Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса

С. А. ДОВБЫШ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: sdovbysh@yandex.ru

УДК 517.913+517.925.7+517.938

Ключевые слова: неинтегрируемость, сепаратрисы, ветвление решений, сферический маятник.

Аннотация

На примере задачи о движении сферического маятника с точкой подвеса, совершающей малые пространственные периодические колебания, обсуждаются некоторые возможности предложенного автором подхода к проблеме неинтегрируемости многомерных систем, связанного с расщеплением многомерных сепаратрис и с ветвлением решений в комплексной области. Коротко воспроизводятся полученные ранее результаты и обсуждаются их обобщения, основанные на вычислении возмущения линейной части отображения Пуанкаре в гиперболической точке. Поскольку при этом возмущении, вообще говоря, нарушается скалярный характер ограничений линейной части отображения на её двумерные расширяющееся и сжимающееся инвариантные подпространства, удаётся получить более слабые условия неинтегрируемости. Эти условия выражены, однако, в терминах некоторых повторных интегралов, поскольку приходится работать во втором порядке теории возмущений. Показано, что, в случае когда ускорение точки подвеса представлено функцией комплексного времени, однозначной в проколотых окрестностях некоторых изолированных особенностей, условия неинтегрируемости могут быть сведены к очень простым условиям в терминах определённых локальных величин, относящихся к этим особенностям. Развиваемый подход может быть полезен для задач, в которых невозмущённая система обладает симметрией, приводящей к вырождению, вроде скалярного характера ограничений линейной части отображения Пуанкаре на её инвариантные подпространства.

Abstract

S. A. Dovbysh, The splitting of separatrices, the branching of solutions, and nonintegrability of many-dimensional systems. Application to the problem of the motion of a spherical pendulum with an oscillating suspension point, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 3, pp. 23—90.

Some possibilities of the author's approach to the problem of nonintegrability of multidimensional systems related to the splitting of multidimensional separatrices and branching of solutions in the complex domain are discussed, using the example of the problem of the motion of a spherical pendulum with a suspension point performing small spatial

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 3, с. 23—90.

periodic oscillations. Previous results are briefly reproduced and their generalizations are discussed, which are based on the calculation of a perturbation of the linear part of the Poincaré map at a hyperbolic point. We have succeeded in obtaining weaker conditions of nonintegrability, since this perturbation, generally speaking, violates the scalar nature of the restrictions of the linear part of the map to its two-dimensional expanding and contracting invariant subspaces. However, these conditions are expressed in terms of some repeated integrals because one must work in the second order of the perturbation theory. It is shown that in the case where the acceleration of the suspension point is represented by a function of complex time uni-valued over punctured vicinities of some isolated singularities, the nonintegrability conditions can be reduced to very simple ones in terms of certain local quantities associated with these singularities. The approach developed can be useful in problems where an unperturbed system possesses a symmetry leading to a degeneration, like the scalar nature of the restrictions of the linear part of the Poincaré map to its invariant subspaces.

Введение

Ранее автором были получены существенно новые условия, гарантирующие неинтегрируемость многомерных динамических систем в наиболее строгом аналитическом смысле, т. е. отсутствие непостоянного аналитического и даже мероморфного интеграла на уровне априорных первых интегралов. Эти условия связаны с трансверсальным пересечением многомерных инвариантных многообразий гиперболических периодических решений (так называемых *сепаратрис*) [5, 23, 25] или с ветвлением решений в комплексной области [6, 24]. Соответственно этим двум случаям устанавливается отсутствие интеграла, мероморфного в некоторой вещественной или комплексной области. Используемое здесь понятие неинтегрируемости дополнительно включает отсутствие аналитического и даже мероморфного векторного поля, коммутирующего с векторным полем фазового потока (т. е. порождающего локальную симметрию системы) и не получающегося из последнего умножением на некоторую постоянную. Эффективность этих результатов была проиллюстрирована в [7] на примере их приложения к задаче о движении сферического маятника с точкой подвеса, совершающей малые периодические колебания.

Следует отметить, что плоский маятник с периодически колеблющейся точкой подвеса использовался ранее разными авторами как удобная стандартная модельная система малой размерности (гамильтонова с полутора степенями свободы) для обсуждения различных динамических эффектов, приводящих к неинтегрируемости. Так, в [11] (результат также воспроизведён в [3], а его первоначальный вариант был опубликован в [12]) для случая, когда точка подвеса совершает малые вертикальные колебания, было найдено, что в этой системе двумерные сепаратрисы расщепляются с пересечением при произвольном периодическом движении точки подвеса. Этот факт влечёт аналитическую неинтегрируемость. Затем аналогичные результаты были получены в [16] для случая, когда точка подвеса совершает малые горизонтальные синусоидальные колебания. В [10] С. Л. Зиглин проиллюстрировал на родственной задаче о движении плоского маятника с периодически меняющейся длиной свой результат о связи самопересечения комплексных сепаратрис с неинтегрируемостью.

Однако для сферического маятника, точка подвеса которого совершает малые (вообще говоря, пространственные) периодические колебания, аналогичные исследования, как ни странно, по-видимому, отсутствовали до статьи автора [7], в которой впервые было проведено полное и строгое исследование расщепления сепаратрис в этой задаче, а также получены результаты о неинтегрируемости. Исключение составляет только статья [27] (которая также воспроизводится в [26]), где расщепление сепаратрис изучается, на самом деле, для укороченных уравнений некоторой маятниковой системы. Точнее говоря, в указанной работе расщепление сепаратрис рассматривается для сферического демпфированного и намагниченного маятника с вибрирующей точкой подвеса, взаимодействующего с неподвижным магнитом, отталкивающим маятник от его нижнего положения равновесия, которое становится в силу этого неустойчивым (если сила отталкивания превосходит возвращающую силу). Рассматривался случай, когда демпфирование асимметрично, а точка подвеса совершает горизонтальные синусоидальные колебания. Для исследования системы в уравнениях движения были оставлены только члены не выше третьего порядка, что может быть обоснованно, когда сепаратрисы заключены в малой окрестности нижнего положения равновесия. Это условие выполнено, если мощность отталкивающего магнита заключена в некотором достаточно узком интервале; при этом соответствующие ограничения в работе не обсуждались.

Следует уточнить, что мы рассматриваем классическую (восходящую к Пуанкаре) ситуацию консервативной периодически возмущаемой системы, и нас интересуют, в конечном счёте, вопросы интегрируемости. Отметим поэтому, что имеется весьма много работ, посвящённых изучению расщепления сепаратрис в механических и физических диссипативных системах. При этом ставится вопрос нахождения «критериев хаоса», т. е. неравенств, задающих область значений параметров, для которых наблюдается пересечение сепаратрис, ведущее к наличию хаоса и странных аттракторов. Одним из популярных объектов исследования стали плоские маятники с демпфированием и/или сухим трением, а в качестве их внешнего возмущения выступает обычно периодический вращающий момент (см. [4, 18] и библиографию в последней книге). В [18] отдельная глава посвящена исследованию расщепления сепаратрис в одной задаче о сферическом маятнике. Предполагается, что движение вдоль вертикальной плоскости осуществляется через подвижное соединение при помощи осевого шарнира; этот шарнир вращается с постоянной угловой скоростью, и здесь имеют место слабое кулоновское сухое трение, а также дополнительное слабое гармоническое (синусоидальное) возбуждение посредством момента сил. Наконец, повороты вокруг вертикальной оси осуществляются свободно, но имеется слабое (вязкое) демпфирование по обоим углам поворота. В [18, 27] для изучения расщепления сепаратрис в многомерной системе — сферическом маятнике — использовалось развитие классического метода Мельникова, предложенное Дж. Груендлером. Этот вариант метода годится для случая, когда невозмущённая система не обладает достаточным количеством первых интегралов. Однако в данном случае невозмущённая система вполне интегрируема, что позволило нам работать (см. [7]) в рамках более простого классического метода Мельникова. Иногда встречается утверждение (см., например, [18, с. 9]), что классический метод Мельникова может быть применим только к системам с одной степенью свободы и внешним возмущением, и это заставляет прибегать к другим вариантам метода (например, к методу Груендлера) при исследовании многомерных систем. Это, однако, не так. Классический подход Мельникова непосредственно переносится на многомерные системы при наличии достаточного числа первых интегралов в невозмущённой системе, например, если невозмущённая система вполне интегрируемая гамильтонова. Заметим также, что, хотя метод Мельникова часто излагается в гамильтоновой форме, для его применимости важно именно наличие достаточного числа первых интегралов, а не гамильтоновость как таковая. В ряде работ он излагался в такой многомерной версии.

В [8] для обсуждаемой задачи о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса было предложено рассматривать расщепление сепаратрис в комплексной области с учётом ветвления решений. Таким образом, рассматривалось трансверсальное пересечение сепаратрис при их продолжении вдоль некоторых контуров на плоскости комплексного времени. (Это явление тесно связано с самопересечением сепаратрис, которое, как уже было сказано, рассматривалось в [10] для одной плоской маятниковой задачи.) С использованием некоторой аппроксимационной теоремы об интегралах вдоль контуров на комплексной плоскости [9] удалось показать, что при достаточно слабых предположениях комплексные трансверсальные гомоклинические траектории асимптотически плотно при стремлении возмущения к нулю заполняют любую ограниченную область невозмущённых сепаратрис. Это явление гарантирует неинтегрируемость задачи, но представляет и самостоятельный интерес, свидетельствуя о крайне сложной динамике в комплексной области. Упомянутые слабые предположения, при которых справедлив этот результат, формулируются в терминах наличия (неустранимых) особенностей (в смысле теории функций комплексной переменной) у нетривиальных линейных комбинаций компонент ускорения точки подвеса и их производных как аналитических функций «комплексного времени». Весьма примечательно, что при этом важно только наличие особенностей, но не имеет никакого значения характер этих особенностей, с чем раньше в строгих результатах о неинтегрируемости не приходилось сталкиваться. Интересно отметить, что аппроксимационная теорема, на которой основано доказательство результата, применима благодаря некоторой специфике асимптотических разложений для невозмущённых двоякоасимптотических решений вблизи положения равновесия.

Работами [7,8] и настоящей работой автор хотел бы продолжить упомянутую выше добрую традицию использования маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса как удобной стандартной модельной системы для обсуждения неинтегрируемости и вызывающих её динамических эффектов. Но если в предшествовавших работах исследовался плоский маятник как система малой размерности, где применимы ставшие уже классическими результаты о неинтегрируемости, то автор рассматривает совершающий пространственные движения сферический маятник как модель для применения результатов и подходов, связанных с неинтегрируемостью многомерных систем.

В настоящей статье обсуждается дальнейшее развитие условий неинтегрируемости и их иллюстрация приложением к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Развитие условий неинтегрируемости может быть осуществлено в нескольких направлениях. Первое обобщение, рассмотренное в настоящей статье, основано на следующем наблюдении. Для невозмущённой интегрируемой системы — сферического маятника с закреплённой точкой подвеса — линейная часть соответствующего отображения Пуанкаре в гиперболической неподвижной точке (отвечающей верхнему положению равновесия) обладает некоторым свойством вырождения, которое в типичном случае разрушается возмущением. А именно, ограничения этого линейного отображения на его двумерные расширяющееся и сжимающееся инвариантные подпространства (касательные подпространства к выходящей и входящей сепаратрисам) будут скалярными операторами. Однако условия используемых теорем о неинтегрируемости слабее в типичной ситуации, когда такого вырождения нет. Поэтому, используя надлежащее обобщение теорем о неинтегрируемости и вычисляя возмущение линеаризованного отображения Пуанкаре, можно получить более слабые условия неинтегрируемости. В действительности это требует лишь небольшого обобщения исходных теорем о неинтегрируемости.

Подчеркнём, что мы рассматриваем только те обобщения наших основных результатов о неинтегрируемости, которые получаются в рамках теории возмущений первого порядка. (Наш исходный результат о неинтегрируемости, относящийся к ветвлению решений, также использует теорию возмущений первого порядка, применённую для обнаружения ветвления возмущённого периодического решения, однако он использует невозмущённое линеаризованное отображение Пуанкаре. Здесь же мы формулируем аналогичный результат, основанный также и на возмущении этого отображения. Другая возможность обобщения могла бы быть основана на вычислении возмущения линеаризующих координат, фигурирующих в основном результате о неинтегрируемости, относящемся к трансверсальному пересечению сепаратрис. Она технически трудна, поскольку рассмотрения нелокальны и должны использовать явные формулы для невозмущённых асимптотических решений. Однако аналогичные рассмотрения для результатов о неинтегрируемости, основанных на ветвлении решений, будут локальны, поскольку они выполняются в малой окрестности невозмущённого периодического решения.) Этого, в принципе, достаточно для приложений, поскольку упомянутое выше вырождение разрушается возмущением линеаризованного отображения Пуанкаре. Однако для сферического маятника устранение этого вырождения не обнаруживается в первом порядке теории возмущений. Поэтому мы вынуждены вычислять возмущение этого отображения во втором порядке. Развиваемый здесь подход может быть полезен в распространённой ситуации, когда невозмущённая система обладает симметрией, ведущей к некоторому вырождению (нетипичному свойству) отображения Пуанкаре, линеаризованного вблизи гиперболической точки, что препятствуют применению результатов о неинтегрируемости. Вычисление возмущения этого линеаризованного отображения, снимающего это вырождение, могло бы позволить применить подходящее полученное ниже обобщение результатов о неинтегрируемости.

Далее, если ускорение точки подвеса представлено функцией комплексного времени, которая однозначна в проколотых окрестностях некоторых изолированных особенностей, то можно свести условия неинтегрируемости к другим, выраженным в терминах некоторых локальных величин, относящихся к этим особенностям. Эти величины представляются как суммы взвешенных коэффициентов рядов Лорана для компонент ускорения, которые становятся конечными, если особенность не является существенной (т. е. будет полюсом). На этом пути мы получим очень простые условия неинтегрируемости для сферического маятника. Заметим, что развиваемый подход мог бы быть очень полезен для других систем, обладающих упомянутым выше вырождением линеаризованного отображения Пуанкаре, в которых возмущение представлено функцией комплексного времени с изолированными особенностями. Объясним главную сложность и то, как мы к ней подходим. Возмущение первого порядка для линеаризованного отображения Пуанкаре описывается некоторыми интегралами, которые легко вычислить через вычеты в особенностях для функции возмущения (ускорения), умноженной на экспоненты от времени. Однако для сферического маятника нужно вычислять возмущение второго порядка для этого отображения, как было объяснено выше. Но это возмущение описывается некоторыми интегралами, которые трудно вычислить. Причина в том, что эти интегралы выражаются линейным или квадратичным образом через интегралы вдоль части исходного контура интегрирования Γ, так что приходится иметь дело с повторными интегралами. Это следует понимать как главное препятствие к применению результатов о неинтегрируемости, основанных на возмущении линеаризованного отображения Пуанкаре. Однако если выбрать контур Γ специальным образом, составив его из малых замкнутых контуров, каждый из которых обходит ровно n_j раз единственную связанную с ним особенность t_j, и из промежуточных незамкнутых путей, то рассматриваемый повторный интеграл вдоль Γ имеет асимптотическое разложение при $\sum\limits_j |n_j| \to \infty$. Его старший член выражается в терминах некоторых локальных величин, связанных с особенностями t_j. Это позволяет получить условия неинтегрируемости в терминах этих локальных величин с учётом возможности выбора подходящего контура Γ. Используя периодичность по времени, можно заменить некоторую особенность t_j на идентичную ей особенность, но сдвинутую на величину, равную периоду, умноженному на произвольное целое m. Тогда старший член интеграла будет линейной комбинацией нескольких линейно независимых последовательностей, нумеруемых m как индексом. Приравнивая к нулю все коэффициенты этой линейной комбинации и осуществляя эту процедуру для всех особенностей t_j, получим простые необходимые условия интегрируемости.

В разделах 1—3 представлены наши прежние результаты о неинтегрируемости многомерных систем с некоторыми краткими комментариями, а в разделе 4 предложены новые обобщения, основанные на рассмотрении возмущения линеаризованного отображения Пуанкаре или матрицы монодромии. Чтобы объяснить эти обобщения, вкратце обсуждаются некоторые идеи доказательств, которые были опущены в кратких сообщениях [6, 24]. В разделе 5 описывается рассматриваемая модельная система, т. е. сферический маятник с колеблющейся точкой подвеса. В разделах 6 и 7 для этой системы описаны результаты о неинтегрируемости, которые получены из общих теорем, описанных в разделе 4, но технические доказательства двух теорем раздела 6 перенесены в разделы 9, 10. Применение к сферическому маятнику теоретических результатов разделов 1—3 даёт результаты о неинтегрируемости, которые уже были получены в [7] и теперь повторены здесь. В разделе 7 мы также даём набросок результатов [7] о расщеплении сепаратрис возмущённого сферического маятника, поскольку они обеспечивают выполнение условий неинтегрируемости. В разделе 8 описаны представляющие самостоятельный интерес результаты [8] о наличии богатого множества гомоклинических траекторий, в теорему добавлены новые случаи.

1. Неинтегрируемость, основанная на трансверсальном пересечении многомерных сепаратрис

Напомним теорему о неинтегрируемости, относящуюся к трансверсальному пересечению многомерных сепаратрис. Эта теорема обобщает при некоторых дополнительных условиях хорошо известный результат о том, что в двумерном случае наличие трансверсально пересекающихся сепаратрис влечёт неинтегрируемость. Автор представит здесь свою теорему о многомерной неинтегрируемости в её простейшей форме [5], где речь идёт об одном гиперболическом периодическом решении и его гомоклинических траекториях. Перенесение на случай многих гиперболических периодических решений можно найти в [23, 25]. Другое упрощение, сделанное в представленной ниже теореме, заключается в рассмотрении случая «узкого» спектра, что достаточно для приложений к возмущённому сферическому маятнику, но позволит нам несколько упростить формулировку. Действительно, в этом случае автоматически исчезнут некоторые геометрические условия (см. [5]), касающиеся взаимного расположения касательных подпространств к сепаратрисам в их точках пересечения.

Определение 1. Будем говорить, что невырожденный линейный оператор $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и множество $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ находятся *в общем положении*, если для любого собственного числа λ оператора T линейная оболочка над $\mathbb{C}$ объединения множества $\mathfrak{N}$ и образа оператора $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ совпадает со всем объемлющим пространством $\mathbb{C}^n$.

Приведём определение, равносильное определению 1.

Определение 2. Невырожденный линейный оператор $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и множество $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ находятся *в общем положении*, если $\mathbb{C}$-линейная оболочка множества $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} T^k(\mathfrak{N})$ совпадает со всем объемлющим пространством $\mathbb{C}^n$.

Следствие 1. *Условие, что отображение T и множество $\mathfrak{N}$ находятся в общем положении, сохраняется при малых возмущениях $\mathfrak{N}$ и T.*

Замечание 1. Это определение может быть следующим образом описано в более явной координатной форме. Пусть λ_r — все различные собственные числа линейного оператора $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. В жордановой форме T каждому числу λ_r соответствует блок (клетка) размера $s(u) \times s(u)$

$$T_{r,u} = \lambda_r \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где индекс u пробегает некоторое множество U_r (множества U_r не пересекаются для различных r). Пара индексов $(u, i) = i'$, где $1 \leqslant i \leqslant s(u)$, определяет номер строки или столбца в жордановой форме для T. Пусть $\mathfrak{N} = \{a_v\}$, где $a_v = (a_{1,v}, \ldots, a_{n,v}) \in \mathbb{C}^n$ — координаты в жордановом базисе. Тогда предположение определения 1 выполнено, если и только если

$$\operatorname{rang} A_r = \operatorname{card} M_r,$$

где $A_r = (a_{i',v}\colon i' \in M_r)$, $M_r = \{(u, s(u))\colon u \in U_r\}$, причём rang означает ранг матрицы, а card — количество элементов множества.

Следствие 2. *Пусть V_r — обобщённые инвариантные собственные подпространства T, отвечающие некоторому разбиению спектра T на непересекающиеся классы (в частности, эти подпространства могут отвечать всем различным собственным числам λ_r), и пусть $T = \bigoplus\limits_r T_r$ — разложение T на линейные операторы $T_r\colon V_r \to V_r$. Обозначим через π_r естественную проекцию $\mathbb{C}^n \to V_r$ вдоль $V_{r'}$, $r' \neq r$. Тогда T и $\mathfrak{N}$ находятся в общем положении, если и только если T_r и $\mathfrak{N}_r = \pi_r(\mathfrak{N})$ находятся в общем положении для каждого r.*

Теперь сформулируем теорему о неинтегрируемости для многомерного диффеоморфизма с гомоклиническими траекториями.

Пусть q — гиперболическая неподвижная точка C^N-диффеоморфизма S n-мерного многообразия M на себя; W^- и W^+ — её выходящее и входящее инвариантные многообразия (сепаратрисы), которые, как известно, также являются многообразиями класса C^N (они аналитические, если S аналитическое). Пусть размерности W^- и W^+ равны соответственно n^- и n^+ (тогда $n^+ + n^- = n$) и r_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ — некоторые трансверсальные гомоклинические точки, так что W^- и W^+ пересекаются трансверсально в каждой точке r_j. Говорят, что орбиты точек r_j и неподвижная точка q образуют *гомоклиническую структуру*. Пусть λ_j^+ $(1 \leqslant j \leqslant n^+)$ и λ_j^- $(1 \leqslant j \leqslant n^-)$ — все собственные числа отображения S в точке q, причём $0 < |\lambda_j^+| < 1 < |\lambda_j^-|$. Предположим для простоты, что обе части спектра, лежащие внутри и вне единичной окружности, являются узкими в том смысле, что

$$\max_j |\lambda_j^+|^2 < \min_j |\lambda_j^+| \quad \text{и} \quad \min_j |\lambda_j^-|^2 > \max_j |\lambda_j^-|. \tag{1}$$

Тогда N может быть любым целым числом, таким что $N \geqslant 2$. По теореме С. Стернберга [30] существуют линеаризующие координаты $y^\pm \in \mathbb{R}^{n^\pm}$ класса C^N на $W^\pm$ (и они аналитические, если S аналитическое), в которых сжимающее или растягивающее отображение $S|W^\pm$ принимает линейный вид $y^\pm \mapsto J^\pm y^\pm$. Для каждого из двух индексов $\pm$ обозначим через $\mathfrak{N}^\pm \subset \mathbb{R}^{n^\pm}$ множество $y^\pm$-координат точек $r_j \in W^\pm$ и предположим, что линейное отображение $J^\pm$ и множество $\mathfrak{N}^\pm$ находятся в общем положении.

Теорема 1. *При выполнении сформулированных выше условий диффеоморфизм S не имеет непостоянного* (*вещественно-*)*мероморфного первого интеграла ни в какой окрестности гомоклинической структуры.*

Замечание 2. Условия теоремы сохраняются при малых возмущениях диффеоморфизма S. Действительно, искомый результат непосредственно вытекает из двух следующих фактов. Во-первых, при малых возмущениях отображения S его сепаратрисы $W^\pm$, трансверсальные гомоклинические точки и линеаризующие координаты $y^\pm$ на $W^\pm$ будут лишь слегка возмущаться (строго говоря, малые C^k-возмущения гиперболического C^k-отображения S приводят к малым C^k-возмущениям его сепаратрис $W^\pm$ как C^k-многообразий; при малых C^k-возмущениях C^k-многообразий точки их трансверсального пересечения не исчезнут, а лишь испытают малые возмущения; наконец, малые C^k-возмущения сжимающего C^k-отображения — в нашем случае $(S|W^\pm)^{\pm 1}$ — приводят к малым C^k-возмущениям его линеаризующих C^k-координат, если $k \geqslant N$, где N — требуемая гладкость в теореме Стернберга, при этом все результаты останутся в силе, если работать в аналитической категории, обозначаемой посредством $k = \omega$, см. детали в [25]; при условии (1) имеем $N = 2$). Во-вторых, как отмечалось выше, условие общности положения отображения $J^\pm$ и множества $\mathfrak{N}^\pm$ сохраняется при их малых возмущениях. Интересно отметить, что этот результат останется верен, если рассматривать достаточно гладкие возмущения, которые являются малыми только в C^1-смысле. А именно, пусть S — диффеоморфизм класса C^k с гиперболической неподвижной точкой, для которого выполнены условия теоремы о неинтегрируемости. Здесь $k \geqslant N$, где N — требуемая гладкость в теореме Стернберга. Тогда если C^k-диффеоморфизм S' достаточно близок к S в C^1-смысле, то для S' тоже выполнены условия теоремы. (Ограничение на гладкость возникает только при использовании теоремы Стернберга. Однако C^m-малые возмущения сжимающего C^k-диффеоморфизма, не выводящие его из класса C^k-отображений, приводят только к C^m-малым возмущениям его линеаризующих C^k-координат; здесь $k \geqslant N$, а m произвольно, $1 \leqslant m \leqslant k$, см. [25].)

Хорошо известно, что в любой окрестности гомоклинической структуры имеется инвариантное гиперболическое множество, описываемое методами символической динамики. В наиболее общей форме этот результат обсуждался В. М. Алексеевым [1, 17] (см. также [13]). Движения на этом множестве, конечно, детерминистские, но они выглядят подобно случайным. Поэтому В. М. Алексеев назвал их *квазислучайными* движениями. Важной чертой является то, что множество квазислучайных движений — обозначим его через A — топологически транзитивно, т. е. содержит всюду плотную траекторию. Следовательно, любой непрерывный первый интеграл должен быть постоянным на этом множестве. Чтобы доказать сформулированную выше теорему о неинтегрируемости, автор установил, что множество квазислучайных движений является «достаточно шероховатым», т. е. в любой окрестности любой своей точки это множество не лежит на регулярном C^N-подмногообразии положительной коразмерности (ни даже на объединении счётного числа таких подмногообразий). Поэтому для функции класса C^N, постоянной на этом множестве, её дифференциал обращается в нуль всюду на этом множестве. В частности, множество A является ключевым в смысле [3, 11], т. е. функция, аналитическая в окрестности этого множества и постоянная на нём, будет постоянна всюду. Поэтому аналитический первый интеграл оказывается постоянной функцией. Переход к случаю мероморфного первого интеграла не представляет труда, поскольку по определению он локально предста́вим как отношение двух аналитических функций f/g, но знаменатель g не может обращаться в нуль на пересечении никакого открытого множества с множеством квазислучайных движений A. Поэтому имеется много точек на A, вблизи которых первый интеграл аналитичен и применимы изложенные выше доводы. Таким образом, сложная пространственная структура множества, на котором любой первый интеграл постоянен, ведёт к отсутствию непостоянного мероморфного первого интеграла. Детали можно найти в [25], а полный набросок доказательства — в [23].

