О многообразиях ассоциативных колец, содержащих конечные кольца, не представимые матрицами над коммутативным кольцом

А. МЕКЕЙ
Монгольский государственный университет, Монголия

УДК 512.552

Ключевые слова: конечное кольцо, кольцо Галуа, конечное кольцо, не представимое матрицами над коммутативным кольцом, почти конечно представимое многообразие колец.

Аннотация

В работе построены бесконечные серии конечных колец $B_v^{(m)}$, где $m \geqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant p-1$, p — простое число, не представимых матрицами (не вложимых в матричные кольца) над коммутативными кольцами, и описаны базисы тождеств этих колец. Показано, что каждое из многообразий $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $m = 2$ или $m-1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, $0 \leqslant v < p$, p — простое число, является минимальным многообразием, содержащим конечное кольцо, не представимое матрицами над коммутативным кольцом. Кроме того, описаны почти конечно представимые многообразия колец, порождающие кольца которых содержат идемпотентные элементы аддитивного порядка p.

Abstract

A. Mekei, Varieties of associative rings containing a finite ring that is nonrepresentable by a matrix ring over a commutative ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 187—206.

In this paper, we give examples of infinite series of finite rings $B_v^{(m)}$, where $m \geqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant p-1$, and p is a prime number, that are not representable by matrix rings over commutative rings, and we describe the basis of polynomial identities of these rings. We prove here that every variety $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, where $m = 2$, or $m-1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, and $p \geqslant 3$, or $p = 2$, $m \geqslant 3$, $0 \leqslant v < p$, and p is a prime number, is a minimal variety containing a finite ring that is nonrepresentable by a matrix ring over a commutative ring. Therefore, we describe almost finitely representable varieties of rings whose generating ring contains an idempotent element of additive order p.

1. Введение

В работе рассматриваются только ассоциативные кольца. Известно, что существуют конечно порождённые алгебры над бесконечным полем, не вложимые

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 187—206.

в алгебру матриц над коммутативной алгеброй [13, с. 215]. В [2,3] описаны локально представимые многообразия алгебр над полем характеристики 0. В [7] доказано, что многообразие, определённое тождеством $x[y,z]u = 0$, является единственным минимальным нелокально представимым многообразием алгебр над полем характеристики 0. Таким образом, вопрос о представлении матрицами над коммутативными алгебрами конечно порождённых PI-алгебр над полем характеристики 0 решён на языке многообразий алгебр. В [11] Дж. Бергман показал, что конечное кольцо $B_{21} = \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p)$, где p — простое число, а $\mathbb{Z}_{p^2}$ и $\mathbb{Z}_p$ — циклические абелевы группы порядков p^2 и p соответственно, не может быть вложено в кольцо матриц над коммутативным кольцом. В [6, 12] доказано, что произвольное нильпотентное K-операторное кольцо представимо матрицами над коммутативной K-алгеброй. В частности в [12] показано, что конечные нильпотентные кольца представимы матрицами над коммутативными кольцами.

Если все конечные кольца некоторого многообразия колец представимы матрицами над коммутативными кольцами, то такое многообразие будем называть *конечно представимым многообразием колец*.

Следующая задача до сих пор не решена и представляет несомненный интерес: описать многообразия колец, все конечные кольца которых представимы матрицами над коммутативными кольцами [8]. В [8] отмечено, что ответом на этот вопрос будет служить описание кроссовых многообразий колец $\mathfrak{M}$, минимальных относительно следующего свойства: существует конечное кольцо в $\mathfrak{M}$, не представимое матрицами над коммутативным кольцом. Такое минимальное многообразие колец будем называть *минимальным конечно не представимым многообразием* или *почти конечно представимым многообразием* колец.

В настоящей работе изучаются почти конечно представимые многообразия ассоциативных колец. Приведём некоторые результаты из [8]. В [8] доказано, что $\mathrm{var}\, B_{21}$ является почти конечно представимым многообразием колец. Построены серии конечных колец вида

$$\begin{aligned} B^{(m)} = \langle e, a, b, c \mid\, & pe = pa = pb = p^2c = 0,\ c^{m+1} = 0,\ pc^2 = 0,\ pc \neq 0, \\ & c^m = pc,\ m \geqslant 2,\ ae = a,\ ea = 0,\ be = 0,\ eb = b, \\ & bB^{(m)} = 0,\ B^{(m)}a = 0,\ ec = ce = 0,\ ab = pc,\ ac = 0,\ cb = 0\rangle, \end{aligned}$$

такие, что каждое из многообразий $\mathrm{var}\, B^{(m)}$, где $m = 2$ или $m - 1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, p — простое число, является почти представимым многообразием. В [1] Ю. Н. Мальцевым поставлен следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных колец. Верно ли, что каждое конечное кольцо из $\mathfrak{M}$ вложимо в кольцо матриц над коммутативным кольцом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \not\ni B_{21}$, $\mathfrak{M} \not\ni B^{(m)}$, где $m = 2$ или $m = (p-1)k + 1$. Этот вопрос равносилен вопросу, существуют ли, кроме $\mathrm{var}\, B_{21}$, $\mathrm{var}\, B^{(2)}$ и $\mathrm{var}\, B^{(m)}$, где $m = (p-1)k + 1$, другие почти конечно представимые многообразия колец. Отметим также, что в [8] существенную роль играли две следующие $GF(p)$-алгебры:

$$A_4 = \langle 1, e, a, b \mid 1 = e + f,\ p \cdot 1 = pf = pe = pa = pb = 0,\ ea = 0,\ ae = a,$$
$$af = 0,\ fa = a,\ bf = b,\ fb = 0,\ eb = b,\ be = 0,\ ab \neq 0,\ ba = 0,\ a^2 = b^2 = 0,$$
$$f^2 = f,\ e^2 = e,\ 1 \text{ — единица алгебры}\rangle$$

и

$$A_5 = \langle e, a, b \mid pe = pb = pa = 0,\ e^2 = e,\ a^2 = b^2 = 0,$$
$$ab \neq 0,\ ba = 0,\ ae = a,\ ea = 0,\ be = 0,\ eb = b\rangle;$$

$A_5 \in \operatorname{var} B^{(m)}$, $A_4 \in \operatorname{var} B_{21}$.

В разделе 2 настоящей работы приводится бесконечная серия конечных некритических колец $B_v^{(m)}$, где $m \geqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant p-1$, p — простое число, каждое из которых не представимо матрицами над коммутативным кольцом. Доказано, что каждое из многообразий колец $\operatorname{var} B_0^{(1)}$ и $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $m = 2$ или $m - 1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, является почти представимым многообразием. Если же $p - 1 \nmid m - 1$, $p \geqslant 3$, то $\operatorname{var} B_v^{(m)} \supset \operatorname{var} B_1^{(2)}$ и $\operatorname{var} B_v^{(m)}$ не является почти конечно представимым многообразием. Заметим, что при $v = 0, 1$ $\operatorname{var} B_0^{(2)}$ и $\operatorname{var} B_1^{(m)}$ совпадают соответственно с многообразиями $\operatorname{var} B_0^{(1)} = \operatorname{var} S = \operatorname{var} B^{(2)}$ и $\operatorname{var} B_1^{(m)} = \operatorname{var} B^{(m)}$ из [8]. Многообразия колец $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $1 < v \leqslant p-1$, p — простое число, дают отрицательный ответ на приведённый выше вопрос, поставленный Ю. Н. Мальцевым в [1].

В разделе 3 настоящей работы доказана одна из основных теорем (теорема 2), приводится конструкция колец $B_v^{(m)}$. Показано также, что почти конечно представимое многообразие колец, содержащее алгебру A_4, единственное, оно совпадает с $\operatorname{var} B_{21}$.

В разделе 4 доказаны результаты, дающие описание почти представимых многообразий колец, порождающие кольца которых содержат идемпотент, аддитивный порядок которых равен простому числу p (теоремы 3 4).

Введём некоторые обозначения и определения. Пусть R — ассоциативное кольцо. Обозначим через $J(R)$, $[R, R]$, $Z(R)$, $T(R)$ соответственно радикал Джекобсона, коммутаторный идеал, центр и идеал тождеств кольца R, $GF(p^n)$ — конечное поле порядка p^n. Обозначим через $GR(n, r)$ кольцо Галуа $\mathbb{Z}[x]/\bigl(p^n, f(x)\bigr)$, где p — простое число, n — натуральное число, $\deg f = r$, $f(x)$ — неприводимый унитарный многочлен по модулю p из $\mathbb{Z}[x]$. Пусть $\mathbb{Z}\langle X\rangle = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots >$ — свободное ассоциативное кольцо и $f_1, f_2, \ldots$ — элементы этого кольца. Обозначим через $\{f_1, f_2, \ldots\}^T$ вполне характеристический идеал (или T-идеал), порождённый этими элементами. Если $a, b, c, \ldots \in R$, то подкольцо, порождённое этими элементами, обозначим через $\langle a, b, c, \ldots\rangle$. Через $\operatorname{var}\langle f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_k = 0, \ldots\rangle$ обозначим многообразие колец, определённое тождествами $f_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Многообразия ассоциативных колец будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$. Через $T(\mathfrak{N})$ будем обозначать также идеал тождеств многообразия колец $\mathfrak{N}$.

