Многосортная логика, модели и логическая геометрия

Е. АЛАДОВА
Университет имени Бар-Илана, Рамат Ган, Израиль,
Пензенский государственный университет
e-mail: aladovael@mail.ru

А. ГВАРАМИЯ
Абхазский государственный университет, Сухуми, Абхазия

Б. ПЛОТКИН
Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль
e-mail: plotkin@macs.biu.ac.il

Т. ПЛОТКИН
Университет имени Бар-Илана, Рамат Ган, Израиль

УДК 510.6

Ключевые слова: многосортная логика, модель, изоморфизм.

Аннотация

Пусть Θ — многообразие алгебр, (H, Ψ, f) — модель, где H — алгебра из Θ, Ψ — множество символов отношений φ, f — интерпретация всех φ в H. Пусть X^0 — бесконечное множество переменных, Γ — множество всех конечных подмножеств в X^0 (множество сортов), $\tilde{\Phi}$ — многосортная алгебра формул. Эти данные определяют базу знаний $\mathrm{KB}(H, \Psi, f)$. В статье рассматривается понятие изоморфизма баз знаний. Приводятся условия на модели, которые являются достаточными условиями изоморфизма баз знаний. Изучается также вопрос нахождения необходимых и достаточных условий, обеспечивающих изоморфизм баз знаний.

Abstract

E. Aladova, A. Gvaramia, B. Plotkin, T. Plotkin, Multi-sorted logic, models, and logical geometry, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 3, pp. 5—22.

Let Θ be a variety of algebras, (H, Ψ, f) be a model, where H is an algebra from Θ, Ψ is a set of relation symbols φ, f is an interpretation of all the symbols φ in H. Let X^0 be an infinite set of variables, Γ be the collection of all finite subsets in X^0 (the collection of sorts), and $\tilde{\Phi}$ be the multi-sorted algebra of formulas. These data define a knowledge base $KB(H, \Psi, f)$. In this paper, the notion of isomorphism of knowledge bases is considered. We give sufficient conditions that provide isomorphism of knowledge bases. We also study the problem of necessary and sufficient conditions for isomorphism of two knowledge bases.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 3, с. 5—22.

1. Введение

Говоря о знании, мы исходим из его представления в виде трёх компонент.

1. *Описание знания* представляет собой синтаксический компонент знания. С алгебраической точки зрения описание знания — это набор формул T в алгебре формул $\Phi(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Сейчас мы только отметим, что $\Phi(X)$ является одним из доменов многосортной алгебры $\tilde{\Phi}$ (детали определения $\tilde{\Phi}$ см. в [2, 11, 14], а также в разделе 2.6).
2. *Предмет знания* представлен в виде модели (H, Ψ, f), где H — алгебра из фиксированного многообразия алгебр Θ, Ψ — множество символов отношений φ, f — интерпретация каждого φ в H.
3. *Содержание знания* — это подмножество в H^n, где H^n — декартова степень алгебры H. Каждое содержание знания A соответствует описанию знания $T \subset \Phi(X)$, $|X| = n$. Если рассматривать H^n как аффинное пространство, то это соответствие может быть задано геометрически (см. раздел 2.3).

Для описания динамической природы баз знаний вводятся две категории: категория описания знаний $\mathrm{F}_\Theta(f)$ и категория содержания знаний $\mathrm{LG}_\Theta(f)$. При определении этих категорий используется аппарат логической геометрии (см. разделы 2.4, 2.5 или [17]).

Следует подчеркнуть, что все используемые понятия относятся к произвольным многообразием алгебр Θ, с которым связаны рассматриваемые алгебры, логика, геометрия базы знаний. Универсальная алгебраическая и логическая геометрии работают с произвольной алгеброй H из Θ, а логическая геометрия изучает также произвольные модели (H, Ψ, f), причём для каждого конкретного многообразия алгебр Θ возникают свои интересные проблемы и решения.

Предметом настоящей статьи является, в частности, изучение связи между изоморфизмами баз знаний и изотипностью предметов знаний.

Меняя многообразие Θ, мы приходим к множеству разных проблем. В частности, если Θ — многообразие всех квазигрупп, интересно понять, какова связь между изотопностью и изотипностью для квазигрупп [1, 18].

Статья состоит из двух частей. В первой части вводятся необходимые понятия логической геометрии, во второй части логическая геометрия рассматривается в контексте баз знаний. В частности, приводятся условия на модели, обеспечивающие изоморфизм соответствующих баз знаний.

2. Основные понятия

2.1. Точки и аффинные пространства

Пусть заданы алгебра $H \in \Theta$ и множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Мы будем представлять точку $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ как отображение $\mu\colon X \to H$, такое что

$a_i = \mu(x_i)$. Обозначим через H^n аффинное пространство, состоящее из таких точек.

Точка μ может быть представлена как гомоморфизм $\mu\colon W(X) \to H$, где $W(X)$ — свободная алгебра над множеством X в многообразии Θ. Таким образом, каждое аффинное пространство может быть рассмотрено как множество $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ всех гомоморфизмов из $W(X)$ в H.

Каждая точка μ, как гомоморфизм, имеет ядро $\mathrm{Ker}(\mu)$, которое является бинарным отношением на множестве $W(X)$. По определению элементы $w, w' \in W(X)$ находятся в отношении $\mathrm{Ker}(\mu)$ тогда и только тогда, когда $w^\mu = (w')^\mu$, где w^μ — обозначение для $\mu(w)$.

Мы будем рассматривать также логическое ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ точки μ. Формула $u \in \Phi(X)$ принадлежит $\mathrm{LKer}(\mu)$, если точка μ удовлетворяет формуле u.

2.2. Расширенные булевы алгебры

Нам понадобится понятие квантора существования на булевой алгебре. Пусть B — булева алгебра. Квантор существования на B — это унарная операция $\exists\colon B \to B$, такая что

1) $\exists\, 0 = 0$,
2) $a \leqslant \exists\, a$,
3) $\exists(a \wedge \exists\, b) = \exists\, a \wedge \exists\, b$.

Квантор всеобщности $\forall\colon B \to B$ дуален к $\exists\colon B \to B$, они связаны соотношением $\forall\, a = \neg\big(\exists(\neg a)\big)$.

Определение 2.1. Пусть заданы набор переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множество отношений Ψ. Булева алгебра B называется расширенной булевой алгеброй над $W(X)$, если

1) на B определены кванторы $\exists x$ для всех $x \in X$ так, что $\exists\, x\, \exists\, y = \exists\, y\, \exists\, x$ для всех $x, y \in X$;
2) каждому отношению $\varphi \in \Psi$ арности n_φ и набору элементов $w_1, \ldots, w_{n_\varphi}$ из $W(X)$ соответствует 0-арная операция (константа) вида $\varphi(w_1, \ldots, w_{n_\varphi})$ в алгебре B.

