Структура конечных дистрибутивных решёток

В. Д. ШМАТКОВ
Рязанский государственный радиотехнический университет
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.562

Ключевые слова: конечные дистрибутивные решётки, псевдодополнения.

Аннотация

В работе приведена конструкция, описывающая строение конечных дистрибутивных решёток. В качестве применения рассмотрены алгоритмы построения и перечисления дистрибутивных решёток и частично упорядоченных множеств. Для конечных дистрибутивных решёток приведена формула нахождения максимальной антицепи по отношению непересечения, показано, что элементы решётки можно разбить на пары по отношению сравнения, рассмотрен вопрос о максимальном числе элементов в решётках, описано строение конгруэнций решёток.

Abstract

V. D. Shmatkov, The structure of finite distributive lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 219—226.

This paper is devoted to the structure that describes the construction of finite distributive lattices. From the viewpoint of application, we consider algorithms of construction and enumeration of distributive lattices and partially ordered sets for finite distributive lattices: a formula for finding the maximum anti-chain with respect to nonintersection is given, it is shown that elements of the lattice can be split into pairs according to comparison, we consider the point of the maximum number of elements in the lattices, and the structure of lattice congruence is described.

1. Базовая конструкция

На протяжении всей статьи L обозначает конечную дистрибутивную решётку. Псевдодополнением элемента $a \in L$ называется наибольший элемент $x \in L$, такой что $a \wedge x = 0$, где 0 — наименьший элемент L. Если дистрибутивная решётка L конечна, то для каждого $a \in L$ существует псевдодополнение a^*. Действительно, рассмотрим объединение $d = \bigvee x_k$ всех таких x_k, что $a \wedge x_k = 0$. Тогда $a \wedge d = 0$ и $d = a^*$. Пусть $A(L)$ — множество всех атомов L. Тогда множество всех $b = \bigvee\limits_{a \in A(L)} a$, где объединение берётся по каким-то атомам из $A(L)$, вместе с $0 \in L$ образует булеву решётку B.

Определим на L отношение $\sim$: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого атома $a \in A(L)$ $a \leqslant x$ равносильно $a \leqslant y$. Заметим, что если $a \in A(L)$, то $a \leqslant x$ равносильно $a \wedge x = 0$.

Для $x \in L$, $x \neq 0$, рассмотрим $b = \bigvee\limits_{a \leqslant x} a$. Тогда $b \in B$ и $x \sim b$. Ясно также, что если $b_1, b_2 \in B$ и $b_1 \neq b_2$, то не выполняется $b_1 \sim b_2$. Поэтому $P/{\sim} = B$. Для $b \in B$ будем обозначать через $L(b)$ класс эквивалентности, которому принадлежит b.

Теорема 1. *Отображение $\varphi\colon L \to B$, такое что $\varphi(x) = b$ тогда и только тогда, когда $x \in L(b)$, является гомоморфизмом решётки L на булеву решётку B.*

Доказательство. Пусть $x, y \in L$. Так как для любого атома $a \in A(L)$ $a \leqslant x \wedge y$ равносильно $a \leqslant x$ и $a \leqslant y$, то $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$. Так как для любого атома $a \in A(L)$ $a \wedge (x \vee y) = 0$ равносильно $a \wedge x = 0$ и $a \wedge y = 0$, то $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$. $\square$

Для $a \in B$ будем обозначать через $a' \in B$ дополнение элемента a в B.

Следствие 1. *Для $b \in B$*

$$L(b) = [b, b^{**}] = \{x \in L \mid b \leqslant x \leqslant b^{**}\}.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для $x, y \in L(b)$ $x \wedge y$, $x \vee y \in L(b)$. Поэтому $L(b)$ — решётка.