Обозначим через M сердцевину подпрямо неразложимого кольца R. Наименьшее натуральное число m, такое что $mx \in T(\mathfrak{N})$ (если оно существует), назовём экспонентой многообразия $\mathfrak{N}$. Если существует наименьшее натуральное число m, такое что $mx \in T(R)$, то назовём $m = \operatorname{char} R$ характеристикой кольца R. Это означает, что $mx = 0$ — тождество в R, но $kx = 0$, где $1 \leqslant k < m$, не являются тождествами в R. Характеристика элемента a кольца R — это аддитивный порядок элемента a в $\langle R, +\rangle$. Пусть R — конечное кольцо. Кольцо вида A/B, где A — подкольцо кольца R, B — идеал кольца A, называется *фактором* кольца R. Фактор A/B называется *собственным фактором* кольца R, если $A = R$ и $B \neq 0$, или $A \subsetneqq R$. Конечное кольцо R называется *критическим*, если оно не принадлежит многообразию колец, порождённому всеми собственными факторами [5].

2. О кольцах $B_v^{(m)}$

Рассмотрим кольца $B_v^{(m)}$, где $0 \leqslant v \leqslant p-1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, p — простое число, определяемые следующим образом:

$$B_0^{(1)} = \langle e, a, b, c \mid ea = be = 0,\ eb = b,\ ae = a,\ pe = pa = pb = p^2c = 0,$$
$$pc \neq 0,\ e^2 = e,\ a^2 = b^2 = ba = 0,\ ab = pc,\ c^2 = 0,\ c\langle e, a, b\rangle = \langle e, a, b\rangle c = 0\rangle,$$

где $\langle e, a, b\rangle$ — подкольцо, порождённое элементами e, a, b;

$$B_v^{(m)} = \langle e, a, b, c \mid pe = pa = pb = p^2c = 0,\ pc \neq 0,\ ea = be = 0,\ ae = a,\ eb = b,$$
$$c\langle e, a, b\rangle = \langle e, a, b\rangle c = 0,\ ab = pc,\ ba = 0,\ c^m = pvc,\ \text{где } 1 \leqslant v \leqslant p-1,$$
$$m \geqslant 2,\ p \text{ — простое число},\ c^{m+1} = 0,\ pc^2 = 0,\ a^2 = b^2 = 0,\ e^2 = e\rangle.$$

Как будет ясно из дальнейшего, существует определённая зависимость между простым числом p и числом m при $m \geqslant 2$. Заметим, что $B_v^{(m)}$ — конечное кольцо и $\operatorname{char} B_v^{(m)} = p^2$, $\operatorname{char}(e) = p$. Заметим также, что кольцо $B_0^{(1)}$ совпадает с кольцом S [8, с. 400] и при $v = 1$, $m \geqslant 2$ кольцо $B_1^{(m)}$ совпадает с кольцом $B^{(m)}$ [8, с. 398, 400], т. е. $B_0^{(1)} = S$ и $B_1^{(m)} = B^{(m)}$, $m \geqslant 2$.

Легко убедиться, что любой элемент $x \in B_v^{(m)}$ имеет единственное представление в виде

$$x = \gamma e + \alpha a + \beta b + \delta c + c^2\varphi(c), \tag{1}$$

где $0 \leqslant \gamma, \alpha, \beta \leqslant p-1$, $0 \leqslant \delta \leqslant p^2 - 1$, $\varphi(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$, $\deg \varphi(t) \leqslant m-3$.

Следующие леммы 1—3 (для кольца $B_v^{(m)}$) доказываются аналогично леммам 1—3 из работы [8] соответственно.

Лемма 1. $B_v^{(m)}$ *— подпрямо неразложимое кольцо с сердцевиной* $\langle pc\rangle$.

Лемма 2. $B_v^{(m)}$ *— некритическое кольцо.*

Лемма 3. *$B_v^{(m)}$ не вкладывается в кольцо матриц над коммутативным кольцом.*

Лемма 4.

1. *Если $m = (p-1)k + 1$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ либо $p = 2$, $m \geqslant 3$, то в кольце $B_v^{(m)}$ выполняются следующие тождества:*

$$\begin{aligned} p^2x = pxy = 0, \quad & z(x_1 - x_1^p)(x_2 - x_2^p)\cdots(x_m - x_m^p) = \\ &= (x_1 - x_1^p)z(x_2 - x_2^p)\cdots(x_m - x_m^p) = \\ &= (x_1 - x_1^p)(x_2 - x_2^p)\cdot z\cdots(x_m - x_m^p) = \ldots = \\ &= (x_1 - x_1^p)(x_2 - x_2^p)\cdots(x_m - x_m^p)z = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1[x_2, x_3]x_4 = 0, \tag{3}$$

$$x_1x_2\cdots x_t(y - y^p)x_{t+1}\cdots x_m = 0, \text{ where } 1 \leqslant t \leqslant m-1, \tag{4}$$

$$[x_1 - x_1^p, x_2 - x_2^p]x_3 = x_3[x_1 - x_1^p, x_2 - x_2^p] = 0, \tag{5}$$

$$(x - x^p)^m = pvx, \tag{6}$$

где $1 \leqslant v \leqslant p-1$, p — простое число.

2. *Если $m = 2$, $p = 2$, или $m = 1$, или $(p-1) \nmid (m-1)$, $p \geqslant 3$, то тождество вида (6) не выполняется в кольцах $B_0^{(1)}$, $B_1^{(2)}$, $B_v^{(m)}$.*

3. *Если $m = 2$, то кольцо $B_v^{(m)}$ не удовлетворяет тождеству*

$$(x - x^p)z(y - y^p) = 0.$$

Доказательство. Справедливость тождеств (2)—(5) в кольце $B_v^{(m)}$ устанавливается аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 4 из работы [8].

Проверим выполнимость в $B_v^{(m)}$ тождества (6). Для любого элемента $x \in B_v^{(m)}$ вида (1) прямым вычислением можно показать, что

$$x - x^p = \begin{cases} \delta c + c^2\varphi(c), & \text{если } \gamma \neq 0, \\ \alpha a + \beta b + \delta c + c^2\varphi(c), & \text{если } \gamma = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из (1) следует, что

$$px = p\delta c = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid \delta, \\ p\delta c, & \text{если } (\delta, p) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Если $m \geqslant 3$, то из (7) следует, что

$$(x - x^p)^m = \delta^m c^m = \delta^m pvc = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid \delta, \\ \delta^m pvc, & \text{если } (p, \delta) = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, если $p \mid \delta$, то из (8) и (9) следует, что $pvx = (x - x^p)^m = 0$. Если $(\delta, p) = 1$, то из (9) и (8) выводим, что

$$(x - x^p)^m = \delta^{m-1}v(\delta pc) = \delta^{m-1}pvx. \tag{10}$$

Равенство (10) является тождестом, если $\delta^{m-1} \equiv 1 \pmod p$. Это будет так, если только $m-1=(p-1)k$, где $k \geqslant 1$, согласно теореме Ферма. Следовательно, кольцо $B_v^{(m)}$ удовлетворяет тождеству $(x-x^p)^m = pvx$, если $m-1=(p-1)k$, $k \geqslant 1$, или $p=2$, $m \geqslant 3$.

Если $m=2$, $p=2$, то кольцо $B_1^{(2)}$ не удовлетворяет тождеству (6). Действительно, если $x=a+b \in B_1^{(2)}$, то $x^2=pc$ и $(x-x^2)^2=(a+b-pc)^2= = ab = pc \neq pv(a+b)$. Для кольца $B_0^{(1)}$ рассуждения анологичны. Если $m-1 \neq (p-1)k$, $p \geqslant 3$, то кольцо $B_v^{(m)}$ не удовлетворяет тождеству (6), так как в (10) $\delta^{m-1} \neq 1 \pmod p$ при $\delta \neq 1$. В частности, это же верно, если $m=2$, $p \geqslant 3$.

Утверждение 3 леммы 4 проверяется непосредственно с использованием (1) и (7). □

Следствие 1. *Кольцо $B_v^{(2)}$ удовлетворяет следующим тождествам*: $p^2x=0$, $pxy=0$, $x[y,z]u=0$, $x(y-y^p)z=0$.

Утверждение следует из леммы 4.

Следствие 2. *Если $m \neq 2$, $(p-1) \nmid (m-1)$ и $p \geqslant 3$, то* $\operatorname{var} B_v^{(m)} \supseteq \operatorname{var} B_v^{(2)}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_v^{(m)}$ многообразие колец, удовлетворяющих тождествам (2)—(6). Если $p \geqslant 3$, $m-1=(p-1)k$, $k \geqslant 1$, или $p=2$, $m \geqslant 3$, то радикал $J(B_v^{(m)})$ кольца $B_v^{(m)}$ удовлетворяет тождествам $p^2x=pxy=0$, $[x,y]z= = z[x,y]=0$, $pvx-x^m=0$, $x_1x_2\cdots x_{m+1}=0$ согласно лемме 4. Заметим, что в любом нильпотентном кольце R из многообразия $\mathfrak{M}_v^{(m)}$ тоже выполняются эти тождества. Через $\mathfrak{N}_v^{(m)}$ обозначим многообразие

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_v^{(m)} = \operatorname{var}\langle p^2x = pxy = [x,y]z = z[x,y] = 0,\ pvx - x^m = 0,\\ x_1x_2\cdots x_{m+1} = 0,\ \text{где } 1 \leqslant v \leqslant p-1,\ p \geqslant 3,\ m-1=(p-1)k,\ k \geqslant 1\\ \text{или } p=2,\ m \geqslant 3,\ p \text{ — простое число}\rangle.\end{aligned}$$

Лемма 5. $\operatorname{var} J(B_v^{(m)}) = \mathfrak{N}_v^{(m)}$.