Таким образом, сигнатура L_X расширенной булевой алгебры состоит из булевых операций, кванторов $\exists\, x$ и констант $\varphi(w_1, \ldots, w_{n_\varphi})$:

$$L_X = \{\vee, \wedge, \neg, \exists\, x, M_X\},$$

где M_X — множество всех $\varphi(w_1, \ldots, w_{n_\varphi})$.

Одним из примеров расширенной булевой алгебры является алгебра формул $\Phi(X)$ (см. [2, 11, 14]). Формула $w \equiv w'$ — одна из констант, где в качестве φ берётся отношение равенства $\equiv$. В зависимости от контекста она будет называться равенством или уравнением.

Рассмотрим другой важный пример расширенной булевой алгебры. Пусть задана модель $(f) = (H, \Psi, f)$.

Возьмём аффинное пространство $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ и обозначим через $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ булеву алгебру всех его подмножеств.

Определим на этой алгебре квантор существования. Если A — элемент из $\mathrm{Bool}(W(X), H)$, то элемент $B = \exists x\ A$ определён по следующему правилу: точка μ принадлежит B, если существует точка $\nu \in A$, такая что $\mu(x') = \nu(x')$ для каждого $x' \in X$, $x' \neq x$.

Теперь определим константы на $\mathrm{Bool}(W(X), H)$. Для отношения $\varphi \in \Psi$ арности m обозначим через $[\varphi(w_1, \ldots, w_m)]_{(f)}$ множество в $\mathrm{Bool}(W(X), H)$, состоящее из всех точек $\mu\colon W(X) \to H$, удовлетворяющих отношению $\varphi(w_1, \ldots, w_m)$. Последнее означает, что $(w_1^\mu, \ldots, w_m^\mu)$ принадлежит множеству $f(\varphi)$ — подмножеству в H^m, состоящему из всех точек, находящихся в отношении φ при интерпретации f.

Обозначим полученную расширенную булеву алгебру через $\mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$. В частности, если Ψ состоит только из одного предиката равенства, то соответствующая алгебра обозначается $\mathrm{Hal}_\Theta^X(H)$.

В разделе 2.6 будет определён гомоморфизм между алгебрами $\Phi(X)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$

$$\mathrm{Val}_{(f)}^X\colon \Phi(X) \to \mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$$

со свойством

$$\mathrm{Val}_{(f)}^X\bigl(\varphi(w_1, \ldots, w_m)\bigr) = [\varphi(w_1, \ldots, w_m)]_{(f)}.$$

Этот гомоморфизм позволяет алгебраически определить такие понятия, как «точка удовлетворяет формуле» и «логическое ядро точки», и такой подход согласуется с индуктивным теоретико-модельным подходом (см. [7]).

Сейчас только отметим, что для формулы $u \in \Phi(X)$ её образ $\mathrm{Val}_{(f)}^X(u)$ определён как множество точек $\mu\colon W(X) \to H$, удовлетворяющих u. В этом случае формула $u \in \Phi(X)$ принадлежит логическому ядру $\mathrm{LKer}(\mu)$ точки $\mu\colon W(X) \to H$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \mathrm{Val}_{(f)}^X(u)$. Заметим также, что $\mathrm{LKer}(\mu)$ является булевым ультрафильтром в алгебре формул $\Phi(X)$, содержащим X-элементарную теорию $\mathrm{Th}^X(f)$ модели (H, Ψ, f). В этом смысле мы говорим, что $\mathrm{LKer}(\mu)$ есть LG-тип точки μ (см. [7] для теоретико-модельного определения типа и для определения LG-типа [19]). Напомним, что $\mathrm{Th}^X(f)$ состоит из всех $u \in \Phi(X)$, выполняющихся на любой точке $\mu\colon W(X) \to H$. Таким образом,

$$\mathrm{Th}^X(f) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H)} \mathrm{LKer}(\mu).$$

2.3. Соответствие Галуа

Определим теперь соответствие между множествами T формул вида $w \equiv w'$ в алгебре формул $\Phi(X)$ и множествами точек A из аффинного пространства $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Положим $T_H' = A$, где A состоит из всех точек $\mu\colon W(X) \to H$, таких что $T \subset \mathrm{Ker}(\mu)$. Другими словами, T'_H состоит из всех точек, удовлетворяющих всем формулам из T. Такое T'_H называется *алгебраическим множеством*, определённым множеством формул T.

С другой стороны, для заданного множества точек A определим множество формул T следующим образом:

$$T = A'_H = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{Ker}(\mu).$$

По определению T — конгруэнция, она называется *H-замкнутой конгруэнцией*, определённой множеством A. Можно проверить, что заданное соответствие между множествами формул вида $w \equiv w'$ из алгебры формул $\Phi(X)$ и множествами точек из аффинного пространства $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ является соответствием Галуа [6].

Теперь рассмотрим случай произвольного множества формул $T \subset \Phi(X)$. Пусть $T^L_{(f)} = A$ — множество всех точек $\mu\colon W(X) \to H$, таких что $T \subset \mathrm{LKer}(\mu)$. Множество $T^L_{(f)}$ называется *определимым множеством*, заданным множеством формул T. Пусть теперь A — произвольное множество точек из $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Положим

$$A^L_{(f)} = T = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{LKer}(\mu).$$

Непосредственная проверка показывает, что $u \in A^L_{(f)}$ тогда и только тогда, когда $A \subset \mathrm{Val}^X_{(f)}(u)$. Можно заметить, что $A^L_{(f)}$ является фильтром в $\Phi(X)$, такой фильтр называется *H-замкнутым фильтром*, определяемым множеством A.

Таким образом, описанные выше соответствия Галуа приводят к универсальной алгебраической геометрии, когда T является множеством равенств, и к логической геометрии, если T — произвольное множество формул.

Напомним, что множество A в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ Галуа-замкнуто, если, в зависимости от рассматриваемого соответствия Галуа, $A''_H = A$ или $A^{LL}_{(f)} = A$. Конгруэнция T на $W(X)$ Галуа-замкнута, если $T''_H = T$, фильтр T в $\Phi(X)$ Галуа-замкнут, если $T^{LL}_{(f)} = T$.