Как было указано, если диффеоморфизм S аналитический, то его сепаратрисы W^- и W^+ и линеаризующие координаты на них также являются аналитическими. Кроме того, отметим, что эти рассмотрения без изменений переносятся на комплексный случай, когда S — комплексно-аналитический диффеоморфизм. Тогда сепаратрисы $W^\pm$ и линеаризующие координаты $y^\pm \in \mathbb{C}^{n^\pm}$ на $W^\pm$ также являются комплексно-аналитическими и имеет место полный аналог теоремы 1, утверждающий отсутствие непостоянного мероморфного первого интеграла в окрестности рассматриваемой комплексной гомоклинической структуры.

В приложениях диффеоморфизм S часто возникает как отображение последования (отображение Пуанкаре) фазового потока динамической системы, а неподвижная гиперболическая точка q диффеоморфизма S соответствует гиперболической периодической траектории этой системы. Тогда несуществование аналитического или мероморфного первого интеграла исходной системы равносильно несуществованию такого интеграла для отображения Пуанкаре.

Здесь, при рассмотрении комплексного случая, комплексно-аналитические линеаризующие координаты продолжаются не на всё пространство $\mathbb{C}^{n^\pm}$, а определены, вообще говоря, только в окрестности точки $y^\pm = 0$, в отличие от вещественного случая. Причина этого заключается в том, что решения продолжаются не на всю область комплексной временно́й переменной. Однако это обстоятельство несущественно для справедливости комплексного аналога теоремы 1.

Замечание 3. Теорема 1 может быть легко использована для доказательства неинтегрируемости систем, которые являются возмущениями интегрируемых. Пусть S_ε — диффеоморфизм, зависящий от малого параметра ε. Обычно рассматриваемые диффеоморфизмы аналитические и аналитически зависят от ε, но на самом деле можно говорить о гладких диффеоморфизмах, гладко зависящих от ε. Предположим, что «невозмущённый» диффеоморфизм S_0 имеет гиперболическую неподвижную точку q_0, причём спектр S_0 в q_0 является узким в смысле выполнения неравенств (1). Тогда при малых возмущениях отображения S_0 его неподвижная гиперболическая точка q_0 и сепаратрисы $W_0^\pm$ будут лишь слегка возмущаться и неравенства (1) для спектра останутся в силе. Пусть «невозмущённый» диффеоморфизм S_0 является в некотором смысле интегрируемым, а для всех малых $\varepsilon \neq 0$ появляются точки $r_j(\varepsilon)$ трансверсального пересечения возмущённых сепаратрис W_ε^+ и W_ε^-, причём $r_j(\varepsilon) \to r_j$ при $\varepsilon \to 0$, где $r_j \in W_0^+ \cap W_0^-$. (Обнаружить рождающиеся при возмущении трансверсальные гомоклинические точки можно с помощью того или иного варианта метода Мельникова, развитого как для фазовых потоков, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и для диффеоморфизмов, см., например, [3, 4, 11, 18, 20—22, 31]. Обычно рассматривается расщепление сдвоенных сепаратрис при возмущении интегрируемой системы дифференциальных уравнений. Сам метод в одном из его гамильтоновых вариантов фактически возник ещё в работе А. Пуанкаре [14].) Наконец, предположим, что для отображения S_0 и точек r_j на его сепаратрисах $W_0^\pm$ выполнены условия общности положения, предполагаемые в теореме 1 (подчеркнём, что двоякоасимптотические точки r_j могут не быть трансверсальными гомоклиническими, как это имеет место в обычно рассматриваемом случае расщепления сдвоенных сепаратрис при возмущении интегрируемой системы). Тогда условия теоремы 1 будут выполнены для возмущённого диффеоморфизма S_ε и трансверсальных гомоклинических точек $r_j(\varepsilon)$ при всех малых $\varepsilon \neq 0$ согласно замечанию 2. Точная формулировка результата будет дана в теореме 3 раздела 3 в несколько более общем контексте.

2. Неинтегрируемость, основанная на ветвлении решений, рассмотренном с точки зрения символической динамики

Напомним одну из теорем о неинтегрируемости, относящихся к ветвлению решений [6] (упрощённые версии этих теорем с более подробным объяснением лежащих в основе идей представлены в [24]). Затем обсудим дальнейшие обобщения результата о неинтегрируемости.

Рассмотрим систему аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) \tag{2}$$

в комплексной области изменения независимой переменной t и фазовых переменных x. Если система τ-периодическая по t, то удобно рассматривать переменную t как пробегающую комплексный цилиндр $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}$. Пусть переменные в расширенном фазовом пространстве (x,t) пробегают область $D \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$, и пусть правая часть уравнений (2) имеет в D вид

$$X(x,t) = X_0(x) + \varepsilon X_1(x,t) + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Более того, пусть $X_0(q) = 0$ для некоторой точки $q \in \mathbb{C}^n$, $\Gamma = \Gamma_0\colon [0,1] \to \mathbb{C}\{t\}$ — некоторый контур, такой что $\Gamma(1) - \Gamma(0) = \tau$ и $\{q\} \times \Gamma \subset D$; введём также область $U = \{t\colon (q,t) \in D\} \supset \Gamma \equiv \Gamma_0$ в $\mathbb{C}$. Обозначим через $Y(t) = X_1(q,t)$ член первого порядка для возмущения в $x = q$.

Определение 3. Будем говорить, что невырожденный линейный оператор $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n$-значная функция f, голоморфная всюду в U, кроме конечного числа особенностей, находятся в *общем положении*, если T и $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ находятся в общем положении в смысле определения 1, где $\mathfrak{N}$ обозначает множество, образованное вычетами f в U.

Для последующего мы выберем замкнутые контуры $\Gamma_i\colon [0,1] \to U \supset \mathbb{C}$ $(i \neq 0)$, такие что $\Gamma_i(0) = \Gamma_i(1) = t_0$, где $t_0 = \Gamma_0(0)$ и

а) каждый контур Γ_i стягиваем в области U и обходит ровно одну особенность $t_i \in U$;

б) оператор T и подмножество $\mathfrak{N}(\{\Gamma_i\}) = \{\operatorname{Res}_{t_i} f\} \subseteq \mathfrak{N}$ $(i \neq 0)$ находятся в общем положении.

Теорема 2. *Пусть выполнены описанные выше условия, и пусть* $\Lambda = (\partial X_0/\partial x)|_{x=q}$ — *матрица невозмущённой системы (для* $\varepsilon = 0$*), линеаризованной вблизи постоянного решения* $x \equiv q$. *Предположим, что оператор* $J = \exp(\tau\Lambda)$ *гиперболический (таким образом, невозмущённое постоянное* τ*-периодическое решение* $x \equiv q$ *гиперболическое) и, более того, каждое из множеств его собственных чисел* ν_j*, лежащих с одной стороны от единичной окружности, удовлетворяет мультипликативным условиям нерезонансности типа*

Пуанкаре

$$|\nu_s| \neq |\nu^m|, \quad \text{где} \quad \nu^m = \prod_j \nu_j^{m_j}, \quad m = \{m_j\}, \tag{4}$$

для всех s *и неотрицательных целых* m_j*, таких что* $|m| = \sum\limits_j m_j \geqslant 2$*. Тогда если оператор* J *и функция* $f(t) = \exp(-\Lambda t) \cdot Y(t)$ *находятся в общем положении, то система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла ни в какой окрестности букета контуров* $\{q\} \times \bigcup\limits_i \Gamma_i \subset D$ *для всех достаточно малых* $\varepsilon \neq 0$*.*

Замечание 4. Пусть L^+ и L^- — инвариантные подпространства оператора J, отвечающие частям спектра, лежащим внутри и вне единичной окружности, и $J = J^+ \oplus J^-$ — соответствующее разложение в прямую сумму операторов $J^\pm \colon L^\pm \to L^\pm$. Очевидно, L^+ и L^- — инвариантные подпространства оператора $\tau\Lambda$, отвечающие частям спектра, лежащим на комплексной плоскости слева и справа от действительной оси, причём $J^\pm = \exp(\tau\Lambda^\pm)$, где $\Lambda = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ — разложение в прямую сумму операторов $\Lambda^\pm \colon L^\pm \to L^\pm$. Определим $L^\pm$-значную функцию

$$f^\pm(t) = \pi^\pm f(t) = \exp(-\Lambda^\pm t) \cdot \pi^\pm X_1(q, t),$$

где $\pi^\pm \colon \mathbb{C}^n \to L^\pm$ — естественная проекция вдоль $L^\mp$. Согласно следствию замечания 1 условие, что оператор J и функция $f(t)$ находятся в общем положении, эквивалентно тому, что для каждого из двух индексов $\pm$ оператор $J^\pm$ и функция $f^\pm(t)$ находятся в общем положении.

Идея, лежащая в основе доказательства этой теоремы, состоит в рассмотрении ветвления решений с точки зрения символической динамики. Мы получаем ситуацию, совершенно аналогичную той, которая возникла при описании квазислучайных движений вблизи гомоклинической структуры одной гиперболической неподвижной точки. Поэтому легко переформулировать соответствующие условия неинтегрируемости. Тогда элементарная теория возмущений первого порядка используется, чтобы показать, что предположения теоремы обеспечивают выполнение условий неинтегрируемости.

Описанный подход основан на изучении совместного влияния нескольких особенностей в комплексной области на ветвление решений, которое приводит к тому, что множество значений специально построенного решения оказывается в некотором смысле «плотным», что влечёт неинтегрируемость. Это решение строится методами гиперболической теории и аналогично квазислучайному движению. На родственной идее основан предложенный М. Д. Крускалом «метод поли-Пенлеве» [28, 29]. Между тем, подход Крускала не использует гиперболической теории, а апеллирует к идее, что интерференция приращений при обходе нескольких замкнутых контуров приводит к «плотности» значений решения. Это рассуждение, однако, не позволяет доказать неинтегрируемость при фиксированном значении малого параметра, а показывает только отсутствие интеграла, разлагающегося в ряд по малому параметру[1]. Кроме того, примеры, разобранные в [28, 29], связаны с громоздкими вычислениями, хотя рассматриваемые там уравнения имеют только первый порядок. Заметим также, что наш подход обеспечивает строгое доказательство существования *бесконечнолистных* решений, которые обсуждались во многих физических статьях (см. [19])[2].

Теперь этот подход будет объяснён более подробно, но без технических деталей. Пусть имеется конечный набор замкнутых контуров $\Gamma_i\colon [0,1] \to \mathbb{C}\{t\}$ с началами $\Gamma_i(0)$ и концами $\Gamma_i(1)$ в одной и той же точке t_0. При некоторых условиях каждой бесконечной в обе стороны последовательности $\omega = [\ldots, \Gamma_{i_{-1}}, \Gamma_{i_0}, \Gamma_{i_1}, \ldots]$ будет соответствовать локально единственное решение $x = x_\omega(t)$, продолжающееся вдоль ω в обоих направлениях. Доказательства основаны на элементах гиперболической теории, а решения x_ω совершенно аналогичны квазислучайным движениям. Строго говоря, каждому замкнутому контуру Γ_i ставится в соответствие отображение последования S_i обхода вокруг этого контура, определяемое аналитическим продолжением решений. Таким образом, исследование решений x_ω, продолжаемых вдоль последовательности контуров ω, сводится к изучению траекторий соответствующего каскада $[S_{i_n}\colon -\infty < n < +\infty]$ отображений обхода. Идея заключается в том, что все эти отображения могут обладать некоторыми согласованными свойствами *гиперболичности*, что гарантирует существование искомой локально единственной траектории каскада отображений. (Это главная идея теории гиперболических систем, которая прослеживается во многих работах. Описательное изложение результата в этой форме представлено, например, в [2].) Достаточно потребовать выполнения этих согласованных условий гиперболичности для $\varepsilon = 0$, так как они устойчивы относительно малых возмущений и поэтому сохраняются для малых $\varepsilon \neq 0$. Конец каждого контура Γ_{i_k} из последовательности ω и начало следующего контура $\Gamma_{i_{k+1}}$ совпадают и являются в действительности копией точки t_0. Значения x_ω в этих точках образуют как раз траекторию каскада отображений. Выбрав одну такую копию t_0, можно поставить в соответствие последовательности ω элемент этой траектории, который будет обозначаться через $\psi(\omega)$. Выбранная точка, являющаяся концом одного контура Γ_{i_k} и началом следующего за ним контура $\Gamma_{i_{k+1}}$, будет отмечена «галочкой»: $\omega = [\ldots, \Gamma_k \check{;}\, \Gamma_{k+1}, \ldots]$.

При предположениях теоремы 2 для $\varepsilon = 0$ имеется решение $x = z_0(t) \equiv q$ с начальными данными $x = q$, $t = t_0$, которое аналитически продолжается и однозначно вдоль всех контуров Γ_i, т. е. q будет неподвижной точкой отображений S_i. Более того, при $\varepsilon = 0$ неподвижная точка q отображения S_0 гиперболическая (поскольку решение $x = z_0(t)$, будучи продолжено вдоль Γ_0, является τ-периодическим и гиперболическим), а другие отображения S_i $(i \neq 0)$

[1]Тот же самый тип неинтегрируемости устанавливается в некоторых других подходах к проблеме неинтегрируемости, см. обзоры [3, 11].

[2]Обычный подход, основанный на элементарной теории возмущений гарантирует существование решений, которые являются «асимптотически» бесконечнолистными. Это означает, что количество ветвей в данной точке может быть конечным, но оно непременно стремится к бесконечности при стремлении к нулю малого параметра возмущения.

будут вблизи q тождественными отображениями (поскольку все решения, близкие к $x = z_0(t)$, однозначны вдоль контуров Γ_i, $i \neq 0$). Чтобы отображения S_i $(i \neq 0)$ были гиперболическими и свойства гиперболичности всех отображений S_0, S_i $(i \neq 0)$ были согласованными, нужно рассмотреть контуры $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_0 \circ \Gamma_i$ или $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \circ \Gamma_0$ вместо Γ_i $(i \neq 0)$. Таким образом, следует ограничиться рассмотрением всех последовательностей ω, формируемых образующими контурами $\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0$ и $\tilde{\Gamma}_i$ $(i \neq 0)$. Соответствующие отображения последования для $\varepsilon = 0$ будут обладать желаемыми согласованными свойствами гиперболичности, поскольку они совпадают с гиперболическим отображением S_0. Строго говоря, далее будет удобно рассматривать все последовательности ω, в которых перед каждым контуром Γ_i $(i \neq 0)$ и после него идут контуры Γ_0, т. е. любые два контура, отличные от Γ_0, разделены хотя бы одним контуром Γ_0. Тогда решения x_ω определены для всех ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Заметим, в частности, что для малых ε отображение S_0 имеет неподвижную гиперболическую точку q_ε, близкую к q, а решение $x = z_\varepsilon(t)$, однозначное вдоль Γ_0, соответствует этой точке. Точка q_ε аналитически зависит от ε. Подчеркнём, что возмущённое гиперболическое периодическое решение $x = z_\varepsilon(t)$ зависит при $\varepsilon \neq 0$ от рассматриваемого контура Γ_0.

Обозначим через W^+ и W^- устойчивое (входящее) и неустойчивое (выходящее) инвариантные многообразия гиперболической неподвижной точки $q_\varepsilon = \psi([\ldots, \Gamma_0, \Gamma_0, \ldots])$ отображения S_0. Точки $\psi\bigl(\omega^{(i,+)}\bigr)$ и $\psi\bigl(\omega^{(i,-)}\bigr)$, соответствующие последовательностям

$$\omega^{(i,+)} = [\ldots, \Gamma_0, \Gamma_0, \check{\Gamma_i}, \Gamma_0, \Gamma_0, \ldots] \quad \text{и} \quad \omega^{(i,-)} = [\ldots, \Gamma_0, \check{\Gamma_0}, \Gamma_i, \Gamma_0, \Gamma_0, \ldots],$$

будут лежать на W^+ и W^- соответственно, они являются аналогами гомоклинических точек. Действительно, $\psi\bigl(\omega^{(i,+)}\bigr) = S_i(W^-) \cap W^+$ и $\psi\bigl(\omega^{(i,-)}\bigr) = S_i^{-1}(W^+) \cap W^-$. Чтобы гарантировать желаемый результат о неинтегрируемости, достаточно потребовать, чтобы спектр S_0 в неподвижной точке q_ε и множества $\bigl\{\psi\bigl(\omega^{(i,+)}\bigr) \colon i \neq 0\bigr\}$, $\bigl\{\psi\bigl(\omega^{(i,-)}\bigr) \colon i \neq 0\bigr\}$ удовлетворяли условиям теоремы 1.

Замечание 5. В этой связи напомним два факта, которые уже были отмечены. Во-первых, все рассмотрения и заключения теоремы 1 остаются справедливы для комплексных диффеоморфизмов. Во-вторых, в рассмотрениях раздела 1 благодаря предположению о том, что спектр узкий, автоматически исчезали некоторые геометрические условия, относящиеся к взаимному расположению касательных подпространств к сепаратрисам в их точках пересечения. В отличие от раздела 1, условия теоремы 2 не включают такого предположения. Однако можно убедиться, что желаемое геометрическое условие (см. [5]) также будет автоматически выполнено, поскольку для малых ε отображения S_i $(i \neq 0)$ переносят точку q_ε в близкие к ней точки и их дифференциалы в q_ε близки к тождественному отображению.

Элементарная теория возмущений даёт в первом порядке, что $S_i(q_\varepsilon) = q_\varepsilon + \varepsilon F_i + O(\varepsilon^2)$ $(i \neq 0)$, где $F_i = x_1\bigl(\Gamma_i(1)\bigr)$, а $x_1(t)$ является решением урав-

нения $\dot{x}_1 = \Lambda x_1 + Y(t)$ вдоль контура Γ_i с начальным условием $x_1\big(\Gamma_i(0)\big) = 0$. Поэтому
$$F_i = e^{\Lambda t_0} \oint\limits_{\Gamma_i} e^{-\Lambda t} Y(t)\, dt.$$
Для $\varepsilon = 0$ касательное пространство в точке q разлагается в прямую сумму двух подпространств $L^{\pm}$, отвечающих частям спектра дифференциала $dS_0|_q = \exp(\tau\Lambda)$, которые лежат внутри и вне единичной окружности. Эти подпространства являются касательными подпространствами к сепаратрисам $W^{\pm}$ в точке q. Теперь предположим, что $\varepsilon \neq 0$, и пусть $F_i = F_i^+ \oplus F_i^-$ — соответствующее разложение вектора F_i на компоненты $F_i^{\pm} \in L^{\pm}$. Тогда $\psi\big(\omega^{(i,\pm)}\big) = q_\varepsilon \pm \varepsilon F_i^{\pm} + O(\varepsilon^2)$, поскольку гладкие многообразия $W^{\pm}$ гладко зависят от ε. Чтобы объяснить эту формулу и все другие рассмотрения в $O(\varepsilon)$-окрестности q_ε, удобно применить преобразование гомотетии с центром в q_ε и коэффициентом ε^{-1}. Этот переход соответствует введению в $O(\varepsilon)$-окрестности точки q_ε системы координат малого масштаба ε. В этой системе координат с началом в q_ε многообразия $W^{\pm}$ и отображения S_0 и $S_i^{\pm 1}$ $(i \neq 0)$ будут $O(\varepsilon)$-близки к линейным подпространствам $L^{\pm}$, линейному оператору $\exp(\tau\Lambda)$ и параллельным переносам на векторы $\pm F_i^{\pm}$ соответственно. Поэтому $S_i(W^-)$ $(S_i^{-1}(W^+))$ будет гладким многообразием, $O(\varepsilon)$-близким к аффинному подпространству, которое проходит через $S_i(q_\varepsilon)$ $(S_i^{-1}(q_\varepsilon)$ соответственно) параллельно L^- (L^+ соответственно). Тогда проекция $S_i^{\pm 1}(q_\varepsilon)$ на $L^{\pm}$ вдоль $L^{\mp}$ в новой системе координат будет $O(\varepsilon)$-близка к $\pm F_i^{\pm}$. Следовательно, $\psi\big(\omega^{(i,\pm)}\big)$ будет $O(\varepsilon)$-близко к $\pm F_i^{\pm}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что условия нерезонансности для спектра $dS_0|_q$ являются в точности условиями нерезонансности, наложенными в теореме 2. Чтобы проверить, что множества $\big\{\psi\big(\omega^{(i,+)}\big) : i \neq 0\big\}$, $\big\{\psi\big(\omega^{(i,-)}\big) : i \neq 0\big\}$ также удовлетворяют требуемым условиям, достаточно увидеть, что во введённой выше системе координат малого масштаба ε отображения $S_0|W^{\pm}$ и точки $\psi\big(\omega^{(i,\pm)}\big)$ будут $O(\varepsilon)$-близки к линейным операторам $\exp(\tau\Lambda)|L^{\pm}$ и точкам $\pm F_i^{\pm}$ соответственно. Поэтому желаемые условия неинтегрируемости выполнены ввиду грубости условия общности положения (замечание 2), если линейные операторы $\exp(\tau\Lambda)|L^{\pm}$ и множества $\{F_i^{\pm}\}$ находятся в общем положении. Это предположение равносильно условиям, наложенным на функцию $f(t)$ в теореме 2. Это завершает краткий набросок доказательства.

3. Комбинирование условий неинтегрируемости, основанных на трансверсальном пересечении сепаратрис и на ветвлении решений

Сформулируем результат, непосредственно включающий в себя теорему 1 (для описанного в замечании 3 случая, когда диффеоморфизм S является отображением последования периодической системы, близкой к автономной) и теорему 2.

Следуя разделу 2, рассмотрим τ-периодическую систему (2) с правой частью (3), такую что $X_0(q) = 0$. Пусть $\Lambda = (\partial X_0/\partial x)|_{x=q}$ и спектр оператора $J = \exp(\tau\Lambda)$ является узким в смысле условия (1), что гарантирует также выполнение неравенств (4). Обозначим через $W_0^\pm$ комплексные сепаратрисы гиперболической точки q автономной системы уравнений $dx/dt = \tau X_0(x)$. Тогда $\tilde{W}_0^\pm = W_0^\pm \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$ — сепаратрисы гиперболического периодического решения $x \equiv q$ невозмущённой τ-периодической системы $dx/dt = X_0(x)$. Предположим, что при всех малых $\varepsilon \neq 0$ появляются линии $\gamma_m(\varepsilon)$ трансверсального пересечения возмущённых сепаратрис $\tilde{W}_\varepsilon^\pm$, причём $\gamma_m(\varepsilon) \to \gamma_m$ при $\varepsilon \to 0$, где $\gamma_m \subset \tilde{W}_0^+ \cap \tilde{W}_0^-$.

Согласно варианту теоремы Стернберга, относящемуся к потокам [30], можно ввести линеаризующие координаты $y^\pm$ на сепаратрисах $W_0^\pm$, в которых невозмущённая система примет линейный вид. Будем использовать обозначения замечания 4. Заметим, что подпространства $L^\pm$ совпадают с касательными подпространствами к сепаратрисам $W_0^\pm$ в точке q. Поэтому можно ввести линеаризующие координаты $y^\pm$ на $W_0^\pm$, пробегающие $L^\pm = T_q W_0^\pm$, такие что дифференциал соответствующего отображения $\chi^\pm\colon L^\pm \to W_0^\pm$ (которое ставит в соответствие набору координат точку на сепаратрисе) в нуле $0 \in L^\pm$ будет тождественным отображением. Тогда в этих координатах ограничение невозмущённой системы на её сепаратрису $W_0^\pm$ принимает вид $dy^\pm/dt = \Lambda^\pm y^\pm$. В координатах $(y^\pm, t)$ на $\tilde{W}_0^\pm$ решение γ_m невозмущённой системы задаётся формулой $y^\pm = \exp(\Lambda^\pm t) \cdot z_m^\pm$, где $z_m^\pm \in L^\pm$ — некоторый вектор.

Пусть контур $\Gamma_0 = \Gamma$ и область U определяются как в разделе 2, и пусть $\mathbb{C}^n$-значная функция $f(t) = \exp(-\Lambda t) \cdot Y(t)$ (где $Y(t) = X_1(q, t)$) голоморфна всюду в U, кроме конечного числа особенностей. Обозначим через $\mathfrak{N}_1^\pm$ множество всех векторов $z_m^\pm$, и пусть $\mathfrak{N}_2^\pm = \pi^\pm(\mathfrak{N}_2)$, где $\mathfrak{N}_2$ — множество вычетов функции f в U. Очевидно, $\mathfrak{N}_2^\pm$ — множество вычетов функции $f^\pm$ в U. Пусть, наконец, для каждого из двух индексов $\pm$ оператор $J^\pm$ и множество $\mathfrak{N}^\pm = \mathfrak{N}_1^\pm \cup \mathfrak{N}_2^\pm \subset L^\pm$ находятся в общем положении (или, что равносильно, оператор J и множество $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1^+ \cup \mathfrak{N}_1^-) \cup \mathfrak{N}_2$ находятся в общем положении).

Замечание 6. Рассмотрение системы в комплексной области делает целесообразным уточнение понятий сепаратрисы и гомоклинического решения. Как уже отмечалось в разделе 2, данному контуру Γ_0 соответствует решение $x = z_\varepsilon(t)$, гиперболическое и периодическое вдоль этого контура. В качестве возмущённых сепаратрис $\tilde{W}_\varepsilon^\pm$ естественно взять сепаратрисы именно этого решения. На первый взгляд, в пересечении с гиперповерхностью $t = t_0$ эти сепаратрисы дают как раз сепаратрисы отображения S_0 (обычная связь сепаратрис потока и сепаратрис его сечения Пуанкаре). Мы пока так и будем считать, но, как объясним чуть ниже, здесь возникает больше свободы в выборе способа продолжения сепаратрис потока. Каждая траектория системы, в том числе траектория γ_m, — одномерная комплексная кривая, т. е. многообразие вещественной размерности 2. Однако при описании множества, вблизи которого система неинтегрируема, вместо этого многообразия можно взять лежащий на нём контур, т. е. многообразие вещественной размерности 1. Так, в теореме 2 вместо невозмущённого решения $x = q$ берётся контур $\mathcal{C}_0 = \{q\} \times \Gamma_0$, охватывающий цилиндрическое фазовое пространство $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$. В качестве контура на возмущённой периодической траектории $x = z_\varepsilon(t)$ можно было бы взять контур $\mathcal{C}_\varepsilon = \{(z_\varepsilon(t), t) \colon t \in \Gamma_0\}$, близкий к $\mathcal{C}_0$ и образованный точками на траектории, для которых t пробегает Γ_0. Каждая трансверсальная гомоклиническая траектория $\gamma_m(\varepsilon)$ получается продолжением сепаратрис $\tilde{W}^{\pm}_\varepsilon$ вдоль некоторого контура $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{C}$ от уходящих в бесконечность концов этого контура. В нашем случае в качестве контура $\tilde{\Gamma}$ удобно взять поднятие контура $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (это будет, так сказать, τ-периодический контур). Соответственно, вместо траектории γ_m берётся лежащий на ней контур, образованный точками, для которых t пробегает $\tilde{\Gamma}$. Этот контур обозначим, как и траекторию, через γ_m. Контур γ_m, будучи рассмотренным в цилиндрическом фазовом пространстве $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$ (при отождествлении значений t, различающихся на τ), будет бесконечным и наматывающимся в обоих направлениях на замкнутый контур $\mathcal{C}_0$.