Доказательство. Пусть $R = J(R), J(B_v^{(m)}) \in \mathfrak{M}_v^{(m)}$. Тогда ясно, что $R, J(B_v^{(m)}) \in \mathfrak{N}_v^{(m)}$. Следовательно, $\operatorname{var} J(B_v^{(m)}) \subseteq \mathfrak{N}_v^{(m)}$. Покажем, что $\mathfrak{N}_v^{(m)} \subseteq \operatorname{var} J(B_v^{(m)})$. Предположим противное. Тогда существует тождество $f(x_1,x_2,\ldots,x_d)=0$, существенно зависящее от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_d$, такое что $f(x_1,x_2,\ldots,x_d) \in T\big(J(B_v^{(m)})\big) \setminus T(\mathfrak{N}_v^{(m)})$.

Если $d=1$, то $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m \pmod{T(\mathfrak{N}_v^{(m)})},$$

где $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant p^2-1$, $0 \leqslant \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m \leqslant p-1$. Если $(\alpha_1,p)=1$, то получаем противоречие с тем, что $\operatorname{char} J(B_v^{(m)}) = p^2$. Пусть $(\alpha_1,p)=p$. Если существует $\alpha_j \neq 0$, $1<j<m$, то, рассуждая как в доказательстве леммы 5 из [8],

получаем, что $f(x) \in T(\mathfrak{N}_v^{(m)})$. Пусть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_m x^m \pmod{T(\mathfrak{N}_v^{(m)})}, \tag{11}$$

где $p \mid \alpha_1$, и $J(B_v^{(m)})$ — ненулевое радикальное кольцо. Ясно, что $(\alpha_m, p) = 1$ и $\alpha_1 = p\beta$, где $(\beta, p) = 1$. Тогда сравнение (11) эквивалентно

$$\varphi(x) = p\beta x + x^m \pmod{T(\mathfrak{N}_v^{(m)})}, \tag{12}$$

где $1 \leqslant \beta \leqslant p-1$. Кроме того, $J(B_v^{(m)})$ удовлетворяет тождеству

$$pvx - x^m = 0, \text{ где } 1 \leqslant v \leqslant p-1. \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) получаем тождество

$$p(\beta + v)x = 0. \tag{14}$$

Отсюда следует, что $\beta + v = p$ и $\varphi(x) = -pvx + x^m \pmod{T(\mathfrak{N}_v^{(m)})}$, т. е. $f(x) = 0$ является следствием тождества (13). Поэтому $f(x) \in T(\mathfrak{N}_v^{(m)})$.

Пусть $d = 2$. Тогда, рассуждая аналогично [8, с. 399], можно показать, что $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i,j \leqslant m-1,\\ i+j \leqslant m}} \alpha_{ij} x^i y^j,$$

где $1 \leqslant \alpha_{ij} \leqslant p-1$. Выполняя подстановки $x \to \lambda x$, $y \to \mu y$, где $1 \leqslant \lambda$, $\mu \leqslant p-1$, и используя определитель Вандермонда, получим, что $J(B_v^{(m)})$ удовлетворяет тождеству $x^m = 0$. Противоречие.

Если $d \geqslant 3$, то рассуждения аналогичны. Значит, $\operatorname{var} J(B_v^{(m)}) = \mathfrak{N}_v^{(m)}$. □

Предложение 1. *Если $m = (p-1)k + 1$, $p \geqslant 3$, $k \geqslant 1$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$, p — простое число, то $\mathfrak{M}_v^{(m)} = \operatorname{var} B_v^{(m)}$.*

Доказательство. Согласно лемме 4 $B_v^{(m)} \in \mathfrak{M}_v^{(m)}$. Поэтому $\operatorname{var} B_v^{(m)} \subseteq \mathfrak{M}_v^{(m)}$. Кроссово многообразие $\mathfrak{M}_v^{(m)}$ порождается своими критическими кольцами, поэтому для доказательства включение $\mathfrak{M}_v^{(m)} \subseteq \operatorname{var} B_v^{(m)}$ достаточно показать, что все конечные критические кольца из $\mathfrak{M}_v^{(m)}$ содержатся в $\operatorname{var} B_v^{(m)}$. Пусть R — конечное критическое кольцо из $\mathfrak{M}_v^{(m)}$.

Если $R \ni 1$, то в силу тождеств (4)

$$R \cong GF(p) \in \operatorname{var} B_v^{(m)}.$$

Если $R = J(R)$ — радикальное кольцо, то в силу леммы 5 $R \in \operatorname{var} B_v^{(m)}$. Пусть $R \neq J(R) \neq 0$ и R — кольцо, не содержащее единицу. Тогда, используя пирсовское разложение и критерии некритичности кольца [4; 8, с. 384], а также рассуждения, аналогичные приведённым при доказательстве предложения 1 работы [8], можно доказать, что

$$R \cong \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$R \cong \begin{pmatrix} GF(p) & 0 \\ GF(p) & 0 \end{pmatrix},$$

и следовательно, $R \in \operatorname{var} B_v^{(m)}$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 2. *Пусть R — подпрямо неразложимое кольцо из $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $m = (p-1)k+1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$. Тогда либо $\operatorname{var} R = \operatorname{var} B_v^{(m)}$, либо R представимо матрицами над коммутативным кольцом.*

Доказательство. Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 2 из [8]. Однако для полноты изложения мы приведём подробное доказательство. Ввиду вышеприведённых рассуждений достаточно рассмотреть случай, когда $R \neq J(R) \neq 0$, $\operatorname{char} R = p^2$ и R — кольцо без единицы. Пусть $e = e^2$ — идемпотент кольца R, являющийся прообразом единицы фактор-кольца $R/J(R)$. Ясно, что $\operatorname{char}\langle e\rangle = p$. Рассмотрим пирсовское разложение кольца R относительно этого идемпотента e:

$$R = eRe \dotplus (1-e)Re \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)R(1-e). \tag{15}$$

Заметим, что $\big((1-e)Re\big)^2 = \big(eR(1-e)\big)^2 = 0$ и $(1-e)Re \neq 0$ и $eR(1-e) \neq 0$ ввиду подпрямой неразложимости кольца R. Легко убедиться, что $pR = (1-e)pR(1-e) \subseteq M = \operatorname{Ann}_{J(R)} J(R)$, где M — сердцевина кольца R. Из тождества $x[y,z]u = 0$ следует, что $eR(1-e)R = R(1-e)Re = 0$. Имеем, что $I = (1-e)Re \cdot eR(1-e) = (1-e)ReR(1-e) \neq 0$, так как если $I = 0$, то $(1-e)Re$ и $eR(1-e)$ — ненулевые идеалы, имеющие нулевое пересечение, что противоречит подпрямой неразложимости кольца R. Из $IR = RI = 0$ следует, что $I = pR = M$. Пусть $a \in (1-e)Re$, $b \in eR(1-e)$ — такие элементы, что $ab = pc \neq 0$, где $c \in (1-e)R(1-e)$ и $ba = 0$. Тогда для некоторого целого числа t справедливо равенство $c^t = p\lambda c \neq 0$, $1 \leqslant \lambda \leqslant p-1$, $c^{t+1} = 0$. По лемме 4 для элемента c справедливы также равенства $c^m = pvc$ и $c^{m+1} = 0$. Покажем, что $t = m$. Предположим противное. Пусть $t < m$. Тогда существует целое μ, такое что $\lambda\mu = v$, $1 \leqslant \mu \leqslant p-1$. Следовательно, $\mu c^t = c^m$ или $\mu c^t(1-\mu^{-1}c^{m-t}) = 0$. Так как c — нильпотентный элемент, то $c^t = 0$. Это противоречит условию $p\lambda c \neq 0$. Если $t > m$, то аналогичным рассуждением получаем противоречие. Следовательно, $t = m$, $v = \lambda$. Рассмотрим подкольцо

$$\begin{aligned} &\langle e,a,b,c \mid e^2 = e,\ a^2 = b^2 = 0,\ p^2c = 0,\ c^m = pvc,\ 1 \leqslant v \leqslant p-1, \\ &\quad c^{m+1} = 0,\ pc^2 = \ldots = pc^m = 0,\ ab \neq 0,\ ba = 0,\ ea = 0,\ ae = a, \\ &\quad be = 0,\ eb = b, \text{ где } m = (p-1)k+1,\ p \geqslant 3 \text{ или } m \geqslant 3 \text{ при } p = 2\rangle, \end{aligned}$$

Это кольцо совпадает с кольцом $B_v^{(m)}$, и $\operatorname{var} R = \operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $m-1 = (p-1)k$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$. $\square$

Предложение 3.

