Разностное свойство для функций с ограниченными вторыми разностями на аменабельных топологических группах*

А. И. ШТЕРН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
e-mail: ashtern@member.ams.org

УДК 512.546+517.986.6+512.815.1

Ключевые слова: топологическая группа, разностное свойство, аддитивная функция.

Аннотация

Пусть G — топологическая группа. Для функции $f\colon G\to\mathbb{R}$ и элемента $h\in G$ определим правую разностную функцию $\Delta_h f$ формулой $\Delta_h f(g)=f(gh)-f(g)$ ($g\in G$). Функция $H\colon G\to\mathbb{R}$ называется аддитивной, если она удовлетворяет функциональному уравнению $H(g+h)=H(g)+H(h)$ для любых $g,h\in G$. Класс F вещественнозначных функций, определённых на G, называется имеющим разностное свойство, если для любой функции $f\colon G\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\Delta_h f\in F$ для любого $h\in G$, существует такая аддитивная функция H, что $f-H\in F$. Гипотеза П. Эрдёша, утверждающая, что класс непрерывных функций на $\mathbb{R}$ имеет разностное свойство, была доказана Н. Г. де Брюйном; позже Ф. В. Кэрролл и Ф. С. Кёль доказали аналогичное утверждение для компактных абелевых групп и, при дополнительных предположениях, для компактных метрических групп, а именно в предположении, что все функции вида $\nabla_h f(g)=f(hg)-f(g)$, $g\in G$, измеримы по Хаару для любого $h\in G$. Одно из следствий этого предположения — ограниченность функции $\{g,h\}\mapsto f(gh)-f(g)-f(h)+f(e)$, $g,h\in G$, для любой такой функции f на компактной группе G, что разностная функция $\Delta_h f$ непрерывна на группе G для любого $h\in G$ и функции $\nabla_h f$ измеримы по Хаару для любого $h\in G$ (e — единица группы G). В статье рассматривается разностное свойство в более слабом дополнительном предположении, что функция $\{g,h\}\mapsto f(gh)-f(g)-f(h)+f(e)$, $g,h\in G$, является ограниченной. Это предположение позволяет получить результаты о разностном свойстве не только для групп, но и для функций на однородных пространствах.

Abstract

A. I. Shtern, A difference property for functions with bounded second differences on amenable topological groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 227—235.

Let G be a topological group. For a function $f\colon G\to\mathbb{R}$ and $h\in G$, the right difference function $\Delta_h f$ is defined by $\Delta_h f(g)=f(gh)-f(g)$ ($g\in G$). A function $H\colon G\to\mathbb{R}$ is

*Исследование поддержано грантом РФФИ 11-01-00057-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 227—235.
© 2014 *Издательский дом «Открытые системы»*

said to be additive if it satisfies the Cauchy functional equation $H(g+h) = H(g)+H(h)$ for every $g, h \in G$. A class F of real-valued functions defined on G is said to have the difference property if, for every function $f\colon G \to \mathbb{R}$ satisfying $\Delta_h f \in F$ for every $h \in G$, there is an additive function H such that $f - H \in F$. The Erdős conjecture claiming that the class of continuous functions on $\mathbb{R}$ has the difference property was proved by de Bruijn; later on, Carroll and Koehl proved a similar result for the compact Abelian groups and, under an additional assumption, for the compact metric groups, namely, under the assumption that all functions of the form $\nabla_h f(g) = f(hg) - f(g)$, $g \in G$, are Haar measurable for every $h \in G$. One of the consequences of this assumption is the boundedness of the function $\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e)$, $g, h \in G$, for every function f on a compact group G for which the difference functions $\Delta_h f$ are continuous for every $h \in G$ and the functions $\nabla_h f$ are Haar measurable for every $h \in G$ (e stands for the identity element of the group G). In the present paper, we consider the difference property under the very strong assumption that the function $\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e)$, $g, h \in G$, is bounded. This assumption enables us to obtain results concerning difference properties not only for functions on groups but also for functions on homogeneous spaces.

