap [w)_{\preceq} \neq \varnothing$ для любого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$. Значит, $|U| \geqslant |\mathrm{MJ}(V)|$. Из теоремы 4.3 следует, что $|U| = n$. □

Следствие 4.3. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис конечного пространства* V*. Если каждый базис пространства* V *содержит* $|\mathrm{MJ}(V)|$ *векторов, то число всех базисов пространства* V *равно*

$$\prod_{w \in \mathrm{MJ}(V)} |[w)|_{\preceq}.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{MJ}(V) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Для любых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, таких что $u_i \in [w_i)_{\preceq}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, множество $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — базис пространства V. Отсюда получаем нужное утверждение. □

Следствие 4.4. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ *— базис пространства* V, $n = |\mathrm{MJ}(V)|$. *Пространство* V *имеет базис мощности меньше* n *тогда и только тогда, когда* $[w_1)_{\preceq} \cap [w_2)_{\preceq} \neq \varnothing$ *для некоторых векторов* $w_1, w_2 \in \mathrm{MJ}(V)$, $w_1 \neq w_2$. □

Пример 4.2.

1. Пусть U — конечное множество, $|U| = n \geqslant 1$, $V = \mathrm{Bul}(U)$ — векторное пространство над булеаном $P = \mathrm{Bul}(U)$. Наименьшее число векторов содержит базис $\{U\}$. Наибольшее число векторов n содержит базис $\mathrm{MJ}(V) = U$. Любое k-элементное разбиение множества U является базисом пространства V, $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. Пусть U — бесконечное множество, $V = \mathrm{Bul}(U)$ — векторное пространство над булеаном $P = \mathrm{Bul}(U)$. Тогда для любого натурального числа m существует базис пространства V, содержащий m векторов.

5. Стандартные базисы

Пусть $U = \{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$ — базис пространства V. Последовательность $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ будем называть упорядоченным базисом пространства V.

Базис U называется стандартным, если для любого вектора $u_i \in U$ при любом его разложении по базису U

$$u_i = \sum_r \lambda_{ir} u_r \tag{1}$$

имеем, что

$$u_i = \lambda_{ii} u_i.$$

Понятие стандартного базиса введено в [3, 4].

Пример 5.1. Пусть $V = \mathrm{Column}(A)$ — столбцовое пространство нечёткой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим базисы пространства $V = \mathrm{Column}(A)$

$$U_1 = \{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}\}, \quad U_2 = \mathrm{MJ}(V) = \{0{,}6A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}\}.$$

Имеем

$$A^{(1)} = 0{,}6A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A^{(1)} > 0{,}6A^{(1)}.$$

Поэтому U_1 не является стандартным базисом пространства V. Непосредственно проверяется, что U_2 — стандартный базис пространства V. Имеем

$$\big[0{,}6A^{(1)}\big)_{\preceq} = \{\mu A^{(1)} \mid 0{,}6 \leqslant \mu \leqslant 1\}_{\preceq}, \quad \big[A^{(2)}\big)_{\preceq} = \{A^{(2)}\}, \quad \big[A^{(3)}\big)_{\preceq} = \{A^{(3)}\}.$$

Полуинтервалы $\big[0{,}6A^{(1)}\big)_{\preceq}$, $\big[A^{(2)}\big)_{\preceq}$, $\big[A^{(3)}\big)_{\preceq}$ попарно не пересекаются. По следствию 4.1 каждый базис пространства V содержит три вектора и любой базис пространства совпадает с одним из базисов $\{\mu A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}\}$, где $0{,}6 \leqslant \mu \leqslant 1$. Пространство V имеет бесконечно много базисов и имеет единственный стандартный базис.

Рассмотрим свойства стандартных базисов.

