О пирсовских слоях полуколец

Р. В. МАРКОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: markovrv@yandex.ru

В. В. ЧЕРМНЫХ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vv146@mail.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: полукольцо, пучковые представления, пирсовский слой полукольца.

Аннотация

В работе исследуются пирсовские слои полуколец и полукольцевые свойства, поднимаемые с пирсовских слоёв до исходного полукольца. Выделяются классы полуколец, допускающих характеризацию свойствами своих пирсовских пучков.

Abstract

R. V. Markov, V. V. Chermnykh, On Pierce stalks of semirings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 171—186.

In this paper, we investigate Pierce stalks of semirings and properties of semirings that lift from properties of the stalks. We distinguish classes of semirings that admit characterization by properties of their Pierce sheaves.

Р. С. Пирсом [19] для произвольного кольца R с 1 был построен пучок колец на нульмерном компакте $\operatorname{Max} BR$ со слоями R/MR, где M — максимальный идеал булева кольца BR центральных идемпотентов из R. Им же было показано, что произвольное кольцо R с 1 изоморфно кольцу всех глобальных сечений его пирсовского пучка. Понятно, что нетривиальный пирсовский пучок существует для колец с богатой алгеброй центральных идемпотентов, и поэтому пирсовские пучки применялись при исследовании регулярных, бирегулярных, заменяемых, чистых колец [5, 6, 11, 12, 16, 19]. В. Д. Бёджесс и В. Стефенсон построили и успешно применяли конструкцию пирсовской цепи идеалов кольца [9, 10].

Аналоги пирсовских пучков колец были получены и для некоторых других алгебраических систем: ограниченных дистрибутивных решёток, почтиколец, решёточно упорядоченных колец и решёточно упорядоченных абелевых групп, универсальных алгебр [13, 14, 17, 18, 20]. Для полуколец конструкция, обобщающая пирсовский пучок колец, была рассмотрена В. В. Чермных [7].

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 171—186.
© 2014 *Издательский дом «Открытые системы»*

В настоящей работе исследуются пирсовские слои полуколец и свойства, поднимаемые со слоёв до исходного полукольца, выделяются классы полуколец, допускающих характеризацию свойствами их пирсовских пучков. Авторы пытались использовать в основном алгебраические свойства пирсовских слоёв, характеризующие исследуемые полукольца. Иногда этого достичь не удаётся и приходится применять свойства пучков или спектров полуколец. В таких случаях мы пользуемся общепринятыми при функциональных представлениях обозначениями и говорим о сечениях вида $\hat{a}$, где a — элемент исследуемого полукольца S, и их значениях $\hat{a}(M)$ в слоях S/ρ_M. Если терминология пучков не применяется, мы обозначаем через $\bar{a}$ или $h(a)$ образ элемента $a \in S$ в слое S/ρ при естественном гомоморфизме $h\colon S \to S/\rho$. С определением пучка и основными свойствами можно ознакомиться в [1, 8].

Определение 1. Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1) $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;
2) $(S, \cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;
3) умножение дистрибутивно относительно сложения:
$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc$$
для любых $a, b, c \in S$;
4) $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Мультипликативно идемпотентный элемент $e = e^2$ полукольца S договоримся называть идемпотентом. Элемент e полукольца S называется *центральным*, если $es = se$ для любого $s \in S$, и *дополняемым*, если существует такой $e^\perp \in S$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Заметим, что дополнение к произвольному центральному элементу является центральным дополняемым идемпотентом и определяется однозначно. Через BS обозначим множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Непосредственно проверяется, что $(BS, \oplus, \cdot)$ с операцией сложения $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и полукольцевым умножением образует булево кольцо. На множестве $\operatorname{Max} BS$ всех максимальных идеалов кольца BS стандартно вводится стоуновская топология. В этом случае пространство $\operatorname{Max} BS$ является нульмерным компактом с базой открыто-замкнутых множеств вида $D(e) = \{M \in \operatorname{Max} BS\colon e \notin M\}$.

Пусть S — произвольное полукольцо, $K \subseteq BS$ — подмножество центральных дополняемых идемпотентов. Идеал в S, порождённый K, назовём *регулярным* и обозначим A_K. Стандартно проверяется, что для любого регулярного идеала $A = A_K$ отношение
$$a \equiv b \ (\rho_A) \Longleftrightarrow ae^\perp = be^\perp \text{ для некоторого } e \in A \cap \operatorname{Max} BS$$
является конгруэнцией на полукольце S; назовём ρ_A *регулярной* конгруэнцией. Ядром (или классом нуля) регулярной конгруэнции является идеал A_K. При необходимости, если надо указать связь конгруэнции с её ядром, мы будем говорить об A-регулярной конгруэнции. Если M — максимальный собственный

регулярный идеал полукольца S, то ρ_M называется *пирсовской* конгруэнцией полукольца S; фактор-полукольцо S/ρ_M по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца S. Эта терминология идёт от конструкции пучка колец с единицей, построенного Р. С. Пирсом в [19], где также было дано изоморфное представление произвольного кольца с единицей сечениями пирсовского пучка. В дальнейшем пирсовское представление колец было обобщено на полукольца с единицей.

Определение 2. Пучок полуколец $(P(S), \operatorname{Max} BS)$ называется *пирсовским пучком полукольца* S, если базисное пространство — максимальный спектр булева кольца центральных дополняемых идемпотентов из S, а накрывающее пространство — дизъюнктное объединение всех пирсовских слоёв полукольца S.

Теорема A [7, 8]. *Произвольное полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений его пирсовского пучка $(P(S), \operatorname{Max} BS)$.* □

Известно, что неразложимость полукольца в нетривиальную прямую сумму идеалов равносильна отсутствию в полукольце центральных дополняемых идемпотентов, отличных от нуля и единицы. Рассмотрим некоторые исходные свойства идемпотентов полукольца.