Дорогому Виктору Николаевичу Латышеву
с поздравлениями с 80-летием

1. Введение

Пусть G — топологическая группа. Для функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ и для $h \in G$, (*правая*) *разностная функция* $\Delta_h f$ определяется правилом

$$\Delta_h f(x) = f(xh) - f(x) \quad \text{для любого} \quad x \in G. \tag{1}$$

Даже если все такие функции на G непрерывны, f не обязательно сама непрерывна. Действительно, например, как хорошо известно, для группы $G = \mathbb{R}$ функциональное уравнение

$$H(x+y) = H(x) + H(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

имеет неизмеримые решения, в то время как при $f = H$ любая разностная функция $\Delta_h f$ постоянна и a fortiori непрерывна. Напомним, что функция $H\colon G \to \mathbb{R}$ называется *аддитивной*, если она удовлетворяет функциональному уравнению Коши

$$H(x+y) = H(x) + H(y) \quad \text{для любого} \quad x, y \in G.$$

Класс F вещественнозначных функций, определённых на G, называется имеющим *разностное свойство*, если для любой функции $f\colon G \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей $\Delta_h f \in F$ для любого $h \in G$, существует такая аддитивная функция H, что $f - H \in F$.

Гипотеза П. Эрдёша [8], утверждающая, что класс непрерывных функций на $\mathbb{R}$ имеет разностное свойство, была доказана Н. Г. де Брюйном [4] (а разностное свойство родственного класса интегрируемых по Риману функций было доказано в [5]); позже Ф. В. Кэрролл [6] и Ф. В. Кэрролл и Ф. С. Кёль [13] получили аналогичный результат для компактной абелевой группы (см. также [12]) и распространили разностное свойство на компактные метрические группы [7]. Соответствующие результаты для классов измеримых функций, интегрируемых по Лебегу функций и измеримых по Бэру функций более специальны [3, 10, 11, 14] и нуждаются в конструкции Серпинского [17, с. 135], в то время как, скажем, класс почти всюду непрерывных функций на вещественной прямой имеет разностное свойство [15].

Следует отметить, что разностное свойство для компактной абелевой группы было доказано в [6] по плану исходного доказательства Н. Г. де Брюйна для $\mathbb{R}$. В неабелевом случае при дополнительном предположении, что все *левые разностные функции* вида $\nabla_h f(g) = f(hg) - f(g)$, $g \in G$, измеримы по Хаару для любого $h \in G$. Ф. В. Кэрролл доказал, что для любой функции f на компактной группе G, для которой правая разностная функция $\Delta_h f$ непрерывна для любого $h \in G$ и любая левая разностная функция $\nabla_h f$ измерима по Хаару для любого $h \in G$ (e — единица группы G), функция

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

является ограниченной.

В настоящей работе мы рассматриваем разностную задачу (т. е. задачу о наличии разностного свойства) без предположения измеримости левых разностных функций и рассматриваем функции f, для которых вторая разность

$$\begin{aligned}\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e) = \Delta_h f(g) - \Delta_h f(e) = \\ = \big(\Delta_g(\Delta_h f)\big)(e), \quad g, h \in G, \quad (2)\end{aligned}$$

является ограниченной функцией. (Напомним, что ограниченность этой функции следует из предположений Ф. В. Кэрролла; отметим также, что из нашего более слабого предположения немедленно следует, что функция f является ограниченной на каждом классе сопряжённых элементов в G.)

Наши результаты выглядят следующим образом. В силу сказанного выше теорема 1.1 может рассматриваться как некоторое обобщение соответствующей теоремы Кэрролла [6, теорема 2.1].

Теорема 1.1 (ср. [6]). *Пусть G — компактная топологическая группа, а f — вещественнозначная функция на G, для которой правые разностные функции $\Delta_h f$ (см. (1)) непрерывны на G для любого $h \in G$ и функция*

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

является ограниченной. Тогда f — сумма аддитивной функции и вещественнозначной непрерывной функции на G, $f = H + \varphi$, где $\varphi \in C(G)$ и $H(gh) = H(g) + H(h)$, $g, h \in G$.

Теорема 1.2. *Пусть G — топологическая группа, $\mathrm{CB}(G)$ — семейство непрерывных ограниченных вещественнозначных функций на G, и пусть существует правоинвариантное среднее I на $\mathrm{CB}(G)$, т. е. I — среднее на $\mathrm{CB}(G)$ и $I(f_h) = I(f)$ для $f \in \mathrm{CB}(G)$ и $f_h(g) = f(gh)$, $h, g \in G$. Пусть f — вещественнозначная функция на G, для которой правая разностная функция $\Delta_h f$*

(см. (1)) *принадлежит* $\mathrm{CB}(G)$ *для любого* $h \in G$, *и пусть функция*

$$\{g,h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g,h \in G,$$

является ограниченной на $G \times G$. *Тогда* f — *сумма аддитивной вещественнозначной функции на* G *и вещественнозначной непрерывной функции на* G, $f = H + \varphi$, где $\varphi \in \mathrm{CB}(G)$, *а* H *аддитивна, т. е.*

$$H(gh) = H(g) + H(h), \quad g,h \in G. \tag{3}$$

Теорема 1.3. *Пусть* G — *простая компактная связная группа Ли, пусть* f — *вещественнозначная функция на* G, *для которой правая разностная функция* $\Delta_h f$ (см. (1)) *непрерывна для любого* $h \in G$, *и пусть функция*

$$\{g,h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g,h \in G,$$

является ограниченной на $G \times G$. *Тогда* f — *непрерывная функция на* G.