Теорема 5.1. *Если* $\mathrm{MJ}(V)$ — *базис пространства* V, *то* $\mathrm{MJ}(V)$ — *стандартный базис.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{MJ}(V) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — базис, состоящий из $\vee$-неразложимых векторов пространства V. Так как каждый вектор u_i является $\vee$-неразложимым, то из равенства (1) следует, что $u_i = \lambda_{ii}u_i$ или

$$u_i = \sum_{r \neq i} \lambda_{ir} u_r.$$

Последнее равенство невозможно в силу минимальности множества $\mathrm{MJ}(V)$. $\square$

Обозначим через $\mathrm{base}(V)$ множество всех упорядоченных базисов пространства V. На множестве $\mathrm{base}(V)$ определён частичный порядок $\preceq$: неравенство

$$(w_1, w_2, \ldots, w_k) \preceq (w_1', w_2', \ldots, w_k')$$

равносильно неравенствам

$$w_i \preceq w_i', \quad i = 1, \ldots, k.$$

Стандартные базисы определяются частично упорядоченным множеством $(\mathrm{base}(V), \preceq)$.

Теорема 5.2. *Множество всех минимальных элементов частично упорядоченного множества* $(\mathrm{base}(V), \preceq)$ *совпадает с множеством всех упорядоченных стандартных базисов пространства* V.

Доказательство. Докажем сначала, что каждый минимальный базис является стандартным. Пусть $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — минимальный упорядоченный базис частично упорядоченного множества $(\mathrm{base}(V), \preceq)$. Предположим, что U не является стандартным базисом. Тогда для некоторого вектора $u_i \in U$ существует разложение

$$u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, $u_i \succ \lambda_i u_i$. Рассмотрим упорядоченное множество W, полученное из упорядоченного базиса U заменой вектора u_i на вектор $\lambda_i u_i$. Так как $U \subseteq \mathrm{Lin}(W)$, то множество W порождает пространство V. Если $j \neq i$, то $u_j \notin \mathrm{Lin}(W - \{u_j\})$. Если $j = i$, то $u_i \notin \mathrm{Lin}(W - \{\lambda_i u_i\})$.

Доказано, что W — минимальное множество, порождающее пространство V. Получаем, что W — базис пространства V, $W \prec U$ — противоречие с минимальностью U.

Докажем, что каждый стандартный базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ пространства V является минимальным базисом частично упорядоченного множества $(\mathrm{base}(V), \preceq)$. Предположим, что существует базис W, $W \prec U$. Без потери общности можно считать, что $W = \{\lambda u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $u_1 \succ \lambda u_1$. Разложим вектор u_1 по базису W: $u_1 = \lambda(\lambda_1 u_1) + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$. Так как U — стандартный базис, то получаем, что $u_1 = \lambda(\lambda_1 u_1) \preceq \lambda_1 u_1 \prec u_1$ — противоречие. □

Если V — конечное пространство, то все $\preceq$-цепи частично упорядоченного множества $(\mathrm{base}(V), \preceq)$ конечны.

Если P — конечная решётка, то все $\preceq$-цепи частично упорядоченного множества $(\mathrm{base}(V), \preceq)$ конечны.

Следствие 5.1. *Пусть все $\preceq$-цепи частично упорядоченного множества $(\mathrm{base}(V), \preceq)$ конечны. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — базис V, то $\{\mu_1 u_1, \mu_2 u_2, \ldots, \mu_k u_k\}$ — стандартный базис пространства V для некоторых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in P$.*
2. *Пространство V имеет базис, содержащий k векторов, тогда и только тогда, когда V имеет стандартный базис, содержащий k векторов.*
3. *Если пространство V имеет единственный стандартный базис, то все базисы V содержат одинаковое число векторов.* □

6. Размерность векторного пространства

Размерностью ненулевого конечно порождённого пространства V называется число $\dim(V)$, равное наименьшему числу векторов в базисах пространства.