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие между алгебраическими множествами в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ и замкнутыми конгруэнциями на $W(X)$, между определимыми множествами в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ и замкнутыми фильтрами в расширенной булевой алгебре $\Phi(X)$.

2.4. Некоторые категории

В этом разделе мы определим различные категории, необходимые для дальнейших рассмотрений.

2.4.1. Категории Θ^0, $\tilde{\Phi}$ и $\Theta^*(H)$

Пусть задано бесконечное множество переменных X^0 и множество Γ конечных подмножеств множества X.

Обозначим через Θ^0 категорию всех свободных алгебр $W(X)$ из Θ, $X \in \Gamma$. Морфизмами этой категории являются гомоморфизмы $s\colon W(X) \to W(Y)$.

Вместе с алгебрами $W(X)$ мы рассмотрим алгебры формул $\Phi(X)$, которые тоже связаны с многообразием Θ. Мы определим категорию $\tilde{\Phi}$ всех $\Phi(X)$, $X \in \Gamma$, таким образом, что каждому морфизму $s\colon W(X) \to W(Y)$ соответствует морфизм $s_*\colon \Phi(X) \to \Phi(Y)$ и такое соответствие задаёт ковариантный функтор из Θ^0 в $\tilde{\Phi}$.

Определим теперь категорию $\Theta^*(H)$ аффинных пространств над алгеброй $H \in \Theta$. Объектами этой категории являются аффинные пространства $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, морфизмами — отображения

$$\tilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(X), H) \to \mathrm{Hom}(W(Y), H),$$

где

$$s\colon W(Y) \to W(X) —$$

морфизмы в категории свободных алгебр Θ^0.

Для точки $\mu\colon W(X) \to H$ точка $\nu = \tilde{s}(\mu)\colon W(Y) \to H$ определяется следующим образом:

$$\tilde{s}(\mu) = \mu s\colon W(Y) \to H,$$

т. е. $\nu(w) = \mu(s(w))$, $w \in W(Y)$.

Переходы $W(X) \to \mathrm{Hom}(W(X), H)$ и $s \to \tilde{s}$ определяют контравариантный функтор

$$\Theta^0 \to \Theta^*(H).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2 [8]. *Функтор $\Theta^0 \to \Theta^*(H)$ определяет двойственность категорий тогда и только тогда, когда алгебра H порождает всё многообразие алгебр Θ, т. е. $\Theta = \mathrm{Var}(H)$.*

2.4.2. Категории $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$

Для заданной модели (H, Ψ, f) определим две категории: $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. Первая категория связана с универсальной алгебраической геометрией, вторая — с логической геометрией.

Объектами этих категорий являются алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta^X(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$ соответствено. Отметим, что категории $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$ имеют разные объекты, так как множество констант в алгебрах $\mathrm{Hal}_\Theta^X(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$ разное (см. раздел 2.2).

Обозначим морфизмы обеих категорий одним символом s_*. Гомоморфизм $s\colon W(Y) \to W(X)$ определяет отображение

$$\tilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(X), H) \to \mathrm{Hom}(W(Y), H).$$

В свою очередь, $\tilde{s}$ определяет морфизм

$$s_*\colon \mathrm{Bool}(W(Y),H) \to \mathrm{Bool}(W(X),H)$$

по следующему правилу: для произвольного $B \subset \mathrm{Hom}(W(Y),H)$ положим

$$s_*B = \tilde{s}^{-1}(B) = A \subset \mathrm{Hom}(W(X),H).$$

Таким образом, A является полным прообразом B по отношению к $\tilde{s}$ и состоит из точек μ в $\mathrm{Hom}(W(X),H)$, таких что $\tilde{s}(\mu) = \mu s \in B$.

Мы хотим связать категории $\tilde{\Phi}$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. Допустим, что заданы $s\colon W(Y) \to W(X)$, $s_*\colon \Phi(Y) \to \Phi(X)$ и $v \in \Phi(Y)$.

Предложение 2.3. *Точка $\mu\colon W(X) \to H$ удовлетворяет формуле $u = s_*v$ тогда и только тогда, когда μs удовлетворяет формуле v.*

Доказательство. Фактически этот результат следует из аксиомы 5 в определении 2.9, регулирующей действие морфизма s_* на формулах вида $\varphi(w_1,\ldots,w_m)$. Остаётся заметить, что такие формулы свободно порождают $\tilde{\Phi}$ как многосортную алгебру формул (см. раздел 2.6 или [11]). □

Пусть A — множество точек, удовлетворяющих формуле $u = s_*v \in \Phi(X)$, B — множество точек, удовлетворяющих формуле $v \in \Phi(Y)$.

Предложение 2.4. *Обозначим $A_0 = s_*B = \tilde{s}^{-1}(B)$. Тогда $A_0 = A$.*

Доказательство. Пусть $\mu' \in \mathrm{Hom}(W(X),H)$ принадлежит $\tilde{s}^{-1}(B) = A_0$. По определению это означает, что $\tilde{s}(\mu') = \mu' s \in B$. Значит, $\mu' s$ удовлетворяет формуле v. По предложению 2.3 точка μ' удовлетворяет формуле u. Следовательно, $\mu' \in A$. □

Назовём множество A *s-замкнутым*, если $A_0 = A$, т. е. $s_*(\tilde{s}A) = A$. Из предложения 2.4 следует, что любое определимое множество s-замкнуто.

В результате мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Phi(Y) & \xrightarrow{s_*} & \Phi(X) \\ {\scriptstyle \mathrm{Val}^Y_{(f)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}^X_{(f)}} \\ \mathrm{Hal}_\Theta(f_2) & \xrightarrow{s_* = \tilde{s}^{-1}} & \mathrm{Hal}_\Theta(f_1) \end{array} . \qquad (1)$$

Коммутативность этой диаграммы означает, что если $v \in \Phi(Y)$, $u = s_*v \in \Phi(X)$, $A = \mathrm{Val}^X_{(f)}(u)$, $B = \mathrm{Val}^Y_{(f)}(v)$, то $\mathrm{Val}^X_{(f)}(s_*v) = s_*\,\mathrm{Val}^Y_{(f)}(v)$.

С точки зрения категорий коммутативная диаграмма (1) определяет ковариантный функтор из категории $\tilde{\Phi}$ в категорию $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. С точки зрения многосортных алгебр последнее равенство означает, что $\mathrm{Val}_{(f)}$ является гомоморфизмом многосортных алгебр Халмоша.

2.4.3. Категории $\mathrm{AG}_\Theta(H)$ и $\mathrm{LG}_\Theta(f)$

Первая категория связана с алгебраическими множествами в универсальной алгебраической геометрии, вторая — с определимыми множествами в логической геометрии.