Теорема 1.4. *Пусть* $X = K \setminus G$ — *однородное пространство простой компактной связной группы Ли* G *по замкнутой (не обязательно нормальной) подгруппе* K *в* G, *пусть* f — *вещественнозначная функция на* X, *для которой правые разностные функции* $\Delta_h f(x) = f(xh) - f(x)$, $h \in G$, *непрерывны на* X *для любого* $h \in G$, *и пусть функция*

$$\{g,h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \qquad g,h \in G,$$

ограничена на $G \times G$ *для некоторого (или, что равносильно, для любого)* $x \in X$. *Тогда* f — *непрерывная функция на* X.

Остается неясным, верны ли эти четыре утверждения без предположения, что функция вида $\Delta_g \Delta_h f$ (см. (2)) является ограниченной по g и h хотя бы в одной точке. В частности, результаты [16] не следует понимать буквально; они становятся верными при дополнительном предположении, что функция вида (2) является ограниченной.

2. Предварительные сведения

Лемма 2.1 (ср. [6, лемма 2.2]). *Пусть* f — *функция, определённая на открытом подмножестве* A *топологической группы* G, *и пусть* $\Delta_h f$ *непрерывна на* $A \cap (Ah^{-1})$ *для всех* h *в некоторой открытой окрестности элемента* e *в* G. *Если есть точка* $g_0 \in A$, *в которой* f *разрывна, то* f *не ограниченная в любой окрестности элемента* g_0.

Доказательство. Пусть $F = f - f(e)$. Если F разрывна в g_0, то, скажем, F разрывна сверху и существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой окрестности $V(e)$ единицы $e \in G$ и для такой окрестности $V_n = V_n(e)$, что $V_n^2 \subset V_{n-1}$, $V_1 = V(e)$, существует точка $g_n' \in V_n$, для которой

$$F(g_0 g_n') > F(g_0) + \varepsilon.$$

Кроме того, по предположению непрерывности для правых разностей функции F есть такая окрестность $W(e) = W$, что

$$|F(wg) - F(w)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $w \in W$. Мы можем считать, что $V(e) \subset W$, и тогда для

$$g_n = g_2' g_3' \cdots g_n' \in V_2 V_3 \cdots V_n \subset V_2 V_3 \cdots V_{n-1}^2 \subset V_2^2 \subset V_1$$

выполняются неравенства

$$F(g_0 g_n) = F(g_0 g_{n-1} g_n') > F(g_0 g_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

и тем самым

$$F(g_0 g_n) > F(g_0) + (n-1)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Если F разрывна снизу, можно заменить F на $-F$ или повторить рассуждение. □

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1.1. Если функция

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

ограниченная и функции $\Delta_h f$, определённые правилом

$$\Delta_h f(g) = f(gh) - f(g), \quad g \in G,$$

непрерывны для любого $h \in G$, то для любого $h \in G$ функция

$$\{g\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g \in G,$$

непрерывна. Интегрируя эту функцию по мере Хаара по переменной $g \in G$, мы видим, что функция φ, определённая формулой

$$\varphi(h) = \int_G \big(f(gh) - f(g) - f(h) + f(e)\big)\, dg, \quad h \in G, \tag{4}$$

является ограниченной вместе с подынтегральным выражением. Кроме того, функция

$$H(h) = \int_G \big(f(gh) - f(g)\big)\, dg$$

аддитивна, поскольку

$$\begin{aligned} H(h_1 h_2) &= \int_G \big(f(gh_1h_2) - f(g)\big)\, dg = \\ &= \int_G \big(f(gh_1h_2) - f(gh_1) + f(gh_1) - f(g)\big)\, dg = H(h_2) + H(h_1) \end{aligned} \tag{5}$$

для любых $h_1, h_2 \in G$ ввиду инвариантности меры Хаара. Таким образом,

$$\varphi(h) = H(h) - f(h) + f(e) = \psi(h) - \psi(e),$$

где $\psi(h) = -H(h) + f(h)$, и $\psi(h) - \psi(e)$ ограниченная на G. По лемме, приведённой выше, ψ не имеет точек разрыва, т. е. ψ непрерывна на G, и $f = \psi + H$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть предположения теоремы 1.2 выполняются для топологической группы G и для вещественнозначной функции f на G, для которой правая разностная функция $\Delta_h f$ принадлежит $\mathrm{CB}(G)$ для любого $h \in G$. Пусть функция