Если $\mathrm{MJ}(V)$ — базис пространства V, то

$$\dim(V) \leqslant |U| \leqslant |\mathrm{MJ}(V)|$$

для любого базиса U пространства V. Из следствия 4.1 получаем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ — *базис пространства* V. *Тогда множество* U, *содержащее наименьшей число векторов и такое, что* $U \cap [w)_{\preceq} \neq \varnothing$ *для любого вектора* $w \in \mathrm{MJ}(V)$, *является базисом пространства* V. □

Рассмотрим теперь свойства базисов, содержащих наименьшее число векторов.

Лемма 6.1. *Пусть* $d = \dim(V)$, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ — *базис пространства* V. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Полуинтервалы* $[u_1)_{\preceq}, \ldots, [u_d)_{\preceq}$ *попарно не пересекаются.*
2. *Для любых векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_d$, *таких что* $v_i \in [u_i)_{\preceq}$, где $i = 1, 2, \ldots, d$, *множество* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ — *базис пространства* V.
3. *Если* $\max[u_i)_{\preceq} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, d$, *то пространство* V *имеет базис* B, $B \subseteq \mathrm{M}(V)$, $|B| = d$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $[u_1)_{\preceq} \cap [u_2)_{\preceq} \neq \varnothing$. Удалив из множества U векторы u_1, u_2 и добавив некоторый вектор $v \in [u_1)_{\preceq} \cap [u_2)_{\preceq}$, получим множество D. Имеем $u_1 = \lambda_1 v$, $u_2 = \lambda_2 v$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in P$,

$$V = \mathrm{Lin}(U) = \mathrm{Lin}(\lambda_1 v, \lambda_2 v, u_3, \ldots, u_d) \subseteq \mathrm{Lin}(v, u_3, \ldots, u_d) = \mathrm{Lin}(D),$$
$$\mathrm{Lin}(D) = V.$$

Пространство V имеет базис, содержащий не более $|D| = d - 1$ векторов, — противоречие.

Докажем утверждение 2. Имеем $u_i = \lambda_i v_i$ для некоторых $\lambda_i \in P$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Значит,

$$V = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \mathrm{Lin}(\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_d v_d) \subseteq \mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_d), \quad V = \mathrm{Lin}(B).$$

Мультимножество $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ порождает пространство V. Поэтому B — множество и B — базис пространства V.

Докажем утверждение 3. Из утверждения 2 следует, что существует базис $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, такой что $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{d} \max[u_i)_{\preceq} \subseteq \mathrm{M}(V)$. □

Рассмотрим способ нахождения базиса, содержащего наименьшее число векторов, и вычисления размерности.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathrm{MJ}(V)$ — *базис пространства* V, $\max[w)_{\preceq} \neq \varnothing$ *для каждого вектора* $w \in \mathrm{MJ}(V)$. *Тогда множество* B, $B \subseteq \mathrm{M}(V)$, *содержащее наименьшее число векторов и пересекающее каждое из множеств* $\max[w)_{\preceq}$, *является базисом пространства* V *и* $\dim(V) = |B|$.

Доказательство. Пусть $d = \dim(V)$, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ — базис пространства V. Так как $\max[u_i)_{\preceq} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, d$, то пространство V имеет такой базис B, что $|B| = \dim(V)$ и $B \subseteq \mathrm{M}(V)$. Отсюда и из теоремы 6.1 получаем, что множество B, $B \subseteq \mathrm{M}(V)$, наименьшей мощности, такое что $B \cap [w)_{\preceq} \neq \varnothing$ для любого вектора $w \in \mathrm{MJ}(V)$, является базисом пространства V и $\dim(V) = |B|$. Так как $\max[w)_{\preceq} \subseteq \mathrm{M}(V)$, то неравенство $B \cap [w)_{\preceq} \neq \varnothing$ равносильно неравенству $B \cap \max[w)_{\preceq} \neq \varnothing$. □

Вычисление размерности конечного пространства сводится к решению NP-полной комбинаторной задачи, являющейся одной из ключевых в комбинаторике конечных множеств и заключающейся в следующем. Пусть $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — семейство непустых подмножеств данного множества M. Рассмотрим подмножества H, $H \subseteq M$, которые пересекают каждое множество из S, т. е. $S_j \cap H \neq \varnothing$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Будем называть такое множество H минимальным, если никакое его собственное подмножество не удовлетворяет указанному свойству. Задача состоит в том, чтобы найти *минимальные множества H, содержащие наименьшее число элементов*.