Объектами категории $\mathrm{AG}_\Theta(H)$ являются наборы $\mathrm{AG}_\Theta^X(H)$ всех алгебраических множеств в пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ при фиксированном X. В силу естественного отношения порядка на множествах мы будем считать, что каждый объект $\mathrm{AG}_\Theta^X(H)$ является частично упорядоченным множеством.

Для заданного гомоморфизма $s\colon W(Y) \to W(X)$ морфизм

$$\tilde{s}_*\colon \mathrm{AG}_\Theta^X(H) \to \mathrm{AG}_\Theta^Y(H)$$

определяется следующим образом. Пусть A — алгебраическое множество в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Тогда $\tilde{s}_*A = B$ является алгебраическим множеством, задаваемым множеством точек вида $\nu = \mu s$, где $\mu \in A$. Другими словами, B является замыканием Галуа множества точек такого вида, т. е. $B = \tilde{s}_*A = (\tilde{s}A)''_H$. Определённые таким образом морфизмы сохраняют отношение частичного порядка.

Объектами категории категории $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ являются наборы всех определимых множеств в пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ при фиксированном X. Мы будем считать, что каждый объект $\mathrm{LG}_\Theta^X(f)$ является решёткой.

Зададим морфизмы в категории $\mathrm{LG}_\Theta(f)$:

$$\tilde{s}_*\colon \mathrm{LG}_\Theta^X(H) \to \mathrm{LG}_\Theta^Y(H).$$

Пусть A — определимое множество в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Тогда $\tilde{s}_*A = B$ является определимым множеством, задаваемым множеством точек вида $\nu = \mu s$, где $\mu \in A$. Другими словами, B является замыканием Галуа множества точек такого вида, т. е. $B = \tilde{s}_*A = (\tilde{s}A)^{LL}_{(f)}$.

2.4.4. Категории $\mathrm{C}_\Theta(H)$ и $\mathrm{F}_\Theta(f)$

Объектами категории $\mathrm{C}_\Theta(H)$ являются частично упорядоченные множества H-замкнутых конгруэнций на $W(X)$. Они находятся во взаимно-однозначном соответствии с объектами $\mathrm{AG}_\Theta^X(H)$. Зададим морфизмы в $\mathrm{C}_\Theta(H)$:

$$\hat{s}_*\colon \mathrm{C}_\Theta^Y(H) \to \mathrm{C}_\Theta^X(H),$$

определив отображения между H-замкнутыми конгруэнциями из $\mathrm{C}_\Theta^Y(H)$ и $\mathrm{C}_\Theta^X(H)$. Пусть T_2 является H-замкнутой конгруэнцией в $\mathrm{C}_\Theta^Y(H)$. Определим T_1 как H-замкнутую конгруэнцию в $\mathrm{C}_\Theta^X(H)$, заданную множеством всех равенств вида $s_*(w \equiv w')$ по всем $w \equiv w'$ из T_2. Другими словами, $T_1 = (s_*T_2)''_H$.

Объектами категории $\mathrm{F}_\Theta(f)$ являются решётки H-замкнутых фильтров. Мы определим морфизмы в $\mathrm{F}_\Theta(H)$

$$\hat{s}_*\colon \mathrm{F}_\Theta^Y(H) \to \mathrm{F}_\Theta^X(H),$$

задав отображения между H-замкнутыми фильтрами из $\mathrm{F}_\Theta^Y(H)$ и $\mathrm{F}_\Theta^X(H)$. Пусть T_2 — некоторый H-замкнутый фильтр в $\mathrm{F}_\Theta^Y(H)$. Определим T_1 как H-замкнутый фильтр из $\mathrm{F}^Y_\Theta(H)$, заданный набором формул вида $s_* v$ по всем v, лежащим в T_2, т. е. $T_1 = (s_* T_2)^{LL}_{(f)}$.

2.5. Связь между категориями $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ и $\mathrm{F}_\Theta(f)$

Мы хотим установить двойственность категорий $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ и $\mathrm{F}_\Theta(f)$. В силу соответствия Галуа имеется взаимно-однозначное соответствие между объектами этих категорий. Нашей целью является построение соответствия между морфизмами.

Пусть даны гомоморфизм $s\colon W(Y) \to W(X)$ и определимое множество точек B_0 из $\mathrm{Hom}(W(Y), H)$.

Зададим множество A_0 как полный прообраз B_0 по отношению к $\tilde{s}$, т. е. $A_0 = \tilde{s}^{-1}(B_0)$ (см. раздел 2.4.2). Пусть B — определимое множество, такое что $B = \tilde{s}_* A_0 = (\tilde{s} A_0)^{LL}$. Поскольку $\tilde{s} A_0 \subset B$, то $B = (\tilde{s} A_0)^{LL} \subset B_0^{LL} = B_0$.

Определим H-замкнутый фильтр T_2 как $T_2 = B^L$. В свою очередь, s_* и T_2 определяют H-замкнутый фильтр $T_1 = (s_* T_2)^{LL} = \hat{s}_* T_1$. Пусть, наконец, $A = T_1^L$.

Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} T_2 & \xrightarrow{\hat{s}_*} & T_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{Val}^Y_{(f)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}^X_{(f)}} \\ B & \xleftarrow{\tilde{s}_*} & A \end{array} . \tag{2}$$

Действительно, поскольку объекты A_0, B, T_2, T_1 определяются с помощью B_0 и $s\colon W(Y) \to W(X)$ единственным образом, для проверки коммутативности достаточно убедиться, что $A_0 = A$. Это равенство следует из предложения 2.4.

Более подробно, $\mu \in A_0$ тогда и только тогда, когда $\mu s \in B$. В свою очередь, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда μs удовлетворяет каждой формуле $v \in T_2$. По предложению 2.3 μs удовлетворяет $v \in T_2$ тогда и только тогда, когда μ удовлетворяет $u = s_* v \in T_1$. Так как A состоит из всех точек, удовлетворяющих всем $u = s_* v \in T_1$, то $A_0 = A$.

Из диаграммы (2) следует, что для любой формулы $v \in T_2$ имеет место соотношение
$$\mathrm{Val}^Y_{(f)} = \tilde{s}_* \mathrm{Val}^X_{(f)} s_*.$$

Определение 2.5. Отображение $\alpha\colon A \to B$ определимых множеств называется *обобщённо регулярным*, если существует отображение $\tilde{s}_*\colon A \to B$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме (2), такое что $\alpha(\mu) = \tilde{s}_*(\mu)$ для всех $\mu \in A$.