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

является ограниченной на $G \times G$. Так как для любого $h \in G$ функция

$$g \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g \in G,$$

лежит в $\mathrm{CB}(G)$ по условию, то из существования инвариантного среднего следует, что среднее $H(h) = I_{g\in G}\big(f(gh) - f(g)\big)$ корректно определено для любого $h \in G$ и функция $h \mapsto H(h) - f(h) + f(e)$ ограниченная. Из инвариантности среднего I следует, что

$$\begin{aligned} H(h_1h_2) &= I_{g\in G}\big(f(gh_1h_2) - f(g)\big) = I_{g\in G}\big(f(gh_1h_2) - f(gh_1) + f(gh_1) - f(g)\big) = \\ &= I_{g\in G}\big((\Delta_{h_2} f)(gh_1) + \Delta_{h_1} f(g)\big) = I_{g\in G}\big((\Delta_{h_2} f)_{h_1}(g) + (\Delta_{h_1} f)(g)\big) = \\ &= H(h_2) + H(h_1), \end{aligned}$$

т. е. H — аддитивная функция (см. (3)), а функция $h \mapsto \big(H(h) - f(h)\big) - \big(H(e) - f(e)\big)$ ограниченная. По лемме 2.1 разность $\psi = f - H$ непрерывна. Так как $f - H$ ограниченная, то $\psi \in \mathrm{CB}(G)$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Пусть предположения теоремы 1.3 выполняются для простой компактной связной группы Ли G, пусть f — функция на G, для которой правая разностная функция $\Delta_h f$ (см. (1)) непрерывна на G для любого $h \in G$, и пусть функция

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

является ограниченной на $G \times G$. По теореме 1.1 существует такая аддитивная функция H на G (т. е. функция, удовлетворяющая (3)), что $f - H$ непрерывна на G. Однако, как хорошо известно, любое локально ограниченное (в частности, любое унитарное) конечномерное представление простой компактной группы Ли непрерывно (см., например, [2]). В частности, одномерные представления вида $g \mapsto \exp\big(i\alpha H(g)\big)$, $g \in G$, унитарны для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и, следовательно, непрерывны, а поэтому тривиальны, $\exp\big(i\alpha H(g)\big) = 1$ для любого $g \in G$. Таким образом, $H(g) = 0$ для любого $g \in G$, и f сама непрерывна, что завершает доказательство теоремы (о вещественных характерах см., например, [1, 24.43]). $\square$

Доказательство теоремы 1.4. Пусть предположения теоремы 1.4 выполняются для простой компактной связной группы Ли G, пусть K — (не обязательно нормальная) замкнутая подгруппа группы G, и пусть $X = K\backslash G$ — соответствующее однородное пространство группы G. Пусть f — функция на X, для которой правые разностные функции $\Delta_h f(x) = f(xh) - f(x)$, $h \in G$, непрерывны на X для любого $h \in G$, и пусть функция

$$\{g, h\} \mapsto f(xgh) - f(xg) - f(xh) + f(x), \quad g, h \in G, \tag{6}$$

является ограниченной на $G \times G$ для некоторого $x \in X$. Заметим, что это условие равносильно условию, что функция

$$\{g, h\} \mapsto f(ygh) - f(yg) - f(yh) + f(y), \quad g, h \in G, \tag{7}$$

является ограниченной на $G \times G$ для любого $y \in X$. Действительно, если $k \in G$ удовлетворяет условию $y = xk$, то функция (7) является разностью двух ограниченных функций,

$$\begin{aligned} f(ygh) - f(yg) - f(yh) + f(y) &= f(xkgh) - f(xkg) - f(xkh) + f(xk) = \\ = \big(f(x(kg)h) - f\big(x(kg)\big) - f(xh) + f(e)\big) &- \big(f(xkh) - f(xk) - f(xh) + f(e)\big). \end{aligned}$$

Поэтому без потери общности мы можем предположить, что точка x соответствует единице $e \in G$ при естественном отождествлении элементов $y \in X$ с правыми смежными классами Kg по правилу $xg = y$. Введём функцию F на G по формуле $F(g) = f(xg)$, $g \in G$. Тогда F — функция на G, для которой функция

$$\{g, h\} \mapsto f(gh) - f(g) - f(h) + f(e), \quad g, h \in G,$$

ограниченная, а правые разностные функции

$$\Delta_h F(g) = F(gh) - F(g) = f(xgh) - f(xg) = (\Delta_h f)(xg), \quad h \in G,$$