Однако в действительности сепаратрисы $\tilde{W}^{\pm}_\varepsilon$ и гомоклинические траектории $\gamma_m(\varepsilon)$ — гораздо более богатые объекты в комплексной области, чем было описано, поскольку решения испытывают ветвление. Здесь типична ситуация, когда контур $\tilde{\Gamma}$ для данной траектории $\gamma_m(\varepsilon)$ не сводится к поднятию некоторого Γ_0 (т. е. не τ-периодичен). Например, если $W^{\pm}_\varepsilon$ — сепаратрисы отображения S_0, а траектория $\gamma_m(\varepsilon)$ соответствует трансверсальному пересечению многообразий $S_i(W^-_\varepsilon)$ и W^+_ε, где S_i, как и ранее, отображение обхода вдоль замкнутого контура $\Gamma_i \subset \mathbb{C}$, то $\tilde{\Gamma}$ получается поднятием Γ_0 и «вклейкой» замкнутого контура, получающегося сдвигом Γ_i на величину, кратную периоду τ. В любом случае можно рассматривать, например, контур $\tilde{\Gamma}$, начальная и конечная части которого составлены соответственно из последовательностей контуров $\ldots, (k_- - 2)\tau + \Gamma_0, (k_- - 1)\tau + \Gamma_0, k_-\tau + \Gamma_0$ и $k_+\tau + \Gamma_0, (k_+ + 1)\tau + \Gamma_0, (k_+ + 2)\tau + \Gamma_0, \ldots$, где k_-, k_+ — некоторые целые числа, τ — период, $s + \Gamma$ означает контур, полученный сдвигом контура Γ на число s. (То, какой из двух концов контура $\tilde{\Gamma}$ считается его начальной частью, а какой — конечной, определяется периодом τ; разность между концом и началом контура Γ_0 равна τ, это же верно и для сдвинутых контуров $s + \Gamma_0$, а записанные выше последовательности контуров, образующие начальную и конечную части контура $\tilde{\Gamma}$, таковы, что конец каждого контура является началом следующего за ним контура.) Если же исходная система двоякопериодическая, т. е., помимо τ, имеется ещё второй период τ', такой что $\tau/\tau' \notin \mathbb{R}$, то можно считать, что t пробегает комплексный тор $\mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z})$. В этом случае возникает ещё свобода в выборе начальной и конечной частей контура $\tilde{\Gamma}$, которые могут быть дополнительно сдвинуты друг относительно друга на произвольную величину, кратную второму периоду τ'.

Итак, γ_m будет обозначать и траекторию, и контур, образованный точками этой траектории, для которых t пробегает контур $\tilde{\Gamma}$, соответствующий данной трансверсальной гомоклинической траектории $\gamma_m(\varepsilon)$. Контур γ_m бесконечный и наматывается в обоих направлениях на замкнутый контур $\mathcal{C}_0$.

Теорема 3. *При выполнении сформулированных выше условий система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла в любой окрестности объединения контуров*

$$\bigcup_m \gamma_m \cup \left(\{q\} \times \bigcup_k \Gamma_k\right) \subset D$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Доказательства теорем 1 и 2 используют родственные идеи и основаны на описании методами символической динамики множества траекторий, лежащих в достаточно малых окрестностях гомоклинической структуры или букета контуров

$$\{q\} \times \bigcup_k \Gamma_k \subset D.$$

Доказательство теоремы 3 вытекает из наблюдения, что схемы доказательств теорем 1 и 2 могут быть объединены в одну с получением описанных выше комбинированных условий неинтегрируемости.

Замечание 7. Однако, согласно последнему замечанию, коль скоро мы работаем в комплексной области, то и сам вопрос о наличии трансверсальных гомоклинических траекторий следовало бы изучать с учётом явления ветвления решений. Как уже отмечалось в замечании 3, для обнаружения рождающихся при возмущении трансверсальных гомоклинических решений используется тот и или иной вариант метода Мельникова. Более классические варианты этого метода (включая упомянутый во введении метод Груендлера) основаны на вычислении вектор-функции, называемой *вектором Мельникова*. В гамильтоновом (симплектическом для диффеоморфизмов) случае можно вычислять только одну функцию, называемую *потенциалом Мельникова*, градиент которой есть как раз вектор Мельникова. В любом случае для потоков нахождение всех этих функций заключается в вычислении несобственных интегралов, взятых вдоль бесконечного в обе стороны контура $\tilde{\Gamma}$. Эти интегралы называются *интегралами Мельникова* или *интегралами Пуанкаре—Мельникова—Арнольда*. Обычно рассматривается ситуация, когда контур $\tilde{\Gamma}$ совпадает с вещественной осью (это всегда так, если система рассматривается в вещественной области), но метод Мельникова остаётся применим и для любого контура $\tilde{\Gamma}$ указанного выше вида. «Вклеив» в контур $\tilde{\Gamma}$ некоторый замкнутый контур Γ', пройденный N раз (N — достаточно большое число), получим, что интегралы, взятые вдоль $\tilde{\Gamma}$, будут хорошо аппроксимироваться с точностью до постоянного множителя N такими же интегралами, но взятыми вдоль Γ'. Поэтому условия наличия трансверсальных гомоклинических траекторий можно сформулировать в терминах интегралов Мельникова, взятых вдоль Γ', а эти интегралы вычисляются в терминах локальных величин, т. е. вычетов подынтегральных выражений. Такой подход эффективно использовался при получении результатов, которые будут представлены в разделе 8.

Чтобы разъяснить более подробно этот естественный подход, напомним вкратце суть классического варианта метода Мельникова, избегая при этом технических деталей. Рассматриваются две ситуации. В первой из них невозмущённая система автономна, и имеет гиперболическую неподвижную точку, а возмущение периодически зависит от времени. Во второй ситуации возмущённая система автономна, а в невозмущённой системе имеется гиперболическое периодическое решение. Поскольку вторая ситуация, как хорошо известно, в принципе сводится к первой определённой заменой переменных, то будем предполагать первую ситуацию. Итак, невозмущённая система автономна, имеет $2n$-мерное фазовое пространство и n первых интегралов, а n-мерные входящая W^+ и выходящая W^- сепаратрисы её неподвижной гиперболической точки сдвоены[1] и являются уровнем первых интегралов (вернее, связной компонентой уровня), причём интегралы независимы на $W^+ \cap W^-$. Пусть θ — некий $(n-1)$-мерный параметр, нумерующий различные невозмущённые двоякоасимптотические траектории $x = x^*(\theta, t)$. Допустим, возмущение является периодическим по времени. Тогда в первом порядке теории возмущений взаимное расположение возмущённых сепаратрис характеризуется n-мерным вектором (функцией) Мельникова $M = M(t_0, \theta)$, компоненты которого задают вблизи невозмущённой траектории $x = x^*(t + t_0, \theta)$ расхождения сепаратрис в направлениях n невозмущённых интегралов. Поэтому каждому простому нулю (t_0, θ) вектора Мельникова (где соответствующая матрица Якоби является невырожденной) отвечает трансверсальное гомоклиническое решение (линия трансверсального пересечения сепаратрис) возмущённой системы, $O(\varepsilon)$-близкое к решению $x = x^*(t + t_0, \theta)$ невозмущённой системы. Отметим, что вектор Мельникова имеет по временно́й переменной t_0 период, равный периоду возмущения. Обозначим через $M = M[\Gamma](t_0, \theta)$ интегралы Мельникова, вычисленные вдоль произвольного контура Γ. Для любого контура $\tilde{\Gamma}$ указанного выше вида простому нулю (t_0, θ) вектора Мельникова $M[\tilde{\Gamma}]$ отвечает трансверсальное гомоклиническое решение возмущённой системы, $O(\varepsilon)$-близкое вдоль $\tilde{\Gamma}$ к невозмущённому решению $x = x^*(t + t_0, \theta)$. Пусть контур $\tilde{\Gamma}'$ получается из контура $\tilde{\Gamma}$ «вклейкой» замкнутого контура Γ', пройденного N раз. Пусть (t_0^*, θ^*) — простой нуль вектора Мельникова $M[\Gamma'](t_0, \theta)$. Тогда для любого $\mu > 0$ в μ-окрестности точки (t_0^*, θ^*) имеется простой нуль (t_0, θ) вектора Мельникова $M[\tilde{\Gamma}']$, если только число $|N|$ было выбрано достаточно большим. Значит, при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ в комплексной области будет существовать трансверсальное гомоклиническое решение возмущённой системы, $O(\varepsilon)$-близкое вдоль контура $\tilde{\Gamma}'$ к невозмущённому решению $x = x^*(t + t_0, \theta)$.

[1]В разделе 7 мы увидим, что в комплексной области строение сепаратрис может оказаться несколько сложнее. В нашем примере сепаратрисы будут сдвоены, за исключением некоторых особых нетипичных траекторий, которые принадлежат только одной из двух сепаратрис.

4. Дальнейшее развитие теорем о неинтегрируемости

Теорема 2 естественным образом относится к случаю возмущения (локально) интегрируемой системы. Теорема 1 также может быть применена в случае возмущения «невозмущённого» отображения (см. замечания 2 и 3). И теорема 2, и теорема 1 для случая диффеоморфизма, зависящего от малого параметра, могут быть легко обобщены в двух следующих направлениях. Первое направление основано на обобщении определения 1. Это обобщение может быть полезно, когда отображение Пуанкаре $J = dT$, линеаризованное в гиперболической периодической точке, или оператор монодромии $J = \exp(\tau\Lambda)$ обладают кратными собственными числами, которые «расщепляются» в первом порядке теории возмущений по малому параметру ε. Рассмотрим теперь обобщённую формулировку определения 1, в которой один линейный оператор T будет заменён на пару (A, B) линейных операторов.

Определение 4. Будем говорить, что пара (A, B) линейных операторов $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и множество $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ находятся *в общем положении*, если линейный оператор A невырожден и выполнено следующее условие: для любого достаточно малого $\varepsilon \neq 0$ линейный оператор $A + \varepsilon B$ и множество $\mathfrak{N}$ находятся в общем положении в смысле определения 1 и это свойство сохраняется при $C\varepsilon$-возмущениях оператора B и множества $\mathfrak{N}$, где $C > 0$ — произвольно выбранная постоянная.

Следующее замечание является аналогом следствия замечания 1.

Замечание 8. Пусть V_r, $1 \leqslant r \leqslant p$, — (максимальные) обобщённые инвариантные собственные подпространства A, отвечающие некоторому разбиению $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ спектра A на непересекающиеся классы, и пусть $A = \bigoplus\limits_r A_r$ есть разложение A в прямую сумму линейных операторов $A_r \colon V_r \to V_r$. Обозначим через π_r естественную проекцию $\mathbb{C}^n \to V_r$ вдоль $V_{r'}$, $r' \neq r$, т. е. вдоль $\bigoplus\limits_{r' \neq r} V_{r'}$. Очевидно, в координатах $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^n$, где $z_r \in V_r$, оператор B принимает блочную форму $(B_{r,s})_{r,s=1}^p$ с элементами $B_{r,s} = \pi_r \circ B|V_s \colon V_s \to V_r$. Тогда (A, B) и $\mathfrak{N}$ находятся в общем положении, если и только если $(A_r, B_{r,r})$ и $\mathfrak{N}_r = \pi_r(\mathfrak{N})$ находятся в общем положении для каждого r. В самом деле, при $O(\varepsilon)$-возмущении линейного оператора A соответствующие ему линейные подпространства V_r также испытывают $O(\varepsilon)$-возмущения. Это следует, например, из того, что $V_r = \operatorname{im} \pi_r$ и имеет место явная формула

$$\pi_r = (2\pi i)^{-1} \oint\limits_{\gamma_r} (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)^{-1}\, d\lambda,$$

где $\gamma_r \subset \mathbb{C}$ есть замкнутый контур, разделяющий ξ_r и $\bigcup\limits_{r' \neq r} \xi_{r'}$ и обходящий против часовой стрелки вокруг ξ_r (теорема о спектральном разложении [15]).

Обозначим через V'_r, π'_r и $\mathfrak{N}'_r$ эти подпространства V_r, проекции π_r и множества $\mathfrak{N}_r$, соответствующие линейному оператору $T = A + \varepsilon B$ (в то время как множество $\mathfrak{N}$ остаётся неизменным, т. е. независящим от ε). Тогда V'_r и π'_r будут $O(\varepsilon)$-близки к V_r и π_r соответственно, и посредством $O(\varepsilon)$-близкой к тождественному отображению проекции $\rho_r = \pi_r|V'_r\colon V'_r \to V_r$ можно ввести на подпространстве V'_r линейные координаты, пробегающие V_r. В этих координатах каждый линейный оператор $T_r = T_r|V'_r\colon V'_r \to V'_r$ принимает вид $\bar{T}_r = \rho_r \circ T \circ \rho_r^{-1}$, который $O(\varepsilon^2)$-близок к $A_r + \varepsilon B_{r,r}$, а каждое множество $\mathfrak{N}'_r$ принимает вид $\bar{\mathfrak{N}}'_r = \rho_r \circ \pi'_r(\mathfrak{N})$, который $O(\varepsilon)$-близок к $\mathfrak{N}_r$, при условии что $\mathfrak{N}$ ограниченное. Напомним, что по следствию замечания 1 T и $\mathfrak{N}$ находятся в общем положении, если и только если T_r и $\mathfrak{N}_r = \pi_r(\mathfrak{N})$ находятся в общем положении для каждого r. Более того, аналогично приведённым выше рассмотрениям получаем, что $O(\varepsilon^2)$-возмущение T и $O(\varepsilon)$-возмущение $\mathfrak{N}$ вызовут $O(\varepsilon^2)$-возмущения V'_r, π'_r и $\bar{T}_r$ и $O(\varepsilon)$-возмущение $\bar{\mathfrak{N}}'_r$. И наоборот, любое $O(\varepsilon^2)$-возмущение всех $\bar{T}_r$ и любое $O(\varepsilon)$-возмущение всех $\bar{\mathfrak{N}}'_r$ может быть получено из некоторого $O(\varepsilon^2)$-возмущения T и $O(\varepsilon)$-возмущения $\mathfrak{N}$ (для простоты можно зафиксировать V'_r, π'_r). Из этих фактов немедленно вытекает искомый результат.

Соответствующее обобщение теоремы 1 будет таким.

Теорема 4. *Пусть S_ε — C^N-диффеоморфизм ($N \geqslant 2$), имеющий гиперболическую неподвижную точку q_ε с сепаратрисами $W^\pm_\varepsilon$, пусть спектр в этой точке удовлетворяет условиям* (1), *и пусть r_j являются предельными положениями соответствующих гомоклинических точек $r_j(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, как описано в замечании* 3. *Пусть отображение S_ε будет $O(\varepsilon)$-близко к S_0 в C^N-смысле, и пусть его ограничение на каждую сепаратрису $S_\varepsilon|W^\pm_\varepsilon$ принимает линейный вид $y^\pm \mapsto J^\pm_\varepsilon y^\pm$ в некоторых линеаризующих C^N-координатах $y^\pm = y^\pm_\varepsilon$, где $J^\pm_\varepsilon = A^\pm + \varepsilon B^\pm + O(\varepsilon^2)$. Для каждого из двух индексов $\pm$ обозначим через $\mathfrak{N}^\pm$ набор $y^\pm_0$-координат* (*невозмущённых*) *точек r_j и предположим, что пара линейных операторов $(A^\pm, B^\pm)$ и множество $\mathfrak{N}^\pm$ находятся в общем положении. Тогда диффеоморфизм S_ε для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ не имеет непостоянного* (*вещественно*) *мероморфного первого интеграла ни в какой окрестности объединения невозмущённой гиперболической точки q_0 и невозмущённых траекторий точек r_j.*

Определение 5. Пусть $\mathbb{C}^n$-значная функция f и соответствующее множество $\mathfrak{N}$ будут такими, как описано в определении 3. Будем говорит, что пара (A, B) линейных операторов $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n$-значная функция f находятся *в общем положении*, если (A, B) и $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ находятся в общем положении в смысле определения 4.

Перед тем как формулировать соответствующее обобщение теоремы 2, представим формулу для вычисления оператора B. На самом деле мы сформулируем следующую теорему 5 для случая, когда оба направления обобщения используются вместе. По причине, которая будет объяснена ниже, мы не будем формулировать результат о неинтегрируемости для диффеоморфизма, который использовал бы второе направление обобщения. Однако мы сформулируем комбинированную теорему, представляющую собой обобщение теоремы 3.

Пусть $\Lambda = (\partial X_0/\partial x)|_{x=q}$, а оператор $\exp(\tau\Lambda)$ гиперболический, и пусть контур Γ_0 будет такой, как описано выше. Линейная часть S_0 в неподвижной точке q_ε имеет вид $A + \varepsilon B + O(\varepsilon^2)$, где $A = \exp(\tau\Lambda)$, а матрица B может быть легко вычислена в рамках теории возмущений первого порядка. В отличие от A, матрица B зависит от выбора гомотопического класса контура Γ_0 в области U (очевидно, для контуров Γ_0, сопряжённых непрерывной деформацией в области U с обоими зафиксированными концами, операторы B будут совпадать). Поэтому контур Γ_0 будет указываться в качестве явного аргумента B: $B = B(\Gamma_0)$.

Теперь получим формулу для $B(\Gamma_0)$. Возмущённое периодическое решение $x = z_\varepsilon(t)$ зависит от Γ_0 и разлагается как $z_\varepsilon(t) = q + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$, где $\dot{x}_1 = \Lambda x_1 + Y(t)$. Таким образом,

$$x_1(t) = e^{t\Lambda}\left[C + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-s\Lambda} Y(s)\, ds\right], \tag{5}$$

где интеграл вычисляется вдоль контура Γ_0, а постоянный вектор C определяется условием периодичности $x_1\big(\Gamma_0(0)\big) = x_1\big(\Gamma_0(1)\big)$, дающим

$$C = (e^{-T\Lambda} - \mathrm{id})^{-1} \int\limits_{\Gamma} e^{-s\Lambda} Y(s)\, ds. \tag{6}$$

Теперь надо записать разложение для уравнения в вариациях вдоль $x = z_\varepsilon(t)$ с точностью до члена первого порядка по ε,

$$(\delta x)^{\cdot} = (\Lambda + \varepsilon\Lambda_1(t) + O(\varepsilon^2))\delta x, \quad \Lambda_1(t) = \left.\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}\right|_{x=q} \cdot x_1(t) + \left.\frac{\partial X_0}{\partial x}\right|_{x=q},$$

подставить (5) и решить уравнения в вариациях. Легко убедиться, что

$$(\delta x_0)^{\cdot} = \Lambda \delta x_0, \quad (\delta x_1)^{\cdot} = \Lambda \delta x_1 + \Lambda_1(t)\delta x_0$$

для $\delta x = \delta x_0 + \varepsilon \delta x_1 + O(\varepsilon^2)$, и поэтому

$$B(\Gamma_0) = e^{\tau\Lambda} \int\limits_{\Gamma_0} e^{-t\Lambda} \Lambda_1(t) e^{t\Lambda}\, dt.$$

Второе обобщение заключается в «разнесении» условия общности положения на «части», соответствующие некоторому разбиению $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ спектра A на наборы чисел, модули которых лежат в непересекающихся интервалах. Самое мелкое разбиение с этим свойством — это разбиение на наборы чисел с равными модулями. Самое грубое состоит из единственного элемента. Пусть V_r, $1 \leqslant r \leqslant p$, — (максимальные) обобщённые инвариантные собственные подпространства A, отвечающие элементам ξ_r разбиения ξ. Выберем набор контуров $\Gamma_0^{(r)}$, $1 \leqslant r \leqslant p$, вместо единственного контура Γ_0. Очевидно,

$A_r = A|V_r = \exp(\tau\Lambda_r)$, где $\Lambda_r = \Lambda|V_r$. Введём обозначение $Y_r(t) = \pi_r Y(t)$, где, как ранее, $\pi_r\colon \mathbb{C}^n \to V_r$ — проекция вдоль $\bigoplus\limits_{r' \neq r} V_{r'}$.

Используя два предложенных обобщения, сформулирует следующие развития теорем 2 и 3 соответственно.

Теорема 5. *Пусть выполнены описанные выше условия, и пусть спектр* $A = \exp(\tau\Lambda)$ *удовлетворяет условию нерезонансности* (4) *теоремы* 2. *Если пара* $\big(A_r, B_{r,r}(\Gamma_0^{(r)})\big)$ *линейных операторов* $V_r \to V_r$ *и* V_r*-значная функция* $f_r(t) = \exp(-\Lambda_r t) \cdot Y_r(t)$ *находятся в общем положении для каждого* r $(1 \leqslant r \leqslant p)$, *то система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла ни в какой окрестности объединения контуров*

$$\{q\} \times \left(\left(\bigcup_i \Gamma_i\right) \cup \left(\bigcup_r \Gamma_0^{(r)}\right)\right) \subset D$$

для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Заметим теперь, что контур $\tilde{\Gamma}$, вдоль которого трансверсальное двоякоасимптотическое решение $\gamma_m(\varepsilon)$ стремится к возмущённому периодическому решению, может быть задан в более общем виде, чем это было сделано в замечании 6. А именно, можно считать, что $\tilde{\Gamma}$ — произвольный контур, начальная и конечная части которого составлены соответственно как последовательности контуров $\ldots, (k_- - 2)\tau + \Gamma_0^{(-)}, (k_- - 1)\tau + \Gamma_0^{(-)}, k_-\tau + \Gamma_0^{(-)}$ и $k_+\tau + \Gamma_0^{(+)}, (k_+ + 1)\tau + \Gamma_0^{(+)}), (k_+ + 2)\tau + \Gamma_0^{(+)}, \ldots$, где оба контура $\Gamma_0^{(-)}$, $\Gamma_0^{(+)}$ того же типа, что и Γ_0. Тогда каждому из контуров $\Gamma_0^{(\pm)}$ соответствует возмущённое гиперболическое периодическое решение, которое можно обозначить $x = z_\varepsilon^{(\pm)}(t)$, а $\gamma_m(\varepsilon)$ будет, по существу, гетероклиническим решением, соединяющим эти два периодических решения. Отметим, что в этой ситуации остаётся применим метод Мельникова (см. замечание 7). Как и ранее, обозначение γ_m будем использовать и для предельной при $\varepsilon \to 0$ траектории, и для лежащего на ней контура, для точек которого t пробегает $\tilde{\Gamma}$.

Теорема 6. *Пусть* τ*-периодическая система* (2), *невозмущённые двоякоасимптотические траектории* γ_m, *контуры* Γ_k *и множества* $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ *вводятся так, как описано в разделе* 3, *причём множество* $\mathfrak{N}_1$ *строится по предельным положениям* γ_m *при* $\varepsilon \to 0$ *для некоторых трансверсальных гомоклинических решений* $\gamma_m(\varepsilon)$, *отвечающих любому набору контуров* $\tilde{\Gamma}$ *описанного выше типа*; *обозначим через* $\Gamma_0^{(s)}$ *все контуры* $\Gamma_0^{(-)}$, $\Gamma_0^{(+)}$, *порождающие начальные и конечные части таких контуров* $\tilde{\Gamma}$. *Пусть контуры* $\Gamma_0^{(r)}$, *пары линейных операторов* $\big(A_r, B_{r,r}(\Gamma_0^{(r)})\big)$ *и проекции* $\pi_r\colon \mathbb{C}^n \to V_r$ *вводятся так, как описано в теореме* 5. (*Можно считать, что индексы* r *и* s *пробегают разные множества.*) *Тогда если пара* $\big(A_r, B_{r,r}(\Gamma_0^{(r)})\big)$ *линейных операторов* $V_r \to V_r$ *и множество* $\mathfrak{N}^{(r)} = \pi_r(\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2)$ *находятся в общем положении для каждого* r $(1 \leqslant r \leqslant p)$, *то система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла ни в какой* *окрестности объединения контуров*

$$\bigcup_m \gamma_m \cup \left(\{q\} \times \left(\left(\bigcup_i \Gamma_i\right) \cup \left(\bigcup_r \Gamma_0^{(r)}\right) \cup \left(\bigcup_s \Gamma_0^{(s)}\right)\right)\right) \subset D$$

для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

При условиях теоремы 5 каждому контуру $\Gamma_0^{(r)}$ будет соответствовать своё отображение $S_0^{(r)}$, имеющее гиперболическую неподвижную точку $q_\varepsilon^{(r)} = \psi([\ldots, \Gamma_0^{(r)}, \Gamma_0^{(r)}, \ldots])$. Таким образом, в настоящем случае решения x_ω аналогичны квазислучайным движениям в окрестности гомоклинической структуры, образованной p гиперболическими неподвижными точками и их трансверсальными двоякоасимптотическими траекториями. Ввиду замечания 8 для простейшего случая $p = 1$ (когда используется только первое обобщение) доказательство теоремы 5 дословно повторяет доказательство теоремы 2. Чтобы распространить этот результат на общий случай, когда $p \geqslant 1$, следует использовать пункт а) определения 11 и результат предложения 7 из [25].