Лемма 1. *Пусть $f_1, \ldots, f_n \in BS$. Тогда существует элемент $f \in BS$, такой что $fS = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i S$.*

Доказательство. Пусть

$$f = f_1 + f_1^{\perp} f_2 + \ldots + f_1^{\perp} f_{n-1}^{\perp} f_n. \qquad (*)$$

Непосредственно проверяется, что f — центральный дополняемый идемпотент с дополнением $f_1^{\perp} \cdot \ldots \cdot f_n^{\perp}$. Идемпотент f допускает другие формы записи, получаемые из $(*)$ произвольной перестановкой индексов. Поэтому $ff_i = f_i^2 = f_i$. Следовательно,

$$f_1 s_1 + \ldots + f_n s_n = f(f_1 s_1 + \ldots + f_n s_n) \in fS$$

и $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i S \subseteq fS$. Обратное включение очевидно. □

Лемма 2. *В обозначениях предыдущей леммы справедливы следующие свойства*:

1) $f_i = ff_i$;
2) $f_i f^{\perp} = 0$;
3) $f_i^{\perp} f^{\perp} = f^{\perp}$.

Доказательство. Утверждения очевидны. □

Определение 3. Скажем, что идемпотент $\bar{e} \in S/\rho$ *поднимается по модулю конгруэнции* ρ, если найдётся такой идемпотент $e \in S$, что $h(e) = \bar{e}$, где $h\colon S \to S/\rho$ — естественный полукольцевой гомоморфизм. Если $\{e_i\}$, $i \in I$, —

некоторое множество идемпотентов и $e_ie_j = e_je_i = 0$ для любых $i \neq j$, то идемпотенты e_i называются *ортогональными*.

Предложение 1. *Пусть A — собственный регулярный идеал, ρ — A-регулярная конгруэнция, $h\colon S \to S/\rho$ — естественный гомоморфизм.*

1. *Если S/ρ не является пирсовским слоем полукольца S, то существует такой центральный дополняемый идемпотент $e \in S$, что выполняются следующие условия:*

$$A \subsetneqq A + eS \neq S, \quad A \subsetneqq A + e^{\perp}S \neq S,$$
$$S = (A + eS) + (A + e^{\perp}S),$$
$$A = (A + eS)(A + e^{\perp}S) = (A + e^{\perp}S)(A + eS) = (A + eS) \cap (A + e^{\perp}S),$$
$$h(S) \cong h(eS) \oplus h(e^{\perp}S).$$

2. *Если S/ρ — пирсовский слой полукольца S и e — дополняемый идемпотент в S, то либо $e \in A$, либо $e^{\perp} \in A$.*
3. *Если полукольцо S/ρ неразложимо, то S/ρ — пирсовский слой полукольца S.*
4. *Любой идемпотент $\bar{e} \in S/\rho$ поднимается по модулю конгруэнции ρ.*
5. *Произвольное конечное множество ортогональных идемпотентов $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ полукольца S/ρ поднимается до некоторого множества $e_1, \ldots, e_n$ ортогональных идемпотентов полукольца S.*
6. *Произвольное счётное множество ортогональных идемпотентов $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ полукольца S/ρ поднимается до некоторого счётного множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов полукольца S.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Идеал A строго содержится в некотором максимальном идеале $M \in \operatorname{Max} BS$, поэтому существует идемпотент $e \in M \setminus A$. Поскольку $A + eS \subseteq M$, то $A + eS$ — собственный идеал. Если $A + e^{\perp}S = S$, то $e \in e(A + e^{\perp}S) \subseteq A$, противоречие, поэтому $A + e^{\perp}S$ — собственный идеал. Идеал $A + e^{\perp}S$ строго содержит A, так как в противном случае $1 = e^{\perp} + e \in A + eS \subseteq M$. Оставшиеся утверждения очевидны.

Докажем утверждение 2. Пусть $e \notin A$. Идеал $A \cap BS$ является максимальным идеалом булева кольца BS. Так как $ee^{\perp} = 0 \in A \cap BS$, то $e^{\perp} \in A \cap BS$, поскольку максимальный идеал является простым.

Утверждение 3 следует из утверждения 1.

Докажем утверждение 4. Пусть $\bar{e} \in S/\rho$ — идемпотент и $\bar{e} = h(a)$ для некоторого $a \in S$. Поскольку $h(a^2) = \bar{e}^2 = \bar{e} = h(a)$, то $a^2 \equiv a\ (\rho)$. Следовательно, $a^2e^{\perp} = ae^{\perp}$ для некоторого $e \in A \cap BS$. Идемпотент $e^{\perp}$ центральный, поэтому $(ae^{\perp})^2 = ae^{\perp}$. Наконец,

$$\bar{e} = h(a) = h\big(a(e + e^{\perp})\big) = h(a)h(e) + h(ae^{\perp}) = h(ae^{\perp}),$$

поскольку $h(e) = h(0)$.

Докажем утверждение 5. Рассмотрим $a_1, \ldots, a_n \in S$, такие что $h(a_i) = \bar{e}_i$. Поскольку $h(a_i^2) = \bar{e}_i^2 = \bar{e}_i = h(a_i)$, то $a_i^2 \equiv a_i\ (\rho)$, поэтому

$$a_i^2 f_i^\perp = a_i f_i^\perp \text{ для некоторых } f_i \in A \cap BS. \qquad (**)$$

Для $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ $h(a_i a_j) = \bar{e}_i \bar{e}_j = \bar{0}$, поэтому $a_i a_j f_{ij}^\perp = 0$ для некоторых $f_{ij} \in A \cap BS$. По лемме 1 существует такой элемент $f \in A \cap BS$, что

$$fS = \sum_{i=1}^{n} f_i S + \sum_{i \neq j} f_{ij} S.$$

Обозначим $e_i = a_i f^\perp$. Получаем, что

$$e_i^2 = (a_i f^\perp)^2 = a_i^2 f^\perp = a_i^2 f_i^\perp f^\perp = a_i f_i^\perp f^\perp = a_i f^\perp = e_i,$$

по лемме 2 и $(**)$. Из $ff^\perp = 0$ вытекает, что $h(f) = \bar{0}$, поэтому $\bar{1} = h(f + f^\perp) = h(f^\perp)$. Отсюда получаем, что $h(e_i) = h(a_i f^\perp) = h(a_i) = \bar{e}_i$. Наконец,

$$e_i e_j = a_i a_j f^\perp = a_i a_j f_{ij}^\perp f^\perp = 0.$$

Докажем утверждение 6. Найдутся такие счётные множества $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов полукольца S, что $\bar{e}_i = h(a_i)$ для всех i. Пусть $n \in \mathbb{N}$. По утверждению 5 существует такое множество ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ полукольца S, что $h(e_i) = \bar{e}_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Покажем существование идемпотента e_{i+1}, такого что $h(e_{n+1}) = \bar{e}_{n+1}$ и $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ ортогональны.