Ясно, что b — наименьший элемент $L(b)$. Так как b^* — наибольший элемент L, такой что $b \wedge b^* = 0$, то $b^* \in L(b')$ и $b^{**} \in L\big((b')'\big) = L(b)$ — наибольший элемент $L(b)$. $\square$

Следствие 2. *Множество элементов вида $S(B) = \{b^{**} \mid b \in B\}$ образуют булеву решётку относительно порядка в B.*

Доказательство. Если $a \leqslant b$, то $a^{**} \in L(a)$, $b^{**} \in L(b)$ и $a^* \vee b^{**} = L(a \vee b) = L(b)$. Так как b^* — наибольший элемент $L(b)$, то $a^{**} \leqslant b^{**}$. Ясно, что если $a^{**} \leqslant b^{**}$, то $a \leqslant b$. Поэтому решётка B изоморфна $S(B)$. $\square$

Теорема 2 (В. И. Гливенко [1, 2]). *Для отображения $\varphi\colon L \to S(B)$ если $x \in L(b)$, то $\varphi(x) = b^{**}$ является гомоморфизмом решётки L на булеву решётку $S(B)$.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 и следствия 2. $\square$

Из теоремы 2 следует, в частности, что для любых $x, y \in L$ справедливо $(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$.

Обозначим через $C(B)$ множество коатомов B.

Теорема 3. *Пусть L — конечная дистрибутивная решётка, B — булева решётка, порождённая атомами L, $1 \in B$ — наибольший элемент B. Тогда решётка L изоморфна множеству всех упорядоченных пар (b, x), где $b \in B$, $x \in L(1)$, $1 \leqslant x \leqslant b^{**} \vee 1$ относительно порядка*

$$(b_1, x_1) \leqslant (b_2, x_2) \text{ равносильно тому, что } b_1 \leqslant b_2 \text{ в } B,\ x_1 \leqslant x_2 \text{ в } L.$$

Если

$$b = \bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} c_i,$$

то

$$b^{**} \vee 1 = \bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} (c_i^{**} \vee 1).$$

Доказательство. Пусть

$$M = \{(b, x) \mid b \in B,\ 1 \leqslant x \leqslant b^{**} \vee 1\}.$$

Рассмотрим отображение $\psi\colon L \to M$, такое что $\psi(x) = (b, x \vee 1)$ для $x \in L(b)$.

По принципу транспозиции Дедекинда [1, теорема 1.13] отображение $\varphi\colon L(b) \to L(1)$, $\varphi(x) = x \vee 1$ является изоморфизмом интервалов $[b, b^{**}]$ и $[1, b^{**} \vee 1]$. Следовательно, отображение ψ — биекция.

Покажем, что ψ — изоморфизм. Пусть $x_1 \in L(b_1)$, $x_2 \in L(b_2)$, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда по теореме 1 $b_1 \leqslant b_2$ и $(b_1, x_1 \vee 1) \leqslant (b_2, x_2 \vee 1)$.

Если $(b_1, x_1 \vee 1) \leqslant (b_2, x_2 \vee 1)$, то $b_1 \leqslant b_2, x_1 \vee 1 \leqslant x_2 \vee 1$. Тогда $b_1^{**} \leqslant b_2^{**}$, и так как $1 \wedge b_1^{**} = b_1$, $x_1 \wedge b_1^{**} = x_1$, то

$$(x_1 \vee 1) \wedge b_1^{**} = (x_1 \wedge b_1^{**}) \vee (1 \wedge b_1^{**}) = x_1, \quad x_1 = (x_1 \vee 1) \wedge b_1^{**} \leqslant (x_2 \vee 1) \wedge b_2 = x_2.$$

Следовательно, ψ — изоморфизм.

Легко проверить, что

$$\bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} (c_i^{**} \vee 1) = \Bigl(\bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} c_i^{**}\Bigr) \vee 1 = \Bigl(\bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} c_i\Bigr)^{**} \vee 1 = b^{**} \vee 1. \quad \square$$

Следствие 3. *Если $b_1 \leqslant b_2$, то* $\operatorname{card} L(b_1) \leqslant \operatorname{card} L(b_2)$.

Доказательство. Если $b_1 \leqslant b_2$, то $b_1^{**} \vee 1 \leqslant b_2^{**} \vee 1$ и из доказательства теоремы 3 следует, что $L(b)$ изоморфен интервалу $[1, b^{**} \vee 1]$. $\square$

Дистрибутивная решётка L с псевдодополнениями называется стоуновой, если $a^* \vee a^{**} = 1$ для любого $a \in L$.

Так как $a^* \wedge a^{**} = 0$, то при $a^* \neq 0, 1$ представление $x \in L$ в виде $(a^* \wedge x, a^{**} \wedge x)$ даёт разложение L в прямое произведение стоуновых решёток. Но $a^* \neq 0, 1$ для любого $a \in L$ только в том случае, когда L имеет единственный атом. Поэтому справедливо следствие 4.