1. *Если $m = 2$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m = 2$, то $\operatorname{var} B_v^{(2)}$ и $\operatorname{var} B_1^{(2)}$ являются почти конечно представимыми многообразиями колец.*

2. *Если $m \neq 2$ и $m-1 \neq (p-1)k$, $p \geqslant 3$, то $\operatorname{var} B_v^{(m)}$ не является почти конечно представимым многообразием, однако содержит конечное кольцо, почти конечно представимое матрицами над конечным кольцом.*

Доказательство. Если $m = 2$, $p = 2$, то из соотношений $c^2 = pvc \neq 0$, $0 \leqslant v \leqslant p-1$ в кольце $B_v^{(2)}$ следует, что $v = 1$. Следовательно, $B_v^{(2)} = B_1^{(2)} = B^{(2)}$, где $B^{(2)}$ — кольцо, определённое в [8]. Если $m = 2$, $p \geqslant 3$, то из соотношений $ab = pc \neq 0$, $c^2 = pvc \neq 0$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$, между образующими элементами в кольце $B_v^{(2)}$ легко следует, что $B_v^{(2)}$ порождается элементами $e = e_1$, $a_1 = a$, $b_1 = v^{-1}b_1$, $c_1 = v^{-1}c$, между которыми имеют место соотношения $e_1^2 = e_1$, $e_1a_1 = b_1e_1 = 0$, $a_1e_1 = a_1$, $e_1b_1 = b_1$, $b_1a_1 = 0$, $a_1b_1 = pc_1 \neq 0$, $c_1^2 = pc_1 \neq 0$, $c_1\langle e_1, a_1, b_1\rangle = \langle e_1, a_1, b_1\rangle c_1 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} B_v^{(2)} = B_1^{(2)} = \langle e_1, a_1, b_1, c_1 \mid e_1^2 = e_1,\ a_1^2 = b_1^2 = 0,\ pe_1 = pa_1 = pb_1 = p^2c_1 = 0,\\ pc_1 \neq 0,\ e_1a_1 = 0,\ a_1e_1 = 0,\ a_1e_1 = a_1,\ e_1b_1 = b_1,\ b_1e_1 = 0,\\ a_1b_1 = pc_1,\ b_1a_1 = 0,\ c_1\langle e_1, a_1, b_1\rangle = \langle e_1, a_1, b_1\rangle c = 0,\ c_1^2 = pc_1,\ c_1^3 = 0\rangle \end{aligned}$$

и $B_1^{(2)} \cong B^{(2)}$. В этом случае многообразия колец $\operatorname{var} B_v^{(2)}$ и $\operatorname{var} B_1^{(2)}$ совпадают с многообразием $\operatorname{var} B^{(2)}$. В [8] показано, что идеал тождеств многообразия $\operatorname{var} B^{(2)}$ равен $\{p^2x,\ pxy,\ x[y,z]u,\ x(y-y^p)z\}^T$. Также доказано, что $\operatorname{var} B^{(2)}$ — почти конечно представимое многообразие (см. [8, предложение 3]).

Пусть $m \neq 2$ и $m-1 \neq (p-1)k$, $p \geqslant 3$. Тогда согласно лемме 4 кольцо $B_v^{(m)}$ не удовлетворяет тождеству (6) и

$$T(B_v^{(m)}) \subsetneqq T(B^{(2)}) = \{p^2x,\ pxy,\ x[y,z]u,\ x(y-y^p)z\}^T,$$

$\operatorname{var} B^{(2)}$ — почти конечно представимое многообразие. Поэтому $\operatorname{var} B_v^{(m)}$ не является почти конечно представимым многообразием. □

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\operatorname{var} B_v^{(m)}$ — почти конечно представимое многообразие колец;*
2) *$m = 2$ или $m-1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $m \geqslant 3$, $p = 2$.*

Доказательство. Если $m = 2$, то утверждение следует из предложения 3. Если $m-1 = (p-1)k$, $p \geqslant 3$ или $m \geqslant 3$, $p = 2$, то доказательство утверждения следует из предложения 2. □

3. Доказательство основного результата

Теорема 2. *Если многообразие ассоциативных колец $\mathfrak{M}$ содержит алгебру A_5 и в $\mathfrak{M}$ существует кольцо R, содержащее такой элемент c, что $p^kc = 0$, $pc \neq 0$ и $c^m \neq 0$, $c^{m+1} = 0$, где $k \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, то $\mathfrak{M}$ содержит подмногообразие вида $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, являющееся почти конечно представимым многообразием, где $m = 1, 2$ или $m-1 = (p-1)t$, $t \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, $0 \leqslant v \leqslant p-1$, p — простое число.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $k = 2$, так как если $k > 2$, то, полагая $c' = p^{k-2}c \neq 0$, получаем, что $pc' \neq 0$, $p^2c' = 0$ и для некоторого целого числа $d \geqslant 1$ справедливо $(c')^d \neq 0$, $(c')^{d+1} = 0$. Итак, мы можем считать, что $k = 2$. Возможны два случая:

а) $p^2c = 0$, $pc \neq 0$, $c^2 = 0$, $m = 1$;

б) $p^2c = 0$, $pc \neq 0$, $c^m \neq 0$, $c^{m+1} = 0$, $m \geqslant 2$.

Рассмотрим случай а). Пусть $A = A_5 \oplus C$, где $C = \langle c\rangle$. Кольцо A порождается элементами $e_1 = (e, 0)$, $a_1 = (a, 0)$, $b_1 = (b, 0)$ и $c_1 = (0, c)$, где e, a, b — порожадающие элементы алгебры A_5 и c — порождающий элемент кольца C. Тогда

$$A = \langle e_1, a_1, b_1, c_1 \mid e_1a_1 = b_1e_1 = 0,\ a_1e_1 = a_1,\ e_1b_1 = b_1,\ a_1b_1 = (h, 0) \neq (0, 0),$$
$$\text{где } h \in A_5,\ b_1a_1 = 0,\ c_1^2 = 0,\ c_1\langle e_1, a_1, b_1\rangle = \langle e_1, a_1, b_1\rangle c_1 = 0,$$
$$p^2c_1 = 0,\ pc_1 \neq 0,\ pe_1 = pa_1 = pb_1 = 0,\ a_1^2 = b_1^2 = 0,\ e_1^2 = e_1\rangle.$$

В кольце A рассмотрим идеал $I = (x)$, порождённый элементом $x = a_1b_1 - pc_1$. Заметим, что $x^2 = 0$, $px = 0$, $xA = Ax = 0$.

Рассмотрим фактор-кольцо $B_0^{(1)} = A/I$; образы образующих элементов e_1, a_1, b_1 и c_1 соответственно обозначим через $\bar{e}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, опуская индексы. Тогда

$$B_0^{(1)} = \langle \bar{e}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \mid \bar{e}\bar{a} = \bar{b}\bar{e} = 0,\ \bar{e}\bar{b} = \bar{b},\ \bar{a}\bar{e} = \bar{a},\ p\bar{e} = p\bar{a} = p\bar{b} = p^2\bar{c} = 0,$$
$$p\bar{c} \neq 0,\ \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{b}\bar{a} = 0,\ \bar{a}\bar{b} = p\bar{c},\ \bar{c}^2 = 0,\ \bar{c}\langle \bar{e}, \bar{a}, \bar{b}\rangle = \langle \bar{e}, \bar{a}, \bar{b}\rangle\bar{c} = 0\rangle.$$

Кольцо $B_0^{(1)}$ совпадает с кольцом S из леммы 6 работы [8]. В [8] доказано, что $\operatorname{var} S = \operatorname{var} B^{(2)}$. Ясно, что $\operatorname{var} S = \operatorname{var} B_0^{(1)} \subseteq \mathfrak{M}$, и поэтому $\mathfrak{M}$ содержит минимальное конечно невложимое подмногообразие $\operatorname{var} B^{(2)} = \operatorname{var} B_0^{(1)} = \operatorname{var} S$ (в силу предложения 3 из [8]).

Рассмотрим случай б). Из условий $p^2c = 0$, $pc \neq 0$ могут не следовать соотношения
$$p^2c = pc^3 = \ldots = pc^m = 0.$$
В самом деле, может оказаться, что $pc^2 \neq 0$, $p^2c^2 = 0$. Если $pc^2 \neq 0$, $p^2c^2 = 0$, то рассмотрим идеал $H = (pc^2)$ в кольце $C = \langle c\rangle$. Покажем, что $pc^k \in H$, где $k \geqslant 2$ и $pc \notin H$. Предположим противное, $pc \in H$. Тогда
$$pc = \mu_2pc^2 + \mu_3pc^3 + \ldots + \mu_mpc^m, \tag{16}$$
где $0 \leqslant \mu_i \leqslant p - 1$, $i = 2, 3, \ldots, m$. Так как c и pc — нильпотентные элементы, то из (16) следует, что $pc = 0$. Это противороечит условию, что $pc \neq 0$. Рассмотрим фактор-кольцо $\bar{C} = C/H = \langle \bar{c}\rangle$. Тогда в $\bar{C}$ выполняются соотношения $p\bar{c} \neq 0$, $p^2\bar{c} = 0$, $\bar{c}^m \neq 0$, $\bar{c}^{m+1} = 0$, $p\bar{c}^k = 0$, где $2 \leqslant k \leqslant m$. Следовательно, можно предполагать, что в кольце C справедливы соотношения
$$pc \neq 0,\quad p^2c = 0,\quad c^m \neq 0,\quad c^{m+1} = 0,\quad pc^k = 0,\quad 2 \leqslant k \leqslant m,\quad m \geqslant 2, \tag{17}$$
заменяя кольцо C на кольцо $\bar{C}$, если необходимо.

Заметим, что pc, $c^m \in \operatorname{Ann} C = \{x \in C \mid Cx = xC = 0\}$, так как ввиду (17) любой элемент $x \in C$ может быть записан в виде $x = v_1 c + v_2 c^2 + \ldots + v_m c^m$, где $0 \leqslant v_i \leqslant p-1$, $i = 2, 3, \ldots, m$.

Далее, если $c^m \neq pvc$, где $1 \leqslant v \leqslant p-1$, то заменим кольцо C на кольцо C/K, где K — идеал, порождённый элементом $x = c^m - pvc$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$. Поэтому мы можем считать, что кольцо C имеет вид

$$C = \langle c \mid pc \neq 0,\ p^2c = 0,\ c^m = pvc \neq 0,\ 1 \leqslant v \leqslant p-1,\\ c^{m+1} = 0,\ pc^k = 0,\ 2 \leqslant k \leqslant m\rangle.$$

Заметим, что кольцо C является подпрямо неразложимым с сердцевиной $\langle pc\rangle \subseteq$ $\subseteq \operatorname{Ann} C$.