Имеем $a_{n+1} \equiv a_{n+1}^2\ (\rho)$, поэтому $a_{n+1} f_{n+1}^\perp = a_{n+1}^2 f_{n+1}^\perp$ для некоторого $f_{n+1} \in A \cap BS$. Поскольку $h(e_i a_{n+1}) = \bar{e}_i \bar{e}_{n+1} = \bar{0}$, то $e_i a_{n+1} f_{i1}^\perp = 0$; точно так же $a_{n+1} e_i f_{i2}^\perp = 0$ для некоторых $f_{ij} \in A \cap BS$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2$. Существует центральный дополняемый идемпотент f, такой что

$$fS = \sum_{i=1}^{n} f_i S + \sum_{i=1}^{n} f_{i1} S + \sum_{i=1}^{n} f_{i2} S.$$

Обозначим $e_{n+1} = a_{n+1} f^\perp$. Тогда $h(e_{n+1}) = \bar{e}_{n+1}$. Кроме того,

$$e_i e_{n+1} = e_i a_{n+1} f^\perp = e_i a_{n+1} f_{i1}^\perp f^\perp = 0$$

для любого $i = 1, \ldots, n$. Аналогично $e_{n+1} e_i = 0$. Таким образом, $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — ортогональные идемпотенты. □

Определение 4. Полукольцо называется *абелевым*, если каждый его идемпотент централен.

Определение 5 [4]. Полукольцо S назовём *заменяемым справа*, если для любых $a, b \in S$, таких что $a + b = 1$, найдётся такой дополняемый идемпотент e, что $e \in aS$, $e^\perp \in bS$.

Пусть S — абелево заменяемое справа полукольцо и $M \neq N$ — его максимальные идеалы. Поскольку $M + N = S$, то $a + b = 1$ для некоторых $a \in M$ и $b \in N$. Тогда существуют центральные дополняемые идемпотенты $e \in aS$ и $e^\perp \in bS$. Очевидно, что $e \in M \setminus N$, $e^\perp \in N \setminus M$ и $eSe^\perp = 0$. Получили, что S — строго гармоническое полукольцо.

Определение 6 [8]. Полукольцо S называется *строго гармоническим*, если для различных максимальных идеалов M и N из S найдутся такие элементы $m \in M \setminus N$ и $n \in N \setminus M$, что $mSn = 0$.

Строго гармонические полукольца допускают хорошие функциональные представления, поэтому напомним необходимые конструкции пучков Ламбека и Корниша. Мы используем эти пучки потому, что для некоторых полуколец пирсовский и ламбековский пучки совпадают и свойства ламбековских слоёв становятся верными для пирсовских слоёв.

Базисное пространство X *пучка Ламбека* полукольца S является подпространством первичного спектра $\operatorname{Spec} S$ — множества первичных идеалов со стоуновской топологией. Накрывающее пространство $L(S) = \dot{\bigcup} S/\theta_P$, $P \in X$, — дизъюнктное объединение слоёв, задаваемых как фактор-полукольца по конгруэнциям:

$$a \equiv b \ (\theta_P) \Longleftrightarrow asu = bsu \text{ для любого } s \in S \text{ и некоторого } u \in S \setminus P.$$

Ядрами указанных конгруэнций являются идеалы

$$0_P = \{m \in S \colon mSu = 0 \text{ для некоторого } u \notin P\},$$

называемые 0-*компонентами* первичного идеала P. С 0-компонентами связан ещё один тип конгруэнций — *отношение Бёрна* по идеалу 0_P:

$$a \equiv b \ (\theta(P)) \Longleftrightarrow a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in 0_P.$$

Пучок полуколец $(K(S), X)$ со слоями $S/\theta(P)$ называется *пучком Корниша*. Для колец конструкции пучков Ламбека и Корниша совпадают, первый пучок впервые использован в [3] для представления коммутативного кольца, второй — в [15] для представлений ограниченных дистрибутивных решёток.

Для строго гармонического полукольца S пучок Ламбека рассматривается на максимальном спектре $\operatorname{Max} S$.

Теорема B [8]. *Произвольное строго гармоническое полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка $(L(S), \operatorname{Max} S)$.* □

Уточним, что два пучка совпадают, если существует гомеоморфизм их базисных пространств, а соответствующие при этом гомеоморфизме слои изоморфны. Сформулируем следующий результат.

Предложение 2. *Пирсовский пучок $(P(S), \operatorname{Max} BS)$, пучок Корниша $(K(S), \operatorname{Max} S)$ и пучок Ламбека $(L(S), \operatorname{Max} S)$ полукольца S совпадают тогда и только тогда, когда максимальные идеалы из S разделяются центральными дополняемыми идемпотентами, т. е. для любых $M \neq N \in \operatorname{Max} S$ найдётся такой $e \in BS$, что $e \in M \setminus N$.*

Доказательство. Пусть для полукольца S совпадают его пирсовский и ламбековский пучки. Это означает, что отображение $M \to M \cap BS$ является гомеоморфизмом между $\operatorname{Max} S$ и $\operatorname{Max} BS$. Тогда различные максимальные идеалы из $\operatorname{Max} S$ обладают различными наборами центральных дополняемых идемпотентов.