Следствие 4 [2, следствие 3.6.4]. *Конечная дистрибутивная решётка является стоуновой тогда и только тогда, когда она изоморфна прямому произведению конечных дистрибутивных решёток с единственным атомом.*

Теорема 4. *Пусть B — конечная булева решётка, L — дистрибутивная решётка, $\varphi\colon C(B) \to L$ — отображение множества коатомов $C(B)$ в L. Тогда* *множество всех упорядоченных пар*

$$L_1 = \Big\{(b,x) \mid b \in B \text{ и если } b = \bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} c_i, \text{ то } 0 \leqslant x \leqslant \bigwedge_{c_i \in A \subset C(B)} \varphi(c_i), \\ \text{а если } b = 1, \text{ то } x \in L\Big\},$$

где 0 — *наименьший элемент* L, 1 — *наибольший элемент в* B, *образует дистрибутивную решётку относительно порядка*

$$(b_1, x_1) \leqslant (b_2, x_2) \iff b_1 \leqslant b_2 \text{ в } B,\ x_1 \leqslant x_2 \text{ в } L.$$

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \subset C(B)$, $b_1 = \bigwedge_{c_i \in A_1} c_i$, $b_2 = \bigwedge_{c_i \in A_2} c_i$, $x_1 \leqslant \bigwedge_{c_i \in A_1} \varphi(c_i)$, $x_2 \leqslant \bigwedge_{c_i \in A_2} \varphi(c_i)$, $(b_1, x_1), (b_2, x_2) \in L_1$. Тогда

$$b_1 \wedge b_2 = \bigwedge_{c_i \in A_1 \cap A_2} c_i, \quad \bigwedge_{c_i \in A_1} \varphi(c_i) \wedge \bigwedge_{c_i \in A_2} \varphi(c_i) = \bigwedge_{c_i \in A_1 \cup A_2} \varphi(c_i).$$

Поэтому $x_1 \wedge x_2 \leqslant \bigwedge_{c_i \in A_1 \cup A_2} \varphi(c_i)$ и $(b_1, x_1) \wedge (b_2, x_2) = (b_1 \wedge b_2, x_1 \wedge x_2) \in L_1$.

Поскольку $c_i \vee c_j = 1$, то если $c_i \neq c_j$, имеем

$$b_1 \vee b_2 = \bigwedge_{c_i \in A_1} c_i \vee \bigwedge_{c_j \in A_2} c_j = \bigwedge_{c_i \in A_1,\ c_j \in A_2} (c_i \vee c_j) = \bigwedge_{c_i \in A_1 \cap A_2} c_i,$$

$$\bigwedge_{c_i \in A_1} \varphi(c_i) \vee \bigwedge_{c_j \in A_2} \varphi(c_j) = \bigwedge_{c_i \in A_1,\ c_j \in A_2} \big(\varphi(c_i) \vee \varphi(c_j)\big) \geqslant \bigwedge_{c_i \in A_1 \cap A_2} \varphi(c_i).$$

Значит, $(b_1, x_1) \vee (b_2, x_2) = (b_1 \vee b_2, x_1 \vee x_2) \in L_1$.

Если $b_1 = 1$ или $b_2 = 1$, то ясно, что $(b_1 \vee b_2, x_1 \vee x_2), (b_1 \wedge b_2, x_1 \wedge x_2) \in L_1$. Следовательно, L_1 — решётка. Дистрибутивность L_1 следует из дистрибутивности B и L. □

2. Применение конструкции

Ординальной суммой частично упорядоченных множеств P, Q называется частично упорядоченное множество, заданное на множестве $P \cup Q$, такое что $x \leqslant y$ в $P \oplus Q$, если или $x, y \in P$ и $x \leqslant y$ в P, или $x, y \in Q$ и $x \leqslant y$ в Q, или $x \in P$, $y \in Q$.

Пример 1 (построение конечных дистрибутивных решёток). Пусть L — конечная дистрибутивная решётка. По теореме 3, зная $L(1)$ и $B = B_{n_1}$, где n_1 — число атомов в B, можно построить L.

