Арифметические кольца и квазипроективные идеалы*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: арифметическое кольцо, квазипроективный модуль, малопроективный модуль, целозамкнутый модуль, дистрибутивный модуль.

Аннотация

Доказано, что коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда каждый конечно порождённый идеал кольца A является квазипроективным A-модулем и каждый эндоморфизм этого модуля продолжается до эндоморфизма модуля A_A. Эти результаты доказываются с помощью некоторых общих результатов об инвариантных арифметических кольцах.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Arithmetical rings and quasi-projective ideals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 207—211.

It is proved that a commutative ring A is arithmetical if and only if every finitely generated ideal M of the ring A is a quasi-projective A-module and every endomorphism of this module can be extended to an endomorphism of the module A_A. These results are proved with the use of some general results on invariant arithmetical rings.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Используя выражения типа «инвариантное кольцо», мы подразумеваем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо называется *арифметическим*, если решётка его двусторонних идеалов дистрибутивна. Модуль называется *дистрибутивным*, если решётка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль M называется *квазипроективным*, если для любого эпиморфизма $h\colon M \to \bar{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon M \to \bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M, что $\bar{f} = hf$.

В [2] доказан следующий результат.

Теорема 1 [2, предложение 7.7]. *В дистрибутивном модуле над коммутативным кольцом все конечно порождённые подмодули квазипроективны.*

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-000452-А.

Замечание 1. Из теоремы 1 вытекает, что все конечно порождённые идеалы коммутативного арифметического кольца A являются квазипроективными A-модулями (это следствие предложения 7.7 из [2] было позже доказано в [1]). Обратное неверно. Пусть F — поле, A — фактор-кольцо кольца многочленов $F[x,y]$ по идеалу, порождённому x^2 и y^2, $h\colon F[x,y]\to A$ — естественный эпиморфизм. Так как все собственные идеалы кольца A полупросты, то все идеалы кольца A квазипроективны. Кольцо A не является арифметическим, поскольку

$$h\big((x+y)A\big) = h\big((x+y)A\big) \cap \big(h(xA)+h(yA)\big) \neq \\ \neq h\big((x+y)A\big)\cap h(xA) + h\big((x+y)A\big)\cap h(yA) = h(0).$$

В связи с теоремой 1 и замечанием 1 мы докажем теорему 2 — основной результат данной работы.

Теорема 2. *Коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда каждый его конечно порождённый идеал — квазипроективный A-модуль, у которого все эндоморфизмы продолжаются на модуль A_A.*

Замечание 2. В работе также доказан ряд результатов об арифметических кольцах, которые не обязательно коммутативны. Эти результаты используются для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 разбито на ряд утверждений; некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения.

Модуль M называется *малопроективным*, если если для любого эпиморфизма $h\colon M\to\bar M$ и каждого гомоморфизма $\bar f\colon \bar M\to\bar M$ существует такой эндоморфизм f модуля M, что $\bar f h = hf$.

Замечание 3. Для любого простого числа p квазициклическая абелева группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является малопроективным неквазипроективным модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. С другой стороны, каждый квазипроективный модуль M малопроективен. Действительно, если $h\colon M\to\bar M$ — эпиморфизм и $\bar f$ — эндоморфизм модуля $\bar M$, то $\bar f h$ — гомоморфизм из M в $\bar M$. Так как M квазипроективен, то существует такой эндоморфизм f модуля M, что $hf=\bar f h$. Поэтому M малопроективен.

Модуль M называется *инвариантным*, если все его подмодули вполне инвариантны в M.

Замечание 4. Кольцо A является инвариантным правым (левым) A-модулем в точности тогда, когда все его правые (соответственно левые) идеалы являются идеалами.

Модуль M называется *целозамкнутым* (*2-целозамкнутым*), если каждый эндоморфизм любого его конечно порождённого (соответственно 2-порождённого) подмодуля продолжается до эндоморфизма модуля M. Другие используемые в работе определения и базовые результаты содержатся, например, в [3, 4].

Лемма 1. *Пусть M — инвариантный 2-целозамкнутый модуль.*

1. *Если для каждого 2-порождённого подмодуля X в M любой автоморфизм произвольного полупростого фактор-модуля $\bar{X}$ модуля X поднимается до эндоморфизма модуля X, то модуль M дистрибутивен.*
2. *Если все 2-порождённые подмодули модуля M малопроективны, то модуль M дистрибутивен.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, что модуль M не является дистрибутивным. По [3, предложение 3.23] существует такой 2-порождённый подмодуль X модуля M, что X имеет фактор-модуль $X_1 = S_1 \oplus T_1$, где S_1 и T_1 — изоморфные простые модули. Пусть $u\colon S_1 \to T_1$ — изоморфизм. Обозначим через f_1 такой автоморфизм полупростого модуля X_1, что $f_1(s+t) = u^{-1}(t) + u(s)$ для всех $s \in S_1$ и $t \in T_1$. Пусть $h\colon X \to X_1$ — естественный эпиморфизм. По условию существует такой эндоморфизм f 2-порождённого модуля X, что $hf = \bar{f}h$. Пусть S, T — полные прообразы в модуле X модулей S_1 и T_1 соответственно. Так как $f_1(S_1) = T_1 \not\subseteq S_1$, то $f(S) \not\subseteq S$. Поскольку M — 2-целозамкнутый модуль, эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. Так как M — инвариантный модуль, то $f(S) = g(S) \subseteq S$. Получено противоречие.