Для доказательства достаточного условия нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Если различные максимальные идеалы полукольца S разделяются некоторым центральным дополняемым идемпотентом, то для любого $M \in \operatorname{Max} S$ справедливо $0_M = (M \cap BS)S$.*

Доказательство. Очевидно включение

$$(M \cap BS)S \subseteq 0_M.$$

Пусть $a \in 0_M$. Тогда $aSu = 0$ для некоторого $u \notin M$. По условию идеал $(M \cap BS)S$ лежит в единственном максимальном идеале, именно в M, поэтому $(M \cap BS)S + SuS = S$. Получаем

$$m + \sum_{i=1}^{k} x_i u y_i = 1$$

для подходящих $m \in (M \cap BS)S$ и $x_i, y_i \in S$. Пусть $m = e_1 s_1 + \ldots + e_n s_n$, $e_i \in M \cap BS$, $s_i \in S$, и по лемме 1 $m = es$ для некоторых $e \in M \cap BS$, $s \in S$. Заметим, что $am = a$. Получаем, что $ae^{\perp} = ame^{\perp} = aese^{\perp} = 0$. Наконец, $a = a(e + e^{\perp}) = ae \in (M \cap BS)S$. $\square$

Вернёмся к доказательству предложения. Покажем, что для любого $M \in \operatorname{Max} S$ и соответствующего ему $M' = M \cap BS \in \operatorname{Max} BS$ конгруэнции $\rho_{M'}$, θ_M и $\theta(M)$ совпадают. Пусть $a \equiv b$ $(\rho_{M'})$. Тогда $ae^{\perp} = be^{\perp}$ для некоторого $e \in (M \cap BS)$. Идемпотент $e^{\perp}$ центральный и не лежит в M, поэтому $ase^{\perp} = bse^{\perp}$ для любого $s \in S$ и $a \equiv b$ (θ_M). Далее, пусть $a \equiv b$ (θ_M) и $asu = bsu$ для некоторого $u \notin M$. Любой центральный дополняемый идемпотент из M лежит в 0_M, поэтому M является единственным максимальным идеалом, содержащим 0_M. Тогда $0_M + SuS = S$ и

$$m + \sum_{i=1}^{k} x_i u y_i = 1$$

для некоторых $m \in 0_M$, $x_i, y_i \in S$. Получаем

$$a + bm = a\left(m + \sum_{i=1}^{k} x_i u y_i\right) + bm = am + \sum_{i=1}^{k} a x_i u y_i + bm =$$
$$= am + \sum_{i=1}^{k} b x_i u y_i + bm = am + b\left(m + \sum_{i=1}^{k} x_i u y_i\right) = b + am.$$

Поскольку $am, bm \in 0_M$, то $a \equiv b$ $\big(\theta(M)\big)$. Пусть, наконец, $a \equiv b$ $\big(\theta(M)\big)$, т. е. $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in 0_M$. По леммам 3 и 1 $u = es$, $v = ft$ для некоторых $e, f \in M \cap BS$, $s, t \in S$. Тогда

$$ae^{\perp} f^{\perp} = (a + u)e^{\perp} f^{\perp} = (b + v)e^{\perp} f^{\perp} = be^{\perp} f^{\perp}$$

и поскольку M — простой идеал в BS, то $e^{\perp}f^{\perp} \notin M$, $(e^{\perp}f^{\perp})^{\perp} \in M$ и $a \equiv b\ (\rho_M)$. □

Предложение 3.

1. *Для произвольного строго гармонического полукольца S совпадают пучки Ламбека и Корниша на* $\operatorname{Max} S$.
2. *Для произвольного абелева заменяемого справа полукольца S совпадают пучки Ламбека и Корниша на* $\operatorname{Max} S$ *и пучок Пирса.*

Во всех указанных случаях соответствующие представления полуколец являются изоморфными.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Для любого $M \in \operatorname{Max} S$ отношение $\theta_M \leqslant \theta(M)$ доказывается так же, как и в предыдущем предложении. Используемое при этом свойство, что M является единственным максимальным идеалом, содержащим 0_M, справедливо для строго гармонических полуколец (см. [8]). Обратно, пусть $a \equiv b\ \big(\theta(M)\big)$. Имеем $a + u = b + v$ для подходящих $u, v \in 0_M$, $uSr = 0$, $vSt = 0$ для некоторых $r, t \notin M$, и в силу первичности M получаем, что $c = rwt \notin M$ для некоторого $w \in S$. Очевидно, что $usc = vsc = 0$ для произвольного $s \in S$, поэтому $asc = bsc$, т. е. $a \equiv b\ (\theta_M)$.

Докажем второе утверждение. Достаточно заметить, что различные максимальные идеалы абелева заменяемого справа полукольца S разделяются некоторым центральным дополняемым идемпотентом, и воспользоваться предложением 2.

Изоморфность соответствующих представлений следует из теоремы B. □

Лемма 4. *Пусть A — регулярный идеал полукольца S, ρ_A — A-регулярная конгруэнция.*

1. *Ядро конгруэнции ρ_A есть в точности идеал A.*
2. *A-регулярная конгруэнция ρ_A и отношение Бёрна $\theta(A)$ по идеалу A совпадают.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если $a \in A$, то $a = e_1s_1 + \ldots + e_ks_k$ для некоторых $e_i \in A \cap BS$, $s_i \in S$. По лемме 1 $a \in eS$ для некоторого $e \in A \cap BS$. Тогда $ae^{\perp} = 0$ и $a \in \operatorname{Ker}\rho$. Если $a \in \operatorname{Ker}\rho$, то $ae^{\perp} = 0$ для некоторого $e \in A \cap BS$, поэтому $a = a(e + e^{\perp}) = ae \in A$.