По определению отображения $\tilde{s}_*$ образ определимого множества относительно обобщённо регулярного отображения является определимым множеством. Таким образом, $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ — это категория решёток определимых множеств с обобщённо регулярными отображениями в качестве морфизмов.

Подобный подход работает и для категории алгебраических множеств $\mathrm{AG}_\Theta(H)$. Здесь мы имеем частный случай диаграммы (2):

$$\begin{array}{ccc} T_2 & \xrightarrow{s_*} & T_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{Val}_H^Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_H^X} \\ B & \xleftarrow{\tilde{s}_*} & A \end{array} .$$

где T_1 и T_2 — замкнутые конгруэнции относительно соответствия Галуа.

Определение 2.6. Отображение $\alpha\colon A \to B$ алгебраических множеств называется *регулярным*, если существует отображение $s_*\colon A \to B$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме, представленной выше, такое что $\alpha(\mu) = \tilde{s}_*(\mu)$ для всех $\mu \in A$.

Таким образом, $\mathrm{AG}_\Theta(H)$ — это категория частично упорядоченных алгебраических множеств с регулярными отображениями в качестве морфизмов.

Подводя итог, мы имеем следующую теорему.

Теорема 2.7. *Пусть* $\mathrm{Var}(H) = \Theta$. *Тогда категория* $\mathrm{F}_\Theta(f)$ *решёток* H*-замкнутых фильтров антиизоморфна категории* $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ *решёток определимых множеств. Категория* $\mathrm{C}_\Theta(H)$ *частично упорядоченных замкнутых конгруэнций антиизоморфна категории* $\mathrm{AG}_\Theta(H)$ *частично упорядоченных алгебраических множеств.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из наличия диаграммы (2). Отметим, что условие $\mathrm{Var}(H) = \Theta$ необходимо для того, чтобы каждый гомоморфизм $s\colon W(Y) \to W(X)$ однозначно определял морфизм $\tilde{s}_*$. $\square$

2.6. Многосортные алгебры Халмоша

В разделе 2.4.2 мы определили категории $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. Имеется естественный способ перевести рассматриваемые категории на язык многосортных алгебр (см. [9, 14]). Положим

$$\mathrm{Hal}_\Theta(H) = (\mathrm{Hal}_\Theta^X(H),\ X \in \Gamma), \quad \mathrm{Hal}_\Theta(f) = (\mathrm{Hal}_\Theta^X(f),\ X \in \Gamma).$$

Здесь объекты категорий представленны как домены многосортных алгебр, а морфизмы s_* — как унарные операции между доменами. Полученные алгебры являются алгебрами Халмоша.

Замечание 2.8. Мы используем имя П. Халмоша, поскольку он был одним из создателей алгебраической логики. Он ввёл важное понятие полиадической алгебры. Вместе с другими понятиями универсальной алгебры и универсальной алгебраической геометрии полиадическая алгебра даёт начало теории, которая, в частности, используется и в этой статье.

Для того чтобы дать точное определение многосортных алгебр Халмоша, определим сначала сигнатуру этих алгебр.

Пусть заданы конечное множество X из Γ, многообразие Θ и алгебра H из Θ, множество символов отношений Ψ. Сигнатура L^Ψ каждой каждой многосортной алгебры Халмоша $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_X,\ X \in \Gamma)$ включает сигнатуру расширенных булевых алгебр L_X (см. раздел 2.2) и операции вида $s_*\colon \mathfrak{L}_X \to \mathfrak{L}_Y$, которые соответствуют морфизмам $s\colon W(Y) \to W(X)$ в Θ^0.

Определение 2.9. Многосортная алгебра $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_X,\ X \in \Gamma)$ в сигнатуре L^Ψ является алгеброй Халмоша, если выполнены следующие условия.

1. Каждый домен $\mathfrak{L}_X$ является расширенной булевой алгеброй в сигнатуре L_X.
2. Каждое отображение $s_*\colon \mathfrak{L}_X \to \mathfrak{L}_Y$ является гомоморфизмом булевых алгебр.
3. Для заданных $s_{1*}\colon \mathfrak{L}_X \to \mathfrak{L}_Y$ и $s_{2*}\colon \mathfrak{L}_Y \to \mathfrak{L}_Z$ имеет место соотношение

$$s_{1*}s_{2*} = (s_1 s_2)_*,$$

иными словами, соответствие $W(X) \to \mathfrak{L}_X$ и $s \to s_*$ определяет ковариантный функтор из категории Θ^0 в категорию $\mathfrak{L}$.
4. Две следующие аксиомы координируют взаимодействие операций s_* с кванторами.

   а) Пусть даны $s_1\colon W(X) \to W(Z)$ и $s_2\colon W(X) \to W(Z)$. Предположим, что $s_1(y) = s_2(y)$ для всех $y \neq x$, $x, y \in X$. Тогда

   $$s_{1*}\exists x\ a = s_{2*}\exists x\ a, \quad a \in \mathfrak{L}_X.$$

   б) Пусть задано $s\colon W(X) \to W(Y)$ и $s(x) = y$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Пусть $x' \neq x$, $x' \in X$. Предположим, что $s(x') = w$, где $w \in W(Y)$. Допустим также, что y не принадлежит носителю w. (Это условие означает, что y не участвует в наименьшей записи элемента $s(x') \in W(Y)$.) Тогда

   $$s_*(\exists x\ a) = \exists\big(s(x)\big)(s_* a), \quad a \in \mathfrak{L}_X.$$
5. Пусть заданы φ — отношение из Ψ арности m — и $s\colon W(X) \to W(Y)$. Тогда

$$s_*\big(\varphi(w_1, \ldots, w_m)\big) = \varphi(sw_1, \ldots, sw_m).$$

В частности, для каждого отношения равенства $w \equiv w'$ мы имеем

$$s_*(w \equiv w') = \big(s(w) \equiv s(w')\big).$$

Алгебры Халмоша образуют многообразие, обозначим его Hal_Θ. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.10. *Пусть задана модель* $(f) = (H, \Psi, f)$, $H \in \Theta$. *Многообразие* Hal_Θ *порождается всеми алгебрами* $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$ *по всем* $H \in \Theta$.

Теперь мы более точно определим алгебру формул $\tilde{\Phi} = (\Phi(X),\ X \in \Gamma)$ и гомоморфизм $\mathrm{Val}_{(f)}$. Подробности построения $\tilde{\Phi}$ и $\widetilde{\mathrm{Val}}_{(f)}$ можно найти в [2, 11, 13, 14].