непрерывны на G как композиции непрерывного отображения $X \times G \to X$, определённого действием $\{x, g\} \mapsto xg$, и непрерывных функций $\Delta_h f$, $h \in G$, на X. По теореме 1.3 F непрерывна на G. Поэтому f непрерывна на X, что завершает доказательство теоремы. $\square$

4. Применения

Один из самых наглядных примеров связан со сферой размерности не меньше 2. Группа вращений естественно действует на сфере и, если функция f на сфере имеет непрерывные разностные функции при вращениях и удовлетворяет условию ограниченности функций вида (6), то f непрерывна. Остаётся неясным, существенно ли условие, что функция (6) ограниченная.

5. Обсуждение

Замечание 1. Разностная задача в приведённой постановке для компактных топологических групп (без дополнительных предположений ограниченности) остается открытой.

Замечание 2. Следует отметить, что при дополнительном более сильном предположении ограниченности самой функции f, разностное свойство которой (а не второй разности f, как выше) рассматривается, изучение разностного свойства является весьма частным случаем следующей более общей задачи. Пусть G — топологическая группа, π — представление G в некотором векторном пространстве E и представление π имеет ненулевой инвариантный вектор (т. е. содержит ненулевое кратное одномерного единичного представления группы G). Если L — инвариантное подпространство в E, можно спросить, следует ли из условия $\pi(g)\xi - \xi \in L$ для всех $g \in G$ и для данного ненулевого вектора $\xi \in E$, что $\xi \in L$ или $\xi \in L \dotplus M$ для некоторого специального подпространства M в E. В задаче о разностном свойстве для ограниченных функций роли очевидны, а именно E — пространство всех ограниченных вещественнозначных функций на данной группе, π — правое регулярное представление G на пространстве E (т. е. представление правыми сдвигами), L — пространство непрерывных функций на G (в рассматриваемых выше случаях).

Литература

[1] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1975; Т. 2. — М.: Мир, 1975.

[2] Штерн А. И. Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп // Изв. РАН. Сер. мат. — 2008. — Т. 72, № 1. — С. 183—224.

[3] Balcerzak M., Kotlicka E., Wojdowski W. Difference functions for functions with the Baire property // Aequationes Math. — 1999. — Vol. 57, no. 2-3. — P. 278—287.

[4] De Bruijn N. G. Functions whose differences belong to a given class // Nieuw Arch. Wisk. (2). — 1951. — Vol. 23. — P. 194—218.

[5] De Bruijn N. G. A difference property for Riemann integrable functions and for some similar classes of functions // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. — 1952. — Vol. 55; Indag. Math. — 1952. — Vol. 14. — P. 145—151.

[6] Carroll F. W. Difference properties for continuity and Riemann integrability on locally compact groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — Vol. 102. — P. 284—292.

[7] Carroll F. W., Koehl F. S. Difference properties for Banach-valued functions on compact groups // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. — 1969. — Vol. 72. — P. 327—332.

[8] Erdős P. A theorem on the Riemann integral // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. — 1952. — Vol. 55; Indag. Math. — 1952. — Vol. 14. — P. 142—144.

[9] Hofmann K.-H., Morris S. A. The Structure of Compact Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1998.

[10] Keleti T. Difference functions of periodic measurable functions: Ph.D. thesis. — Budapest: Eőtvős Loránd Univ., 1996. — http://www.cs.elte.hu/phd_th/.

[11] Keleti T. Difference functions of periodic measurable functions // Fund. Math. — 1998. — Vol. 157. — P. 15—32.

[12] Kemperman J. H. B. A general functional equation // Trans. Am. Math. Soc. — 1957. — Vol. 86. — P. 28—56.

[13] Koehl F. S. Difference properties for Banach-valued functions // Math. Ann. — 1969. — Vol. 181. — P. 288—296.

[14] Laczkovich M. Functions with measurable differences // Acta Math. Hungar. — 1980. — Vol. 35. — P. 217—235.

[15] Laczkovich M. On the difference property of the class of pointwise discontinuous functions and of some related classes // Can. J. Math. — 1984. — Vol. 36, no. 4. — P. 756—768.

[16] Shtern A. I. A very strong difference property for semiпростая compact connected Lie groups // Russ. J. Math. Phys. — 2011. — Vol. 18, no. 2. — P. 211—215.

[17] Sierpiński W. Hypothèse du continu. — Warsaw: Subwenc. Fund. Kultur. Narod., 1934.