Утверждение 2 следует из утверждения 1. □

Лемма 2. *Пусть M — инвариантный малопроективный модуль. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *все фактор-модули модуля M — 2-целозамкнутые модули;*
2) *M — 2-целозамкнутый модуль и все его 2-порождённые подмодули малопроективны.*

При этих условиях модуль M дистрибутивен.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай 2-целозамкнутых модулей, так как случай целозамкнутых модулей рассматривается аналогично.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\bar{f}$ — эндоморфизм 2-порождённого фактор-модуля X/Y 2-порождённого модуля X, $h\colon M \to M/Y$ — естественный эпиморфизм и $h_X\colon X \to X/Y$ — сужение эпиморфизма h на модуль X. Так как M/Y — 2-целозамкнутый модуль, то $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/Y. Поскольку модуль M малопроективен, существует такой эндоморфизм g модуля M, что $\bar{g}h = hg$. Так как M — инвариантный модуль, то $g(X) \subseteq X$ и g индуцирует эндоморфизм f модуля X. Тогда

$$h_X f = (hg)_X = (\bar{g}h)_X = \bar{f}h_X.$$

Поэтому модуль X малопроективен.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M/Y — фактор-модуль модуля M, X/Y — 2-порождённый подмодуль в M/X и $\bar{f}$ — эндоморфизм модуля X/Y. Существует естественный изоморфизм $u\colon X/Y \to X_1/(X_1 \cap Y)$, где X_1 — 2-порождённый подмодуль в X, причём $\bar{f}$ естественным образом индуцирует эндоморфизм $\bar{f}_1$ 2-порождённого модуля $X_1/(X_1 \cap Y)$ и $u^{-1}\bar{f}_1 u = \bar{f}$. Пусть $h\colon M \to M/(X_1 \cap Y)$ — естественный эпиморфизм и $h_1\colon X_1 \to X_1/(X_1 \cap Y)$ — сужение эпиморфизма h на X_1. По условию модуль $X_1/(X_1 \cap Y)$ малопроективен. Поэтому существует такой эндоморфизм f_1 2-порождённого подмодуля X_1 в M, что $h_1 f_1 = \bar{f}_1 h_1$. Так как M — 2-целозамкнутый модуль, то f_1 продолжается до эндоморфизма g модуля M. Поскольку M — инвариантный модуль, то $g(X) \subseteq X$, $g(Y) \subseteq Y$, $g(X_1) \subseteq X_1$, $g(X_1 \cap Y) \subseteq X_1 \cap Y$ и g индуцирует эндоморфизм f модуля M/Y. Непосредственно проверяется, что f совпадает с $\bar{f}$ на модуле X/Y. Поэтому M/Y — 2-целозамкнутый модуль.

Если выполнено одно из эквивалентных условий 1) или 2), то по второму утверждению леммы 1 модуль M дистрибутивен. $\square$

Лемма 3. *Пусть M — инвариантный малопроективный модуль. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *все фактор-модули модуля M — целозамкнутые модули;*
2) *M — целозамкнутый модуль и все его конечно порождённые подмодули малопроективны.*

При этих условиях модуль M дистрибутивен.

Доказательство леммы 3 повторяет доказательство леммы 2.

Лемма 4. *Для инвариантного справа кольца A следующие условия равносильны:*

1) *A — инвариантное арифметическое кольцо;*
2) *каждое фактор-кольцо $\bar{A}$ кольца A инвариантно и является целозамкнутым правым $\bar{A}$-модулем и целозамкнутым левым $\bar{A}$-модулем;*
3) *каждое фактор-кольцо $\bar{A}$ кольца A является 2-целозамкнутым правым $\bar{A}$-модулем;*
4) *каждый циклический правый A-модуль является 2-целозамкнутым модулем;*
5) *каждый циклический правый A-модуль является целозамкнутым модулем;*
6) *A_A — 2-целозамкнутый модуль и все его 2-порождённые идеалы являются малопроективными правыми A-модулями;*
7) *A_A — целозамкнутый модуль и все его конечнопорождённые идеалы являются малопроективными правыми A-модулями.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана в предложении 7.56 из [3].

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) доказана в пункте 4) утверждения 7.54 из [3].

Эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 4) и импликации 2) $\Longrightarrow$ 5) и 5) $\Longrightarrow$ 4) проверяются непосредственно.

Заметим, что свободный модуль A_A малопроективен и инвариантное справа кольцо A является инвариантным правым A-модулем. Поэтому эквивалентность 4) $\Longleftrightarrow$ 6) следует из леммы 2, а эквивалентность 5) $\Longleftrightarrow$ 7) — из леммы 3. $\square$

Предложение 1. *Для коммутативного кольца A следующие условия равносильны*:

1) A — *арифметическое кольцо*;
2) A — 2-*целозамкнутый* A-*модуль и все его* 2-*порождённые идеалы малопроективны*;
3) A — *целозамкнутый* A-*модуль и все его конечнопорождённые идеалы квазипроективны.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из леммы 4.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из теоремы 1 и леммы 4.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из того, что по замечанию 3 все квазипроективные модули малопроективны. $\square$

Замечание 5 (окончание доказательства теоремы 2). Теорема 2 вытекает из предложения 1.

Литература

[1] Abuhlail J., Jarrar M., Kabbaj S. Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective // J. Pure Appl. Algebra. — 2011. — Vol. 215. — P. 2504—2511.

[2] Tuganbaev A. A. Multiplication modules // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 123, no. 2. — P. 3839—3905.

[3] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[4] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.