Теорема 6.2 позволяет вычислять размерность известными алгоритмами [6, 7].

7. Векторные пространства над двухэлементной решёткой

Пусть V — векторное пространство над решёткой $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Векторные пространства над решёткой P устроены особенно просто. Имеем $\mathrm{MJ}(V) = \mathrm{J}(V) = \mathrm{join}(V) - \{0\}$.

Теорема 7.1. *Каждое конечно порождённое пространство V имеет единственный базис, которым является множество $\mathrm{J}(V) = \mathrm{MJ}(V)$,*

$$\dim(V) = |\mathrm{J}(V)|.$$

Доказательство. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — некоторый базис пространства V. Для любого вектора $w \in J(V)$

$$w = \sum \lambda_r u_r,$$

где $\lambda_r \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Так как ненулевой вектор w является $\vee$-неразложимым, то существует вектор $u_r \in U$, такой что $w = u_r$. Значит, $\mathrm{J}(V) \subseteq U$ и $\mathrm{J}(V)$ — конечное множество. Множество $\mathrm{J}(V)$ порождает пространство V. Из минимальности множества U следует, что $\mathrm{J}(V) = U$. □

Следствие 7.1 [3—5]. *Каждое ненулевое подпространство V пространства $P^{m\times 1}$ имеет единственный базис, которым является множество $\mathrm{J}(V)$.* □

8. Векторные пространства над цепями

Пусть V — векторное пространство над цепью P. Рассмотрим свойства базисов пространства V.

Лемма 8.1. *Если U — стандартный базис пространства V, то $U = \mathrm{MJ}(V)$.*

Доказательство. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Предположим, что некоторый вектор u_i не является $\vee$-неразложимым вектором пространства V. Тогда существуют векторы $c, d \in V$, такие что $u_i = c + d$ и $u_i > c$, $u_i > d$. Разложим векторы c, d по базису U:

$$c = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{ir} u_r, \quad d = \sum_{r=1}^{k} \mu_{ir} u_r.$$

Имеем

$$u_i = \sum_{r=1}^{k} (\lambda_{ir} \vee \mu_{ir}) u_r.$$

Так как U — стандартный базис, то $u_i = (\lambda_{ii} \vee \mu_{ii}) u_i$. Без потери общности можно считать, что $\lambda_{ii} \vee \mu_{ii} = \lambda_{ii}$. Имеем $u_i = \lambda_{ii} u_i$,

$$u_i > c = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{ir} u_r \geqslant \lambda_{ii} u_i = u_i\text{ —}$$

противоречие.

Доказано, что базис U состоит из $\vee$-неразложимых векторов. Из теоремы 3.2 следует, что $U = \mathrm{MJ}(V)$. □

Теорема 8.1. *Пусть V — ненулевое конечно порождённое пространство. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пространство V имеет единственный стандартный базис.*
2. *Стандартный базис пространства V совпадает с базисом $\mathrm{MJ}(V)$.*

Доказательство. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — базис пространства V, S — конечное множество, $S \subseteq P$, содержащее нуль $\tilde{0}$ и компоненты всех векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Определено конечное пространство V', состоящее из всех линейных комбинаций векторов множества U с коэффициентами, принадлежащими цепи S. Множество U — базис пространства V'. Пространство V' имеет стандартный базис $U' = \mathrm{MJ}(V')$, $|U'| = |U|$.