Теперь вкратце поясним суть этих определения и предложения из [25], избегая при этом подробных разъяснений. В [23, 25] автор детально рассмотрел обобщения результатов раздела 1 на случай гомоклинической структуры, образованной многими гиперболическими периодическими точками q_i и их гомо-(гетеро-)клиническими траекториями. Рассматривался случай, когда условия нерезонансности и общности положения выполнены для входящей сепаратрисы $W_{i^+}^+$ и лежащих на ней трансверсальных двоякоасимптотических точек и для выходящей сепаратрисы $W_{i^-}^-$ и лежащих на ней аналогичных точек, причём индексы i^+, i^- могут быть различными. (Здесь $W_i^\pm$ означает сепаратрису точки q_i.) Таким образом, условия теоремы, вообще говоря, «разнесены» на входящую и выходящую сепаратрисы различных гиперболических периодических точек. Здесь также предполагается выполнение двух дополнительных условий. Первое из них заключается в наличии некоторых «согласованных» разбиений $\xi_i^\pm$ для частей спектров всех гиперболических точек q_i, которые лежат внутри и вне единичной окружности, т. е. тех, которые соответствуют входящей W_i^+ и выходящей W_i^- сепаратрисам. Второе условие заключается в выполнении некоторых геометрических условий, являющихся естественным обобщением вышеупомянутого геометрического условия из [5] на случай многих гиперболических периодических точек. Здесь же мы используем следующее дальнейшее обобщение этих результатов [25]. Условие общности положения для гомо-(гетеро-)клинических точек на сепаратрисе $W_{i^\pm}^\pm$ может быть «разнесено» на несколько условий, таких что каждое из них касается сепаратрисы $W_{i_r^\pm}^\pm$ $(1 \leqslant r \leqslant p^\pm)$ индивидуальной гиперболической точки $q_{i_r^\pm}$ и соответствующего элемента согласованного разбиения $\xi_{i_r^\pm}^\pm$. Здесь дополнительно требуется выполнение некоторых условий «правильно согласованной» нерезонансности для всех разбиений $\xi_{i_r^+}^+$ и, соответственно, для всех разбиений $\xi_{i_r^-}^-$. Все детали и объяснения могут быть найдены в [25] и будут здесь опущены. Мы не формулируем здесь этот результат, поскольку он несколько искусствен и, главным образом, интересен с чисто теоретической точки зрения. Но, будучи перенесён на условия неинтегрируемости вследствие ветвления решений, он даёт полезные теоремы 5 и 6. Рассматриваются отображения $S_0^{(r)}$ обхода вокруг контуров $\Gamma_0^{(r)}$ вместо исходного диффеоморфизма вблизи гиперболических точек $q_{i_r^\pm}$. Наличие согласованных разбиений $\xi^\pm_{i_r^\pm}$ и правильная согласованность условий нерезонансности для соответствующих частей спектров гарантированы совпадением всех этих спектров, а геометрические условия выполнены в соответствии с замечанием 5. Необходимо только потребовать нерезонансности совпадающих спектров, что как раз даёт условия, сформулированные в теореме 5. Заметим, что можно было бы измельчить разбиение ξ таким образом, что каждый его элемент будет целиком лежать внутри или вне единичной окружности, а соответствующие разбиения $\xi^\pm \subset \xi$, образованные элементами ξ, будут разбиениями $\xi_i^\pm = \xi^\pm$, которые удовлетворяют требуемым условиям нерезонансности. Однако теорему 5 можно формулировать для случая более грубого разбиения ξ, поскольку его измельчение не нарушит условий, наложенных в этой теореме. В результате получаем эту теорему. В теореме 6 следует только рассмотреть отображения $S_0^{(s)}$ обхода вокруг контуров $\Gamma_0^{(s)}$ в дополнение к отображениям $S_0^{(r)}$, относящимся к контурам $\Gamma_0^{(r)}$. Поэтому эта теорема немедленно следует из приведённых выше рассуждений.

5. Возмущённый сферический маятник: общая постановка задачи

Сферический маятник — это материальная точка M, вынужденная оставаться на постоянном расстоянии l от неподвижной точки подвеса S. Предполагается, что эта связь идеальна и единственной внешней силой является однородная сила тяжести. Рассматриваемая система — автономная вполне интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы и первыми интегралами энергии и площадей (момента количества движения). Имеется единственное неустойчивое положение равновесия O, такое что вектор $\overrightarrow{SO}$ направлен вертикально вверх. Это положение равновесия является гиперболическим, поэтому все решения, асимптотически приближающиеся к точке O, когда время стремится к $-\infty$ или к $+\infty$, образуют неустойчивое W^- и устойчивое W^+ многообразия (сепаратрисы) в четырёхмерном фазовом пространстве. В рассматриваемой системе эти двумерные сепаратрисы совпадают (сдвоены), поскольку они образуют совместный уровень двух первых интегралов.

Пусть теперь точка подвеса S вынуждена совершать малые периодические колебания, что соответствует малому периодическому по времени возмущению исходной автономной системы. Тогда гиперболическое положение равновесия и его сепаратрисы возмущаются в гиперболическое периодическое решение и соответствующие трёхмерные сепаратрисы в пятимерном расширенном фазовом пространстве. Возмущение сдвоенных сепаратрис ведёт, вообще говоря, к их расщеплению (см. замечание 3).

Удобно использовать безразмерные переменные, в которых масса точки M, длина маятника l и ускорение свободного падения g положены равными единице. Для изучения возмущённого сферического маятника введём правую декартову систему координат (x, y, z) с началом в точке подвеса S и с осью z, направленной вертикально вверх, и обозначим через $\vec{r} = (x, y, z)$ вектор $\overrightarrow{SM}$, проведённый из точки подвеса в материальную точку M. Конфигурационное пространство системы — двумерная единичная сфера $S^2 = \{\vec{r}\colon |\vec{r}| = 1\}$, а фазовое пространство — касательное расслоение TS^2 над сферой, т. е. множество пар векторов координат и скоростей $w = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, где $\vec{r} \in S^2$ и $\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}$. Обозначим через $\bar{O}$ точку фазового пространства, соответствующую верхнему неустойчивому положению равновесия O; тогда $\bar{O} = (\vec{n}, \vec{0})$, где $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Первые интегралы энергии и площадей имеют вид

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) + z, \quad j = \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right)_z = x\dot{y} - y\dot{x},$$

где $(\vec{u} \cdot \vec{v})$ означает скалярное, а $(\vec{u} \times \vec{v})$ — векторное произведения двух векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$. Влияние движения точки подвеса S может быть представлено как действие соответствующей силы инерции. Таким образом, изучение системы, где точка S вынуждена двигаться с ускорением $\vec{a}(t)$, эквивалентно изучению сферического маятника с неподвижной точкой подвеса и с дополнительной внешней силой $\vec{F} = -\vec{a}(t)$. Чтобы рассмотреть малые колебания точки S, введём малый параметр ε и заменим $\vec{a}(t)$ на $\varepsilon\vec{a}(t)$.

6. Ветвление решений и неинтегрируемость возмущённого сферического маятника

В этом разделе будут сформулированы условия неинтегрируемости, основанные на теоремах 2 и 5.

Пусть T-периодическая вектор-функция $\vec{a}(t)$ является голоморфной всюду в некоторой связной области $U \subset \mathbb{C}$, кроме некоторых особенностей t_j, и пусть $\Gamma = \Gamma_0\colon [0, 1] \to U$ — некоторый контур, такой что $\Gamma(1) - \Gamma(0) = T$. В последующем изложении период T может быть любым комплексным числом с ненулевой вещественной частью. Это ограничение требуется для того, чтобы верхнее положение равновесия сферического маятника было гиперболическим, если оно рассматривается как T-периодическое решение. Выберем также замкнутые контуры $\Gamma_j\colon [0, 1] \to U$ $(j \neq 0)$, такие что $\Gamma_j(0) = \Gamma_j(1) = t_0$, где $t_0 = \Gamma_0(0)$ и каждый контур Γ_j стягиваем в области U и обходит ровно одну особенность $t_j \in U$. Введём двумерные векторы

$$\vec{C}_{\pm}^{(j)} = \mathrm{Res}_{t=t_j}\big(a_x(t), a_y(t)\big)e^{\pm t} = \big(C_{x,\pm}^{(j)}, C_{y,\pm}^{(j)}\big),$$

где $C^{(j)}_{\sigma,\pm} = \operatorname{Res}_{t=t_j} a_\sigma(t)e^{\pm t}$ для σ, обозначающего x или y. Заметим, что иногда более удобно использовать «масштабированные» векторы

$$\vec{D}^{(j)}_\pm = \bigl(D^{(j)}_{x,\pm}, D^{(j)}_{y,\pm}\bigr) = e^{\mp t_j}\vec{C}^{(j)}_\pm = \operatorname{Res}_{t=t_j}\bigl(a_x(t), a_y(t)\bigr)e^{\pm(t-t_j)},$$

поскольку эти векторы совпадают для особых точек t_j, получаемых одна из другой сдвигом на величину, кратную периоду T.

Введём на контуре Γ функции

$$c^\pm_\sigma(t) = \int\limits_{t_0}^{t}(-a_\sigma(\tau)e^{\pm\tau})\,d\tau, \quad \sigma\in\{x,y\},$$

где интегралы вычисляются вдоль этого контура. Таким образом, $c^\pm_\sigma\bigl(\Gamma(0)\bigr) = 0$. Определим на Γ также функции

$$\alpha^\pm_\sigma(t) = e^{\pm t}\bigl(\gamma_\mp c^\mp_\sigma\bigl(\Gamma(1)\bigr) + c^\mp_\sigma(t)\bigr), \tag{7}$$

где введены постоянные величины $\gamma_\pm = (e^{\pm T}-1)^{-1}$.

Напомним, что фазовое пространство возмущённого сферического маятника является касательным расслоением TS^2 к его конфигурационному пространству $S^2 = \{\vec{r}\colon |\vec{r}| = 1\}$ и что мы обозначили через $\bar{O}$ точку фазового пространства, которая соответствует верхнему неустойчивому положению равновесия $O = (0,0,1)$. Пятимерное расширенное фазовое пространство имеет вид $TS^2\times(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$, вернее говоря, является открытым подмножеством этого множества.

Теорема 7. *Пусть для каждого из двух индексов $\pm$ выполнено одно из двух следующих условий:*

$1_\pm$) *для некоторых особых точек t_j, t_k (где $j = j^\pm$, $k = k^\pm$), соответствующие векторы $\vec{C}^{(j)}_\pm$ и $\vec{C}^{(k)}_\pm$ будут непропорциональны,*

$2_\pm$) *для всех особых точек t_j соответствующие векторы $\vec{C}^{(j)}_\pm$ являются кратными одного и того же ненулевого вектора $\vec{D}_\pm = (D_{x,\pm}, D_{y,\pm})$, причём $\vec{C}^{(l^\pm)}_\pm \ne \vec{0}$ для некоторого $l^\pm$, и выполнено неравенство*

$$I^\pm_{xx}D^2_{x,\pm} + I^\pm_{xy}D_{x,\pm}D_{y,\pm} + I^\pm_{yy}D^2_{y,\pm} \ne 0, \tag{8}$$

где

$$I^\pm_{xx} = \int\limits_\Gamma[\pm 2a_x(\alpha^+_y - \alpha^-_y) + \alpha^-_x\alpha^+_y - \alpha^+_x\alpha^-_y \mp (5\alpha^\mp_x\alpha^\mp_y - \alpha^\pm_x\alpha^\pm_y)]\,dt,$$

$$I^\pm_{xy} = \int\limits_\Gamma\bigl[\mp 2a_x(\alpha^+_x - \alpha^-_x) \pm 2a_y(\alpha^+_y - \alpha^-_y) \pm 5\bigl((\alpha^\mp_x)^2 - (\alpha^\mp_y)^2\bigr) \mp$$
$$\mp\bigl((\alpha^\pm_x)^2 - (\alpha^\pm_y)^2\bigr)\bigr]\,dt,$$

$$I^\pm_{yy} = \int\limits_\Gamma[\mp 2a_y(\alpha^+_x - \alpha^-_x) + \alpha^-_x\alpha^+_y - \alpha^+_x\alpha^-_y \pm (5\alpha^\mp_x\alpha^\mp_y - \alpha^\pm_x\alpha^\pm_y)]\,dt$$

при некотором выборе контура $\Gamma = \Gamma_0^{\pm}$, $\Gamma(1) = \Gamma(0) + T$ *(который может зависеть, вообще говоря, от* $\pm$*; таким образом, допускается наличие двух различных контуров* Γ_0*).*

Тогда рассматриваемая система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла для каждого малого $\varepsilon \neq 0$.

Строго говоря, система неинтегрируема в любой окрестности $\{\bar{O}\} \times K$ *в расширенном фазовом пространстве, где* K *является следующим букетом контуров*:

$$K = \Gamma_0 \cup \Gamma_{j^+} \cup \Gamma_{k^+} \cup \Gamma_{j^-} \cup \Gamma_{k^-}$$

(где j^+ *или* k^+ *может совпадать с* j^- *или* k^-), *если выполнены условия* 1_+) *и* 1_-);

$$K = \Gamma_0^{\mp} \cup \Gamma_{j^\pm} \cup \Gamma_{k^\pm} \cup \Gamma_{l^\mp}$$

(где $l^{\mp}$ *может совпадать с* $j^{\pm}$ *или* $k^{\pm}$), *если выполнены условия* $1_{\pm}$) *и* $2_{\mp}$);

$$K = \Gamma_0^{+} \cup \Gamma_0^{-} \cup \Gamma_{l^+} \cup \Gamma_{l^-}$$

(где l^+ *и* l^- *могут совпадать*), *если выполнены условия* 2_+) *и* 2_-).

Пункт $1_{\pm}$) этой теоремы достаточно прост и основан на теореме 2. Он был установлен в [7]. Однако пункт $2_{\pm}$) нетривиален и будет получен применением теоремы 5.

Пусть для любых двух плоских векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ в декартовых координатах $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ означает их скалярное произведение, а $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x$ — их внешнее произведение. Эти выражения инвариантны относительно любого поворота плоской декартовой системы координат и, более того, относительно преобразований комплексной плоскости, лежащих в $\mathrm{SO}(2, \mathbb{C})$.

Можно переписать левую часть (8) в инвариантном виде

$$\int\limits_{\Gamma} g\, dt,$$

где

$$g = (\vec{\alpha}^- \wedge \vec{\alpha}^+)(\vec{D}_\pm \cdot \vec{D}_\pm) \pm \Psi(\vec{D}_\pm, \vec{\alpha}^+ - \vec{\alpha}^-, \vec{a}) \mp 5\Psi(\vec{D}_\pm, \vec{\alpha}^\mp, \vec{\alpha}^\mp) \pm \Psi(\vec{D}_\pm, \vec{\alpha}^\pm, \vec{\alpha}^\pm), \tag{9}$$

$\vec{\alpha}^{\pm} = (\alpha_x^{\pm}, \alpha_y^{\pm})$ и введено полезное обозначение

$$\Psi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_x^2(b_y c_x) + a_x a_y(b_y c_y - b_x c_x) - a_y^2 b_x c_y = (\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

для произвольных плоских векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$, $\vec{c} = (c_x, c_y)$.

С помощью выбора контура $\Gamma_0^{\pm}$ мы докажем теорему, которая даёт достаточные условия для несуществования непостоянного мероморфного первого интеграла в терминах некоторых локальных величин, связанных с особенностями t_j, вместо нелокального условия (8). Основная идея заключается в использовании специального контура $\Gamma_0^{\pm}$, который обходит последовательно каждую особенность t_j в точности n_j раз. Тогда имеется асимптотическая формула (в действительности полиномиальное выражение) для левой части (8) при больших $\sum\limits_j |n_j|$, а старший член формулы может быть выражен в терминах локальных величин, что позволяет найти локальные условия, гарантирующие требуемое неравенство (8). Заметим, однако, что, как легко убедиться, только старший член будет иметь выражение в терминах только локальных величин, поскольку остальные члены зависят также от нелокальных величин вроде интегралов вдоль путей, соединяющих различные особенности.

Чтобы сформулировать эту теорему, введём ещё одну локальную векторную величину, аналогичную $\vec{D}_{\pm}^{(j)}$. Пусть

$$\vec{E}_{\pm}^{(j)} = \big(E_{x,\pm}^{(j)}, E_{y,\pm}^{(j)}\big) = \operatorname{Res}_{t=t_j}\big(a_x(t), a_y(t)\big)(t-t_j)e^{\pm(t-t_j)}.$$

Другими словами, $D_{\sigma,\pm}^{(j)}$ и $E_{\sigma,\pm}^{(j)}$ будут коэффициентами при $(t-t_j)^{-1}$ и $(t-t_j)^{-2}$ соответственно в разложении Лорана для $a_\sigma(t)e^{\pm(t-t_j)}$ около $t=t_j$.

Говорят, что вектор $\vec{a}$ *изотропный*, если $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$. Для любого ненулевого изотропного вектора $\vec{a}=(a_x,a_y)$ отношение $a_x/a_y\in\{\pm i\}$ будет инвариантным относительно преобразований, принадлежащих к $\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$. Таким образом, множество всех ненулевых изотропных векторов распадается на две связные компоненты, соответствующие двум возможным значениям этого отношения. Можно сказать, что два изотропных вектора имеют один и тот же тип (разные типы), если они лежат в одной и той же компоненте связности (в разных компонентах связности соответственно). Для любого ненулевого изотропного вектора $\vec{a}$ его ортогональное подпространство без нулевого вектора $\{\vec{b}\colon \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0\}$ совпадает со всей компонентой связности, содержащей $\vec{a}$.

Теорема 8. *Неравенство* (8) *в условии* $2_{\pm}$) *теоремы* 7 *может быть заменено следующим предположением*:

- $\mathrm{i}_{\pm}$) *вектор* $\vec{D}_{\mp}^{(l)}$ *для некоторого* $l=l^{\pm}$ *непропорционален* (*ненулевому*) *вектору* $\vec{D}_{\pm}$.

Поэтому имеем как следствие и удобную равносильную переформулировку:

- ii) *пусть для некоторых* j, k (*они могут совпадать*) *векторы* $\vec{D}_{-}^{(j)}$ *и* $\vec{D}_{+}^{(k)}$ *ненулевые и непропорциональные друг другу. Тогда система неинтегрируема для всех малых* $\varepsilon\neq0$.

Кроме того, пара условий 2_{+}) *и* 2_{-}) *в теореме* 7 *может быть заменена следующим предположением*:

- iii) *пусть* $\vec{D}_{-}^{(j)}$, $\vec{D}_{+}^{(j)}$ *пропорциональны некоторому неизотропному вектору* $\vec{D}=(D_x,D_y)$ *для всех* j, *т. е.* $\vec{D}_{-}^{(j)}=f_{-}^{(j)}\vec{D}$ *и* $\vec{D}_{+}^{(j)}=f_{+}^{(j)}\vec{D}$ *с некоторыми постоянными* $f_{-}^{(j)}$ *и* $f_{+}^{(j)}$. *Введём величины* $\xi_{\pm}^{(j)}=\vec{D}\wedge\vec{E}_{\pm}^{(j)}$. *Пусть неравенства*

$$\frac{f_{+}^{(k)}}{\xi_{+}^{(k)}} \neq -\frac{f_{-}^{(j)}}{\xi_{-}^{(j)}}$$

выполнены для некоторых j и k (они могут совпадать). (Здесь любой знаменатель может быть равен нулю, а отношение $0/0$ может интерпретироваться как произвольное значение из $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$; таким образом, и знаменатель и числитель в одной части неравенства не обнуляются одновременно.)

Строго говоря, система неинтегрируема в любой окрестности $\{\bar{O}\} \times K$, где K является следующим букетом контуров:

$$K = \Gamma \cup \Gamma_{j^\pm} \cup \Gamma_{k^\pm} \cup \Gamma_{l^\mp}$$

(*где $l^\mp$ может совпадать с $j^\pm$ или $k^\pm$*), *если выполнены условия* $1_\pm$) *и* $\mathrm{i}_\mp$);

$$K = \Gamma \cup \Gamma_j \cup \Gamma_k,$$

если выполнено условие ii) *или* iii).

Таким образом, если не все векторы $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ пропорциональны друг другу, то система неинтегрируема. Если все эти векторы пропорциональны некоторому неизотропному вектору $\vec{D}$, то выполнение неравенства пункта iii) гарантирует неинтегрируемость. Наши вычисления, основанные на теории возмущения первого и второго порядка, не позволяют получить каких-либо условий неинтегрируемости для случая, когда все векторы $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ пропорциональны изотропному вектору $\vec{D}$.

7. Расщепление сепаратрис неустойчивого положения равновесия и неинтегрируемость возмущённого сферического маятника. I

Как уже отмечалось, полное и строгое исследование расщепление сепаратрис было проведено в [7]. Для этого использовался метод Мельникова, точнее говоря, версия этого метода, основанная на вычислении так называемых интегралов Мельникова. Кроме того, в [7] были рассмотрены приложения теорем 1—3, а в [8] получены результаты о наличии богатого множества гомоклинических траекторий в комплексной области, что также влечёт неинтегрируемость. Мы воспроизведём в этом разделе только нужные нам результаты, полученные в [7], оставляя в стороне все выкладки и обоснования. Затем будет рассмотрено распространение теорем предыдущего раздела на случай наличия гомоклинических траекторий. Результаты [8] будут обсуждаться в следующем разделе.

В задаче о движении плоского маятника двоякоасимптотические решения задаются в конфигурационном пространстве хорошо известными формулами

$$x = \pm\gamma_\perp(t'), \quad \gamma_\perp(t') = 2\,\mathrm{ch}^{-2}\,t'\,\mathrm{sh}\,t', \quad z = \gamma_\parallel(t') = 1 - 2\,\mathrm{ch}^{-2}\,t', \quad t' = t_0 + t$$

(когда $y = 0$, т. е. движение совершается в плоскости xz). Соответствующие решения для сферического маятника $\vec{r} = \vec{r}^*(t + t_0, \theta)$ в конфигурационном пространстве получаются поворотами вокруг вертикальной оси z и задаются формулами

$$\vec{r}^*(t,\theta)\colon\, x=\gamma_\perp(t)\cos\theta,\ y=\gamma_\perp(t)\sin\theta,\ z=\gamma_\|(t),$$

где $\theta \mod 2\pi$ — угол поворота, нумерующий решения, а t_0 — параметр, отвечающий временно́му сдвигу (фазе) решения. Обозначим через $w^*(t,\theta) = \big(\vec{r}^*(t,\theta),\dot{\vec{r}}^*(t,\theta)\big)$ соответствующее решение в фазовом пространстве; в дальнейшем $w=(\vec{r},\dot{\vec{r}})$ означает точки фазового пространства. В первом порядке теории возмущений взаимное расположение возмущённых сепаратрис характеризуется двумерным вектором (функцией) Мельникова $M=\big(M_E(t_0,\theta),M_j(t_0,\theta)\big)$, компоненты которого отвечают двум невозмущённым первым интегралам: энергии E и площадей (момента количества движения) j, как описано в замечании 7. Напомним, что каждому простому нулю (t_0,θ) вектора Мельникова соответствует трансверсальное гомоклиническое решение (линия трансверсального пересечения сепаратрис) возмущённой системы, $O(\varepsilon)$-близкое к решению $w=w^*(t+t_0,\theta)$ невозмущённой системы, и что вектор Мельникова имеет по временно́й переменной t_0 период, равный периоду колебаний точки подвеса. Его компоненты в данной задаче задаются формулами

$$\begin{aligned}
-M_E(t_0,\theta) &= f_{E,c}(t_0)\cos\theta + f_{E,s}(t_0)\sin\theta + f_{E,0}(t_0),\\
M_j(t_0,\theta) &= -f_{j,c}(t_0)\cos\theta + f_{j,s}(t_0)\sin\theta,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{E,c}(t_0) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\perp(t+t_0)a_x(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\perp(t)a_x(t-t_0)\,dt,\\
f_{E,s}(t_0) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\perp(t+t_0)a_y(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\perp(t)a_y(t-t_0)\,dt,\\
f_{E,0}(t_0) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\|(t+t_0)a_z(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\|(t)a_z(t-t_0)\,dt,\\
f_{j,c}(t_0) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\perp(t+t_0)a_y(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\perp(t)a_y(t-t_0)\,dt,\\
f_{j,s}(t_0) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\perp(t+t_0)a_x(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\perp(t)a_x(t-t_0)\,dt.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $f'_{j,c}=f_{E,s}$, $f'_{j,s}=f_{E,c}$. Для вычисления интегралов, задающих функции $f_{E,c}$, $f_{E,s}$, $f_{E,0}$, $f_{j,c}$, $f_{j,s}$, предположим, что компоненты ускорения являются вещественно-аналитическими функциями времени, и разложим их в ряды Фурье:

$$a_\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{\sigma,k} e^{ik\omega t},$$

где $\sigma = x, y, z$ и ω — частота колебаний точки подвеса. Используя вычеты, легко подсчитать интегралы, задающие коэффициенты при гармониках в разложениях искомых функций:

$$I_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\perp(t) e^{i\nu t}\, dt = 2\pi i\nu \operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi\nu}{2}, \quad I_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\perp(t) e^{i\nu t}\, dt = -i\nu I_1(\nu),$$

$$I_3(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot\gamma_\parallel(t) e^{i\nu t}\, dt = 2\pi i\nu^2 \operatorname{sh}^{-1}\frac{\pi\nu}{2}.$$

Итак,

$$f_{E,c}(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_2(k\omega) a_{x,k} e^{-ik\omega t_0}, \quad f_{E,s}(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_2(k\omega) a_{y,k} e^{-ik\omega t_0},$$

$$f_{j,c}(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_1(k\omega) a_{y,k} e^{-ik\omega t_0}, \quad f_{j,s}(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_1(k\omega) a_{x,k} e^{-ik\omega t_0},$$

$$f_{E,0}(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_3(k\omega) a_{z,k} e^{-ik\omega t_0}.$$

Обозначим для простоты $f_1 = -f_{j,c}$, $f_2 = f_{j,s}$, $f_3 = f_{E,0}$. Тогда $f_{E,s} = -f_1'$, $f_{E,c} = f_2'$. Простой вид вектора Мельникова, компоненты которого содержат гармоники по θ только первого порядка, позволяет легко найти все его простые нули (t_0, θ) в терминах одномерных уравнений.

Теорема 9 [7]. *Сепаратрисы расщепляются при любом периодическом движении точки подвеса с непостоянным ускорением. Все простые нули (t_0, θ) двумерного вектора Мельникова описываются следующим образом в терминах одномерных уравнений.*

1. *Каждому простому корню t_0 уравнения*

$$\mp\left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2}\right)' + f_3 = 0$$

(для одного из двух знаков $\mp$), такому что $f^2 = f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ в точке t_0, или, что то же самое в силу условия $f^2 \neq 0$, простому корню равносильного уравнения

$$(f_1 f_1' + f_2 f_2')^2 - f_3^2(f_1^2 + f_2^2) = 0$$

соответствует простой нуль (t_0, θ) вектора Мельникова, где угол θ определяется из соотношения $(\cos\theta, \sin\theta) = \pm(-f_2, f_1)/\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$.