Для $L(1)$ рассмотрим булеву решётку B_{n_2}, порождённую атомами $L(1)$. Действуя аналогично, получим ординальную сумму $B_{n_1} \oplus \ldots \oplus B_{n_k}$ булевых решёток, для которой, используя теорему 3, начиная с суммы $B_{n_{k-1}} \oplus B_{n_k}$, можно построить решётку L. Сумму $B_{n_1} \oplus \ldots \oplus B_{n_k}$ назовём остовом решётки. По фундаментальной теореме о конечных дистрибутивных множествах (см. [4, гл. 3, п. 4]) существует взаимно-однозначное соответствие между конечными дистрибутивными решётками длины n и частично упорядочными множествами с n элементами.

Рассматривая ординальные суммы $B_{n_1} \oplus \ldots \oplus B_{n_k}$ длины n, используя теоремы 3, 4, можно построить все дистрибутивные решётки длины n и соответствующие частично упорядоченные множества с n элементами.

Например, с точностью до изоморфизма существуют пять дистрибутивных решёток длины 3 и соответственно пять частично упорядоченных множества с тремя элементами. Это решётки B_3, $B_1 \oplus B_2$, $B_2 \oplus B_1$, $B_1 \oplus B_1 \oplus B_1$ и решётка с остовом $B_2 \oplus B_1$ и классом эквивалентности для коатома, изоморфным B_1.

Пример 2. Число конечных дистрибутивных решёток L, где B_n — булева решётка, порождённая атомами L, $L(1)$ — класс эквивалентности наибольшего элемента $1 \in B_n$, равно

$$N = \sum_{z \in L(1)} \mu(0, z)(\mathrm{card}[z, \tilde{1}])^n,$$

где μ — функция Мёбиуса решётки $L(1)$, $\tilde{1}$ — наибольший элемент L. Так как по теореме 3 $\bigwedge\limits_{c_i \in C(B)} c_i = 0$, где 0 — наименьший элемент $L(1)$, то число соответствующих решёток L равно числу решений уравнения $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$ в $L(1)$ и равно N, как показано в [3].

Теорема 5. *Пусть L — конечная дистрибутивная решётка, B_n — булева решётка, порождённая атомами L, $L(1)$ — класс эквивалентности наибольшего элемента $1 \in B_n$. Тогда максимальное число элементов решётки L равно*

$$2^{n-1} \,\mathrm{card}\, L(1) + 2^{n-1}. \tag{1}$$

Такое число элементов достигается в том случае, когда $n-1$ классов эквивалентности коатомов изоморфны $L(1)$.

Доказательство. Пусть B — булева решётка, порождённая атомами $L(1)$, $\tilde{1} \in B$ — наибольший элемент B, $L(\tilde{1})$ — класс эквивалентности элемента $\tilde{1} \in B$ в решётке $L(1)$. Пусть $c \in B_n$ — коатом B_n, $c \in C(B_n)$.

Если $c^{**} \vee 1 \notin L(\tilde{1})$, то существует такой $b \in B$, что $c^{**} \vee 1 \in L(b)$, где $L(b)$ — класс эквивалентности в $L(1)$. Если b' — дополнение b в B, то отображение $\varphi\colon \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant c^{**} \vee 1\} \to L(1)$, $\varphi(x) = x \vee b'$ — изоморфизм, поэтому

$$\mathrm{card}\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant c^{**} \vee 1\} \leqslant \frac{\mathrm{card}\, L(1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{card}\, L(c) \leqslant \frac{\mathrm{card}\, L(1)}{2}$$

в L.

Если существует k коатомов B $c_1, \ldots, c_k \in B$, таких что $c_i^{**} \vee 1 \notin L(\tilde{1})$, то $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} (c_i^{**} \vee 1) = 1$ и существует 2^{n-k} классов эквивалентности L, содержащих по одному элементу, 2^{n-k} классов эквивалентности L, содержащих не более чем $\operatorname{card} L(1)$ элементов и $2^n - 2^{n-k+1}$ классов эквивалентности L, содержащих не более чем $\operatorname{card} L(1)/2$ элементов. Поэтому общее число элементов L в этом случае не превосходит

$$2^{n-k} + 2^{n-k} \operatorname{card} L(1) + (2^n - 2^{n-k+1}) \frac{\operatorname{card} L(1)}{2} \leqslant 2^{n-1} \operatorname{card} L(1) + 2^{n-1}. \quad \square$$