Рассмотрим прямую сумму $A = A_5 \oplus C$. Кольцо A порождаются элементами $e_1 = (e, 0)$, $a_1 = (a, 0)$, $b_1 = (b, 0)$ и $c_1 = (0, c)$, т. е.

$$A = \langle e_1, a_1, b_1, c_1 \mid pe_1 = pa_1 = pb_1 = p^2c_1 = 0,\ e_1a_1 = b_1e_1 = 0,\\ a_1e_1 = a_1,\ e_1b_1 = b_1,\ c_1\langle a_1, b_1, e_1\rangle = \langle e_1, a_1, b_1\rangle c_1 = 0,\\ a_1b_1 = (h, 0) \neq (0, 0),\ h \in A_5,\ b_1a_1 = 0,\ pc_1 \neq 0,\ pc_1^k = 0,\ k = 2, \ldots, m,\\ c_1^m = pvc_1,\ \text{где}\ 1 \leqslant v \leqslant p-1,\ m \geqslant 2,\ c_1^{m+1} = 0,\ a_1^2 = b_1^2 = 0,\ e_1^2 = e_1\rangle.$$

Пусть L — идеал кольца A, порождённый элементом $x = a_1b_1 - pc_1$ и $\bar{A} =$ $= A/L$. Образы образующих элементов e_1, a_1, b_1 и c_1 обозначим без индекса соответственно e, a, b и c. Это фактор-кольцо $\bar{A}$ имеет два параметра: m и v, где $m \geqslant 2$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$, поэтому обозначим его через $\bar{A} = B_v^{(m)}$. Тогда получим, что

$$B_v^{(m)} = \langle e, a, b, c \mid pe = pa = pb = p^2c = 0,\ pc \neq 0,\ ea = be = 0,\ ae = a,\ eb = b,\\ c\langle e, a, b\rangle = \langle e, a, b\rangle c = 0,\ ab = pc,\ c^m = pvc,\ \text{где}\ 1 \leqslant v \leqslant p-1,\ c^{m+1} = 0,\\ pc^k = 0,\ k = 2, \ldots, m,\ m \geqslant 2,\ a^2 = b^2 = 0,\ e^2 = e,\ ba = 0\rangle.$$

Заметим, что характеристика кольца $B_v^{(m)}$ равна p^2, $\operatorname{char}(c) = p^2$, $\operatorname{char}(e) = p$ и согласно лемме 1 кольцо $B_v^{(m)}$ является подпрямо неразложимым. Поэтому согласно [11] $B_v^{(m)}$ не вложимо в кольцо матриц над коммутативным кольцом. Согласно предложению 3 и теореме 1 либо $\operatorname{var} B_v^{(m)}$ будет почти конечно представимым многообразием, либо $\operatorname{var} B_v^{(m)}$ содержит минимально почти конечно представимое многообразие $\operatorname{var} B^{(2)}$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 следует, что почти конечно представимых многообразий колец, содержащих алгебру A_5, достаточно много. Примерами являются многообразия вида $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, где $m = 2$ или $m - 1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant p-1$. Относительно алгебры A_4 имеет место утверждение.

Предложение 4. *Кроссово многообразие колец $\mathfrak{M}$, содержащее алгебру A_4, является почти конечно представимым многообразием тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ совпадает с $\operatorname{var} B_{21}$.*

Доказательство. В [8] доказано, что $A_4 \in \operatorname{var} B_{21}$ и $\operatorname{var} B_{21}$ является почти конечно представимым многообразием. Пусть $\mathfrak{M} \ni A_4$ и $\mathfrak{M}$ — почти конечно представимое многообразие. Заметим, что $A_5 \subseteq A_4 \in \mathfrak{M}$ [8]. Предположим, что $\mathfrak{M}$ содержит кольцо R с идемпотентом $e = e^2$, $\operatorname{char}(e) = p^k$, где $k \geqslant 2$. Если $k \geqslant 3$, то $p^{k-2}e = c$ является нильпотентным элементом $\operatorname{char}(c) = p^2$ и согласно теореме 1 $\mathfrak{M}$ содержит кольца вида $B_v^{(m)}$ и $\operatorname{var} B_v^{(m)} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда в силу условия предложения $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_v^{(m)}$, и из тождества (3) следует, что $A_4 \notin \mathfrak{M}$. Это противоречит условию. Следовательно, $k = 2$ и $\langle e\rangle \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, и как показано в [8], $\operatorname{var}\{A_4 \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\}c = \operatorname{var} B_{21}$. В этом случае в силу условия предложения имеем, что $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_{21}$. Согласно теореме 1 характеристики всех нильпотентных элементов колец из $\mathfrak{M}$ равны p, противном случае тоже приходим к противоречию с условием $A_4 \notin \mathfrak{M} = \operatorname{var} B_v^{(m)}$. Из этих рассуждений следует, что в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество $p^2x = 0$. Если в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество $px = 0$, то $\mathfrak{M}$ будет конечно вложимым многообразием, что противоречит условию. Следовательно, $\mathfrak{M}$ содержит кольцо R с идемпотентом $e = e^2$, $\operatorname{char}(e) = p^2$. Тогда (как следует из вышеприведённых рассуждений) $\mathfrak{M}$ содержит $\operatorname{var} B_{21}$, и в силу условия предложения $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_{21}$. □

Сделаем одно дополнительное замечание о кольцах типа $B_v^{(m)}$. Рассмотрим кольцо $B_{n1} = \operatorname{End}(\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_p)$, где p — простое число, $n \geqslant 2$, $\mathbb{Z}_{p^n}$ и $\mathbb{Z}_p$ — циклические группы порядков p^n и p соответственно.

В [10] показано, что кольцо B_{n1} имеет вид

$$\begin{aligned} B_{n1} = \langle e, f, a, b \mid\, & f^2 = f,\ e^2 = e,\ p^n f = pe = pa = pb = 0,\\ & fa = a,\ af = 0,\ bf = b,\ fb = 0,\ ea = 0,\ ae = a,\ eb = b,\ be = 0,\\ & a^2 = b^2 = 0,\ ab = p^{n-1}f,\ ba = 0,\ ef = fe = 0,\ e + f = 1\rangle. \end{aligned}$$

Предложение 5. *Если $n \geqslant 3$, то $\operatorname{var} B_{n1}$ содержит кольцо B_{n-11}.*

Доказательство. Пусть $A = B_{n1} \oplus B_{n1}$ и R — подкольцо, порождённое элементами $(1,1)$, (e,e), $(a,0)$, (b,b) из кольца A. $(1,1) - (e,e) = (f,f) \in R$. Рассмотрим идеал $I = (x)$, где $x = (p^{n-2}f, p^{n-2}f) - (p^{n-1}f, 0)$ и $(p^{n-1}f, 0) = (a,0)(b,b) = (ab,0)$. Умножая x слева и справа на образуюшие элементы кольца R, получаем элементы вида μx, где $\mu = 0$ или $\mu = 1$. Кроме того, если $n \geqslant 4$, то $x^2 = 0$. Если $n = 3$, то $x^2 = px$; $px = (p^{n-1}f, p^{n-1}f)$, $p^2x = 0$, $px \neq 0$. Следовательно, идеал $I = (x)$ — абелева группа порядка p^2, и при $n \geqslant 4$ имеем $I^2 = 0$, а при $n = 3$ имеем $I^2 \neq 0$, $x^2 = px$. Фактор-кольцо $R/I = \bar{R}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{R} = \langle \bar{1}, \bar{e}, \bar{a}, \bar{b} \mid\, & p^{n-1}\bar{1} = p\bar{e} = p\bar{a} = p\bar{b} = 0,\ \bar{e}\bar{a} = 0,\ \bar{a}\bar{e} = \bar{a},\\ & \bar{e}\bar{b} = \bar{b},\ \bar{b}\bar{e} = 0,\ \bar{1} = \bar{e} + \bar{f},\ p^{n-1}\bar{f} = 0,\ \bar{f}\bar{a} = \bar{a},\ \bar{a}\bar{f} = 0,\\ & \bar{b}\bar{f} = b,\ \bar{f}\bar{b} = 0,\ \bar{a}\bar{b} = p^{n-2}\bar{f},\ \bar{b}\bar{a} = 0\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $B_{n-1,1} \cong \bar{R}$. □

Следствие 3. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда $\operatorname{var} B_{n1} \ni B_{21}$.*

Доказательство. В кольце B_{n1} положим $c = p^{n-2}f$ и рассмотрим подкольцо $\langle e, a, b, c\rangle$. Тогда получим кольцо типа $B^{(m)}$, определённое в [8]. Именно,

$$\langle e,a,b,c\rangle = \langle e^2 = e,\ pa = pb = pe = p^2c = 0,\ pc \neq 0,\ c\langle e,a,b\rangle = \langle e,a,b\rangle c = 0,$$
$$c^r \neq 0,\ c^{r+1} = 0,\ r \geqslant 1,\ ea = 0,\ ae = a,\ be = 0,\ eb - b,\ ab = pc,\ ba = 0\rangle,$$

и подкольцо $\langle e, a, b\rangle$ совпадает с алгеброй A_5. Поэтому $B_{n1} \supseteq A_5$, и следовательно, $\operatorname{var} B_{n1}$ содержит кольца типа $B_v^{(m)}$ согласно теореме 1. □

4. Описание некоторых почти конечно представимых многообразий колец

Из определения почти конечно представимых многообразий колец следует, что такое многообразие $\mathfrak{M}$ порождается любым своим конечным кольцом R, не вложимым в кольцо матриц над коммутативным кольцом, т. е. $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$.