2. *Если в точке t_0 выполнены условия $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ и $|f_3| < \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}$, то имеется пара простых нулей (t_0, θ) вектора Мельникова, где углы θ определяются по формулам*

$$\theta = \psi \pm \arccos \frac{f_3}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}}, \quad (\cos\psi, \sin\psi) = \frac{(-f_2', f_1')}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}}. \tag{10}$$

Если рассматриваются комплексные сепаратрисы, то пункт 1 останется в силе, условия пункта 2 будут слегка видоизменены, как описано ниже, и появится новый пункт 3.

2_1. *Если в точке t_0 выполнены условия $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $(f_1')^2 + (f_2')^2 \neq 0$ и $(f_1')^2 + (f_2')^2 \neq f_3^2$, то имеется пара простых нулей (t_0, θ) вектора Мельникова, где углы θ определяются по формулам* (10).

3. *Если в точке t_0 выполнены условия $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$ и $(f_1')^2 + (f_2')^2 = 0$, в то время как f_1' и f_2' отличны от нуля (так что $f_1' = jf_2'$, где $j \in \{+i, -i\}$, i — мнимая единица), то имеется простой нуль (t_0, θ) вектора Мельникова, где угол θ определяется по формуле*

$$\exp(-j\theta) = -\frac{f_3}{f_2'}.$$

Чтобы применить теорему 1 с учётом замечания 3, надо ввести линеаризующие координаты на невозмущённой сепаратрисе $W_0^\pm$. Построение таких координат $u^\pm$ осуществляется следующим образом. Рассмотрим вначале фазовый поток $\mathring{\phi}^t$ для невозмущённого плоского маятника. Сепаратрисы $\mathring{W}_0^\pm$ его неустойчивого положения равновесия q — одномерные кривые, такие что $\mathring{W}_0^\pm \setminus \{q\}$ состоит из двух компонент связности, являющихся траекториями двоякоасимптотических решений s_+: $w = w^*(t, 0)$ и s_-: $w = w^*(t, \pi)$. Соответствующий характеристический показатель фазового потока на $\mathring{W}_0^\pm$ в неподвижной точке q равен ± 1. Введём координату $\rho^\pm$ на $\mathring{W}_0^\pm = \{q\} \cup s_+ \cup s_-$, полагая $\rho^\pm = 0$ в точке q, $\rho^\pm = \exp(\mp t)$ в точке $w = w^*(t, 0) \in s_+$ и $\rho^\pm = -\exp(\mp t)$ в точке $w = w^*(t, \pi) \in s_-$ (многообразие $\mathring{W}_0^\pm$ получается «приклеиванием» точки q к тем концам траекторий s_+ и s_-, которые соответствуют предельному переходу $t \to \pm\infty$). Тогда $\rho^\pm$ — линеаризующая координата на $\mathring{W}_0^\pm$, т. е. фазовый поток на $\mathring{W}_0^\pm$, будучи записанным в этой координате, принимает линейный вид $\phi_0^t(\rho^\pm) = \exp(\mp t)\rho^\pm$, а соответствующее векторное поле фазового потока имеет вид $\mp\rho^\pm$.

Пусть l — прямая, касательная к конфигурационному пространству $S^1 = \{\vec{r}\colon x^2 + z^2 = 1,\ y = 0\}$ плоского маятника в точке $O = (0, 0, 1)$. Тогда прямая l параллельна оси x. Отождествляя переменную $\rho^\pm$ с координатой x точки на l, будем считать, что линеаризующая координата на $\mathring{W}_0^\pm$ пробегает прямую l. Сепаратрисы сферического маятника $W_0^\pm$ в вещественной области получаются из сепаратрис плоского маятника $\mathring{W}_0^\pm$ преобразованиями $T^\theta = (R_z^\theta, R_z^\theta)$ фазового пространства $\mathbb{R}^6\{(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\}$, которые порождаются поворотами R_z^θ конфигурационного пространства вокруг вертикальной оси z. Применяя повороты R_z^θ

к одномерной линеаризующей координате $x \in l$ на $\mathring{W}_0^\pm$, получим двумерные координаты $u^\pm$ на $W_0^\pm$, в которых фазовый поток невозмущённого сферического маятника принимает линейный вид $\phi^t(u^\pm) = \exp(\mp t)u^\pm$. Таким образом, точке $w = w^*(t,\theta)$ на $W_0^\pm$ ставятся в соответствие координаты $u^\pm = (x,y)$, где $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho = \exp(\mp t)$.

Итак, построены линеаризующие координаты на $W_0^\pm$, которые пробегают плоскость $P\{(x,y)\}$, отождествляемую с координатной плоскостью xy. Аналогичное построение для сепаратрисы $W_0^\pm$ в комплексной области даёт только часть этой сепаратрисы, заполненную траекториями двоякоасимптотических неизотропных решений $w = w^*(t+t_0,\theta)$ и параметризуемую линеаризующими координатами $u^\pm = (x,y)$, пробегающими область неизотропности $\{(x,y)\colon x^2+y^2 = \rho^2 \neq 0\}$.

Нужно убедиться, что построенные координаты аналитические. Очевидно, линеаризующая координата $\rho^\pm$ на $\mathring{W}_0^\pm$ будет вещественно-аналитической, т. е. отображение $\mathring{\psi}^\pm$, ставящее в соответствие координате ρ точку $w = \mathring{\psi}^\pm(\rho)$ на $\mathring{W}_0^\pm$, вещественно-аналитическое. В комплексной же области отображение $\mathring{\psi}^\pm$ оказывается мероморфным с единственными особенностями в точках $\rho^2 = -1$, которые соответствуют особенностям функций $\gamma_\perp(t)$, $\gamma_\parallel(t)$. Легко получить формулы для отображения $\psi^\pm\colon P \to W_0^\pm$, ставящего в соответствие набору координат точку на сепаратрисе, в терминах нечётного отображения $\mathring{\psi}^\pm$ и убедиться, что отображение $\psi^\pm$ будет вещественно-аналитическим. В комплексной же области оно аналитически продолжается на множество изотропных координат $\{(x,y)\colon x^2+y^2=0\}$ и оказывается мероморфным всюду на $\mathbb{C}^2\{(x,y)\}$ с особенностями в точках, где $x^2+y^2=-1$.

Каждая комплексная сепаратриса $W_0^\pm$ будет заполнена не только двоякоасимптотическими траекториями решений $w = w^*(t+t_0,\theta)$, но содержит ещё две различных траектории, которые оказываются асимптотическими, но не двоякоасимптотическими, т. е. не принадлежат второй сепаратрисе $W_0^\mp$. Для этих траекторий координаты $u^\pm = (x,y)$ пробегают множество изотропности $\{(x,y)\colon x^2+y^2=0\}$, а сами траектории образуют «изотропную» часть сепаратрисы, составленную теми её точками, где $x^2+y^2=0$ и $z=1$, причём движение по этим траекториям определяется динамикой координат $(x,y) = e^{\mp t}(x_0,y_0)$. (Для точек этих траекторий компоненты x и y вектора $\vec{r}$ совпадают с их координатами $u^\pm$.) Эти две траектории отвечают двум значениям отношения $x/y = +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ и получаются из двоякоасимптотических траекторий решений $w = w^*(t,\theta)$ предельным переходом, когда $\Im\theta$ стремится к $-\infty$ или $+\infty$ соответственно. Отметим также, что траектории решений $w = w^*(t+t_0,\theta)$, для которых углы θ равны по модулю π, совпадают, поскольку $w^*(t+\sqrt{-1}\pi,\theta) = w^*(t,\theta+\pi)$. Итак, совокупность всех траектории на комплексной сепаратрисе параметризуется величиной θ, пробегающей двумерную сферу, которая строится следующим образоv: надо взять цилиндр, получаемый из комплексной плоскости отождествлением точек, разность которых равна π, а затем «приклеить» две бесконечно удалённые точки к обоим концам цилиндра.

Каждому простому нулю $(t_{0,m},\theta_m)$ вектора Мельникова поставим в соответствие двумерный вектор $\vec{G}^{(m)}=(\cos\theta_m,\sin\theta_m)$ и невозмущённое двоякоасимптотическое решение γ_m: $w=w^*(t+t_{0,m},\theta_m)$ (предельное положение при $\varepsilon\to 0$ для соответствующего трансверсального двоякоасимптотического решения). При использовании линеаризующих координат $u^\pm$ решению γ_m будет соответствовать вектор $z_m^\pm=\exp(\mp t_{0,m})\vec{G}^{(m)}$ (см. раздел 3). Здесь интеграл Мельникова может вычисляться вдоль контура $\tilde\Gamma$, описанного в разделах 3 и 4. Как и ранее, обозначение γ_m будем использовать и для предельной при $\varepsilon\to 0$ траектории, и для лежащего на ней контура, для точек которого t пробегает $\tilde\Gamma$.

Требование, чтобы линеаризующие координаты на сепаратрисе $W_0^\pm$ пробегали касательное подпространство $L^\pm=T_qW_0^\pm$, было удобно для формулирования теоремы 3. Однако для практического использования теоремы требуется ввести удобные координаты на самом линейном пространстве $L^\pm$ и использовать эти координаты в качестве линеаризующих координат на $W_0^\pm$. Построенные линеаризующие координаты $u^\pm$ на $W_0^\pm$ в линейном приближении вблизи положения равновесия q совпадают, конечно, с точностью до коэффициента с координатами $\eta^\mp=(\eta_x^\mp,\eta_y^\mp)$, построенными в доказательстве теоремы 7 (действительно, легко убедиться, что $u^\pm\sim\eta^\mp$). Поэтому справедлив результат, непосредственно получаемый обобщением теоремы 7 в духе теоремы 3 и сформулированный в [7] для простейшей ситуации, которая обобщает пункт 1) теоремы 7. Этот результат звучит так: условия и утверждение теоремы 7 останутся в силе, если для каждого из двух индексов $\pm$ вместо $\vec{C}_\pm^{(j)}$ (или, что эквивалентно, $\vec{D}_\pm^{(j)}$) рассматривать все векторы $\vec{C}_\pm^{(j)}$ и $\vec{G}^{(m)}$. Но для того чтобы строго описать по возможности наименьшее замкнутое множество, вблизи которого система неинтегрируема, потребуются некоторые уточнения. Заметим, что в пункте $2_\pm$) отпадёт условие $\vec{C}_\pm^{(l^\pm)}\neq\vec{0}$, поскольку $\vec{G}^{(m)}\neq\vec{0}$ для любого m, т. е. добавление гомоклинических траекторий даст возможность выбрать, как и требуется, ненулевой вектор $\vec{D}_\pm$, в случае когда $\vec{D}_\pm^{(l)}=\vec{0}$ для всех l. Аналоги условий пунктов 1_+) и 1_-) для случая, когда два вектора $\vec{G}^{(m)}$ непараллельны, будут совпадать. Этот случай будет вынесен в отдельный раздел формулировки теоремы, чтобы сделать эту формулировку менее громоздкой. Будем формулировать обобщение теоремы 7, которое не сводится к какому-либо случаю этой теоремы при исключении из рассмотрения гомоклинических траекторий.

Теорема 10. *Пусть векторы $\vec{C}_\pm^{(j)}$ и контуры Γ_j, Γ_0 такие, как в теореме 7, а векторы $\vec{G}^{(m)}$ отвечают некоторым простым нулям интегралов Мельникова, вычисленных вдоль контуров $\tilde\Gamma_m$ описанного в разделе* 4 *типа*; *обозначим через Γ_m^* объединение двух контуров, порождающих начальные и конечные части каждого такого контура $\tilde\Gamma_m$ (такие контуры обозначались ранее $\Gamma_0^{(-)}$, $\Gamma_0^{(+)}$). Тогда рассматриваемая система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла для каждого малого $\varepsilon\neq 0$, если выполнено одно из следующих предположений* А *и* Б.

А. *Векторы $\vec{G}^{(m)}$ и $\vec{G}^{(n)}$ непараллельны для некоторых m, n.*

Б. *Для каждого из двух индексов* $\pm$ *выполнено одно из двух следующих условий* $1_\pm$) *и* $2_\pm$):

$1_\pm$) *два следующих вектора непараллельны*:

$1.1_\pm$) *либо* $\vec{C}^{(j)}_\pm$ *и* $\vec{C}^{(k)}_\pm$ *для некоторых* $j = j^\pm$, $k = k^\pm$,

$1.2_\pm$) *либо* $\vec{C}^{(j)}_\pm$ *и* $\vec{G}^{(m)}$ *для некоторых* $j = j^\pm$ *и* m;

$2_\pm$) *неравенство* (8) *выполнено для* $\vec{D}_\pm = \vec{G}^{(m)}$ *при некотором* m *и при некотором выборе контура* $\Gamma = \Gamma_0^\pm$, $\Gamma(1) = \Gamma(0) + T$.

Строго говоря, система неинтегрируема в любой окрестности $M \cup (\{\bar{O}\} \times K)$, *где* K *и* M *являются следующими объединениями контуров.*

А.

$$K = \Gamma_m^* \cup \Gamma_n^*, \quad M = \gamma_m \cup \gamma_n.$$

Б.

$$K = \Gamma_0^\mp \cup \Gamma_{j^\pm} \cup \Gamma_{k^\pm} \cup \Gamma_{j^\mp} \cup \Gamma_m^*, \quad M = \gamma_m$$

(*где* $j^\mp$ *может совпадать с* $j^\pm$ *или* $k^\pm$), *если выполнены условия* $1.1_\pm$) *и* $1.2_\mp$);

$$K = \Gamma_{j^+} \cup \Gamma_{j^-} \cup \Gamma_m^*, \quad M = \gamma_m$$

(*где* j^+ *и* j^- *могут совпадать*), *если выполнены условия* 1.2_+) *и* 1.2_-);

$$K = \Gamma_0^\mp \cup \Gamma_{j^\pm} \cup \Gamma_{k^\pm} \cup \Gamma_m^*, \quad M = \gamma_m,$$

если выполнены условия $1.1_\pm$) *и* $2_\mp$);

$$K = \Gamma_0^\mp \cup \Gamma_{j^\pm} \cup \Gamma_m^*, \quad M = \gamma_m,$$

если выполнены условия $1.2_\pm$) *и* $2_\mp$);

$$K = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-, \quad M = \gamma_m,$$

если выполнены условия 2_+) *и* 2_-).

Эта теорема применима, конечно, и в случае, когда рассматривается неинтегрируемость системы в вещественной области за счёт одного лишь расщепления сепаратрис и, следовательно, все векторы $\vec{C}^{(j)}_\pm$ и соответствующие им контуры Γ_j отсутствуют, а в качестве контура $\Gamma = \Gamma_0$ выступает период на вещественной прямой (случай выполнения условий 2_+) и 2_-)).

Что же касается попытки обобщения теоремы 8 на случай наличия трансверсальных гомоклинических решений, надо иметь в виду следующее обстоятельство. Как будет видно из доказательства этой теоремы, фигурирующие здесь величины $\vec{D}^{(l)}_\mp$ и $\vec{D}^{(j)}_-$, $\vec{D}^{(j)}_+$ связаны именно с особенностями t_l и t_j, которые используются при специфическом построении контура Γ. Эти величины не могут быть заменены на векторы $\vec{G}^{(m)}$. Поэтому в случае пункта iii) теоремы 8 добавление гомоклинических траекторий не привносит ничего нового. Однако в случае пункта i) такое обобщение уже является содержательным, поскольку, как отмечалось, добавление гомоклинических траекторий может предоставить возможность выбрать, как и требуется, ненулевой вектор $\vec{D}_\pm$ (заметим, что в пункте iii) этот вектор автоматически ненулевой, поскольку он неизотропный). Поскольку пункт ii) в теореме 8 — это удобная переформулировка пункта i), попробуем получить обобщение пункта ii), которое не сводится к самому этому пункту при исключении из рассмотрения гомоклинических траекторий. (Другой крайний случай, когда не принимаются во внимание особые точки, а рассматриваются только гомоклинические траектории, также уже обсуждался.) Итак, пусть $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ пропорциональны для любых j, k, т. е. все векторы $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ пропорциональны некоторому (ненулевому) вектору $\vec{D}$. Пусть вектор $\vec{G}^{(m)}$ не пропорционален $\vec{D}$ для некоторого m. Выберем теперь в качестве нового вектора $\vec{D}$ вектор $\vec{G}^{(m)}$. Здесь существенно, что это разрешено в теореме 7. Действительно, два случая, отвечающие двум индексам $\pm$, рассматриваются независимо друг от друга, что видно из доказательства теоремы 7. Поэтому при анализе одного из этих двух случаев можно исключить из рассмотрения некоторые особые точки. Теперь можем использовать ненулевой вектор $\vec{D}_\mp^{(j)}$ в качестве $\vec{D}_\mp^{(l)}$ в пункте $\mathrm{i}_\pm$) теоремы 8. Применяя это рассуждение для случаев, отвечающих индексам $\pm$, придём к ситуации, когда ненулевые векторы $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ пропорциональны для некоторых j, k, а вектор $\vec{G}^{(m)}$ не пропорционален им для некоторого m. Но это как раз случай, когда выполнены условия 2_+) и 2_-) предыдущей теоремы.

8. Расщепление сепаратрис неустойчивого положения равновесия и неинтегрируемость возмущённого сферического маятника. II. Плотность множества гомоклинических траекторий

В этом разделе мы опишем результаты [8] (анонсированные без точных формулировок в [9]), но добавим в полученную там теорему два новых пункта.

Определение 6. Будем говорить, что конечный набор функций, аналитических в некоторой области на комплексной плоскости и имеющих там неустранимые особенности, *обладает свойством* $(*)$, если любая их нетривиальная линейная комбинация (т. е. линейная комбинация, где есть отличные от нуля коэффициенты) оказывается функцией, имеющей неустранимую особенность.

Дефектом свойства $(*)$ для функций $f_1, \ldots, f_k$ назовём размерность линейного пространства всех векторов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, таких что соответствующая линейная комбинация $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$ не имеет неустранимых особенностей.

Равенство дефекта свойства $(*)$ нулю означает в точности выполнение этого свойства. Удобно считать, что пустой набор функций обладает свойством $(*)$.

В дальнейшем для краткости особенностью будем называть неустранимую особенность.

Очевидно, что функции, обладающие свойством $(*)$, линейно независимы и что нарушение свойства $(*)$ является вырождением бесконечного порядка, поскольку накладывает бесконечный набор независимых соотношений на коэффициенты их рядов Лорана.

Ключевой является следующая весьма эффективная аналитическая аппроксимационная теорема.

Теорема 11 [8, 9]. *Пусть*

$$f_i(t) = \sum_{n \in N_i} f_i^{(n)} e^{nt}, \quad 1 \leqslant i \leqslant I, \text{ —}$$

ряды, сходящиеся при малых e^t, где $N_i \subset \mathbb{N}$ — бесконечные арифметические прогрессии, причём $f_i^{(n)} \neq 0$ для всех $n \in N_i$, кроме, может быть, конечного количества. Пусть каждая из прогрессий N_i содержит бесконечное число членов, не принадлежащих никаким другим прогрессиям. Пусть, наконец, функции $a_{ij}(t)$ и $b_{ij'}(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J_i,\ 1 \leqslant j' \leqslant J_i')$, голоморфные в некоторой связной области $D \subset \mathbb{C}$, имеют период $T \in \mathbb{C}$, такой что $\operatorname{Re} T \neq 0$, причём для каждого i набор функций $a_{ij}(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant J_i)$ обладает в D свойством $(*)$. Можно считать, что область D является T-периодической. Для любого ориентированного замкнутого контура $\Gamma \subset D$ введём обозначения

$$g_{ij}[\Gamma](t') = \oint\limits_{\Gamma} f_i(t+t') a_{ij}(t)\, dt, \quad h_{ij'}[\Gamma](t') = \oint\limits_{\Gamma} f_i(t+t') b_{ij'}(t)\, dt.$$

Тогда для любых комплексных t_* и c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J_i)$, вещественных положительных ε_*, ε и ограниченной области $V \subset \mathbb{C}$ найдутся такие число $t'_* \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее неравенству $|t'_* - t_*| \leqslant \varepsilon_*$, и замкнутый контур $\Gamma \subset D$, что

$$|C^{-1} g_{ij}[\Gamma](t'_*) - c_{ij}| \leqslant \varepsilon, \quad |C^{-1} h_{ij'}[\Gamma](t')| \leqslant C_1 \quad \text{при} \quad t' \in V$$

для всех i, j, j' с некоторыми константами C и C_1, где t'_* зависит лишь от t_* и ε_*, а C_1 не зависит от ε. Более того, в качестве t'_* можно выбрать любое число, такое что $\operatorname{Im} t'_* \notin M$, где $M \subset \mathbb{R}$ — некоторое локально конечное (т. е. не имеющее конечных предельных точек) множество, зависящее только от исходных функций $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij'}(t)$ (и рассматриваемой области D).

В качестве контура Γ можно взять, конечно, букет замкнутых контуров, каждый из которых обходит ровно одну особенность функций $a_{ij}(t)$, $b_{ij'}$.

В формулах для вектора Мельникова интегрирование по t ведётся вдоль вещественной прямой, если система рассматривается в вещественной области. Однако, как уже отмечалось в замечании 7, все результаты останутся верны, если рассматривать систему в комплексной области, при этом возникает больше свободы в выборе бесконечного контура интегрирования, обозначенного через $\tilde{\Gamma}$. Простым нулям такого вектора Мельникова будут соответствовать трансверсальные гомоклинические решения, получающиеся при продолжении сепаратрис вдоль контура $\tilde{\Gamma}$ (от уходящих в бесконечность концов этого контура). Было указано, что при специальном выборе контура $\tilde{\Gamma}$ условия наличия трансверсальных гомоклинических траекторий можно сформулировать в терминах интегралов Мельникова, взятых вдоль произвольного заданного замкнутого контура Γ'. Применяя теперь теорему 11 к взятым вдоль Γ' интегралам от подынтегральных выражений в формулах для компонент вектора Мельникова и его производных (в роли функций $f_i(t)$ выступают $\gamma_{\|}(t)$ и $\gamma_{\perp}(t)$, а в роли $a_{ij}(t)$ и $b_{ij'}(t)$ — компоненты ускорения $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ и их производные) и выбирая в качестве Γ' контур Γ из этой теоремы, удаётся легко доказать следующий результат.

Теорема 12 (см. [8]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *набор функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\dot{a}_x(t)$, $\dot{a}_y(t)$ обладает свойством $(*)$,*
2) *пара функций $a_x(t)$, $a_y(t)$ обладает свойством $(*)$, но выполнено одно из двух следующих равносильных условий:*
   i) *хотя бы одна из двух троек функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\dot{a}_x(t)$ и $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\dot{a}_y(t)$ обладает свойством $(*)$,*
   ii) *дефект свойства $(*)$ для функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\dot{a}_x(t)$, $\dot{a}_y(t)$ не превосходит единицы,*

   и, кроме того, функция $a_z(t)$ тоже имеет особенность,
3) *пара функций $a_x(t)$, $a_y(t)$ обладает свойством $(*)$, а функция $a_z(t)$ имеет особенность, не являющуюся особенностью ни для какой из функций $a_x(t)$, $a_y(t)$,*
4) *хотя бы одна из функций $a_x(t)$, $a_y(t)$ имеет особенность, но пара этих функций не обладает свойством $(*)$, т. е. некоторая нетривиальная линейная комбинация $\lambda_x a_x(t) + \lambda_y a_y(t)$ не имеет особенностей, причём выполнено хотя бы одно из следующих условий:*
   а) *вектор (λ_x, λ_y) неизотропный, т. е. $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 \neq 0$,*
   б) *функция $a_z(t)$ тоже имеет особенность.*

Обозначим через Γ_j замкнутые контуры с общей отмеченной точкой, каждый из которых обходит ровно одну особенность функции, встречающейся в этих условиях, и пусть $\tilde{\Gamma}$ — произвольный описанный выше контур. Пусть, наконец, число (фаза) t_0^* любое, а угол θ^* любой в случаях 1)—3) и 4) б) или $\theta^* = \hat{\theta} \bmod \pi/2$ в случае 4) а), где $\hat{\theta}$ — единственное по модулю π число, такое что $\operatorname{tg}\hat{\theta} = \lambda_y/\lambda_x$. Тогда для любого $\mu > 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ в комплексной области будет существовать трансверсальное гомоклиническое решение возмущённой системы, $O(\varepsilon)$-близкое вдоль некоторого контура $\tilde{\Gamma}'$, не зависящего от ε, к некоторому невозмущённому решению $w = w^*(t+t_0, \theta)$, такому что набор (t_0, θ) лежит в μ-окрестности (t_0^*, θ^*), т. е. $|t_0 - t_0^*| < \mu$, $|\theta - \theta^*| < \mu$. При этом контур $\tilde{\Gamma}'$ получается «вклейкой» в контур $\tilde{\Gamma}$ контуров Γ_j, каждый из *которых проходится некоторое целое (возможно, отрицательное или нулевое) число раз.*

Следствие 3. *В случаях 1)—3) и 4) б) комплексные трансверсальные гомоклинические решения асимптотически плотно при $\varepsilon \to 0$ заполняют любую ограниченную область двоякоасимптотической части невозмущённых сепаратрис. Это означает, что для любого $\mu > 0$ и любой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}\{t_0\} \times \mathbb{C}\{\theta\}$ найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого выполнено следующее условие. В μ-окрестности любой точки $(t_0^*, \theta^*) \in D$ имеется набор (t_0, θ), которому при $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ соответствует трансверсальное гомоклиническое решение, $O(\varepsilon)$-близкое к невозмущённому решению $w = w^*(t + t_0, \theta)$. (Поскольку двоякоасимптотическая часть невозмущённых сепаратрис является открытым всюду плотным множеством в каждой из сепаратрис, то справедлив аналогичный результат, где говорится об ограниченной области одной из сепаратрис вместо ограниченной области двоякоасимптотической части обеих сепаратрис. Это означает, что выполнено сформулированное утверждение, в котором берётся ограниченная область $D \subset \mathbb{C}^2\{u^\pm\}$, а вместо $(t_0^*, \theta^*) \in D$ и (t_0, θ) фигурируют $u^{\pm,*}$ и $u^\pm = \exp(\mp t)(\cos\theta, \sin\theta)$.) В случае 4) а) справедливо совершенно аналогичное утверждение для любой ограниченной области D на объединении прямых $\mathbb{C}\{t_0\} \times \{\theta\colon \theta = \hat{\theta} \mod \pi/2\}$ (при этом, конечно, точка (t_0, θ) не обязана лежать в этом множестве).*

Случаи 1) и 4) этой теоремы доказаны в [8]. Случаи 2) и 3) являются новыми, но их доказательство следует идеям [8].