Следствие 5. *Пусть остов L есть ординальная сумма $B_{n_1} \oplus \ldots \oplus B_{n_r}$, где $n_1 = \ldots = n_r = k$. Тогда максимальное число элементов L равно*

$$\frac{2^{k-1}(2^{r(k-1)} - 1)}{2^{k-1} - 1} + 2^{r(k-1)}. \tag{2}$$

Доказательство. Для $r = 1$ число элементов L равно 2^k. Считая, что формула (2) верна для r, используя (1), легко показать, что она верна для $r+1$. $\square$

По поводу этого результата см. [4, гл. 3, упр. 18].

Отношением непересечения на L назовём такое отношение R, что $a\ R\ b$ равносильно $a \wedge b \neq 0$. Антицепь по отношению непересечения — это множество $M \subset L$, такое что $a \wedge b \neq 0$ для любых $a, b \in M$. Антицепь называется максимальной, если она содержит наибольшее число элементов на множестве всех антицепей. Обозначим через $\operatorname{card} M$ число элементов в максимальной антицепи.

Теорема 6. *Пусть $a \in L$ — атом конечной дистрибутивной решётки L. Тогда*

$$\operatorname{card} M = \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \max\bigl(\operatorname{card} L(b), \operatorname{card} L(b')\bigr),$$

где B — булева решётка, порождённая атомами L и максимальная антицепь по отношению непересечения определена следующими условиями: для всех $b \in B$ если $\operatorname{card} L(b) > \operatorname{card} L(b')$, то $L(b) \subset M$, если $\operatorname{card} L(b) = \operatorname{card} L(b')$, то M принадлежит тот класс эквивалентности, который содержит a.

Доказательство. Ясно, что если M принадлежит один из элементов класса эквивалентности, то весь класс принадлежит M. Покажем, что если $b, c \in B$, $b \in M$ и $b \leqslant c$, то $c \in M$.

Пусть $b \leqslant c$, $b \in M$. Тогда, учитывая следствие 3, имеем $c' \leqslant b'$, $\operatorname{card} L(c) \geqslant \operatorname{card} L(b) \geqslant \operatorname{card} L(b)' \geqslant \operatorname{card} L(c')$.

Если $\operatorname{card} L(c) > \operatorname{card} L(c')$, то $c \in M$.

Если $\operatorname{card} L(c) = \operatorname{card} L(c')$, то $\operatorname{card} L(b) = \operatorname{card} L(b')$, $a \leqslant b$, $a \leqslant c$, $c \in M$.

Если $a, b \in B, M$ и $a \wedge b = 0$, то $a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee b') = a \wedge b'$, $a \leqslant b'$ и, следовательно, $b' \in M$ — противоречие. Поэтому M — антицепь по отношению непересечения. Так как любая антицепь по отношению непересечения не может содержать одновременно a и a' , то M максимальна. $\square$

Для прямого произведения цепей аналог теоремы 6 получен в [5].

Отношение сравнения — это такое отношение S, что $a\ S\ b$ равносильно $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.

Теорема 7. *Все элементы конечной дистрибутивной решётки можно разбить на пары по отношению сравнения за исключением, может быть,* $0 \in L$.

Доказательство. Для булевой решётки B_n представление в виде прямого произведения $B_n = B_{n-1} \times B_1$ даёт разбиение на пары $(x, 0)$ и $(x, 1)$. Далее по индукции считаем, что все элементы классов эквивалентности, за исключением одного или двух элементов, разбиты на пары. Таким образом, остаётся неразбитой булева решётка B_n и для $b \in B_n$, может быть, $x \in L$, $b \leqslant x$ (для $0 \in B_n$ такого $x \in L$ нет). Легко показать, что оставшиеся элементы можно разбить на пары так, что останется булева решётка B_{n-1} с меньшим числом атомов и для $b \in B_{n-1}$, может быть, $x \in L$, $b \leqslant x$ (для $0 \in B_{n-1}$ такого $x \in L$ нет). В конечном итоге можно разбить все элементы L на пары по отношению сравнения, за исключением, может быть, $0 \in L$. □

Теорема 8. *Пусть конечная дистрибутивная решётка L представлена, как в теореме 3, в виде множества упорядоченных пар (b, x), $b \in B$, $x \in L(1)$. Тогда справедливо следущее утверждение. Пусть θ — когруэнция на B и Φ — когруэнция на $L(1)$. Определим отношение $\theta \times \Phi$ на L следующим образом: для $(a, b), (c, d) \in L$*

$$(a, b) \equiv (c, d)(\theta \times \Phi) \Longleftrightarrow a \equiv c(\theta) \text{ и } b \equiv d(\Phi).$$

Тогда $\theta \times \Phi$ — конгруэнция на L.