Пусть $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$ — почти конечно представимое многообразие колец и R — конечное кольцо, не вложимое в кольцо матриц над коммутативным кольцом. Представим R в виде подпрямого произведения конечного числа подпрямо неразложимых колец. Среди этих подпрямо неразложимых колец существует кольцо S, не представимое матрицами над коммутативным кольцом. Ввиду минимальности $\mathfrak{M}$ порождается этим кольцом S. Поэтому мы можем предполагать, что почти конечно представимое кроссово многообразие $\mathfrak{M}$ порождается конечным подпрямо неразложимым кольцом, не представимым матрицами над коммутативным кольцом. Все эти рассуждения доказывает следующую лемму.

Лемма 6. *Любое почти конечно представимое кроссово многообразие колец $\mathfrak{M}$ порождается одним подпрямо неразложимым конечным кольцом R, не представимым матрицами над коммутативным кольцом, т. е. $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$.*

Несколько легко проверяемых утверждений сформулированы в следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть R — подпрямо неразложимое кольцо с идемпотентом $e = e^2$, где $e \neq 0, 1$ и*

$$R = eRe + (1-e)Re + eR(1-e) + (1-e)R(1-e) — \tag{18}$$

его пирсовское разложение относительно этого идемпотента e. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если одна из компонент $(1-e)Re$ и $eR(1-e)$ нулевая, а другая ненулевая, то ненулевая компонента является идеалом кольца R;*
б) *если $(1-e)Re \neq 0$, $eR(1-e) \neq 0$, то хотя бы одно из произведений $(1-e)ReR(1-e)$, $eR(1-e)Re$ отлично от нуля;*
в) *если $\operatorname{char} R = p^k$, $k \geqslant 2$, $\operatorname{char}(e) = p$, то $(1-e)Re \neq 0$ и $eR(1-e) \neq 0$;*
г) *равенства $eR(1-e) = 0$, $(1-e)Re = 0$ одновременно не имеют места.*

Теорема 3. *Если* $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$ — *почти конечно представимое кроссово многообразие колец и аддитивный порядок всех идемпотентов порождающего подпрямо неразложимого кольца* R *равен* p , *где* p — *простое число, то* $\operatorname{var} R$ *совпадает с одним из многообразий* $\operatorname{var} B_v^{(m)}$, *где* $m = 2$ *или* $m - 1 = (p-1)k$, $p \geqslant 3$ *или* $p = 2$, $m \geqslant 3$, $1 < v < p$.

Доказательство. По условию $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$, где R — конечное подпрямо неразложимое кольцо, не представимое матрицами над коммутативным кольцом. Если R — кольцо с единицей, то R является $GF(p)$-алгеброй. Следовательно, все конечные кольца из многообразия $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$ представимы матрицами над $GF(p)$, что противоречит условию. Ясно также, что R не является нильпотентным кольцом [12]. Следовательно, $R \neq J(R) \neq 0$ и R содержит идемпотент $e = e^2$, $\operatorname{char}(e) = p$. При этом можно считать, что e — прообраз единицы фактор-кольца $\bar{R} = R/J(R)$. Рассмотрим пирсовское разложение (18) кольца R относительно этого идемпотента e.

Из невложимости кольца R в кольцо матриц над коммутативным кольцом следует, что $\operatorname{char} R = p^k$, $k \geqslant 2$. Относительно разложения (18) отметим следующие факты. eRe — кольцо с единицей e, и согласно теореме Вильсона [14] $eRe = Q \dotplus N$, где Q — прямая сумма колец матриц над кольцами Галуа, N — (Q,Q)-бимодуль, $Q + N$ — прямая сумма (Q,Q)-бимодулей и $J(R) = pQ + N$. Имеем, что $(1-e)Re$, $eR(1-e)$, $(1-e)R(1-e) \subseteq J(R)$ и $\operatorname{char}(eRe) = \operatorname{char}\big(eR(1-e)\big) = \operatorname{char}\big((1-e)Re\big) = p$. Из условия $pR \neq 0$ следует, что $pR = (1-e)pR(1-e) \neq 0$. Пусть M — сердцевина кольца R. Ясно, что $M \subseteq pR$. Покажем, что $eR(1-e) \neq 0$ и $(1-e)Re \neq 0$ в разложении (19). В самом деле, если эти компоненты равны нулю, то кольцо R является подпрямо разложимым. Если одна из этих компонент является нулевой, а другое ненулевой, то согласно лемме 7 ненулевая компонента является идеалом, имеющим нулевое пересечение с сердцевиной M. Следовательно, в обоих случаях приходим к противоречию с подпрямой неразложимостью кольца R. Итак, $eR(1-e) \neq 0$ и $(1-e)Re \neq 0$.

Обозначим через $L = eR(1-e)Re$ произведение компонент $eR(1-e)$ и $(1-e)Re$. Ясно, что $L \subseteq eRe$ и $L \subseteq J(R)$. Из того, что $\operatorname{char}(e) = p$, следует, что слагаемое eRe является $GF(p)$-алгеброй, причём подкольцо Q является полупростым кольцом, поэтому $L \subseteq N$. Обозначим $I = (1-e)R(1-e)$. Рассмотрим произведения $eR(1-e)I$ и $I(1-e)Re$. Возможны следующие случаи:

а) $eR(1-e)I = 0$, $I(1-e)Re = 0$;

б) $eR(1-e)I \neq 0$, $I(1-e)Re = 0$, или $eR(1-e)I = 0$,$I(1-e)Re \neq 0$, или $eR(1-e)I \neq 0$, $I(1-e)Re \neq 0$.

Рассмотрим случай а). Легко убедиться, что L и I — идеалы кольца R, имеющие нулевое пересечение. Это противоречит подпрямой неразложимости кольца R. Отсюда следует, что $L = 0$. Если $(1-e)Re \cdot eR(1-e) = (1-e)ReR(1-e) = 0$, то $(1-e)Re$ и $eR(1-e)$ являются ненулевыми идеалами кольца с нулевым пересечением, что противоречит подпрямой неразложимости кольца R. Следовательно, $0 \neq (1-e)ReR(1-e) = H \subseteq I$. Легко убедиться, что $H^2 = 0$, $pH = 0$, $H \lhd R$

и $HJ(R) = J(R)H = 0$. Поэтому $H = M$. Следовательно, существуют элементы $a \in (1-e)Re$, $b \in eR(1-e)$, такие что $ab = h \in M$. $M \subseteq pR = (1-e)pR(1-e) \subseteq I$. Поэтому существует элемент $c \in I$, такой что $ab = pc \neq 0$. Отсюда следует, что $p^2c = 0$, $abc = pc^2 \in MI = 0$, т. е. $pc^2 = 0$, $pc^k = 0$, $k \geqslant 2$. Из $c \in J(R)$ следует существование целого числа $m \geqslant 1$, такого что $c^m \neq 0$, $c^{m+1} = 0$. Рассмотрим подкольцо

$$\begin{aligned} A = \langle e, a, b, c \mid {} & e^2 = e,\ pe = pa = pb = p^2c = 0,\ pc \neq 0,\ c^m \neq 0,\ c^{m+1} = 0, \\ & ce = ec = ca = ac = bc = cb = 0,\ ab = pc \neq 0,\ ba = 0, \\ & pc^2 = pc^3 = \ldots = pc^m = 0,\ ea = 0,\ ae = a,\ eb = b,\ be = 0 \rangle \end{aligned}$$

(если $m = 1$, то соотношения $pc^2 = pc^3 = \ldots = pc^m = 0$ отсутствуют, A совпадает с кольцом $B_0^{(1)}$).

Ясно, что $c^m, pc \in \operatorname{Ann}\langle c\rangle$. Если $m > 1$ и $c^m \neq pvc$, где $1 \leqslant v \leqslant p-1$, то рассмотрим фактор-кольцо A/D, где $D = (c^m - pvc)$ — идеал D, порождённый элементом $c^m - pvc$. Легко убедиться, что A/D изоморфно кольцу вида $B_v^{(m)}$ для некоторого $m \geqslant 2$ и $1 \leqslant v \leqslant p-1$.

Рассмотрим случай б). Ввиду равноправности множеств $eR(1-e)I$ и $I(1-e)Re$ достаточно рассмотреть случай, когда $eR(1-e)I \neq 0$, $I \cdot (1-e)Re = 0$. Так как I — нильпотентное кольцо, то существует натуральное число $k \geqslant 1$, такое что $K = eR(1-e)I^k \neq 0$ и $KI = eR(1-e)I^{k+1} = 0$. Рассмотрим $H_1 = K(1-e)Re = eR(1-e)I^k(1-e)Re$. Из условия $I \cdot (1-e)Re = 0$ следует, что $H_1 = 0$. Очевидно, что $KeR(1-e) = 0$, $KeRe \subseteq H_1$, $KI = 0$. Следовательно, K является правым идеалом кольца R. Тогда $H_2 = (1-e)ReK$ является правым идеалом кольца R. Если $H_2 = 0$, то, как легко заметить, K будет левым идеалом. Следовательно, K — идеал, имеющий нулевое пересечение с M. Отсюда следует, что $K = 0$. Это противоречит предположению, что $K \neq 0$. Поэтому $H_2 \neq 0$. Тогда существует целое число $s \geqslant 0$, такое что $H_3 = I^s(1-e)ReK = I^sH_2 \neq 0$, $IH_3 = I^{s+1}H_2 = 0$. Покажем, что H_3 является идеалом кольца R. Для этого рассмотрим произведение $eR(1-e)H_3$. Так как

$$\begin{aligned} eR(1-e)H_3 = eR(1-e)I^s(1-e)ReK = eR(1-e)I^s(1-e)Re \cdot eR(1-e)I^k \subseteq \\ \subseteq eR(1-e) \cdot I^s \cdot I^{k+1} = eR(1-e)I^k \cdot I^{s+1} = K \cdot I^{s+1} = 0, \end{aligned}$$