Результат этой теоремы гарантирует неинтегрируемость задачи при всех малых $\varepsilon \neq 0$. Как уже отмечалось во введении, этот вывод справедлив независимо от характера особенностей, с чем раньше в строгих результатах о неинтегрируемости не приходилось сталкиваться.

В заключение сравним условия и утверждения теорем 7, 8 и теоремы 12. Ясно, что никакой пункт условий теоремы 12 не покрывается условиями теорем 7, 8, поскольку все условия теоремы 12 более тонкие и могут работать, когда, например, все векторы $\vec{D}_\pm^{(j)}$ и $\vec{E}_\pm^{(j)}$ нулевые. Кроме того, теорема 12 говорит ещё и о наличии богатого множества гомоклинических решений в дополнение к результату о неинтегрируемости. Однако условия 2)—4) теоремы 12 требуют наличия особенностей у функции $a_z(t)$, в отличие от теорем 7, 8. Что же касается условия 1) теоремы 12, то, как легко убедиться, оно следует из одновременного выполнения условий 1_+) и 1_-) в теореме 7.

9. Доказательство теоремы 7

В качестве локальных координат вблизи $O = (0, 0, 1)$ в конфигурационном пространстве $S^2 = \{\vec{r}\colon |\vec{r}| = 1\}$ сферического маятника удобно использовать

$v = (x,y)^{\top}$[1]. Тогда соответствующими локальными координатами в фазовом пространстве TS^2 вблизи $\bar{O}$ будут $w = (x,\dot{x},y,\dot{y})^{\top}$. Кинетическая и потенциальная энергии разлагаются в ряды

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\ldots, \quad U = z+\varepsilon(\vec{a},\vec{r}) = \tilde{a}_z+\varepsilon a_x x+\varepsilon a_y y-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ldots$$

с опущенными членами порядков $O_3(x,y,\dot{x},\dot{y})$ и $O(\varepsilon)O_2(x,y,\dot{x},\dot{y})$, где $\tilde{a}_z = 1+\varepsilon a_z$ и используется обозначение $O_k(x,y,\dot{x},\dot{y})$ для членов порядка k по x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$. Для последующего будет полезно заметить, что все уравнения будут инвариантны относительно одновременных замен $x \leftrightarrow y$, $\dot{x} \leftrightarrow \dot{y}$. Поэтому для невозмущённого сферического маятника система, линеаризованная в неустойчивом положении равновесия, имеет вид $\ddot{v} = v$, или

$$\dot{w} = \Lambda w, \quad \text{где} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

а дополнительные члены старшего порядка, возникающие в правой части возмущённой системы, образуют вектор $\varepsilon Y(t)$, где $Y = (0,-a_x,0,-a_y)^{\top}$.

Линейная система $\dot{\xi} = \Lambda_0\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, приводится линейной заменой координат

$$\eta = R_0\xi, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

к диагональной форме $\dot{\eta} = \mathrm{diag}(1,-1)\eta$. Значит, «удвоенная» система (11)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix},$$

где $\xi_\sigma = (\sigma,\dot{\sigma})^{\top}$, $w = (\xi_x,\xi_y)^{\top}$, приводится «удвоенной» заменой координат

$$\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{pmatrix}$$

к диагональной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{\smash{\raisebox{.5ex}{\Large 0}}} \\ \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}.$$

Пусть $\eta_\sigma = (\eta_\sigma^+,\eta_\sigma^-)^{\top}$. Тогда устойчивое и неустойчивое линейные подпространства имеют вид $\eta_x^+ = \eta_y^+ = 0$ и $\eta_x^- = \eta_y^- = 0$ соответственно с собственными числами -1 и $+1$ кратности 2. В диагонализирующих координатах $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x^+,\eta_x^-,\eta_y^+,\eta_y^-)^{\top}$ вектор $Y(t)$ принимает вид $RY(t) = \big(-a_x(t),-a_x(t),-a_y(t),-a_y(t)\big)^{\top}$. Тогда достаточность условия $1_\pm$) теоремы 7 немедленно следует из теоремы 2, поскольку $\vec{C}_\pm^{(j)} = \big(C_{x,\pm}^{(j)},C_{y,\pm}^{(j)}\big)$ будет

[1]Здесь применяется операция транспозиции, поскольку векторы будут рассматриваться как столбцы.

как раз парой $(\eta_x^\mp, \eta_y^\mp)$-координат для $\operatorname{Res}_{t=t_j} f(t)$. Заметим, что здесь нельзя использовать одну-единственную особую точку t_j поскольку ограничения невозмущённого линеаризованного отображения для периода T на устойчивое и неустойчивое подпространства будут двумерными скалярными отображениями $e^{-T} \cdot \mathrm{id}$ и $e^{T} \cdot \mathrm{id}$.

Применив формулы (5), (6), можно сразу увидеть, что в координатах $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x^+, \eta_x^-, \eta_y^+, \eta_y^-)^\top$, которые диагонализируют невозмущённые уравнения в вариациях, возмущённое периодическое решение имеет вид $\varepsilon\alpha(t) + O(\varepsilon^2)$, где $\alpha = (\alpha_x^+, \alpha_x^-, \alpha_y^+, \alpha_y^-)$, что объясняет настоящую причину введения функций $\alpha_{(\cdot)}^{(\cdot)}(t)$. Следовательно, это решение имеет вид $w = \varepsilon w_1(t) + O(\varepsilon^2)$, где $w_1 = R^{-1}\alpha$.

Достаточность условия $2_\pm$) теоремы 7 будет следовать из небольшой модификации теоремы 2, описанной в теореме 5. Чтобы получить возмущённые уравнения, заметим, что

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + O_4(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad U = \varepsilon a_x x + \varepsilon a_y y + \tilde{a}_z - \frac{1}{2}\tilde{a}_z(x^2 + y^2) + O_4(x, y),$$

где символ O_k объяснён выше. Соответствующие уравнения Лагранжа принимают вид

$$P\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + O_3 = \tilde{a}_z\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \varepsilon\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix} + O_3$$

где матрица P является O_2-близкой к единичной матрице размера 2×2 и для краткости используется обозначение $O_k = O_k(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Разрешая это уравнение относительно производных старшего порядка, получаем, что

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \tilde{a}_z\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \varepsilon\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix} + O(\varepsilon)O_2 + O_3.$$

Соответствующие уравнения в вариациях вблизи возмущённого периодического гиперболического решения $w = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^\top = O(\varepsilon)$ принимают вид

$$\begin{pmatrix}\delta\ddot{x}\\ \delta\ddot{y}\end{pmatrix} = \tilde{a}_z\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} + G_1\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} + G_2\begin{pmatrix}\delta\dot{x}\\ \delta\dot{y}\end{pmatrix}$$

где G_i — (зависящие от времени) матрицы размера 2×2 порядка $O(\varepsilon)O_1 + O_2$. Значит, в рамках теории возмущений первого порядка уравнения в вариациях есть

$$\delta\ddot{x} = \tilde{a}_z\delta x, \quad \delta\ddot{y} = \tilde{a}_z\delta y \tag{13}$$

поскольку $w = O(\varepsilon)$, и нарушение скалярного вида линеаризованного отображения на устойчивом и неустойчивом подпространствах не обнаруживается. Чтобы изучить это явление, нужно оставить большее количество членов в разложениях для T и U.

Подставляя

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{1 + \delta} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + O(\delta^3)$$

в

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \varepsilon a_x x + \varepsilon a_y y + \tilde{a}_z z,$$

получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x\dot{x} + y\dot{y})^2] + O_6, \\ U &= \varepsilon a_x x + \varepsilon a_y y + \tilde{a}_z - \frac{1}{2}\tilde{a}_z(x^2+y^2) - \frac{1}{8}\tilde{a}_z(x^2+y^2)^2 + O_6. \end{aligned}$$

Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$P\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(2\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \dot{x}\dot{y}y \\ y(\dot{x}^2+2\dot{y}^2) + \dot{x}\dot{y}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon a_x + \tilde{a}_z x + \frac{1}{2}\tilde{a}_z x(x^2+y^2) \\ -\varepsilon a_y + \tilde{a}_z y + \frac{1}{2}\tilde{a}_z y(x^2+y^2) \end{pmatrix} + O_5,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & 1+y^2 \end{pmatrix} + O_4.$$

Заметим, что для любой матрицы P, которая O_k-близка к единичной матрице id, справедливо $P^{-1} = 2\,\mathrm{id} - P$ с погрешностью O_{2k}, где в нашем случае $k = 2$. Поэтому уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\varepsilon a_x(1-x^2) + \tilde{a}_z x(1-x^2) + \frac{1}{2}\tilde{a}_z x(x^2+y^2) + \\ &\quad + \varepsilon a_y xy - \tilde{a}_z xy^2 - x(2\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \dot{x}\dot{y}y, \\ \ddot{y} &= -\varepsilon a_y(1-y^2) + \tilde{a}_z y(1-y^2) + \frac{1}{2}\tilde{a}_z y(x^2+y^2) + \\ &\quad + \varepsilon a_x xy - \tilde{a}_z x^2 y - y(\dot{x}^2+2\dot{y}^2) - \dot{x}\dot{y}x \end{aligned}$$

с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)O_4 + O_5$, т. е. $O(\varepsilon^5)$ ввиду $w = O(\varepsilon)$. Эти уравнения могут быть переписаны в виде

$$\ddot{\sigma} = -\varepsilon a_\sigma(1-\sigma^2) + \tilde{a}_z\sigma(1-\sigma^2) + \frac{1}{2}\tilde{a}_z\sigma(\sigma^2+\nu^2) + \varepsilon a_\nu \sigma\nu - \tilde{a}_z\sigma\nu^2 - \sigma(2\dot{\sigma}^2+\dot{\nu}^2) - \dot{\sigma}\dot{\nu}\nu$$

где $\sigma, \nu \in \{x, y\}$, $\sigma \neq \nu$. Соответствующие уравнения в вариациях вблизи возмущённого периодического гиперболического решения $w = \varepsilon w_1(t) + O(\varepsilon^2)$, будучи записанными в координатах δw, примут вид $\delta\dot{w} = M\delta w$ с зависящей от времени матрицей

$$M = M_0 + \varepsilon^2 M_2 + O(\varepsilon^4), \quad M_0 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_z & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_z & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

где M_2 выражается через (a_x, a_y) и $w_1 = w_1(t)$.

Значит, с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ эта система распадается на две одинаковые двумерные системы

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_z & 0 \end{pmatrix}\xi, \tag{14}$$

соответствующие двум уравнениям (13) второго порядка. Обозначим через $r_0(t)$ фундаментальную матрицу для (14) вдоль контура Γ, такую что $r_0\bigl(\Gamma(0)\bigr) = \mathrm{id}$. Тогда $r_0\bigl(\Gamma(1)\bigr) = N_0$ будет соответствующей матрицей монодромии. Матрица N_0 симплектическая, и в координатах η, введённых в (12), она преобразуется в матрицу, которая $O(\varepsilon)$-близка к диагональной матрице $\mathrm{diag}(e^T, e^{-T})$. Итак, она принимает диагональный вид $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$ с $\lambda = e^T + O(\varepsilon)$ в некоторых координатах $\varphi = R_0'\xi$, $O(\varepsilon)$-близких к η. В этих координатах фундаментальная матрица $r_0(t)$ примет вид, $O(\varepsilon)$-близкий к $\mathrm{diag}\bigl(e^{t-t_0}, e^{-(t-t_0)}\bigr)$, поскольку система (14) будет $O(\varepsilon)$-близка к $\dot\varphi = \mathrm{diag}(1, -1)\varphi$. Координаты φ зависят от ε, в отличие от координат η.

Теперь используя «удвоенное» преобразование

$$\begin{pmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{pmatrix} = R'\begin{pmatrix}\xi_x\\ \xi_y\end{pmatrix}, \quad R' = \begin{pmatrix}R_0' & 0\\ 0 & R_0'\end{pmatrix}$$

и полагая $\varphi_\sigma = (\varphi_\sigma^+, \varphi_\sigma^-)^\top$, введём координаты $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_x^+, \varphi_x^-, \varphi_y^+, \varphi_y^-)^\top$, которые $O(\varepsilon)$-близки к $\boldsymbol{\eta}$. Обозначим через $r(t) = \mathrm{diag}\bigl(r_0(t), r_0(t)\bigr)$ фундаментальную матрицу для $\delta\dot w = M_0\delta w$ и заметим, что $N = \mathrm{diag}(N_0, N_0)$ будет соответствующей матрицей монодромии, принимающей в координатах $\boldsymbol{\varphi}$ диагональный вид $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}, \lambda, \lambda^{-1})$.

Подставляя $\delta w = r(t)u$ в исходные уравнения в вариациях $\delta\dot w = M\delta w$, получаем

$$\dot u = \bigl(\varepsilon^2 r^{-1}(t)M_2(t)r(t) + O(\varepsilon^4)\bigr)u.$$

Матрица отображения последования этого уравнения при прохождении вдоль контура Γ равна

$$\varepsilon^2\int\limits_\Gamma r^{-1}(t)M_2(t)r(t)\,dt + O(\varepsilon^4).$$

Таким образом, мы видим, что матрица монодромии исходных уравнений в вариациях $\delta\dot w = M\delta w$ принимает вид

$$\tilde A + \varepsilon^2 B + O(\varepsilon^4), \tag{15}$$

где $\tilde A = N = A + O(\varepsilon)$, и в координатах $\boldsymbol{\varphi}$ выполнено $A = \mathrm{diag}(e^T, e^{-T}, e^T, e^{-T})$, а B задаётся согласно

$$B = N\int\limits_\Gamma r^{-1}(t)M_2(t)r(t)\,dt = H(T)\int\limits_\Gamma P(t)\,dt + O(\varepsilon), \tag{16}$$

$$P(t) = H^{-1}(t-t_0)\tilde M_2(t)H(t-t_0),$$

$$H(t) = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t}, e^t, e^{-t}), \quad \tilde M_2 = RM_2R^{-1},$$

поскольку N и $r_0(t)$ при $\varepsilon = 0$ станут равны A и $H(t)$, а $\tilde M_2$ является матрицей M_2, переписанной в координатах $\boldsymbol{\eta}$. Можно переписать (15) в виде $\tilde A + \varepsilon^2 B + O(\varepsilon^3)$, где B определяется старшим членом в правой части формулы (16).

Теперь мы применим идеи теоремы 5, чтобы установить достаточность условия $2_{\pm}$). Формально теорема 5 не может быть использована для этой цели, поскольку разрушение скалярного вида линеаризованных отображений на устойчивом и неустойчивом подпространствах не обнаруживается в первом порядке теории возмущений. К счастью, условия теорем 4—6 могут быть обобщены, как описано в следующем замечании на примере условий теоремы 5.

Замечание 9. Пусть линейная часть S_0 в неподвижной точке O_ε равна $dS_0|_{O_\varepsilon} = \tilde{A} + \varepsilon^k B + O(\varepsilon^{k+1})$ с некоторым $k \geqslant 1$, где $\tilde{A}$ будет $O(\varepsilon)$-близко к A. Идея последующих рассмотрений заключается в том, чтобы использовать $\tilde{A}$ вместо A и трактовать $dS_0|_{O_\varepsilon}$ как $O(\varepsilon^k)$-возмущение $\tilde{A}$. Пусть V_r, $1 \leqslant r \leqslant p$, будут (максимальными) обобщёнными инвариантными собственными подпространствами для A, отвечающими некоторому разбиению спектра A на классы чисел, модули которых лежат в непересекающихся интервалах. Обозначим через $\tilde{V}_r$ соответствующие инвариантные собственные подпространства для $\tilde{A}$ (которые $O(\varepsilon)$-близки к V_r). Пусть $\tilde{A}_r = \tilde{A}|\tilde{V}_r$, и обозначим через $(B_{r,s})_{r,s=1}^p$ блочную форму B в координатах $(z_1, \ldots, z_p) \in \tilde{V}_1 \times \ldots \times \tilde{V}_p$. Тогда в теореме 5 можно предполагать, что для каждого r и достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ оператор $\tilde{A}_r + \varepsilon^k B_{r,r}$ и множество $\mathfrak{N}_r$ вычетов функции $f_r(t)$ в U находятся в общем положении и это свойство сохраняется при $O(\varepsilon)$-возмущениях $B_{r,r}$ и $\mathfrak{N}_r$.

В нашем случае $k = 2$, индекс r пробегает два значения $+$, $-$, а подпространства $\tilde{V}_\pm$ задаются равенствами $\varphi_x^\pm = \varphi_y^\pm = 0$. Таким образом, $\tilde{V}_+$ и $\tilde{V}_-$ будут соответственно устойчивым и неустойчивым подпространствами для $\tilde{A}$. Обозначим через $\tilde{m}_{\sigma,\nu}^{u,v}$ элемент матрицы $\tilde{M}_2$, расположенный на пересечении строки, отвечающей φ_σ^u, и столбца, отвечающего φ_ν^v, где $\sigma, \nu \in \{x, y\}$ и $u, v \in \{+, -\}$. Тогда $\tilde{A}_\pm = \lambda^{\mp 1} \cdot \mathrm{id}$ являются двумерными скалярными отображениями и имеют место формулы

$$B_{-,-} = e^T \int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} \tilde{m}_{xx}^{++} & \tilde{m}_{xy}^{++} \\ \tilde{m}_{yx}^{++} & \tilde{m}_{yy}^{++} \end{pmatrix} dt, \quad B_{+,+} = e^{-T} \int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} \tilde{m}_{xx}^{--} & \tilde{m}_{xy}^{--} \\ \tilde{m}_{yx}^{--} & \tilde{m}_{yy}^{--} \end{pmatrix} dt. \tag{17}$$

Здесь использован факт, что элементы матрицы $\tilde{M}_2$, фигурирующей в формулах (17), совпадают с соответствующими элементами матрицы P. Нас интересует случай, когда условие 1_r) не выполнено, т. е. все элементы $\mathfrak{N}_r$ пропорциональны $\vec{D}_r$. Тогда желаемое условие для пары $(\tilde{A}_r, B_{r,r})$ будет выполнено, если и только если $B_{r,r}\vec{D}_r$ не параллельно $\vec{D}_r$. Последнее предположение означает, что $B_{r,r}\vec{D}_r \wedge \vec{D}_r \neq 0$, а это может быть выражено как неравенство (8), в котором

$$I_{xx}^\mp = -\int\limits_\Gamma \tilde{m}_{yx}^{\pm\pm}\, dt, \quad I_{xy}^\mp = \int\limits_\Gamma (\tilde{m}_{xx}^{\pm\pm} - \tilde{m}_{yy}^{\pm\pm})\, dt, \quad I_{yy}^\mp = \int\limits_\Gamma \tilde{m}_{xy}^{\pm\pm}\, dt.$$

Теперь, совершая элементарные вычисления нужных элементов матрицы P, получим, что величины $I_{xx}^\pm$, $I_{xy}^\pm$, $I_{yy}^\pm$ определяются правыми частями формул теоремы 7, делёнными на 8, что завершает доказательство теоремы.

В самом деле, имеем следующую цепочку формул. Пусть $m_{\tilde\sigma,\tilde\nu}$ равно элементу матрицы M_2, расположенному на пересечении строки, отвечающей $\tilde\sigma$, и столбца, отвечающего $\tilde\nu$, где $\tilde\sigma,\tilde\nu\in\{x,\dot x,y,\dot y\}$. Тогда

$$m_{\sigma,\sigma}=m_{\sigma,\dot\sigma}=m_{\sigma,\nu}=m_{\sigma,\dot\nu}=0,$$
$$m_{\dot\sigma,\sigma}=2a_\sigma\sigma_1+a_\nu\nu_1-\frac{3}{2}\sigma_1^2-\frac{1}{2}\nu_1^2-(2\dot\sigma_1^2+\dot\nu_1^2),\quad m_{\dot\sigma,\dot\sigma}=-(4\sigma_1\dot\sigma_1+\nu_1\dot\nu_1),$$
$$m_{\dot\sigma,\nu}=a_\nu\sigma_1-\sigma_1\nu_1-\dot\sigma_1\dot\nu_1,\quad m_{\dot\sigma,\dot\nu}=-(2\sigma_1\dot\nu_1+\dot\sigma_1\nu_1),$$

где $\sigma,\nu\in\{x,y\}$, $\sigma\ne\nu$ и $w_1=(x_1,\dot x_1,y_1,\dot y_1)$. Далее,

$$\begin{pmatrix}\tilde m^{++}_{\sigma,\nu} & \tilde m^{+-}_{\sigma,\nu}\\ \tilde m^{-+}_{\sigma,\nu} & \tilde m^{--}_{\sigma,\nu}\end{pmatrix}=R_0\begin{pmatrix}m_{\sigma,\nu} & m_{\sigma,\dot\nu}\\ m_{\dot\sigma,\nu} & m_{\dot\sigma,\dot\nu}\end{pmatrix}R_0^{-1},$$

и поэтому

$$2\tilde m^{++}_{\sigma,\nu}=m_{\sigma,\nu}+m_{\sigma,\dot\nu}+m_{\dot\sigma,\nu}+m_{\dot\sigma,\dot\nu}=m_{\dot\sigma,\dot\nu}+m_{\dot\sigma,\nu},$$
$$2\tilde m^{--}_{\sigma,\nu}=m_{\sigma,\nu}-m_{\sigma,\dot\nu}-m_{\dot\sigma,\nu}+m_{\dot\sigma,\dot\nu}=m_{\dot\sigma,\dot\nu}-m_{\dot\sigma,\nu},$$

т. е. $2\tilde m^{\pm;\pm,}_{\sigma,\nu}=m_{\dot\sigma,\dot\nu}\pm m_{\dot\sigma,\nu}$ для любых $\sigma,\nu\in\{x,y\}$ (теперь включая случай $\sigma=\nu$). Учитывая выражение

$$\begin{pmatrix}P^{++}_{\sigma,\nu} & P^{+-}_{\sigma,\nu}\\ P^{-+}_{\sigma,\nu} & P^{--}_{\sigma,\nu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-(t-t_0)} & 0\\ 0 & e^{(t-t_0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde m^{++}_{\sigma,\nu} & \tilde m^{+-}_{\sigma,\nu}\\ \tilde m^{-+}_{\sigma,\nu} & \tilde m^{--}_{\sigma,\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(t-t_0)} & 0\\ 0 & e^{-(t-t_0)}\end{pmatrix}$$

для элементов матрицы P, получим, что $P^{\pm,\pm}_{\sigma,\nu}=\tilde m^{\pm;\pm}_{\sigma,\nu}$, что уже было отмечено. Также

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \dot\sigma_1\end{pmatrix}=R_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^+_\sigma\\ \alpha^-_\sigma\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha^+_\sigma-\alpha^-_\sigma\\ \alpha^+_\sigma+\alpha^-_\sigma\end{pmatrix}$$

для $\sigma\in\{x,y\}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&-8P^{\mp\mp}_{yx}=\pm2a_x(\alpha^+_y-\alpha^-_y)+\alpha^-_x\alpha^+_y-\alpha^+_x\alpha^-_y\mp5\alpha^\mp_x\alpha^\mp_y\pm\alpha^\pm_x\alpha^\pm_y,\\
&8P^{\mp\mp}_{xy}=\mp2a_y(\alpha^+_x-\alpha^-_x)+\alpha^-_x\alpha^+_y-\alpha^+_x\alpha^-_y\pm5\alpha^\mp_x\alpha^\mp_y\mp\alpha^\pm_x\alpha^\pm_y,\\
&8(P^{\mp\mp}_{xx}-P^{\mp\mp}_{yy})=4[3(y_1\dot y_1-x_1\dot x_1)\pm\{a_yy_1-a_xx_1+(x_1^2+\dot x_1^2)-(y_1^2+\dot y_1^2)\}]=\\
&\quad=\mp2a_x(\alpha^+_x-\alpha^-_x)\pm2a_y(\alpha^+_y-\alpha^-_y)\pm5\big((\alpha^\mp_x)^2-(\alpha^\mp_y)^2\big)\mp\big((\alpha^\pm_x)^2-(\alpha^\pm_y)^2\big),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

10. Доказательство теоремы 8

Сейчас будет описан специальный выбор контура Γ. Напомним некоторые стандартные определения теории гомотопий. Для любых двух (ориентированных) контуров $\alpha,\beta\colon[0,1]\to\mathbb{C}$, таких что $\alpha(1)=\beta(0)$ (т. е. конец α совпадает с началом β), через $\beta\circ\alpha\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ будет обозначаться составной контур, получаемый прохождением α, а затем β. Параметризация на $\beta\circ\alpha$ может быть выбрана таким образом, что

$$\beta \circ \alpha(u) = \begin{cases} \alpha(2u), & 0 \leqslant u \leqslant 1/2, \\ \beta(2u-1), & 1/2 \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

Операция $\circ$ ассоциативна с точностью до изменения параметризации, сохраняющей ориентацию. Для любого контура γ через γ^{-1} обозначается тот же самый контур, но с противоположной ориентацией. Для любого замкнутого контура $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, где $\gamma(0) = \gamma(1)$, запись γ^n означает $\underbrace{\gamma \circ \ldots \circ \gamma}_{n}$, когда $n > 0$, $(\gamma^{-1})^{-n}$, когда $n < 0$, и контур, вырождающийся в точку $\gamma(0) = \gamma(1)$, если $n = 0$. В последующем на любом замкнутом ориентированном контуре γ будет выбираться некоторая «отмеченная точка», которая может рассматриваться как начало и конец этого контура. Отмеченная точка для γ^n совпадает с отмеченной точкой для γ.

Пусть γ_j — замкнутый контур, обходящий против часовой стрелки ровно одну особенность t'_j, и пусть r_j означает его «отмеченную точку». Составной контур Γ будет собран из замкнутых контуров $\gamma_j^{n_j}$ и промежуточных незамкнутых контуров π_s. Таким образом, имеем

$$\Gamma = \pi_N \circ \gamma_N^{n_N} \circ \pi_{N-1} \circ \ldots \circ \pi_1 \circ \gamma_1^{n_1} \circ \pi_0$$

в наиболее общем виде. Здесь π_s — незамкнутый путь, начало которого находится в «отмеченной» точке для γ_s, если $s > 0$, а конец — в «отмеченной» точке для γ_{s+1}, если $s < N$. Начало и конец контура Γ являются соответственно началом π_0 и концом π_N. Подчеркнём, что особенности t'_s, отвечающие контурам γ_s, выбираются среди исходных особенностей t_j, но, вообще говоря, нумерация для t'_s может быть отлична от нумерации для t_j; более того, некоторые особенности t'_s могут совпадать для разных s, т. е. замкнутые контуры γ_s, окружающие одну и ту же особенность, могут быть использованы для построения нескольких несвязных кусков Γ. Имея в виду этот факт, мы временно для краткости будем опускать верхний индекс «штрих» около t'_j. В последующем изложении контуры π_s и γ_j (и, значит, особенности t'_j) будут заданы, в то время как целые числа n_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ будут меняющимися.