Пусть φ — отношение из Ψ арности m, M_X — множество всех $\varphi(w_1, \dots, w_m)$, $w_i \in W(X)$.

Алгебра $\tilde{\Phi} = (\Phi(X),\ X \in \Gamma)$ является свободной алгеброй в многообразии Hal_Θ, порождённой многосортным множеством $M = (M_X,\ X \in \Gamma)$.

Для каждого X определим отображение

$$M_X \to \mathrm{Hal}_\Theta^X(f)$$

по правилу

$$\varphi(w_1, \dots, w_m) \to [\varphi(w_1, \dots, w_m)]_{(f)}.$$

Тогда имеет место отображение многосортных множеств

$$M \to \mathrm{Hal}_\Theta(f).$$

Так как M свободно порождает алгебру $\tilde{\Phi}$, то последнее отображение продолжается до гомоморфизма многосортных алгебр

$$\mathrm{Val}_{(f)} \colon \tilde{\Phi} \to \mathrm{Hal}_\Theta(f).$$

Покомпонентно мы имеем

$$\mathrm{Val}_{(f)}^X \colon \Phi(X) \to \mathrm{Hal}_\Theta^X(f).$$

Отметим здесь, что алгебра $\tilde{\Phi}$ может быть определена семантически. Пусть $\mathfrak{L}^0$ — абсолютно свободная алгебра, порождённая множеством M в сигнатуре L^Ψ. Пусть задана модель $(f) = (H, \Psi, f)$ и соответствующая алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. Мы будем трактовать алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$ как универсальные реализации алгебры $\mathfrak{L}^0$.

С каждым элементом

$$\varphi(w_1, \dots, w_m) \in \mathfrak{L}^0$$

свяжем элемент

$$[\varphi(w_1, \dots, w_m)]_{(f)} \in \mathrm{Hal}_\Theta(f).$$

Это соответствие задаёт гомоморфизм

$$\mathrm{Val}_{(f)}^0 \colon \mathfrak{L}^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(f).$$

Обозначим через $\rho_{(f)}$ ядро этого гомоморфизма. Отметим, что оно совпадает с множеством тождеств алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. Рассмотрим конгруэнцию

$$\rho = \bigcap_{(f)} \rho_{(f)}.$$

Так как $\mathrm{Val}_{(f)}^0$ — единственный гомоморфизм из $\mathfrak{L}^0$ в $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$ и все алгебры вида $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$ порождают многообразие Hal_Θ, мы имеем, что

$$\tilde{\Phi} = \mathfrak{L}^0/\rho.$$

Эта формула даёт определение алгебры $\tilde{\Phi}$, которое позволяет вычислять образы элементов из $\mathfrak{L}^0$ в алгебрах $\mathrm{Hal}_\Theta(f)$. В этом смысле это семантическое определение алгебры $\tilde{\Phi}$.

Всё вышесказанное можно суммировать в следующей диаграмме:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}^0 \arrow[rr, "\mathrm{Val}^0_{(f)}"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathrm{Hal}_\Theta(f) \\
& \tilde{\Phi} \arrow[ur, "\mathrm{Val}_{(f)}"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

3. Логическая геометрия и базы знаний

3.1. От логики и геометрии к теории знаний

В предыдущем разделе мы ввели необходимую систему понятий. Все эти понятия естественно возникают и взаимодействуют. Дальнейшее изложение материала будет связано с приложениями к базам знаний.

3.2. Базы знаний

Теперь мы будем трактовать категории $\mathrm{F}_\Theta(f)$ и $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ как *категории описания знаний и содержания знаний* соответственно.

Напомним, что мы выделили три компонента в представлении знания:

— описание знания,
— предмет знания,
— содержание знания.

Следующие три математических объекта соответствуют этим компонентам:

— категория решёток H-замкнутых фильтров $\mathrm{F}_\Theta(f)$,
— модель (H, Ψ, f),
— категория решёток определимых множеств $\mathrm{LG}_\Theta(f)$.

Определение 3.1. База знаний $\mathrm{KB} = \mathrm{KB}(H, \Psi, f)$ — это тройка $(\mathrm{F}_\Theta(f), \mathrm{LG}_\Theta(f), \mathrm{Ct}_f)$, где $\mathrm{F}_\Theta(f)$ — категория описаний знания, $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ — категория содержания знаний и $\mathrm{Ct}_f \colon \mathrm{F}_\Theta(f) \to \mathrm{LG}_\Theta(f)$ — контравариантный функтор.

Функтор Ct_f переводит описание знания в содержание знания. Морфизмы категорий $\mathrm{F}_\Theta(f)$ и $\mathrm{LG}_\Theta(f)$ делают базу знаний динамическим объектом.

Замечание 3.2. Мы используем термин «базы знаний» вместо более точного термина «модель базы знаний».

Для заданной модели $(f) = (H, \Psi, f)$ каждое конкретное знание — это тройка (X, T, A), где X из Γ, T — множество формул из $\Phi(X)$ и A — множество точек из $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, такое что $A = T^L_{(f)} = \big(T^{LL}_{(f)}\big)^L$. Таким образом, T и $T^{LL}_{(f)}$ описывают одно и то же содержание A.

3.3. Изоморфизм баз знаний

Определение изоморфизма двух баз знаний KB_1 и KB_2 подразумевает изоморфизм категорий содержания знаний, который влечёт изоморфизм категорий описания знаний $\mathrm{F}_\Theta(f_1)$ и $\mathrm{F}_\Theta(f_2)$.

Определение 3.3. Базы знаний $\mathrm{KB}_1 = \mathrm{KB}(H_1, \Psi, f_1)$ и $\mathrm{KB}_2 = \mathrm{KB}(H_2, \Psi, f_2)$ изоморфны, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}_\Theta(f_1) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{F}_\Theta(f_2) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ct}_{f_1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ct}_{f_2}} \\ \mathrm{LG}_\Theta(f_1) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{LG}_\Theta(f_2) \end{array},$$

где α и β — изоморфизмы категорий.

Вернёмся к идее логической геометрии для баз знаний. Мы будем использовать материал из [4].

Определение 3.4. Модели $(f_1) = (H_1, \Psi, f_1)$ и $(f_2) = (H_2, \Psi, f_2)$ называются LG-эквивалентными, если для любого $X \in \Gamma$ и $T \subset \Phi(X)$ имеет место равенство

$$T^{LL}_{(f_1)} = T^{LL}_{(f_2)}.$$

Напомним, что логическое ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ точки $\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H)$ является X-LG-типом точки μ. Обозначим через $S^X(f)$ множество всех X-LG-типов модели (f).