H_3 является идеалом кольца R, $H_3 = I^s(1-e)Re \cdot K \subseteq I$ и $pH_3 = 0$. Кроме того, из равенств $KI = 0$, $eReH_3 = H_3eRe = 0$, $H_3(1-e)Re = H_3eR(1-e) = 0$, $K \cdot (1-e)Re = 0$, $KeR(1-e) = KeRe = 0$ следует, что $IH_3 = H_3I = 0$. Из этих рассуждений следует, что $H_3 \subseteq \operatorname{Ann}_{J(R)} J(R)$ и $M \subseteq H_3$. Любой $R/J(R)$-бимодуль является вполне разложимым. Поэтому ввиду подпрямой неразложимости кольца R получаем, что $M = H_3$. Из равенства $H_3 = I^s(1-e)ReK \neq 0$ следует существование ненулевых элементов $a \in I^s(1-e)Re$ и $b \in eR(1-e)I^k = K$, таких что $ab = h \in M$, $h \neq 0$. Здесь возможно, что $ba = 0$ или $ba \neq 0$. Ранее мы заметили, что $M \subseteq pR \subseteq (1-e)pR(1-e)$. Следовательно, существует элемент $0 \neq c \in (1-e)R(1-e)$, такой что $ab = h = pc \neq 0$. При этом очевидно, что

$ab\cdot c=pc^2=c(ab)=0$ и $c^m\neq 0$, $c^{m+1}=0$, где $m\geqslant 1$, $ac=bc=cb=ba=0$, $pc^2=pc^3=\ldots=pc^m=0$, c^m, $pc\in\operatorname{Ann}\langle c\rangle$.

Рассмотрим подкольцо $A=\langle e,a,b,c\rangle$ в случае $ba=0$. Тогда

$$\begin{aligned}A=\langle e,a,b,c\mid{}& pe=pa=pb=p^2c=0,\ e^2=e,\ a^2=0,\ b^2=0,\\ & ab=pc,\ ba=0,\ c^m\neq 0,\ c^{m+1}=0,\ ec=ce=0,\ bc=cb=0,\ ac=0,\\ & pc^k=0,\ k=2,3,\ldots,m,\ m\geqslant 1\rangle.\end{aligned}\tag{19}$$

Если $ca\neq 0$ и $c^m\neq pvc$ для любого v, где $1\leqslant \nu\leqslant p-1$, то рассмотрим идеал $I=\langle ca,\ c^m-pvc\rangle$, где $1\leqslant v\leqslant p-1$, порождённый элементами ca, c^m-pvc в кольце A. Имеем

$$\begin{aligned}A/I=\langle \bar e,\bar a,\bar b,\bar c\mid{}& p\bar e=p\bar a=p\bar b=p\bar c=0,\ \bar e^2=\bar e,\ \bar a^2=0,\ \bar b^2=0,\ \bar a\bar b=p\bar c,\\ & \bar b\bar a=0,\ \bar b\bar c=\bar c\bar b=0,\ \bar a\bar c=0,\ \bar c\bar a=0,\ \bar c^m\neq 0,\ \bar c^{m+1}=0,\\ & p\bar c^k=0,\ k=2,3,\ldots,m,\ c^m=pvc,\ \text{где } m\geqslant 1,\ 1\leqslant v\leqslant p-1\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, A/I является кольцом вида $B_\nu^{(m)}$. Если $ba\neq 0$, подкольцо $A=\langle e,a,b,c\rangle$ содержит идеал

$$\begin{aligned}\langle ba\rangle=\langle \lambda ba\mid 0\leqslant\lambda\leqslant p-1,\ & eba=bae=ba,\\ & ba\cdot a=aba=b\cdot ba=ab\cdot b=c\cdot ba=ba\cdot c=0\rangle\end{aligned}$$

и фактор-кольцо $A/\langle ba\rangle$ будет кольцом вида (19), которое рассматривалось в предыдущем случае. Во всех случаях $\mathfrak{M}$ содержит кольцо вида $B_\nu^{(m)}$ при $m=2$ или $m-1=(p-1)k$, $p\geqslant 3$ или $p=2$, $m\geqslant 3$. По теореме 1 $B_\nu^{(m)}$ порождает многообразие $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}=\operatorname{var}B_\nu^{(m)}$. Если $m-1$ не делится на $p-1$ и $p\geqslant 3$, то $\operatorname{var}B_\nu^{(m)}\supset\operatorname{var}B^{(2)}$, и поэтому $\mathfrak{M}=\operatorname{var}B^{(2)}$.

Случай $eR(1-e)I=0$, $I(1-e)Re\neq 0$ рассматривается аналогично. Рассмотрим случай $eR(1-e)I\neq 0$, $I(1-e)Re\neq 0$. В силу нильпотентности I существуют числа $k\geqslant 1$, $s\geqslant 1$, такие что $eR(1-e)I^k\neq 0$, $eR(1-e)I^{k+1}=0$, $I^s(1-e)Re\neq 0$, $I^{s+1}(1-e)Re=0$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $s\leqslant k$. Пусть $K=eR(1-e)I^k$. Тогда $K\neq 0$ и $KI=0$. Покажем, что K — идеал кольца R. В самом деле, $KeRe=0$, $KeR(1-e)=0$, $KI=0$. Рассмотрим $H_1=K(1-e)Re$ и покажем, что $H_1=0$. Действительно, $H_1eRe\subseteq H_1$, $H_1(1-e)Re=0$, $H_1I=0$ и $H_1eR(1-e)=K(1-e)Re\cdot eR(1-e)\subseteq KI=0$. Отсюда следует, что H_1 является правым идеалом кольца R. Далее, $eReH_1\subseteq H_1$, $eR(1-e)H_1=0$, $IK=0$, $(1-e)ReH_1=(1-e)Re\cdot eR(1-e)I^k\cdot(1-e)Re\subseteq \subseteq I^{k+1}(1-e)Re=0$, так как $k+1>s+1$. Отсюда следует, что H_1 является левым идеалом кольца R. Однако $H_1\cap M=(0)$. Это противоречит подпрямой неразложимости кольца R. Следовательно, $H_1=0$ и K является правым идеалом. Покажем, что K является левым идеалом. Очевидно, что $eRe\cdot K\subseteq K$, $eR(1-e)K=0$, $IK=0$. Рассмотрим произведение $H_2=(1-e)ReK$. Если $H_2=0$, то K будет левым идеалом кольца R. Следовательно, K — идеал кольца R, имеющий нулевое пересечение с сердцевиной M кольца R. Противоречие.

Это означает, что $H_2 = (1-e)ReK \neq 0$. Тогда существует целое число $r \geqslant 0$, такое что $H_3 = I^r H_2 = I^r(1-e)ReK \neq 0$, $IH_3 = I^{r+1}H_2 = 0$. Покажем, что H_3 — идеал кольца R. K — правый идеал кольца R. Поэтому H_3 является правым идеалом кольца R. Очевидно, что $eReH_3 = 0$, $(1-e)ReH_3 = 0$, $IH_3 = 0$. $eR(1-e)H_3 = eR(1-e)I^r(1-e)Re \cdot eR(1-e)I^k \subseteq eR(1-e) \cdot I^{k+1+r} = KI^{k+1} = 0$. Отсюда следует, что H_3 — левым идеал, и следовательно, H_3 — идеал кольца R. Легко убедиться, что $H_3 \subseteq I$, $pH_3 = 0$, $eRe \cdot H_3 = (1-e)Re \cdot H_3 = IH_3 = 0$ и $eR(1-e)H_3 = eR(1-e) \cdot I^r(1-e)Re \cdot eR(1-e) \cdot I^k \subseteq eR(1-e) \cdot I^{k+1+r} = 0$. Отсюда следует, что $H_3 \subseteq \operatorname{Ann}_{J(R)} J(R)$. Тогда $M \subseteq H_3$. Любой $\bar{R} = R/J(R)$-бимодуль вполне разложим. Поэтому в силу подпрямой неразложимости кольца R получаем, что $H_3 = M$. Из равенства $H_3 = I^r(1-e)Re \cdot eR(1-e)I^k = M \neq 0$ следует существование ненулевых элементов $a \in I^r(1-e)Re$, $b \in eR(1-e)I^k$, таких что $ab = pc \in M$, $0 \neq c \in (1-e)R(1-e)$, $M \subseteq pR \subseteq (1-e)R(1-e)$, $abc = pc^2 = c(ab) = 0$ и $c^m \neq 0$, $c^{m+1} = 0$, где $m \geqslant 1$, $ac = bc = cb = ba = 0$, $pc^2 = pc^3 = \ldots = pc^m = 0$ и $pc, c^m \in \operatorname{Ann}\langle c \rangle$. Здесь возможно, что $ba = 0$ или $ba \neq 0$. Дальнейшие рассуждения совпадают с только что рассмотренным случаем для кольца (19) при $ba = 0$ и кольца $A/\langle ba \rangle$ при $ba \neq 0$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ содержит кольца вида $B_v^{(m)}$, где $m = 2$ или $m - 1 = (p-1)k$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ или $p = 2$, $m \geqslant 3$ и $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_v^{(m)}$. □