Для дальнейших целей введём важную локальную величину. Пусть w — функция, голоморфная (аналитическая) в точке $t_0 \in \mathbb{C}$, и пусть f — функция, голоморфная в проколотой окрестности t_0. Введём обозначение $f_{-1} = \operatorname{Res}_{t_0} f$. Тогда функция $\langle f(t) \rangle = f(t) - f_{-1}(t-t_0)^{-1}$ имеет однозначную первообразную φ в проколотой окрестности t_0. Обозначим $\Phi_{t_0}[w,f] = 2\pi i \operatorname{Res}_{t_0}(w \cdot \varphi)$. Видно, что эта величина не зависит от выбора первообразной φ.

Если $w(t) = \sum\limits_{j \geqslant 0} w_j (t-t_0)^j$ — ряд Тейлора для w, а $f(t) = \sum\limits_{j} f_j (t-t_0)^j$ — ряд Лорана для f в окрестности t_0, то

$$\Phi_{t_0}[w,f] = -2\pi i \sum_{j \geqslant 0} \frac{w_j}{j+1} f_{-(j+2)}.$$

Эта сумма содержит только конечное число членов, если особенность f в t_0 не является существенной (т. е. будет полюсом или устранимой особенностью) или если функция w оказывается многочленом.

Имеется полезное преобразование величины $\Phi_{t_0}[w,f]$. Пусть ψ — первообразная голоморфной функции w. Представив $\Phi_{t_0}[w,f]$ как интеграл вдоль контура, обходящего против часовой стрелки особенность t_0, и применяя интегрирование по частям, легко получить, что

$$\Phi_{t_0}[w,f] = -2\pi i\big[\operatorname{Res}_{t_0}\big(\psi(\cdot)f(\cdot)\big) - (\operatorname{Res}_{t_0} f)\psi(t_0)\big]. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $t_0 \in D$ — некоторая точка, w — функция, голоморфная в D, а f, g — функции, голоморфные в $D \setminus \{t_0\}$. Пусть $\gamma \subset D$ — замкнутый контур, обходящий против часовой стрелки точку t_0, а $t_1 = \gamma(0) = \gamma(1)$ — его «отмеченная точка». Обозначим через $\int\limits_{\gamma(u_1)}^{\gamma(u_2)}$ интеграл вдоль ориентированной части контура $\gamma(u)$, $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Тогда*

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} dt\Bigg(w(t)\cdot\int\limits_{\gamma^n(0)}^{t=\gamma^n(u)} g(\tau)\,d\tau\Bigg) = \Bigg(\hat g\cdot\int\limits_{t_0}^{t_1} w(\tau)\,d\tau + \Phi[w,g]\Bigg)\cdot n,\\
\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} dt\Bigg(f(t)\cdot\int\limits_{\gamma^n(0)}^{t=\gamma^n(u)} g(\tau)\,d\tau\Bigg) = \frac{1}{2}\hat f\hat g\cdot n^2 + O(n),\\
\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} dt\Bigg(w(t)\cdot\int\limits_{\gamma^n(0)}^{t=\gamma^n(u)} f(\tau)\,d\tau\cdot\int\limits_{\gamma^n(0)}^{t=\gamma^n(u)} g(\tau)\,d\tau\Bigg) =\\
= \Bigg(\hat f\hat g\cdot\int\limits_{t_0}^{t_1} w(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}(\hat f\Phi[w,g] + \hat g\Phi[w,f])\Bigg)\cdot n^2 + O(n)
\end{gathered} \tag{19}$$

при $n \to \pm\infty$, где

$$\hat f = \oint\limits_{\gamma} f(\tau)\,d\tau = 2\pi i\operatorname{Res}_{t_0} f, \quad \hat g = \oint\limits_{\gamma} g(\tau)\,d\tau = 2\pi i\operatorname{Res}_{t_0} g,$$

а $\Phi[\cdot,\cdot] = \Phi_{t_0}[\cdot,\cdot]$ было введено выше. В действительности записанные выше остаточные члены порядка $O(n)$ имеют вид $\mathrm{const}\cdot n$.

Заметим, что первая формула соответствует случаю, когда обнуляется член старшего порядка в правой части второй формулы.

Таким образом, члены старшего порядка для этих трёх интегралов могут быть представлены как

$$\Phi[w,g]\cdot n+\int\limits_{\beta^{-1}\circ\beta} w(t)\tilde g(t)\,dt,\quad \frac12\Delta\tilde f\Delta\tilde g,$$

$$\frac12(\hat f\Phi[w,g]+\hat g\Phi[w,f])\cdot n^2+\int\limits_{\beta^{-1}\circ\beta} w(t)\tilde f(t)\tilde g(t)\,dt,$$

где β — контур, начинающийся в t_1 и заканчивающийся в t_0, β^{-1} — обратный контур, функции $\tilde f$ и $\tilde g$ постоянны на каждом из двух контуров β, β^{-1}, т. е. $\tilde f|_\beta\equiv\tilde g|_\beta\equiv 0$, $\tilde f|_{\beta^{-1}}\equiv n\hat f$, $\tilde g|_{\beta^{-1}}\equiv n\hat g$, символы $\Delta\tilde f=n\hat f$, $\Delta\tilde g=n\hat g$ означают скачки функций $\tilde f$ и $\tilde g$ в t_0 при переходе с β на β^{-1}.

Доказательство. Пусть $f_{-1}=\hat f/(2\pi i)=\operatorname{Res}_{t_0}f$ и $g_{-1}=\hat g/(2\pi i)=\operatorname{Res}_{t_0}g$. Без ограничения общности предположим для простоты, что $t_0=0$. Более того, можно предположить, что область D односвязна, заменив её, если необходимо, меньшей областью, которая является малой окрестностью объединения контура γ и его внутренности. Тогда функции $f(t)-f_{-1}t^{-1}$ и $g(t)-g_{-1}t^{-1}$ имеют в $D\setminus\{0\}$ однозначные первообразные. Внешнее подынтегральное выражение в левой части третьей формулы (19) можно представить в виде

$$w(t)\cdot\big(f_{-1}\ln t+\varphi(t)\big)\cdot\big(g_{-1}\ln t+\psi(t)\big)=f_{-1}g_{-1}w(t)\ln^2 t+\ln t\cdot\chi(t)+\nu(t),$$

где φ, ψ, χ, ν — некоторые однозначные в $D\setminus\{0\}$ функции и

$$\chi=w\cdot(f_{-1}\psi+g_{-1}\varphi).$$

Здесь и далее ветвь многозначной функции $\ln t$ берётся зафиксированной в начале γ^n — точке $\gamma^n(0)=t_1$. Очевидно,

$$\oint\limits_{\gamma^n}\nu(t)\,dt=O(n).$$

Пусть $\chi_{-1}=\operatorname{Res}_0\chi$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)}\ln t\cdot\chi(t)\,dt=C\cdot n^2+O(n), \tag{20}$$

где

$$C=\frac12(2\pi i)^2\chi_{-1}=\frac12(\hat f\Phi[w,g]+\hat g\Phi[w,f]).$$

В самом деле, функция $\chi-\chi_{-1}t^{-1}$ имеет в $D\setminus\{0\}$ однозначную первообразную H и искомый результат следует из того, что

$$\ln t\cdot\chi(t)=\chi_{-1}\frac{\ln t}{t}+\ln t\cdot H'(t)$$

и

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} = \frac{1}{2}(2\pi i)^2\cdot n^2 + O(n),$$

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} \ln t\cdot H'(t)\,dt = \big(\ln t\cdot H(t)\big)\Big|_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} - \oint\limits_{\gamma^n} \frac{H(t)}{t}\,dt = O(n). \tag{21}$$

Пусть

$$\zeta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} w(\tau)\,d\tau\,-$$

первообразная w, обращающаяся в нуль в $t_0 = 0$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} w(t)\ln^2 t\,dt = \zeta(t)\cdot\ln^2 t\Big|_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} - \int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} 2\ln t\cdot\frac{\zeta(t)}{t}\,dt = (2\pi i)^2\zeta(t_1)\cdot n^2 + O(n),$$

где для оценки второго слагаемого в средней части последней формулы используется вторая формула (21) с учётом того, что функция $\zeta(t)/t$ не имеет особенности в $t = 0$. Итак, третья формула (19) доказана.

Внешнее подынтегральное выражение в левой части второй формулы (19) может быть представлено в виде

$$f(t)\cdot\big(g_{-1}\ln t + \psi(t)\big) = g_{-1}f(t)\ln t + \nu(t),$$

где функция ν однозначна в $D\setminus\{0\}$. Приведённая выше асимптотическая оценка для интеграла (20) сразу показывает справедливость второй формулы (19).

Внешнее подынтегральное выражение в левой части первой формулы (19) принимает вид

$$w(t)\cdot\big(g_{-1}\ln t + \psi(t)\big) = g_{-1}w(t)\ln t + \nu(t),$$

где $\nu = w\cdot\psi$. Пусть $\nu_{-1} = \operatorname{Res}_0\nu$. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma^n} \nu(\tau)\,d\tau = C\cdot n,$$

где $C = (2\pi i)\cdot\nu_{-1} = \Phi[w, g]$. Итак, достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} \ln t\cdot w(t)\,dt = (2\pi i)\cdot\int\limits_{t_0}^{t_1} w(\tau)\,d\tau\cdot n,$$

когда w голоморфна в D. Выбирая первообразную

$$H(t) = \int\limits_{t_0}^{t} w(\tau)\,d\tau,$$

обращающуюся в нуль в $t_0 = 0$, мы получаем из (21), что действительно

$$\int\limits_{\gamma^n(0)}^{\gamma^n(1)} \ln t \cdot H'(t)\,dt = (2\pi i)H(t_1)\cdot n,$$

поскольку $H(t)/t$ не имеет особенности в $t = 0$. Доказательство леммы закончено. $\square$

Пусть β_j будет любым контуром с началом в «отмеченной точке» r_j для γ_j и концом в особой точке t_j, окружённой γ_j. Контуры $\bar\pi_0 = \beta_1 \circ \pi_0$, $\bar\pi_s = \beta_{s+1} \circ \pi_s \circ \beta_s^{-1}$ $(0 < s < N)$, $\bar\pi_N = \pi_N \circ \beta_N^{-1}$ последовательно соединяют точки $\Gamma(0), t_1, \ldots, t_N, \Gamma(1)$ и образуют составной контур $\bar\Gamma = \bar\pi_N \circ \ldots \circ \bar\pi_0$. Таким образом, $\bar\Gamma$ получается из Γ заменой каждого контура $\gamma_j^{n_j}$ на $\beta_j^{-1} \circ \beta_j$.

Для того чтобы устранить во всех последующих формулах несущественный множитель $-2\pi i$, мы переопределим каждую величину $C^{(j)}_{\sigma,\pm}$ как её старое значение, умноженное на $-2\pi i$. Тогда $C^{(j)}_{\sigma,\pm}$ будет как раз величиной интеграла, взятого вдоль контура γ_j от подынтегрального выражения, фигурирующего в определении для $c^{\pm}_{\sigma}(t)$. Аналогичным образом мы переопределим и $D^{(j)}_{\sigma,\pm}$.

Пусть $\bar\alpha = (\bar\alpha_x^+, \bar\alpha_x^-, \bar\alpha_y^+, \bar\alpha_y^-)$ — функция на контуре $\bar\Gamma$, определённая по формулам, подобным (7), в которых величины $c_{\sigma,\pm}\bigl(\Gamma(1)\bigr)$ (здесь $\sigma \in \{x, y\}$) заменены на

$$\bar c_{\sigma,\pm}\bigl(\Gamma(1)\bigr) = \sum_j n_j C^{(j)}_{\sigma,\pm},$$

а функции $c_{\sigma,\pm}(t)$, $t = \Gamma(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, заменены на

$$\bar c_{\sigma,\pm}(t) = \sum_{j \leqslant k} n_j C^{(j)}_{\sigma,\pm},$$

где $t = \bar\Gamma(u) \in \bar\pi_k$. Значит, вектор-функция $\bar\alpha$ непрерывна на каждом звене $\bar\pi_s$; более того, каждая его компонента пропорциональна на каждом звене $\bar\pi_s$ либо e^t, либо e^{-t}. Очевидно,

$$\bar\alpha = \sum_j n_j \bar\alpha^{(j)}$$

с векторами $\bar\alpha^{(j)}$, заданными формулами, подобными (7), в которых $c_{\sigma,\pm}\bigl(\Gamma(1)\bigr)$ заменены на $C^{(j)}_{\sigma,\pm}$, а $c_{\sigma,\pm}(t)$, $t = \Gamma(u)$, заменены на кусочные функции на $\bar\Gamma$, которые равны нулю на части $\bar\Gamma_{j,-} = \bar\pi_{j-1} \circ \ldots \circ \bar\pi_0$, предшествующей t_j, и равны $C^{(j)}_{\sigma,\pm}$ на части $\bar\Gamma_{j,+} = \bar\pi_N \circ \ldots \circ \bar\pi_j$, следующей за t_j. Компоненты вектора $\bar\alpha^{(j)}$ равны $\bar\alpha_\sigma^{(j),\pm}(t) = C^{(j)}_{\sigma,\mp} h^{(j)}_{\pm}(t)$, где

$$h^{(j)}_{\pm}(t) = \gamma_{\mp} e^{\pm t} \cdot \begin{cases} 1, & t \in \bar\Gamma_{j,-}, \\ e^{\mp T}, & t \in \bar\Gamma_{j,+}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t) = \sum_j n_j C_{\sigma,\mp}^{(j)} h_\pm^{(j)}(t).$$

Причина для введения контура $\bar{\Gamma}$ и функции $\bar{\alpha}$ заключается в следующем. Для больших $|n| = |n_1| + \ldots + |n_N|$ обе функции $\bar{\alpha}$ и α будут порядка $O(|n|)$, в то время как их разность — только порядка $O(1)$ на каждом общем куске π_s контуров $\bar{\Gamma}$ и Γ. Поэтому можно было бы попытаться аппроксимировать интегралы выражений от α на Γ, которые возникают в формулах (8), посредством аналогичных интегралов от тех же самых выражений от $\bar{\alpha}$ на $\bar{\Gamma}$, причём последние интегралы будут многочленами от $n_1, \ldots, n_N$, коэффициенты которых могут быть выражены в терминах локальных величин t_j и $D_{\sigma,\pm}^{(j)}$. Однако аккуратный анализ покажет, что также возникают некоторые дополнительные слагаемые старшего порядка и они также полиномиальны по $n_1, \ldots, n_N$ с коэффициентами, выражаемыми в терминах некоторых локальных величин. Эти дополнительные слагаемые появляются, конечно, вследствие интегрирования на звеньях $\gamma_j^{n_j}$ контура Γ. В действительности они соответствуют членам в (19), содержащим оператор Φ.

Обозначим через $\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,-})$ и $\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,+})$ левое и правое значения $\bar{\alpha}_\sigma^\pm$ в $t_j \in \bar{\Gamma}$, т. е. значения, когда t_j трактуется как конец $\bar{\pi}_{j-1}$ (и $\bar{\Gamma}_{j,-}$) или начало $\bar{\pi}_j$ (и $\bar{\Gamma}_{j,+}$) соответственно. Легко убедиться, что скачок $\bar{\alpha}_\sigma^\pm$ в t_j (при переходе с $\bar{\Gamma}_{j,-}$ на $\bar{\Gamma}_{j,+}$) равен

$$\Delta\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_j) = \bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,+}) - \bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,-}) = n_j e^{\pm t_j} C_{\sigma,\mp}^{(j)} = n_j D_{\sigma,\mp}^{(j)}$$

и что справедливы следующие симметричные формулы:

$$\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,-}) = \gamma_\mp \sum_{k\geqslant j} n_k e^{\pm(t_j - t_k)} D_{\sigma,\mp}^{(k)} - \gamma_\pm \sum_{k<j} n_k e^{\pm(t_j - t_k)} D_{\sigma,\mp}^{(k)},$$
$$\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t_{j,+}) = \gamma_\mp \sum_{k>j} n_k e^{\pm(t_j - t_k)} D_{\sigma,\mp}^{(k)} - \gamma_\pm \sum_{k\leqslant j} n_k e^{\pm(t_j - t_k)} D_{\sigma,\mp}^{(k)}$$

(здесь для преобразования коэффициента перед вторым слагаемым в каждой формуле использовалось равенство $\gamma_\mp e^{\mp T} = -\gamma_\pm$).

Теперь запишем удобные формулы для $\alpha_\sigma^\pm(t)$ и $\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t)$ на характерных участках $\gamma_j^{n_j}$ и $\beta_j^{-1} \circ \beta_j$ контуров Γ и $\bar{\Gamma}$ соответственно. С одной стороны, в любой точке $t = \gamma_j^{n_j}(u)$ имеем

$$\alpha_\sigma^\pm(t) = e^{\pm(t - r_j)} \Bigg(\alpha_\sigma^\pm(r_j) + \int\limits_{r_j = \gamma_j^n(0)}^{t = \gamma_j^n(u)} g_\sigma^\mp(\tau)\, d\tau\Bigg), \tag{22}$$

где $g_\sigma^\mp(\tau) = e^{\mp(\tau - r_j)}(-a_\sigma(\tau))$. С другой стороны, имеем

$$\bar{\alpha}_\sigma^\pm(t) = e^{\pm(t - r_j)} \big(\bar{\alpha}_\sigma^\pm(r_j) + \tilde{g}_\sigma^\mp(t)\big)$$

на контуре $\beta_j^{-1}\circ\beta_j$, где $\tilde g^\pm\equiv 0$ на β_j и $\tilde g^\pm\equiv n_j\hat g^\pm$ на β_j^{-1}, причём

$$\hat g^\pm = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{t_j} g^\pm = \oint\limits_{\gamma_j} g^\pm(\tau)\,d\tau.$$

Здесь при вычислении $\bar\alpha_\sigma^\pm(r_j)$ в качестве точки r_j подразумевалось начало контура $\beta_j^{-1}\circ\beta_j$. Для дальнейших целей обозначим через r_j' ту же самую точку, понимаемую как конец этого контура, и заметим, что $\bar\alpha_\sigma^\pm(r_j')=\bar\alpha_\sigma^\pm(r_j)+\Delta\tilde g_\sigma^\mp(t_j)$, где $\Delta\tilde g(t_j)=n_j\hat g$ — скачок $\tilde g$ в t_j при переходе с контура β_j на контур β_j^{-1}. Очевидно, что $\bar\alpha_\sigma^\pm(r_j)=e^{\pm(r_j-t_j)}\bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,-})$ и $\bar\alpha_\sigma^\pm(r_j')=e^{\pm(r_j-t_j)}\bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,+})$.

Теперь временно введём локальные величины

$$\varkappa_{\sigma,+,+}^{(j)}=\Phi_{t_j}[e^{2((\cdot)-t_j)},e^{-((\cdot)-t_j)}(-a_\sigma(\cdot))],$$
$$\varkappa_{\sigma,-,-}^{(j)}=\Phi_{t_j}[e^{-2((\cdot)-t_j)},e^{((\cdot)-t_j)}(-a_\sigma(\cdot))],$$
$$\varkappa_{\sigma,+,-}^{(j)}=\Phi_{t_j}[1,e^{(\cdot)-t_j}(-a_\sigma(\cdot))],\quad \varkappa_{\sigma,-,+}^{(j)}=\Phi_{t_j}[1,e^{-((\cdot)-t_j)}(-a_\sigma(\cdot))],$$

где $\sigma\in\{x,y\}$, которые формируют векторы

$$\vec\varkappa_{+,+}^{(j)}=\big(\varkappa_{x,+,+}^{(j)},\varkappa_{y,+,+}^{(j)}\big),\quad \vec\varkappa_{-,-}^{(j)}=\big(\varkappa_{x,-,-}^{(j)},\varkappa_{y,-,-}^{(j)}\big),$$
$$\vec\varkappa_{+,-}^{(j)}=\big(\varkappa_{x,+,-}^{(j)},\varkappa_{y,+,-}^{(j)}\big),\quad \vec\varkappa_{-,+}^{(j)}=\big(\varkappa_{x,-,+}^{(j)},\varkappa_{y,-,+}^{(j)}\big).$$

Применяя преобразование (18), мы получаем, что

$$\varkappa_{\sigma,\pm,\mp}^{(j)}=2\pi i E_{\sigma,\pm}^{(j)} \tag{23}$$

и

$$\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(j)}=\pm\pi i(D_{\sigma,\mp}^{(j)}-D_{\sigma,\pm}^{(j)})$$

для обоих случаев $\pm$ в нижних индексах, если имеются в виду исходные значения $D_{\sigma,+}^{(j)}$, $D_{\sigma,-}^{(j)}$. Для новых значений $D_{\sigma,+}^{(j)}$, $D_{\sigma,-}^{(j)}$ получаем

$$\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(j)}=\pm\frac12\big(D_{\sigma,\pm}^{(j)}-D_{\sigma,\mp}^{(j)}\big). \tag{24}$$

Пусть $n=(n_1,\dots,n_N)$ и $|n|=|n_1|+\ldots+|n_N|$.

Лемма 2. *Для любых $\sigma,\nu\in\{x,y\}$ имеют место следующие асимптотические формулы при $|n|\to\infty$:*

$$\int_\Gamma \alpha_\sigma^\pm(t)a_\nu(t)\,dt = \sum_{j\leqslant k} b_{j,k}^\pm n_j n_k + O(|n|),$$
$$\int_\Gamma \alpha_\sigma^+(t)\alpha_\nu^+(t)\,dt = \sum_{j\leqslant k} (u_{j,k}^{+,+} + v_{j,k}^{+,+}) n_j n_k + O(|n|),$$
$$\int_\Gamma \alpha_\sigma^+(t)\alpha_\nu^-(t)\,dt = \sum_{j\leqslant k} (u_{j,k}^{+,-} + v_{j,k}^{+,-}) n_j n_k + O(|n|),$$
$$\int_\Gamma \alpha_\sigma^-(t)\alpha_\nu^-(t)\,dt = \sum_{j\leqslant k} (u_{j,k}^{-,-} + v_{j,k}^{-,-}) n_j n_k + O(|n|),$$

где все коэффициенты зависят только от постоянных $D_{\sigma,\cdot}^{(j)}$, $D_{\nu,\cdot}^{(j)}$, $D_{\sigma,\cdot}^{(k)}$, $D_{\nu,\cdot}^{(k)}$, $\varkappa_{\sigma,\cdot,\cdot}^{(j)}$, $\varkappa_{\nu,\cdot,\cdot}^{(j)}$, $\varkappa_{\sigma,\cdot,\cdot}^{(k)}$, $\varkappa_{\nu,\cdot,\cdot}^{(k)}$ *(каждая точка* $(\cdot)$ *означает* $+$ *или* $-$*), соответствующих особенностям* t_j, t_k *(в действительности* t'_j, t'_k*), и от разности* $\delta = t_k - t_j$ *и задаются следующими формулами*:

$$\begin{aligned}
b_{j,j}^\pm &= \pm\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2} D_{\sigma,\mp}^{(j)} D_{\nu,\mp}^{(j)},\\
b_{j,k}^\pm &= \gamma_\pm e^{\pm\delta} D_{\sigma,\mp}^{(j)} D_{\nu,\mp}^{(k)} - \gamma_\mp e^{\mp\delta} D_{\sigma,\mp}^{(k)} D_{\nu,\mp}^{(j)}, \quad j<k,\\
u_{j,j}^{\pm,\pm} &= \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2} D_{\sigma,\mp}^{(j)} D_{\nu,\mp}^{(j)},\\
u_{j,k}^{\pm,\pm} &= \frac{1}{2}\big(D_{\sigma,\mp}^{(j)} D_{\nu,\mp}^{(k)} + D_{\sigma,\mp}^{(k)} D_{\nu,\mp}^{(j)}\big)(\gamma_+ e^\delta - \gamma_- e^{-\delta}), \quad j<k,\\
u_{j,k}^{+,-} &= D_{\sigma,-}^{(j)} D_{\nu,+}^{(k)}\big(\gamma_-\gamma_+ T e^\delta + \gamma_+ e^\delta \delta\big) +\\
&\quad + D_{\sigma,-}^{(k)} D_{\nu,+}^{(j)}\big(\gamma_-\gamma_+ T e^{-\delta} + \gamma_- e^{-\delta}\delta\big), \quad j\leqslant k,\\
v_{j,j}^{\pm,\pm} &= \mp\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2}\big(D_{\sigma,\mp}^{(j)}\varkappa_{\nu,\pm,\pm}^{(j)} + D_{\nu,\mp}^{(j)}\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(j)}\big),\\
v_{j,k}^{\pm,\pm} &= \gamma_\mp e^{\mp\delta}\big(D_{\sigma,\mp}^{(k)}\varkappa_{\nu,\pm,\pm}^{(j)} + D_{\nu,\mp}^{(k)}\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(j)}\big) -\\
&\quad - \gamma_\pm e^{\pm\delta}\big(D_{\sigma,\mp}^{(j)}\varkappa_{\nu,\pm,\pm}^{(k)} + D_{\nu,\mp}^{(j)}\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(k)}\big), \quad j<k,\\
v_{j,j}^{+,-} &= \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{T}{2}\big(D_{\nu,+}^{(j)}\varkappa_{\sigma,-,+}^{(j)} - D_{\sigma,-}^{(j)}\varkappa_{\nu,+,-}^{(j)}\big),\\
v_{j,k}^{+,-} &= \gamma_- e^{-\delta}(D_{\sigma,-}^{(k)}\varkappa_{\nu,+,-}^{(j)} - D_{\nu,+}^{(j)}\varkappa_{\sigma,-,+}^{(k)}) -\\
&\quad - \gamma_+ e^{\delta}\big(D_{\sigma,-}^{(j)}\varkappa_{\nu,+,-}^{(k)} - D_{\nu,+}^{(k)}\varkappa_{\sigma,-,+}^{(j)}\big), \quad j\leqslant k,
\end{aligned}$$

Доказательство. Чтобы установить первую формулу, мы докажем, что

$$\begin{gathered}
\int_\Gamma \alpha_\sigma^\pm(t)a_\nu(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sum_j \big(\bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,-}) + \bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,+})\big)\cdot\Delta\bar\alpha_\nu^\pm(t_j) + O(|n|),\\
-\frac{1}{2}\sum_j \big(\bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,-}) + \bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,+})\big)\cdot\Delta\bar\alpha_\nu^\pm(t_j) = \sum_{j\leqslant k} b_{j,k}^\pm n_j n_k.
\end{gathered} \tag{25}$$

Чтобы установить вторую формулу, мы докажем, что

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha_\sigma^+(t)\alpha_\nu^+(t)\,dt = \int\limits_{\bar\Gamma} \bar\alpha_\sigma^+(t)\bar\alpha_\nu^+(t)\,dt + \sum_{j\leqslant k} v_{j,k}^{+;+} n_j n_k + O(|n|),$$

$$\int\limits_{\bar\Gamma} \bar\alpha_\sigma^+(t)\bar\alpha_\nu^+(t)\,dt = \sum_{j\leqslant k} u_{j,k}^{+;+} n_j n_k. \tag{26}$$

Рассмотрения для других формул совершенно аналогичны последнему из этих двух рассмотрений.