Обратно, любая конгруэнция на L представима в таком виде.

Доказательство. Учитывая, что если $(b_1, x_1), (b_2, x_2) \in L$, то $(b_1 \wedge b_2, x_1 \wedge x_2) \in L$, легко проверить непосредственно, что $\theta \times \Phi$ — конгруэнция.

Пусть теперь ψ — конгруэнция на L. Для $a, b \in B$ полагаем, что $a \equiv b(\theta)$ тогда и только тогда, когда $(a, c) \equiv (b, c)(\psi)$ для некоторого $c \in L(1)$.

Если 0 — наименьший элемент $L(1)$, то $(a \vee b, 0) \in L$. Пересекая этот элемент с последним сравнением, получаем $(a, 0) \equiv (b, 0)(\psi)$. Если $(a, d), (b, d) \in L$, то $(a \wedge b, d) \in L$. Объединяя этот элемент с последним сравнением, получаем, что $(a, d) \equiv (b, d)(\psi)$.

Таким образом, сравнение $(a, c) \equiv (b, c)(\psi)$ для некоторого $c \in L(1)$ эквивалентно сравнению $(a, c) \equiv (b, c)(\psi)$ для всех $c \in L(1)$, таких, что $(a, c)(b, c) \in L$.

Аналогично для $a, b \in L$ определим, что $a \equiv b(\Phi)$ тогда и только тогда, когда $(c, a) \equiv (c, b)(\psi)$, $c \in B$.

Если 1 — наибольший элемент B, то $(1, a), (1, b) \in L$, $(1, a \vee b) \in L$. Пересекая последний элемент с последним сравнением, получаем, что $(1, a) \equiv (1, b)(\psi)$. Если $(d, a), (d, b) \in L$, то $(d, a \wedge b) \in L$, и, пересекая этот элемент с последним сравнением, получаем, что $(d, a) \equiv (d, b)(\psi)$.

Таким образом, сравнение $(c, a) \equiv (c, b)(\psi)$ для некоторого $c \in B$ эквивалентно сравнению $(c, a) \equiv (c, b)$ для всех $c \in B$. Легко убедиться, что θ, Φ — конгруэции.

Пусть $(a, b) \equiv (c, d)(\theta \times \Phi)$. Тогда $(a, 0) \equiv (c, 0)(\psi)$. Объединяя последнее сравнение с (a, b) и (c, d), получаем, что $(a, b) \equiv (a \vee c, b)(\psi)$, $(a \vee c, d) \equiv (c, d)(\psi)$. Так как $b = d(\Phi)$, то $(a \vee c, d) \equiv (a \vee c, d)(\psi)$. Поэтому $(a, b) \equiv (c, d)(\psi)$.

Обратно, пусть $(a, b) \equiv (c, d)(\psi)$. Пересекая последнее сравнение с элементом $(a \vee c, 0)$ и объединяя последнее сравнение с элементом $(1, b \wedge d)$, получаем, что $(a, 0) \equiv (c, 0)(\psi)$, $(1, b) \equiv (1, d)(\psi)$, $a \equiv c(\theta)$, $b \equiv d(\Phi)$. Поэтому $(a, b) \equiv \equiv (c, d)(\theta \times \Phi)$, что доказывает равенство $\psi = \theta \times \Phi$. $\square$

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[3] Маренич Е. Е. Перечисление решений некоторых уравнений в конечных решётках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1997. — № 3. — С. 16—21.

[4] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.

[5] Erdős P., Herzog M., Schönheim J. An extremal problem on the set of noncoprime divisors of a number // Israel J. Math. — 1970. — Vol. 408, no. 4. — P. 408—412.