Каждый вектор u_j есть линейная комбинация векторов базиса U' с коэффициентами, принадлежащими цепи S. Так как U — базис пространства V, то и множество U' — базис пространства V. Докажем, что множество U' — стандартный базис пространства V.

Разложим вектор u'_i по базису U' пространства V,

$$u'_i = \lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_2 + \ldots + \lambda_k u'_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$. Существуют элементы $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_k \in S$, такие что $\lambda'_r \leqslant \lambda_r$ для всех r и

$$u'_i = \lambda'_1 u'_1 + \lambda'_2 u'_2 + \ldots + \lambda'_k u'_k.$$

Так как U' — стандартный базис пространства V', то $u'_i = \lambda'_i u'_i \leqslant \lambda_i u'_i$, $u'_i = \lambda_i u'_i$. Значит, U' — стандартный базис пространства V.

Из леммы 8.1 следует, что $U = \mathrm{MJ}(V)$. □

Следствие 8.1. *Если V — ненулевое конечно порождённое пространство, то все базисы пространства V содержат одинаковое число векторов, равное $|\mathrm{MJ}(V)|$.*

Доказательство. Пусть $w_1, w_2 \in \mathrm{MJ}(V)$, $w_1 \neq w_2$. Справедливо равенство $[w_1)_{\preceq} \cap [w_2)_{\preceq} = \varnothing$. Предположим противное: существует вектор $v \in [w_1)_{\preceq} \cap [w_2)_{\preceq}$. Имеем $w_1 = \lambda v$, $w_2 = \mu v$ для некоторых $\lambda, \mu \in P$. Без потери общности будем считать, что $\lambda < \mu$. Получаем, что $\lambda w_2 = (\lambda \wedge \mu) v = \lambda v = w_1$, — противоречие с минимальностью $\mathrm{MJ}(V)$.

Из теоремы 4.4 получаем нужное утверждение. □

9. Базисы и размерность арифметического пространства

Рассмотрим свойства арифметического пространства $P^{m\times 1}$.

Теорема 9.1. *Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subseteq V = P^{m\times 1}$, где*

$$u_i = {}^{\mathrm{t}}(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im}), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Справедливы следующие утверждения.

1. *Если $J(P) \neq \varnothing$, то $\dim(P^{m\times 1}) = m$.*
2. *Множество U является базисом пространства V тогда и только тогда, когда векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ попарно ортогональны, т. е. для всех индексов $i, j = 1, 2, \ldots, m$ справедливы равенства*

$$ {}^{\mathrm{t}}u_i \cdot u_j = (u_{i1} \wedge u_{j1}) \vee (u_{i2} \wedge u_{j2}) \vee \ldots \vee (u_{im} \wedge u_{jm}) = \begin{cases} \tilde{1}, & i = j, \\ \tilde{0}, & i \neq j. \end{cases}$$

3. *Если U — базис пространства V, то U — стандартный базис.*
4. *Пространство V имеет единственный базис, содержащий m векторов, тогда и только тогда, когда только $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ имеют дополнение в решётке P.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $E \in P^{m\times m}$ — единичная матрица, $p \in \mathrm{J}(P)$. Множество $\left\{E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(m)}\right\}$ — базис пространства V, поэтому $\dim(V) \leqslant m$.

Пусть U — произвольный базис пространства V. Заметим, что $pE^{(1)}$ есть $\vee$-неразложимый вектор пространства V. Разложим вектор $pE^{(1)}$ по базису U:

$$pE^{(1)} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k.$$

Тогда $pE^{(1)} = \lambda_i u_i$ для некоторого индекса i. Имеем, что $p = \lambda_i \wedge u_{i1}$, $\lambda_i \wedge u_{ij} = \tilde{0}$ для всех $j \neq 1$. Получаем, что $p \leqslant \lambda_i$, $p \leqslant u_{i1}$, для всех $j \neq 1$. Без потери общности можно считать, что

$$pE^{(i)} \preceq u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad pE^{(j)} \not\preceq u_i, \quad j \neq i.$$

Доказано, что векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ попарно различны. Поэтому $k \geqslant m$, базис U содержит не менее m векторов и $\dim(V) \geqslant m$. Значит, $\dim(V) = m$.