Докажем второе утверждение. Пусть $a \equiv b\ (\rho_A)$. Тогда $ae^{\perp} = be^{\perp}$ для некоторого $e \in A \cap BS$. Следовательно, $ae^{\perp} + ae + be = be^{\perp} + ae + be$, откуда получаем, что $a + be = b + ae$, т. е. $a \equiv b\ \big(\theta(a)\big)$. Обратно, пусть $a \equiv b\ \big(\theta(a)\big)$, что означает, что $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in A$. Идеал A регулярен, поэтому $u = e_1s_1 + \ldots + e_ns_n$, $v = f_1t_1 + \ldots + f_kt_k$ для некоторых $e_i, f_j \in BS$, $s_i, t_j \in S$. По лемме 1 существует такой центральный дополняемый идемпотент g, что $gS = e_1S + \ldots + e_nS + f_1S + \ldots + f_kS$, а по лемме 2 $e_ig^{\perp} = f_jg^{\perp} = 0$, поэтому $ug^{\perp} = vg^{\perp} = 0$ и $ag^{\perp} = bg^{\perp}$. □

Предложение 4. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *S — абелево полукольцо*;

2) *для каждого собственного регулярного идеала A полукольцо S/ρ_A, где ρ_A — A-регулярная конгруэнция, абелево*;
3) *все пирсовские слои полукольца S — абелевы полукольца.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $e = e^2 \in S$, S/ρ_M — пирсовский слой для любого $M \in \operatorname{Max} BS$ и $h_M\colon S \to S/\rho_M$ — естественный эпиморфизм. Так как $h_M(e)$ — идемпотент абелева полукольца $h_M(S)$, то $h_M(e)h_M(a) = h_M(a)h_M(e)$ для любого a из S. Получаем, что $ea \equiv ae(\rho_M)$ для любого $M \in \operatorname{Max} BS$. Другими словами, образы элементов ea и ae совпадают в каждом слое пирсовского пучка. Поскольку пирсовское представление является изоморфным, $ea = ae$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $h\colon S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм и $\bar{e} = \bar{e}^2 \in h(S)$. По предложению 1 $\bar{e} = h(e)$ для некоторого идемпотента $e \in S$. Так как полукольцо S абелево, то e централен. Тогда $\bar{e} = h(e)$ централен в $h(S)$. □

Следующее утверждение показывает, что некоторые «хорошо записываемые свойства» поднимаются с пирсовских слоёв до исходного полукольца. Предложение является естественным полукольцевым аналогом результата Пирса [19, утверждение 3.4].

Предложение 5. *Пусть $(P(S), \operatorname{Max} S)$ — пирсовский пучок полукольца S, f, g — многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ ($n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$) и $a_1, \dots, a_n$ — произвольные элементы из S. Если условие*

найдутся $\beta_1, \dots, \beta_m \in S/\rho_M$,
такие что $f(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \beta_1, \dots, \beta_m)(M) = g(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \beta_1, \dots, \beta_m)(M)$,

выполнено в каждом пирсовском слое S/ρ_M полукольца S, то для некоторых $b_1, \dots, b_m \in S$ верно, что

$$f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = g(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m).$$

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — произвольные элементы из S. Для произвольного $M_i \in \operatorname{Max} BS$ найдутся элементы $b_{i1}, \dots, b_{im} \in S$, такие что

$$f(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_{i1}, \dots, \hat{b}_{im})(M) = g(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_{i1}, \dots, \hat{b}_{im})(M). \qquad (***)$$

По свойствам пучка два сечения совпадают на некоторой открытой окрестности U_i точки M_i. Так как $\operatorname{Max} BS$ нульмерно, будем считать U_i открыто-замкнутыми множествами. Семейство $\{U_i\}$ покрывает компактное пространство $\operatorname{Max} BS$, поэтому выберем из него конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_k$ базисного пространства и соответствующие элементы $b_{ij} \in S$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$, такие что справедливо $(***)$ для любого $M \in U_i$. Понятно, что множества $U_1, \dots, U_k$ можно считать попарно непересекающимися. Для каждого $j = 1, \dots, m$ построим глобальное сечение β_j, положив $\beta_j = \hat{b}_{ij}$ на U_i для

любого $i = 1, \ldots, k$. Тогда для любого $M \in \operatorname{Max} BS$ выполняется

$$f(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)(M) = g(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)(M).$$

По теореме А сечениям $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответствуют элементы $b_1, \ldots, b_m \in S$, поэтому равенство $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = g(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ справедливо в S. □

В [11] исследуются кольца, пирсовские слои которых являются локальными кольцами. Основным характеристическим свойством таких колец является разложимость любого их элемента в сумму идемпотента и обратимого элемента. Сразу отметим, что если этим свойством обладает полукольцо, то оно является кольцом. Действительно, условие $e + u = 0$ для $e = e^2$ и обратимого элемента u влечёт аддитивную обратимость любого элемента из $s \in S$, поскольку $eu^{-1}s + s = 0$.

В [8] предлагается следующий подход к определению локальности полукольца, а затем определяется важный класс гельфандовых полуколец.

Определение 7. Полукольцо S называется *r-полукольцом*, если для любого максимального одностороннего идеала M и любого $a \in S$ либо $a \notin M$, либо $a + 1 \notin M$.

Условие в определении r-полукольца равносильно полустрогости каждого максимального одностороннего идеала (подмножество A полукольца S называется *полустрогим*, если из того, что $a, a + b \in A$, следует $b \in A$).

Одной из основных причин рассмотрения r-полуколец является свойство, что в r-полукольце с единственным максимальным правым идеалом M любой элемент из S, не лежащий в M, обратим [8].

Предложение C [8]. *Для r-полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *в S существует наибольший собственный правый* (*или, что равносильно, левый*) *идеал*;
2) *в S существует наибольший собственный идеал, являющийся наибольшим правым или* (*и*) *наибольшим левым идеалом*;
3) *множество всех необратимых элементов из S образует идеал*;
4) *если $a + b = 1$, то либо a, либо b обратим* (*обратим справа, обратим слева*). □

Определение 8. r-полукольцо S, удовлетворяющее эквивалентным условиям предложения C, называется *локальным*; r-полукольцо S называется *гельфандовым*, если для любых различных максимальных правых идеалов M и N найдутся такие элементы $a \in S \setminus M$ и $b \in S \setminus N$, что $aSb = 0$.

Непосредственно из определения вытекает, что гельфандово полукольцо является строго гармоническим.