Определение 3.5. Модели $(f_1) = (H_1, \Psi, f_1)$ и $(f_2) = (H_2, \Psi, f_2)$ называются LG-изотипными, если

$$S^X(f_1) = S^X(f_2)$$

для любого конечного $X \in \Gamma$.

Иными словами, модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2) являются LG-изотипными, если предметные алгебры H_1 и H_2 имеют равные возможности относительно решения логических формул из $T \subset \Phi(X)$ при любом множестве X. Понятия LG-изотипности и LG-эквивалентности тесно связаны.

Теорема 3.6 [4]. *Модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2) LG-эквивалентны тогда и только тогда, когда они LG-изотипны.*

Замечание 3.7. Изотипность моделей накладывает некоторые ограничения на реализации (f_1) и (f_2). Пусть некоторая точка $\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H_1)$ удовлетворяет формуле $u = \varphi(w_1, \ldots, w_m)$, $\varphi \in \Psi$. Тогда $\nu \in \mathrm{Hom}(W(X), H_2)$ тоже удовлетворяет формуле u. Таким образом, $(w_1^\mu, \ldots, w_n^\mu) \in f_1(\varphi) \subset H_1^m$ тогда и только тогда, когда выполняется $(w_1^\nu, \ldots, w_n^\nu) \in f_2(\varphi) \subset H_2^m$. В частности, $w_i^\mu = w_j^\mu$ тогда и только тогда, когда $w_i^\nu = w_j^\nu$.

Следующая теорема связывает изотипность моделей с изоморфизмами баз знаний.

Теорема 3.8. *Если модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2) изотипны, то соответствующие базы знаний изоморфны.*

Доказательство. По теореме 3.6 изотипные модели являются LG-эквивалентными. Теорема 6.12 из [4] утверждает, что если модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2) LG-эквивалентны, то категории $\mathrm{LG}_\Theta(f_1)$ и $\mathrm{LG}_\Theta(f_2)$ изоморфны. Из диаграммы (2) следует, что категории $\mathrm{F}_\Theta(f_1)$ и $\mathrm{F}_\Theta(f_2)$ также изоморфны. В действительности эти категории совпадают, и в качестве изоморфизма α можно взять тождественный изоморфизм категорий. Таким образом, базы знаний $\mathrm{KB}_1 = \mathrm{KB}(H_1, \Psi, f_1)$ и $\mathrm{KB}_2 = \mathrm{KB}(H_2, \Psi, f_2)$ изоморфны. □

Определение 3.9. Базы знаний $\mathrm{KB}_1 = \mathrm{KB}(H_1, \Psi, f_1)$ и $\mathrm{KB}_2 = \mathrm{KB}(H_2, \Psi, f_2)$ называются изотипными, если модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2) изотипны.

По теореме 3.8 изотипные базы знаний изоморфны. Теорема 3.8 обобщает теорему из [16], которая утверждает, что базы знаний над конечными автоморфными моделями информационно эквивалентны. Она также обобщает результат из [4] об информационной эквивалентности изотипных баз знаний.

Теперь рассмотрим проблему изоморфизма баз знаний под несколько другим углом.

Определение 3.10. Пусть φ_1, φ_2 — два функтора из категории C_1 в категорию C_2. Будем говорить, что задан изоморфизм функторов $S\colon \varphi_1 \to \varphi_2$, если для любого морфизма $\nu\colon A \to B$ из C_1 имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(A) & \xrightarrow{S_A} & \varphi_2(A) \\ {\scriptstyle \varphi_1(\nu)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2(\nu)} \\ \varphi_1(B) & \xrightarrow{S_B} & \varphi_2(B) \end{array}.$$

Здесь S_A является A-компонентой S, т. е. S_A — функция, которая задаёт биекцию между $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$ (аналогично для S_B).

Обратимый функтор из категории в себя называется *автоморфизмом* категории. Автоморфизм φ категории C называется внутренним (см. [12]), если φ изоморфен тождественному функтору 1_C.

Для каждой модели (H, Ψ, f) соответствие $s \to s_*$ определяет функторы

$$\mathrm{Cl}_H\colon \Theta^0 \to \mathrm{PoSet}, \quad \mathrm{Cl}_{(f)}\colon \tilde{\Phi} \to \mathrm{Lat},$$

где PoSet — категория частично упорядоченных множеств, а Lat — категория решёток. При этом Cl_H ставит в соответствие каждому $W(X)$ частично упорядоченное множество $\mathrm{C}^X_\Theta(H)$ всех H-замкнутых конгруэнций на $W(X)$ и $\mathrm{Cl}_{(f)}$ ставит в соответствие каждому $\Phi(X)$ решётку H-замкнутых фильтров в $\Phi(X)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Theta^0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{H_1}"'] & & \Theta^0 \arrow[dl, "\mathrm{Cl}_{H_2}"] \\ & \mathrm{PoSet} & \end{tikzcd},$$

где φ — автоморфизм категории Θ^0. Коммутативность этой диаграммы означает что имеется изоморфизм функторов

$$\alpha_\varphi\colon \mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2} \cdot \varphi.$$

В свою очередь, изоморфизм функторов означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}_{H_1}\big(W(Y)\big) \arrow[r, "(\alpha_\varphi)_{W(Y)}"] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{H_1}(s)"'] & \mathrm{Cl}_{H_2}\big(\varphi(W(Y)\big) \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{H_2}(\varphi(s))"] \\
\mathrm{Cl}_{H_1}\big(W(X)\big) \arrow[r, "(\alpha_\varphi)_{W(X)}"] & \mathrm{Cl}_{H_2}\big(\varphi(W(X)\big)
\end{tikzcd}.$$

Аналогично наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Phi} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{(f_1)}"'] & & \tilde{\Phi} \arrow[dl, "\mathrm{Cl}_{(f_2)}"] \\
& \mathrm{Lat} &
\end{tikzcd}$$

означает, что имеется изоморфизм функторов

$$\alpha_\varphi\colon \mathrm{Cl}_{(f_1)} \to \mathrm{Cl}_{(f_2)}\varphi.$$

Определение 3.11 [15]. Две алгебры H_1 и H_2 из многообразия Θ называются геометрически автоморфно эквивалентными, если для некоторого автоморфизма φ категории Θ^0 имеет место изоморфизм функторов $\alpha_\varphi\colon \mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2} \cdot \varphi$.