Докажем утверждение 2. Множество U является базисом пространства V тогда и только тогда, когда для любых $v_1, v_2, \ldots, v_m \in P$ совместна система линейных уравнений

$$\begin{cases} (\lambda_1 \wedge u_{11}) \cup (\lambda_2 \wedge u_{12}) \cup \ldots \cup (\lambda_m \wedge u_{1m}) = v_1, \\ (\lambda_1 \wedge u_{21}) \cup (\lambda_2 \wedge u_{22}) \cup \ldots \cup (\lambda_m \wedge u_{2m}) = v_2, \\ \quad \ldots \\ (\lambda_1 \wedge u_{m1}) \cup (\lambda_2 \wedge u_{m2}) \cup \ldots \cup (\lambda_m \wedge u_{mm}) = v_1 \end{cases} \tag{2}$$

относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Запишем систему (2) в матричной форме:

$$A\lambda = v, \tag{3}$$

где $A = (u_{ij}) \in P^{m\times m}$,

$$\lambda = {}^{\mathrm{t}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad v = {}^{\mathrm{t}}(v_1, v_2, \ldots, v_m) \in P^{m\times 1}.$$

Пусть система (3) совместна для любых вектор-столбцов v. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ существует вектор-столбец $\lambda^{(i)} \in P^{m\times 1}$, такой что $A\lambda^{(i)} = E^{(i)}$. Значит, матрица A обратима.

Система (3) совместна для любых вектор-столбцов v тогда и только тогда, когда матрица A обратима над решёткой P.

Множество векторов U является базисом пространства V тогда и только тогда, когда матрица A обратима. Из критерия обратимости матриц над дистрибутивными решётками получаем нужное утверждение.

Докажем утверждение 3. Разложим произвольный вектор u_i по базису U:

$$u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

Имеем

$$\tilde{1} = {}^{\mathrm{t}}u_i \cdot u_i = \lambda_1({}^{\mathrm{t}}u_1 \cdot u_i) + \lambda_2({}^{\mathrm{t}}u_2 \cdot u_i) + \ldots + \lambda_m({}^{\mathrm{t}}u_m \cdot u_i) = \lambda_i \wedge \tilde{1} = \lambda_i.$$

Значит, U — стандартный базис.

Из теоремы Скорнякова об изоморфизме получаем утверждение 4. □

Пример 9.1. Пусть $U \neq \varnothing$ — множество, $P = \mathrm{Bul}(U)$. Справедливы равенства

$$\mathrm{J}(P) = U \neq \varnothing, \quad \dim(P^{m\times 1}) = m.$$

Множество $W = \{E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(m)}\}$ — базис пространства $V = P^{m\times 1}$, где $E \in P^{m\times m}$ — единичная матрица. Если $|U| \geqslant 2$, то пространство V имеет базис, отличный от базиса W и содержащий m векторов.

Литература

[1] Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 182—185.

[2] Giveon J. Lattice matrices // Inform. Control. — 1964. — Vol. 7. — P. 477—484.

[3] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Applications. — Marcel Dekker, 1982.

[4] Kim K. H., Roush F. W. Generalized fuzzy matrices // Fuzzy Sets Syst. — 1980. — Vol. 4, no. 3. — P. 293—315.

[5] Kim K. H., Roush F. W. Idempotent fuzzy matrices: Seminar report. — Montgomery: Alabama State Univ., 1981.

[6] Lin L., Jiang Y. The computation of hitting sets: review and new algorithms // Inform. Process. Lett. — 2003. — Vol. 86. — P. 177—184.

[7] Wotawa W. A variant of Reiter's hitting-set algorithm // Inform. Process. Lett. — 2001. — Vol. 79. — P. 45—51.