Пусть S — абелево заменяемое справа r-полукольцо и $M \neq N$ — максимальные правые идеалы. Для некоторых $m \in M$, $n \in N$ получаем, что $m + n = 1$, и в силу заменяемости найдутся дополняемые идемпотенты e, $e^{\perp}$, такие что

$e \in mS$, $e^{\perp} \in nS$. Поскольку идемпотенты центральные, то $eSe^{\perp} = 0$. Очевидно, $e \in M \setminus N$, $e^{\perp} \in N \setminus M$, поэтому S гельфандово.

Лемма 5. *Произвольное локальное полукольцо заменяемо справа.*

Доказательство. Пусть S — локальное полукольцо и $a + b = 1$. Тогда по предложению C либо a, либо b обратим. В первом случае $1 \in aS$, $0 \in bS$ и S заменяемо справа. Двойственная ситуация имеет место во втором случае. □

Предложение 6. *Для r-полукольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *S — заменяемое справа полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен*;
2) *пирсовские слои полукольца S являются локальными полукольцами.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $M \neq N$ — максимальные правые идеалы и $m + n = 1$ для некоторых $m \in M$, $n \in N$. По условию существует такой элемент $e \in BS$, что $e \in mS$, $e^{\perp} \in nS$. Максимальные односторонние идеалы полукольца являются собственными и первичными, поэтому $e \in M \setminus N$ и $e^{\perp} \in N \setminus M$. Получаем $eSe^{\perp} = 0$ и S — гельфандово полукольцо. По предложению 2 пирсовский пучок гельфандова полукольца совпадает с пучками Ламбека и Корниша. Наконец, слои ламбековского пучка локальны [8, предложение 5.4.1].

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что произвольный дополняемый идемпотент $e \in S$ централен. Пусть $h\colon S \to S/\rho$ — естественный гомоморфизм на произвольный пирсовский слой полукольца S. Тогда выполняется равенство $h(e) + h(e^{\perp}) = h(1)$ и одно из слагаемых в левой части — обратимый элемент, являющийся к тому же идемпотентом. Поэтому один из элементов $h(e)$, $h(e^{\perp})$ равен единице, а другой — нулю. Очевидно, что такие элементы центральны в каждом слое, поэтому e — центральный идемпотент.

Пусть пирсовские слои r-полукольца S локальны, и пусть $a + b = 1$. Рассмотрим множество

$$U_a = \{M \in BS\colon \hat{a}(M) \text{ обратим}\}$$

и аналогичным образом определим множество U_b. Так как слои локальны, хотя бы один элемент из пары $\{\hat{a}(M), \hat{b}(M)\}$ обратим для любого $M \in \operatorname{Max} BS$. Для любого $N \in U_a$ найдётся такой элемент $u \in S$, что сечение $\widehat{ua}$ совпадает с единичным сечением на некоторой открытой окрестности U_N точки N. Семейство всех U_N, $N \in U_a$, покрывает U_a, а по способу определения множества U_a получаем, что $\bigcup\{U_N\colon N \in U_a\} = U_a$. Тогда U_a — открытое множество. По той же причине открытым будет U_b. Очевидно, множества U_a и U_b покрывают $\operatorname{Max} BS$. Найдутся такие открыто-замкнутые множества $U(a) \subseteq U_a$ и $U(b) \subseteq U_b$, что $U(a) \cup U(b) = \operatorname{Max} BS$ и $U(a) \cap U(b) = \varnothing$ (см., например, [19, с. 12]). Характеристическое сечение открыто-замкнутого множества $U(a)$ имеет вид $\hat{e}$ для некоторого $e \in BS$ и $e \in aS$. Ясно, что $e^{\perp} \in bS$, и S — заменяемое справа полукольцо. □

Определение 9. Полукольцо S назовём *pf-полукольцом*, если для любых таких $a, b \in S$, что $ab = 0$, существуют такие $x, y \in S$, что $x + y = 1$, $ax = 0$ и $yb = 0$.

В [5, с. 156] под pf-кольцом понимается кольцо, в котором каждый главный правый (или, что равносильно, левый) идеал является плоским. В качестве одной из характеризаций таких колец указано свойство, взятое нами за определение pf-полукольца.

Лемма 6. *Пусть S — pf-полукольцо, ρ — A-регулярная конгруэнция на S. Тогда S/ρ — pf-полукольцо. В частности, произвольный пирсовский слой pf-полукольца является pf-полукольцом.*

Доказательство. Обозначим через $h\colon S \to S/\rho$ естественный эпиморфизм. Пусть $a, b \in S$ таковы, что $h(a)h(b) = 0$. Тогда $ab \equiv 0\ (\rho)$, поэтому $abe^{\perp} = 0$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента $e \in A$. Поскольку S — pf-полукольцо, найдутся такие $x, y \in S$, что $x + y = 1$, $ax = 0$, $ybe^{\perp} = 0$. Поскольку $ee^{\perp} = 0$, то $e \equiv 0\ (\rho)$ и $h(e^{\perp}) = h(1)$. Получаем, что $h(x) + h(y) = h(1)$, $h(a)h(x) = h(0)$, $h(y)h(b) = h(0)$, и S/ρ — pf-полукольцо. $\square$