Определение 3.12 [15]. Две модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2), где H_1, H_2 принадлежат многообразию Θ, называются логически автоморфно эквивалентными, если для некоторого автоморфизма φ категории $\tilde{\Phi}$ имеет место изоморфизм функторов $\alpha_\varphi\colon \mathrm{Cl}_{(f_1)} \to \mathrm{Cl}_{(f_2)} \cdot \varphi$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.13 [15]. *Пусть* $\mathrm{Var}(H_1) = \mathrm{Var}(H_2) = \Theta$. *Пусть алгебры* H_1 *и* H_2 *геометрически автоморфно эквивалентны. Тогда категории* $\mathrm{AG}_\Theta(H_1)$ *и* $\mathrm{AG}_\Theta(H_2)$ *изоморфны.*

Для нас основной интерес представляет обобщение этого результата на логическую геометрию и модели. Приведём без доказательства следующую теорему (см. [3]).

Теорема 3.14. *Пусть даны логически автоморфно эквивалентны модели* (H_1, Ψ, f_1) *и* (H_2, Ψ, f_2), *такие что* $\mathrm{Var}(H_1) = \mathrm{Var}(H_2) = \Theta$. *Тогда категории* $\mathrm{LG}_\Theta(f_1)$ *и* $\mathrm{LG}_\Theta(f_2)$ *и соответствующие базы знаний* $\mathrm{KB}_1 = \mathrm{KB}(H_1, \Psi, f_1)$ *и* $\mathrm{KB}_2 = \mathrm{KB}(H_2, \Psi, f_2)$ *изоморфны.*

Естественно возникает следующая проблема.

Проблема 3.15. Найти необходимые и достаточные условия на модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_2, Ψ, f_2), которые обеспечивают изоморфизм соответствующих баз знаний.

Теорема 3.8 даёт достаточное условие изоморфизма баз знаний.

Следующее предложение играет важную роль.

Предложение 3.16 [10]. *Пусть для многообразия Θ каждый автоморфизм категории Θ^0 является внутренним. Категории алгебраических множеств $\mathrm{AG}_\Theta(H_1)$ и $\mathrm{AG}_\Theta(H_2)$, где $H_1, H_2 \in \Theta$, изоморфны тогда и только тогда, когда алгебры H_1, H_2 AG-эквивалентны.*

С точки зрения баз знаний предложение 3.16 даёт необходимые и достаточные условия изоморфизма баз знаний при условии, что множество символов отношений Ψ соответствующей базы знаний $\mathrm{KB}(H, \Psi, f)$ содержит только символ предиката равенства. Общий же случай является проблемой.

Проблема 3.17. Пусть даны модели (H_1, Ψ, f_1) и (H_1, Ψ, f_2), где $H_1, H_2 \in \Theta$. Допустим, что для многообразия Θ каждый автоморфизм категории $\tilde{\Phi}$ является внутренним. Верно ли, что $\mathrm{LG}_\Theta(f_1)$ и $\mathrm{LG}_\Theta(f_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда H_1 и H_2 LG-эквивалентны.

В общем случае нахождение необходимых и достаточных условий требует изучения ситуации для конкретных многообразий Θ. В связи с этим интерес представляет следующая задача.

Проблема 3.18. Изучить автоморфизмы категории $\tilde{\Phi}$ для различных многообразий Θ.

Заметим, что с точки зрения приложений особый интерес представляют многообразия полугрупп и групп. Мы закончим нашу дискуссию вопросом, который также имеет особое значение для приложений.

Проблема 3.19. Исследовать условия изоморфизма для конечных баз знаний.

Работа Е. Аладовой была осуществлена при поддержке Израильского научного фонда, грант 1207/12. Она благодарит также Исследовательский институт Эмми Нётер и фонд «Минерва» за частичную поддержку при подготовке данной статьи.

Литература

[1] Гварамия А. А. Алгебры Халмоша и аксиоматизируемые классы квазигрупп // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 215—216.

[2] Плоткин Б. Алгебраическая геометрия в логике первого порядка // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2004. — Т. 22. — С. 16—62. — `arXiv:math/0312485[math.GM]`.

[3] Aladova E., Plotkin B., Plotkin T. Similarity of models and knowledge bases isomorphism: Preprint.

[4] Aladova E., Plotkin E., Plotkin T. Isotypeness of models and knowledge bases equivalence // Math. Comput. Sci. — 2013. — Vol. 7, no. 4. — P. 421—438.

[5] Halmos P. R. Algebraic Logic. — New York: Literary Licensing, 1969.

[6] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. — Berlin: Springer, 1971. — (Grad. Texts Math.; Vol. 5).

[7] Marker D. Model Theory: An Introduction. — Berlin: Springer, 2002.

[8] Mashevitzky G., Plotkin B., Plotkin E. Automorphisms of categories of free algebras of varieties // Electron. Research Announcements AMS. — 2002. — Vol. 8. — P. 1—10.

[9] Plotkin B. Universal Algebra, Algebraic Logic and Databases. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.

[10] Plotkin B. Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties // Sib. Adv. Math. — 1997. — Vol. 7, no. 2. — P. 64—97.

[11] Plotkin B. Seven lectures on the universal algebraic geometry: Preprint. — 2002. — arXiv:math/0204245.

[12] Plotkin B. Algebras with the same algebraic geometry // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Vol. 242. — P. 176—207.

[13] Plotkin B. Algebraic logic and logical geometry in arbitrary varieties of algebras // Proc. Conf. on Group Theory, Combinatorics and Computing. — Providence: Amer. Math. Soc., 2014. — (Contemp. Math.; Vol. 611). — P. 151—167.

[14] Plotkin B., Aladova E., Plotkin E. Algebraic logic and logically-geometric types in varieties of algebras // J. Algebra Appl. — 2013. — Vol. 12, no. 2. — Paper No. 1250146.

[15] Plotkin B., Plotkin E. Multi-sorted logic and logical geometry: some problems. — Demonstratio Math. — To appear.

[16] Plotkin B., Plotkin T. Geometrical aspect of databases and knowledge bases // Algebra Universalis. — 2001. — Vol. 46. — P. 131—161.

[17] Plotkin B., Plotkin T. Categories of elementary sets over algebras and categories of elementary algebraic knowledge // Pillars of Computer Science. Essays Dedicated to Boris (Boaz) Trakhtenbrot on the Occasion of His 85th Birthday. — Berlin: Springer, 2008. — (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 4800). — P. 555—570.

[18] Smith J. D. H. An Introduction to Quasigroups and their Representations. — Chapman and Hall; CRC Press, 2007.

[19] Zhitomirski G. On logically-geometric types of algebras: preprint. — arXiv:1202.5417[math.LO].