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$ — конечно представимое кроссово многообразие колец. Если порождающее кольцо R содержит единицу, $\operatorname{char} R = p^k$, где $k \geqslant 2$, и R содержит ненулевой идемпотент $e = e^2 \in R$ характеристики p, где p — простое число, то $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R_{21}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — почти конечно представимое многообразие колец. Тогда согласно лемме 6 $\mathfrak{M} = \operatorname{var} R$, где R — конечное подпрямое неразложимое кольцо с единицей, не вложимое в кольцо матриц над коммутативным кольцом. Согласно условию теоремы в R содержится идемпотентный элемент $e = e^2$, такой что $\operatorname{char}(e) = p$. Рассмотрим пирсовское разложение (18) кольца R относительно идемпотента e. Кольцо R содержит единицу, поэтому $f = 1 - e$ тоже является идемпотентным элементом, и $p^k f = 0$, $ef = fe = 0$. Представим пирсовское разложение (18) в виде

$$R = fRf + fRe + eRf + eRe. \tag{20}$$

Очевидно, что $(fRe)^2 = (eRf)^2 = 0$, $p(fRe) = p(eRf) = 0$. Покажем, что $fRe \neq 0$ и $eRf \neq 0$. Предположим противное. Если одно или оба этих слагаемых равны нулю, то согласно лемме 7 приходим к противоречию с подпрямой неразложимостью кольца R. Следовательно, $eRf \neq 0$, $fRe \neq 0$. Согласно лемме 4 хотя бы одно из произведений $H = eRf \cdot fRe = eRfRe$, $K = fRe \cdot eRf = fReRf$ должно быть ненулевым. Предположим, что $K = fReRf = 0$, $H = eRfRe \neq 0$. Тогда простой проверкой убеждаемся, что H — идеал и $H^2 = 0$. Однако $H \cap f(pR)f \subseteq H \cap pR = (0)$, что противоречит подпрямой неразложимости кольца R. Следовательно, случай $K = 0$, $H \neq 0$ не имеет места. Поэтому

$K = fReRf \neq 0$. Из этого следует, что $pK = 0$ и $K \subseteq I = (1-e)R(1-e)$ и существуют ненулевые элементы $a \in fRe$, $b \in eRf$, такие что $ab \neq 0$, $a^2 = b^2 = 0$. Здесь ba может быть и ненулевым элементом. Рассмотрим подкольцо

$$A = \langle e, a, b \mid pe = pa = pb = 0,\ ab \neq 0,\ ea = 0,\ ae = a,\\ eb = b,\ be = 0,\ a^2 = b^2 = 0,\ e^2 = e\rangle.$$

Если $ba \neq 0$ $(ba \in H)$, то рассмотрим фактор-кольцо

$$\bar{A} = A/L = \langle \bar{e}, \bar{a}, \bar{b} \mid p\bar{e} = p\bar{a} = p\bar{b} = 0,\ \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = 0,\ \bar{c}\bar{b} = \bar{b},\ \bar{b}\bar{e} = 0,\\ \bar{a}\bar{e} = \bar{a},\ \bar{e}\bar{a} = 0,\ \bar{a}\bar{b} \neq 0,\ \bar{b}\bar{a} = 0\rangle,$$

где $L = \langle ba\rangle$ — идеал кольца A, порождённый элементом ba. Отсюда видно, что $GF(p)$-алгебра $\bar{A}$ изоморфна алгебре A_5. Если $\operatorname{char}(1) = p^k$, $k \geqslant 3$, где 1 — единичный элемент порождаюшего кольца R, то элемент $c = p^{k-2} \cdot 1$ является ненулевыи нильпотентным элементом характеристики p^2 из кольца R. Тогда согласно теореме 2 $\mathfrak{M}$ содержит кольцо вида $\operatorname{var} B_\nu^{(m)}$ и $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_\nu^{(m)}$. Из этого равенства следует, что характеристика любого идемпотента любого кольца из $\mathfrak{M}$ будет равна p, что противоречит условию $\operatorname{char}(1) = p^k$, $k > 2$. Следовательно, случай $k \geqslant 3$ не имеет места. Поэтому $k = 2$, $\operatorname{char}(1) = p^2$. В этом случае рассмотрим подкольцо

$$B = \langle 1, f, e, a, b \mid pe = pa = pb = 0,\ ab \neq 0,\ ea = 0,\ eb = b,\ ae = a,\ be = 0,\\ fa = a,\ bf = b,\ f^2 = f,\ e^2 = e,\ p^2 f = p^2 1 = 0,\ a^2 = b^2 = 0\rangle.$$

Если $ba \neq 0$, то рассмотрим кольцо $\bar{B} = B/I$, где $I = B = (ba, ab - pf)$ — идеал, порождённый элементами ba и $ab - pf$. Ясно, что

$$\bar{B} = \langle \bar{1}, \bar{f}, \bar{e}, \bar{a}, \bar{b} \mid p\bar{e} = p\bar{a} = p\bar{b} = 0,\ p^2 \cdot \bar{1} = p^2 \bar{f} = 0,\ \bar{a}\bar{b} = pf,\ ba = 0,\\ a^2 = b^2 = 0,\ a = \bar{a}\bar{e},\ \bar{e}\bar{b} = \bar{b},\ \bar{e}\bar{a} = 0,\ \bar{b}\bar{e} = 0,\ \bar{f}\bar{a} = 0,\ \bar{a}\bar{f} = \bar{a},\\ \bar{f}\bar{b} = b,\ \bar{b}\bar{f} = 0,\ \bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e} = 0,\ \bar{1} = \bar{e} + \bar{f}\rangle.$$

Очевидно, что $B \cong B_{21}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \operatorname{var} B_{21}$, что и требовалось доказать. □

Предложение 6. *Многообразие колец $\mathfrak{M}$, содержащее алгебру A_4, конечно представимо тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество $px = 0$, т. е. $\mathfrak{M}$ является многообразием $GF(p)$-алгебр.*

Доказательство. В одну сторону предложение очевидно, так как конечные (конечномерные) алгебры над полем вложимы в кольцо матриц над полем. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим конечное подпрямо неразложимое кольцо $R \in \mathfrak{M}$. Если $J(R) = 0$, то ввиду теоремы Веддербёрна R является $GF(p)$-алгеброй для некоторого простого числа p, и следовательно, R вложимо в алгебру матриц над полем. Пусть $R = J(R)$. Тогда R вложимо в кольцо матриц над коммутативным кольцом [12]. Однако по теореме 2 $\operatorname{char}(J(R)) = p$, так как $A_5 \in \mathfrak{M}$. Пусть $R \neq J(R) \neq 0$. Если кольцо R содержит идемпотент

$e = e^2$, $\mathrm{char}(e) = p^k$, $k \geqslant 3$, то по теореме 2 $\mathfrak{M}$ содержит кольцо вида $B_\nu^{(m)}$, что противоречит конечной представимости $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathrm{char}(e) = p$ или $\mathrm{char}(e) = p^2$. Если $\mathrm{char}(e) = p^2$, то $\langle e \rangle \cong Z/p^2Z$, $\mathrm{var}\{A_4 \oplus Z/p^2Z\} = \mathrm{var}\,B_{21}$ является неконечно представимым многообразием [8] и $\mathrm{var}\,B_{21} \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathrm{char}(e) = p$. Противоречие.

Если R — локальное кольцо, то $\mathrm{char}\,R = p$ и R является $GF(p)$-алгеброй. Пусть R — кольцо с единицей и $\mathrm{char}(1) = p$. Тогда согласно теореме Вильсона [14] R имеет вид $R = Q + N$, где Q — прямая сумма колец матриц над кольцами Галуа, N — (Q, Q)-бимодуль, $N \subseteq J(R)$. Так как Q содержит единицу и $p \cdot 1 = 0$, $pN = 0$, то $\mathrm{char}\,R = p$.

Пусть R — кольцо без единицы, и пусть $e = e^2$ — идемпотент, являющийся прообразом единицы фактор-кольца R. Рассмотрим пирсовское разложение R относительно идемпотента e. Оно имеет вид (18). Легко убедиться, что $J(R) = N + (1-e)Re + eR(1-e) + (1-e)R(1-e)$ и $\mathrm{char}\,J(R) = p$. Следовательно, $pR = 0$, что и требовалось доказать. □

Представляет интерес следующий вопрос: всякое ли конечно невложимое минимальное многообразие колец содержит алгебру A_5?

Литература

[1] Алгебраические системы: Приринт № 647. — Новосибирск: СО АН СССР, Выч. центр, 1986. — С. 14—15.

[2] Ананьин З. А. Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия алгебр // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 3—23.

[3] Кублановский С. И. Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия ассоциативных колец и алгебр. — Деп. в ВИНИТИ 1.12.82; № 6143-82.

[4] Латышев В. Н. Конечная базируемость тождеств некоторых колец // Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 4. — С. 259—260.

[5] Львов И. В. О многообразиях ассоциативных колец. I // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12. — С. 269—297.

[6] Львов И. В. О представлении нильпотентных алгебр матрицами // Сиб. мат. журн. — 1980. — Т. 21, № 5. — С. 158—161.

[7] Мальцев Ю. Н. О многообразиях ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 579—589.

[8] Мальцев Ю. Н. О представлении конечных колец матрицами над коммутативным кольцом // Мат. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 3 (11). — С. 383—402.

[9] Мекей А. О многообразиях, порождённых конечными ассоциативными кольцами, и свойствах экстремальности и критичности: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — М., 1995.

[10] Мекей А. О критичности колец эндоморфизмов некоторых конечных абелевых групп // Фундамент. прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 2. — С. 449—483.

[11] Bergman G. M. Some examples in PI ring theory // Israel J. Math. — 1974. — Vol. 18, no. 3. — P. 257—277.

[12] Bergman G. M., Britten D. J., Lemire F. W. Embedding rings in completed graded rings. III. Algebras over general k // J. Algebra. — 1983. — Vol. 84, no. 1. — P. 42—61.

[13] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980.

[14] Wilson R. S. On structure of finite rings. II // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 51, no. 1. — P. 317—325.