Предложение 7. *Для r-полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *S — заменяемое справа pf-полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен*;
2) *все пирсовские слои полукольца S — локальные области.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть S — произвольное полукольцо, удовлетворяющее условию 1). Тогда все его пирсовские слои являются локальными полукольцами по предложению 6, а по лемме 6 они являются pf-полукольцами. Пусть $xy = 0$ в произвольном локальном pf-полукольце. Тогда существуют a, b, для которых $a + b = 1$, $xa = 0$, $by = 0$. Ввиду локальности либо a, либо b обратим. В первом случае a является неделителем нуля, поэтому из того, что $xa = 0$, получаем, что $x = 0$. Если обратим b, то $y = 0$. Отсюда вытекает, что каждый пирсовский слой полукольца S является локальной областью.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Локальность пирсовских слоёв обеспечивает заменяемость справа полукольца S по лемме 5 и предложению 6. Если $e \in S$ — дополняемый идемпотент, то в каждом пирсовском слое сечение $\hat{e}$ принимает либо нулевое, либо единичное значение, следовательно, e централен. Покажем, что S — pf-полукольцо. Пусть $xy = 0$, $x, y \in S$. Тогда для соответствующих сечений получаем, что $\hat{x}\hat{y} = \hat{0}$, и отсутствие делителей нуля в слоях приводит к тому, что в каждом слое S/ρ_M либо $\hat{x}(M) = \hat{0}(M)$, либо $\hat{y}(M) = \hat{0}(M)$. Кроме того, носители сечений $\hat{x}$ и $\hat{y}$ не пересекаются: $\operatorname{supp}\hat{x} \cap \operatorname{supp}\hat{y} = \varnothing$, где $\operatorname{supp}\hat{x} = \{M \in \operatorname{Max} BS\colon \hat{x}(M) \neq \hat{0}(M)\}$. Носитель любого глобального сечения пучка является замкнутым множеством, поэтому $V = \operatorname{Max} BS \setminus \operatorname{supp}\hat{x}$ открыто. Поскольку $\operatorname{Max} BS$ — нульмерный компакт, то V является объединением открыто-замкнутых подмножеств V_i, $i \in I$. Семейство $\{V_i\}$, $i \in I$, является покрытием замкнутого подмножества $\operatorname{supp}\hat{y}$, и

ввиду компактности $\operatorname{Max} BS$ можно выбрать открыто-замкнутые множества $V_1, \ldots, V_k \in \{V_i\}$, $i \in I$, такие что $W = V_1 \cup \ldots \cup V_k \supseteq \operatorname{supp} \hat{y}$. Кроме того, $W \subseteq V$, поэтому $W \cap \operatorname{supp} \hat{x} = \varnothing$. Поскольку W открыто-замкнуто, рассмотрим глобальные сечения

$$\varphi = \begin{cases} \hat{0} & \text{на } \operatorname{Max} BS \setminus W, \\ \hat{1} & \text{на } W, \end{cases} \qquad \psi = \begin{cases} \hat{0} & \text{на } W, \\ \hat{1} & \text{на } \operatorname{Max} BS \setminus W. \end{cases}$$

Соответствующие им элементы $a, b \in S$ удовлетворяют свойствам $a + b = 1$, $xa = 0$, $by = 0$, так как $\varphi + \psi = \hat{1}$ и $\varphi(M) = \hat{0}(M)$, $\psi(N) = \hat{0}(N)$ для любых $M \in \operatorname{supp} \hat{x}$, $N \in \operatorname{supp} \hat{y}$. Следовательно, S — pf-полукольцо. □

Полукольцо, в котором ноль — единственный нильпотентный элемент, будем называть *полукольцом без нильпотентных элементов*.

Предложение 8. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов*;
2) *все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть S — полукольцо без нильпотентных элементов. Предположим, что некоторый пирсовский слой S/ρ_M содержит ненулевой нильпотентный элемент, т. е. для некоторого $a \in S$ выполняется $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $\hat{a}^n(M) = \hat{0}(M)$ для подходящего натурального n. Поскольку $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$. Пусть

$$z(\hat{a}^n) = \{N \in \operatorname{Max} BS \colon \hat{a}^n(N) = \hat{0}(N)\} -$$

нуль-множество сечения $\hat{a}^n$. По свойствам пучка $z(\hat{a}^n)$ открыто, кроме того, $M \in z(\hat{a}^n)$, поэтому ввиду нульмерности $\operatorname{Max} BS$ найдётся открыто-замкнутое подмножество $U \subseteq \operatorname{Max} BS$, содержащее точку M. Глобальное сечение

$$\varphi = \begin{cases} \hat{a} & \text{на } U, \\ \hat{0} & \text{на } \operatorname{Max} BS \setminus U \end{cases}$$

является ненулевым нильпотентным элементом полукольца всех глобальных сечений, которое изоморфно S, поэтому и в S нашёлся ненулевой нильпотентный элемент; противоречие показывает, что пирсовские слои — полукольца без нильпотентных элементов.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентных элементов. Предположим, что в S есть нильпотентный элемент $a \neq 0$, такой что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда в некотором пирсовском слое $\hat{a} \neq \hat{0}$ и $\hat{a}^n = \hat{0}$, противоречие. □

Определение 10. Полукольцо S называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c \in S$ $ab = ac$ тогда и только тогда, когда $ba = ca$. Полукольцо S называется *регулярным*, если разрешимо уравнение $axa = a$ для любого $a \in S$. Полукольцо S называется *полукольцом с делением*, если любой ненулевой элемент из S обратим.

Предложение 9. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, каждый идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом*;
2) *все пирсовские слои полукольца S являются полукольцами с делением.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть S удовлетворяет условиям 1) и M, N — различные максимальные идеалы из S. Если $m \in M \setminus N$, то $m = msm$ для некоторого $s \in S$, поэтому ms является идемпотентом, причём по условию — центральным дополняемым идемпотентом. Ясно, что ms разделяет идеалы M и N. По предложению 2 пирсовский и ламбековский пучки полукольца S совпадают. Каждый первичный идеал из S максимален [8, лемма 3.5.3], а слои ламбековского пучка полукольца S — полукольца с делением [8, теорема 5.3.10].

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $a \in S$, $h\colon S \to S/\rho$ — естественный гомоморфизм в произвольный пирсовский слой. Если $h(a) = 0$, то $h(a) = h(a)\bar{b}h(a)$ для произвольного $\bar{b} \in S/\rho$. Если $h(a) \neq 0$, то для $\bar{b} = h(a)^{-1}$ выполнено $h(a) = h(a)\bar{b}h(a)$. По предложению 5 S — регулярное полукольцо. Пусть $ab = ac$ для $a, b, c \in S$. Если $h(a) = 0$, то $h(b)h(a) = h(c)h(a)$. Это равенство выполняется и в случае $h(a) \neq 0$, поскольку тогда $h(b) = h(c)$. Получаем, что $h(b)h(a) = h(c)h(a)$ выполняется в произвольном пирсовском слое, поэтому $ba = ca$ по предложению 5. Очевидным образом выполняется вторая импликация из определения слабой симметричности, и S — слабо симметрическое полукольцо. Наконец, если e — произвольный идемпотент из S, то в каждом пирсовском слое $h(e)$ равен либо нулю, либо единице, поскольку других идемпотентов в полукольцах с делением нет. Очевидно, что e является центральным дополняемым идемпотентом. □

Определение 11. Полукольцо с делением, не являющееся телом, называется *полутелом*. Полукольцо, в котором $a + b = 0$ влечёт $a = 0$, называется *антикольцом*. Полукольцо S называется *положительным*, если элемент $a + 1$ обратим для каждого элемента $a \in S$.

Лемма 7. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *любое полутело является антикольцом*;
2) *S — полутело в точности тогда, когда S — положительное полукольцо с делением.*

Доказательство. Утверждения очевидны. □

Для характеризации полуколец, все пирсовские слои которых являются полутелами, рассмотрим полукольца, названные в [2] булевыми.

Определение 12. Полукольцо S называется *arp-полукольцом*, если S — абелево регулярное положительное полукольцо; arp-полукольцо называется *булевым*, если каждый его идемпотент является дополняемым идемпотентом.

Произвольное agp-полукольцо S является слабо симметрическим [2, теорема 2.2], поэтому булево полукольцо удовлетворяет всем условиям утверждения 1) предложения 9.

Предложение 10. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *S — булево полукольцо*;
2) *все пирсовские слои полукольца S являются полутелами.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пирсовские слои булева полукольца являются полукольцами с делением. Очевидно, фактор-полукольцо положительного полукольца является положительным полукольцом, поэтому по лемме 7 пирсовские слои булева полукольца являются полутелами.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Поскольку полутело является полукольцом с делением, то по предложению 9 S является регулярным слабо симметрическим полукольцом, а каждый идемпотент из S/ρ является центральным дополняемым идемпотентом. Осталось показать, что S — положительное полукольцо. Пусть $a \in S$. Обозначим через $h\colon S \to S/\rho$ естественный гомоморфизм на пирсовский слой S/ρ. Элемент $h(a+1) = h(a) + h(1)$ отличен от нуля (в противном S/ρ является кольцом), поэтому обратим. По предложению 5 $a+1$ обратим. $\square$

Легко понять, что двухэлементная цепь и двухэлементное поле, и только они, являются двухэлементными полукольцами.

Предложение 11. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:

1) *каждый элемент из S является центральным дополняемым идемпотентом*;
2) *все пирсовские слои полукольца S двухэлементные.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть S/ρ_M — пирсовский слой полукольца S и $M \in \operatorname{Max} BS = \operatorname{Max} S$. Для произвольного $e \in M$ имеем $e^{\perp} \notin M$ и $0 = ee^{\perp} = 0e^{\perp}$, поэтому $e \equiv 0\ (\rho_M)$. Если $f \notin M$, то $ff = 1f$ и $f \equiv 1\ (\rho_M)$. Получили, что S/ρ_M двухэлементное.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть s — произвольный элемент из S. Сечение $\hat{s}$ пирсовского пучка совпадает с нулевым сечением на некотором открытом множестве U (возможно, пустым) и с единичным сечением на открытом множестве $V = \operatorname{Max} S \setminus U$. Следовательно, $\operatorname{Max} BS = U \cup V$ — разбиение на открыто-замкнутые множества. Характеристическая функция φ этого разбиения, совпадающая с единичным сечением на U и нулевым на V, является глобальным сечением пучка. Элемент $t \in S$, соответствующий φ, очевидно является центральным элементом полукольца S и дополнением к $s \in S$. $\square$

Следствие 1. *Для полукольца S справедливы следующие утверждения*:

1) *S является булевой алгеброй в точности тогда, когда каждый пирсовский слой S является двухэлементной цепью*;
2) *S является булевым кольцом в точности тогда, когда каждый пирсовский слой S является двухэлементным полем.*

Литература

[1] Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.

[2] Вечтомов Е. М., Михалёв А. В., Чермных В. В. Абелево регулярные положительные полукольца // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1997. — Вып. 20. — С. 282—309.

[3] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[4] Марков Р. В., Чермных В. В. Пирсовские цепи полуколец // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. — 2012. — Вып. 16. — С. 88—103.

[5] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[6] Тюкавкин Д. В. Пирсовские пучки для колец с инволюцией. — М.: МГУ, 1982. — 64 с. — Деп. в ВИНИТИ; № 4346-82 Деп.

[7] Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 5. — С. 185—186.

[8] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, № 3. — С. 111—227.

[9] Burgess W. D., Stephenson W. Pierce sheaves of non-commutative rings // Commun. Algebra. — 1976. — Vol. 39. — P. 512—526.

[10] Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 9. — P. 863—886.

[11] Burgess W. D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local // Can. Math. Bull. — Vol. 22, no. 2. — 1979. — P. 159—164.

[12] Carson A. B. Representation of regular rinds of finite index // J. Algebra. — 1976. — Vol. 39, no. 2. — P. 512—526.

[13] Cignoli R. The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces // Algebra Universalis. — 1978. — Vol. 8, no. 3. — P. 357—373.

[14] Comer S. D. Representation by algebras of sections over Boolean spaces // Pacific. Math. — 1971. — Vol. 38. — P. 29—38.

[15] Cornish W. H. 0-ideals, congruences and sheaf representations of distributive lattices // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 1977. — Vol. 22, no. 8. — P. 200—215.

[16] Dauns J., Hofmann K. H. The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z. — 1966. — Vol. 91, no. 2. — P. 103—123.

[17] Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. — 1993. — Vol. 10, no. 1. — P. 1—11.

[18] Keimel K. The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves // Lectures on the Applications of Sheaves to Ring Theory. — Berlin: Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vol. 248). — P. 2—96.

[19] Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 70. — P. 1—112.

[20] Szeto G. The sheaf representation of near-rings and its applications // Commun. Algebra — 1977. — Vol. 5, no. 7. — P. 773—782.