Интеграл в (25), вычисленный вдоль каждого π_s, будет порядка $O(|n|)$, поскольку функция $\alpha_\sigma^\pm(t)$ есть $O(|n|)$. Более того, для любой квадратичной формы A от $\alpha \in \mathbb{C}^4$ разность $A\bigl(\alpha(t)\bigr)$ и $A\bigl(\bar\alpha(t)\bigr)$ на каждом общем участке π_s контуров Γ и $\bar\Gamma$ также будет $O(|n|)$, поскольку функции $\alpha(t)$ и $\bar\alpha(t)$ есть $O(|n|)$, в то время как их разность есть только $O(1)$. Поэтому чтобы доказать асимптотические формулы из (25), (26), достаточно установить, что

$$\int\limits_{\gamma_j^{n_j}} \alpha_\sigma^\pm(t) a_\nu(t)\,dt = -\frac{1}{2}\bigl(\bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,-}) + \bar\alpha_\sigma^\pm(t_{j,+})\bigr)\cdot \Delta\bar\alpha_\nu^\pm(t_j) + O(n_j) \quad \text{для каждого} \quad j,$$

$$\sum_j \int\limits_{\gamma_j^{n_j}} \alpha_\sigma^+(t)\alpha_\nu^+(t)\,dt = \sum_j \int\limits_{\beta_j^{-1}\circ\beta_j} \bar\alpha_\sigma^+(t)\bar\alpha_\nu^+(t)\,dt + \sum_{j\leqslant k} v_{j,k}^{+;+} n_j n_k + O(|n|).$$

Здесь интегрирование в левой и правой частях второй формулы осуществляется на несовпадающих связных участках Γ и $\bar\Gamma$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\gamma_j^{n_j}} \alpha_\sigma^\pm(t)(-a_\nu(t))\,dt,$$

где $\sigma,\nu \in \{x,y\}$. Ввиду (22) он может быть представлен как сумма двух выражений. Первое из них равно

$$\alpha_\sigma^\pm(r_j)\cdot \oint_{\gamma_j^{n_j}} e^{\pm(t-r_j)}\bigl(-a_\nu(t)\bigr)\,dt = \alpha_\sigma^\pm(r_j)\cdot\Delta\tilde{g_\nu^\pm} = \bar\alpha_\sigma^\pm(r_j)\cdot\Delta\tilde{g_\nu^\pm} + O(n_j),$$

а второе равно

$$\int\limits_{\gamma_j^{n_j}} dt\Biggl(e^{\pm(t-r_j)}\bigl(-a_\nu(t)\bigr)\cdot \int\limits_{r_j=\gamma_j^{n_j}(0)}^{t=\gamma_j^{n_j}(u)} g_\sigma^\mp(\tau)\,d\tau\Biggr) = \frac{1}{2}\Delta\tilde{g_\sigma^\mp}\cdot\Delta\tilde{g_\nu^\pm} + O(n_j)$$

по второй формуле (19). Здесь для краткости опущены переменные t_j для $\Delta\tilde g_\cdot^\cdot$, а обозначение $\oint\limits_{\gamma_j^{n_j}}$ используется в противоположность $\int\limits_{\gamma_j^{n_j}}$, когда подынтегральное выражение однозначно вдоль замкнутого пути интегрирования $\gamma_j^{n_j}$. Итак, обсуждаемый интеграл равен

$$\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(r_j)\cdot\Delta\tilde{g_\nu^{\pm}}+\frac{1}{2}\Delta\tilde{g_\sigma^{\mp}}\cdot\Delta\tilde{g_\nu^{\pm}}=\frac{1}{2}\big(\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(r_j)+\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(r_j')\big)\cdot\Delta\tilde{g_\nu^{\pm}}=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(t_{j,-})+\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(t_{j,+})\big)\cdot n_j\cdot\oint\limits_{\gamma_j}e^{\pm(\tau-t_j)}\big(-a_\nu(\tau)\big)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(t_{j,-})+\bar{\alpha}_\sigma^{\pm}(t_{j,+})\big)\cdot\Delta\bar{\alpha}_\nu^{\pm}(t_j)$$

с погрешностью $O(n_j)$, что завершает доказательство первой формулы (25). Вторая формула (25) может быть получена элементарным прямым вычислением, которое будет опущено (для упрощения выражения для $b_{j,j}^{\pm,\pm}$ использовалось равенство $\gamma_\mp-\gamma_\pm=\mp\operatorname{cth}(T/2)$).

Теперь рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{\gamma_j^{n_j}}\alpha_\sigma^{+}(t)\alpha_\nu^{+}(t)\,dt$$

(аналогичные интегралы от $\alpha_\sigma^{+}\alpha_\nu^{-}$ и $\alpha_\sigma^{-}\alpha_\nu^{-}$ рассматриваются тем же самым образом, их обсуждение будет опущено). Он может быть представлен как сумма трёх выражений. Первое из них равно

$$\alpha_\sigma^{+}(r_j)\int\limits_{\gamma_j^{n_j}}dt\Bigg(e^{2(t-r_j)}\int\limits_{r_j=\gamma_j^{n_j}(0)}^{t=\gamma_j^{n_j}(u)}g_\nu^{-}(\tau)\,d\tau\Bigg)=\alpha_\sigma^{+}(r_j)n_j\Bigg(\hat{g}_\nu^{-}\int\limits_{t_j}^{r_j}e^{2(t-r_j)}\,dt+C_1\Bigg)=$$
$$=\alpha_\sigma^{+}(r_j)\Bigg(\int\limits_{\beta_j^{-1}\circ\beta_j}e^{2(t-r_j)}\tilde{g_\nu^{-}}(t)\,dt+C_1n_j\Bigg)=$$
$$=\bar{\alpha}_\sigma^{+}(r_j)\int\limits_{\beta_j^{-1}\circ\beta_j}e^{2(t-r_j)}\tilde{g_\nu^{-}}(t)\,dt+\bar{\alpha}_\sigma^{+}(r_j)C_1n_j+O(|n|)$$

по первой формуле (19), где $C_1=\Phi_{t_j}[e^{2((\cdot)-r_j)},g_\nu^{-}]$. Заметим, что

$$\bar{\alpha}_\sigma^{+}(r_j)C_1=\bar{\alpha}_\sigma^{+}(r_j)\Phi_{t_j}\big[e^{2((\cdot)-r_j)},g_\nu^{-}\big]=$$
$$=\bar{\alpha}_\sigma^{+}(t_{j,-})\Phi_{t_j}\big[e^{2((\cdot)-t_j)},e^{-((\cdot)-t_j)}\big(-a_\nu^{-}(\cdot)\big)\big]=\bar{\alpha}_\sigma^{+}(t_{j,-})\varkappa_{\nu,+,+}^{(j)}.$$

Второе выражение получается из первого перестановкой σ и ν. Наконец, третье выражение равно

$$\int\limits_{\gamma_j^{n_j}} dt\biggl(e^{2(t-r_j)} \int\limits_{r_j=\gamma_j^{n_j}(0)}^{t=\gamma_j^{n_j}(u)} g_\sigma^-(\tau)\,d\tau \int\limits_{r_j=\gamma_j^{n_j}(0)}^{t=\gamma_j^{n_j}(u)} g_\nu^-(\tau)\,d\tau\biggr) =$$
$$= \biggl(\hat{g}_\sigma^-\hat{g}_\nu^- \int\limits_{t_j}^{r_j} e^{2(t-r_j)}\,dt + \frac{1}{2}C_2\biggr)n_j^2 + O(n_j) =$$
$$= \int\limits_{\beta_j^{-1}\circ\beta_j} e^{2(t-r_j)}\tilde{g_\sigma^-}(t)\tilde{g_\nu^-}(t)\,dt + \frac{1}{2}C_2 n_j^2 + O(n_j)$$

по третьей формуле (19), где

$$\begin{aligned} C_2 &= \hat{g}_\sigma^-\Phi_{t_j}[e^{2((\cdot)-r_j)}, g_\nu^-] + \hat{g}_\nu^-\Phi_{t_j}\bigl[e^{2((\cdot)-r_j)}, g_\sigma^-\bigr] = \\ &= D_{\sigma,-}^{(j)}\Phi_{t_j}\bigl[e^{2((\cdot)-t_j)}, e^{-((\cdot)-t_j)}\bigl(-a_\nu(\cdot)\bigr)\bigr] + \\ &+ D_{\nu,-}^{(j)}\Phi_{t_j}\bigl[e^{2((\cdot)-t_j)}, e^{-((\cdot)-t_j)}\bigl(-a_\sigma(\cdot)\bigr)\bigr] = D_{\sigma,-}^{(j)}\varkappa_{\nu,+,+}^{(j)} + D_{\nu,-}^{(j)}\varkappa_{\sigma,+,+}^{(j)}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что интеграл

$$\oint\limits_{\beta_j^{-1}\circ\beta_j} \bar{\alpha}_\sigma^+(t)\bar{\alpha}_\nu^+(t)\,dt$$

может быть представлен как сумма трёх выражений, которые являются как раз старшими членами в обсуждавшихся выше выражениях, в которых исключены слагаемые

$$\bar{\alpha}_\sigma^+(t_{j,-})\varkappa_{\nu,+,+}^{(j)}\cdot n_j, \quad \bar{\alpha}_\nu^+(t_{j,-})\varkappa_{\sigma,+,+}^{(j)}\cdot n_j, \quad \frac{1}{2}\bigl(D_{\sigma,-}^{(j)}\varkappa_{\nu,+,+}^{(j)} + D_{\nu,-}^{(j)}\varkappa_{\sigma,+,+}^{(j)}\bigr)\cdot n_j^2.$$

(В самом деле, в приведённых выше формулах $\alpha_\sigma^+(r_j)$ заменится на $O(1)$-близкую величину $\bar{\alpha}_\sigma^+(r_j)$, а члены с коэффициентами C_1, C_2 исчезнут.) Элементарное вычисление показывает, что сумма этих слагаемых для всех j будет как раз квадратичной формой

$$\sum_{j\leqslant k} v_{j,k}^{+,+} n_j n_k$$

(для упрощения выражения для $v_{j,j}^{+,+}$ использовалось равенство $1/2+\gamma_- = -(1/2)\operatorname{cth}(T/2)$). Это завершает доказательство первой формулы (26).

Чтобы получить вторую формулу (26) и аналогичные формулы для интегралов от $\bar{\alpha}_\sigma^+\bar{\alpha}_\nu^-$, $\bar{\alpha}_\sigma^-\bar{\alpha}_\nu^-$, следует выполнить элементарные вычисления с использованием соотношений

$$w_{+,+}^{(j,k)} = e^{-t_j} e^{-t_k} \int\limits_{\bar\Gamma} h_+^{(j)}(t) h_+^{(k)}(t)\, dt = -\frac{1}{2}\gamma_-(e^{-\delta} + e^{-T} e^{\delta}) = \frac{1}{2}\gamma_+ e^{\delta} - \frac{1}{2}\gamma_- e^{-\delta},$$

$$w_{-,-}^{(j,k)} = e^{t_j} e^{t_k} \int\limits_{\bar\Gamma} h_-^{(j)}(t) h_-^{(k)}(t)\, dt = \frac{1}{2}\gamma_+(e^{\delta} + e^{T} e^{-\delta}) = \frac{1}{2}\gamma_+ e^{\delta} - \frac{1}{2}\gamma_- e^{-\delta},$$

$$w_{+,-}^{(j,k)} = e^{-t_j} e^{t_k} \int\limits_{\bar\Gamma} h_+^{(j)}(t) h_-^{(k)}(t)\, dt = \gamma_+\gamma_- e^{\delta}\big(T + \delta(e^{-T} - 1)\big) =$$
$$= \gamma_+\gamma_- e^{\delta} T + \gamma_+ e^{\delta}\delta,$$

$$w_{-,+}^{(j,k)} = e^{t_j} e^{-t_k} \int\limits_{\bar\Gamma} h_-^{(j)}(t) h_+^{(k)}(t)\, dt = \gamma_+\gamma_- e^{-\delta}\big(T + \delta(e^{T} - 1)\big) =$$
$$= \gamma_+\gamma_- e^{-\delta} T + \gamma_- e^{-\delta}\delta,$$

где $j \leqslant k$, т. е. точка t_k не предшествует t_j на пути интегрирования $\bar\Gamma$ (для упрощения выражений для $u_{j,j}^{+,+}$, $u_{j,j}^{-,-}$ использовалось равенство $\gamma_+ - \gamma_- = \operatorname{cth}(T/2)$). Это завершает доказательство леммы. □

Замечание 10. Рассмотрим случай, когда $t_j = t_{j+1}$ и контур $\bar\pi_j$ вырождается в одну точку. Выбирая тождественные контуры γ_j и γ_{j+1}, можно рассмотреть участок $\gamma_{j+1}^{n_{j+1}} \circ \bar\pi_j \circ \gamma_j^{n_j}$ как $\gamma_j^{n_j+n_{j+1}}$, предполагая при этом, что N меньше на одну единицу. Отсюда следует, что для коэффициентов любой квадратичной формы $\sum\limits_{j\leqslant k} W_{j,k} n_j n_k$, рассмотренной в лемме 2, должно быть выполнено следующее условие: если $t_j = t_k$, где $k = j+1$, то $(1/2)W_{j,k} = W_{j,j} \equiv W_{k,k}$. Можно легко проверить, что это на самом деле так для всех рассматриваемых квадратичных форм согласно равенству $\gamma_+ - \gamma_- = \operatorname{cth}(T/2)$. Здесь условие $k = j+1$ несущественно, поскольку оно не влияет на выражение для $W_{j,k}$.

Каждый интеграл $I_{xx}^{\pm}$, $I_{xy}^{\pm}$ и $I_{yy}^{\pm}$ является линейной комбинацией элементарных интегралов, проанализированных в лемме 2. Значит, старший член $I_{\xi\eta}^{\pm}$ (где $\xi\eta \in \{xx, xy, yy\}$) при $|n| \to \infty$ будет квадратичной формой $\sum\limits_{j\leqslant k} I_{\xi\eta,j,k}^{\pm} n_j n_k$ по n, коэффициенты которой $I_{\xi\eta,j,k}^{\pm}$ будут аналогичными линейными комбинациями коэффициентов, введённых в лемме 2. Аналогичным образом старший член левой части (8) будет равен $\sum\limits_{j\leqslant k} M_{j,k}^{\pm} n_j n_k$, где

$$M_{j,k}^{\pm} = I_{xx,j,k}^{\pm}(D_x^{\pm})^2 + I_{xy,j,k}^{\pm} D_x^{\pm} D_y^{\pm} + I_{yy,j,k}^{\pm}(D_y^{\pm})^2.$$

Требуется найти наиболее слабые условия, которые гарантируют, что $M_{j,k}^{\pm} \neq 0$ для некоторых j, k при некотором выборе особых точек t'_j, t'_k среди исходных особых точек t_s. Действительно, если это так, то квадратичная форма старшего порядка для соответствующего контура Γ будет нетривиальна и выполнение желаемого условия (8) будет обеспечено выбором подходящего $n = (n_1, \ldots, n_N)$ с достаточно большим $|n|$ (здесь все точки t'_l, $1 \leqslant l \leqslant N$, были уже предписаны).

Очевидно, можно выбрать такое n, что $n_s = 0$ для $s \neq j, k$, рассматривая, таким образом, контур Γ, вьющийся вокруг только двух особых точек.

Заметим, что все коэффициенты (для $j \neq k$), введённые в лемме 2, являются, в действительности, линейными комбинациями e^δ, $e^{-\delta}$, δe^δ и $\delta e^{-\delta}$ со множителями, определяемыми только через константы $D^{(j)}_{\sigma,\cdot}$, $D^{(j)}_{\nu,\cdot}$, $D^{(k)}_{\sigma,\cdot}$, $D^{(k)}_{\nu,\cdot}$, $\varkappa^{(j)}_{\sigma,\cdot,\cdot}$, $\varkappa^{(j)}_{\nu,\cdot,\cdot}$, $\varkappa^{(k)}_{\sigma,\cdot,\cdot}$, $\varkappa^{(k)}_{\nu,\cdot,\cdot}$. Теперь можно модифицировать контуры Γ и $\bar\Gamma$ посредством сдвига некоторых точек t_j (в действительности t'_j) на величины, кратные периоду T. Тогда соответствующие локальные «масштабированные» величины, подобные $D^{(j)}_{\sigma,\cdot}$, $E^{(j)}_{\sigma,\cdot}$ и $\varkappa^{(j)}_{\sigma,\cdot,\cdot}$, останутся неизменными, а разности, подобные δ, изменятся на величины, кратные T. Пусть t_k (в действительности t'_k) заменяется на $t_k + mT$ в приведённых выше формулах. Тогда коэффициенты, введённые в лемме 2, станут линейными комбинациями величин

$$p_1(m) = e^{\delta+mT} = e^\delta \Lambda^m, \quad p_2(m) = e^{-(\delta+mT)} = e^{-\delta}\Lambda^{-m},$$
$$p_3(m) = (\delta + mT)e^{\delta+mT} = \delta e^\delta \Lambda^m + Te^\delta m\Lambda^m,$$
$$p_4(m) = (\delta + mT)e^{-(\delta+mT)} = \delta e^{-\delta}\Lambda^{-m} + Te^{-\delta} m\Lambda^{-m},$$

где $\Lambda = e^T$. Это представление остаётся справедливо для $I^\pm_{\xi\eta,j,k}$ и, в свою очередь, для $M^\pm_{j,k}$. Подчеркнём, что случай, когда $t_j = t_k$ для различных j, k, также допусти́м во всех рассмотрениях, поскольку можно заменить одну или обе особенности t_j, t_k их «сдвинутыми» образами.

Напомним, что $|\Lambda| \neq 1$, и заметим, что последовательности $\{p_1(m)\}$, $\{p_2(m)\}$, $\{p_3(m)\}$, $\{p_4(m)\}$ линейно независимы для m, пробегающих целые числа. В этом можно легко убедиться, рассмотрев асимптотическое поведение их линейных комбинаций при $m \to \infty$. Более того, для любых четырёх последовательных величин m соответствующие четырёхмерные векторы, образованные членами этих последовательностей, будут линейно независимы. В самом деле, зафиксируем m и введём обозначения $q_s(l) = p_s(m + l)$ и $q^\circ_s = q_s(0) = p_s(m)$ для $1 \leqslant s \leqslant 4$. Тогда

$$q_1(l) = q^\circ_1\Lambda^l, \quad q_2(l) = q^\circ_2\Lambda^{-l}, \quad q_3(l) = q^\circ_3\delta\Lambda^l + q^\circ_1 Tl\Lambda^l, \quad q_4(l) = q^\circ_4\delta\Lambda^{-l} + q^\circ_2 Tl\Lambda^{-l}.$$

Линейная независимость величин $q_s(l)$ для некоторых l означает линейную независимость строк матрицы, каждый столбец которой соответствует одному из этих значений l и имеет вид $(q^\circ_1\Lambda^l, q^\circ_2\Lambda^{-l}, q^\circ_3\delta\Lambda^l + q^\circ_1 Tl\Lambda^l, q^\circ_4\delta\Lambda^{-l} + q^\circ_2 Tl\Lambda^{-l})^\top$. Совершая элементарные преобразования строк (здесь используется отличие от нуля величин q°_1, q°_2), приводим столбцы к виду $(\Lambda^l, \Lambda^{-l}, l\Lambda^l, l\Lambda^{-l})^\top$. Искомый результат следует из невырожденности преобразованной матрицы, образованной четырьмя столбцами, соответствующими $l = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \Lambda & \Lambda^2 & \Lambda^3 \\ 1 & \Lambda^{-1} & \Lambda^{-2} & \Lambda^{-3} \\ 0 & \Lambda & 2\Lambda^2 & 3\Lambda^3 \\ 0 & \Lambda^{-1} & 2\Lambda^{-2} & 3\Lambda^{-3} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} W(\Lambda, \Lambda^{-1}, \lambda_1, \lambda_2)\Big|_{\substack{\lambda_1=\Lambda, \\ \lambda_2=\Lambda^{-1}}} = -(\Lambda - \Lambda^{-1})^4,$$

где W — определитель Вандермонда.

Искомые условия заключаются в том, что среди коэффициентов при $p_1(m)$, $p_2(m)$, $p_3(m)$, $p_4(m)$ в $M^{\pm}_{j,k}$ имеется по крайней мере один отличный от нуля. Действительно, если это так, то $M^{\pm}_{j,k} \neq 0$ для некоторого целого m. Однако можно упростить совокупность этих неравенств, до того как решать её. Заметим, что среди всех коэффициентов, введённых в лемме 2, только выражение

$$u^{+,-}_{j,k} = D^{(j)}_{\sigma,-} D^{(k)}_{\nu,+} w^{(j,k)}_{+,-} + D^{(k)}_{\sigma,-} D^{(j)}_{\nu,+} w^{(j,k)}_{-,+}$$

зависит от δe^{δ} или $\delta e^{-\delta}$. Здесь $w^{(j,k)}_{+,-}$ зависит только от δe^{δ}, а $w^{(j,k)}_{-,+}$ зависит только от $\delta e^{-\delta}$. Теперь будем рассматривать величины $w^{(j,k)}_{+,-}$, $w^{(j,k)}_{-,+}$ вместо δe^{δ}, $\delta e^{-\delta}$ и представлять коэффициенты как линейные комбинации e^{δ}, $e^{-\delta}$ и $w^{(j,k)}_{+,-}$, $w^{(j,k)}_{-,+}$. Тогда соответствующие последовательности $\{p_1(m)\}$, $\{p_2(m)\}$ и $\{p_3'(m) = \gamma_-\gamma_+ T p_1(m) + \gamma_+ p_3(m)\}$, $\{p_4'(m) = \gamma_-\gamma_+ T p_2(m) + \gamma_- p_4(m)\}$ линейно независимы и могут быть использованы вместо $\{p_1(m)\}$, $\{p_2(m)\}$, $\{p_3(m)\}$ и $\{p_4(m)\}$ для получения требуемых условий.

Заметим, что при таком подходе мы анализируем только коэффициенты $M^{\pm}_{j,k}$, помеченные различными индексами j, k, т. е. такие, что $j < k$. Но по замечанию 10 $M^{\pm}_{j,j} = (1/2) M^{\pm}_{j,k}$, если $t_j = t_k$, $j < k$, и поэтому достаточно рассматривать только случай, когда $j < k$.

Отметим другие полезные наблюдения, касающиеся коэффициентов, вычисленных в лемме 2. Во-первых, члены e^{δ} и $e^{-\delta}$ всегда сопровождаются постоянными множителями γ_+ и γ_- соответственно. Поэтому мы будем рассматривать $\gamma_+ e^{\delta}$ и $\gamma_- e^{-\delta}$ вместо e^{δ} и $e^{-\delta}$ и заменим последовательности $\{p_1(m)\}$ и $\{p_2(m)\}$ на последовательности $\{p_1'(m) = \gamma_+ p_1(m)\}$ и $\{p_2'(m) = \gamma_- p_2(m)\}$. Во-вторых, коэффициенты при $w^{(j,k)}_{+,-}$ и $w^{(j,k)}_{-,+}$ и коэффициенты при $\gamma_+ e^{\delta}$ и $-\gamma_- e^{-\delta}$ могут быть получены один из другого перестановкой индексов j и k, т. е. перестановкой двух чисел n_j и n_k. Последний факт имеет, конечно, вполне естественную причину, см. замечание 12. Следовательно, достаточно проанализировать только коэффициенты при $w^{(j,k)}_{+,-}$ и $\gamma_+ e^{\delta}$, т. е. коэффициенты при $\{p_3'(m)\}$ и $\{p_1'(m)\}$. Теперь будем вычислять эти два коэффициента в выражении для $M^{\pm}_{j,k}$.

Коэффициент при $w^{(j,k)}_{+,-}$ идёт от $u^{+,-}_{j,k}$ из части

$$\int\limits_{\Gamma} (\alpha_x^- \alpha_y^+ - \alpha_x^+ \alpha_y^-)\, dt \cdot (D^2_{x,\pm} + D^2_{y,\pm}) \tag{27}$$

суммы в левой части (8). Видно, что этот коэффициент равен

$$\left(D^{(j)}_{y,-} D^{(k)}_{x,+} - D^{(j)}_{x,-} D^{(k)}_{y,+}\right) \cdot (D^2_{x,\pm} + D^2_{y,\pm}) = \left(\vec{D}^{(k)}_+ \wedge \vec{D}^{(j)}_-\right)(\vec{D}_\pm \cdot \vec{D}_\pm).$$

(Напомним, что здесь коэффициенты $D^{(j)}_{\cdot,\cdot}$ и $D^{(k)}_{\cdot,\cdot}$ относятся соответственно к особенностям t_j' и t_k'). Последнее выражение обращается в нуль при произвольном выборе t_j' и t_k' среди всех исходных особенностей t_s, если и только если выполнено одно из следующих условий:

1) $D^2_{x,\pm} + D^2_{y,\pm} = 0$, т. е. вектор $\vec{D}_\pm = (D_{x,\pm}, D_{y,\pm})$ изотропен,

2) векторы $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(k)}$ (относящиеся к исходным особенностям t_j, t_k) пропорциональны для произвольных j, k, и значит, $\vec{D}_-^{(j)}$, $\vec{D}_+^{(j)}$ пропорциональны одному и тому же вектору $\vec{D} = (D_x, D_y)$ для всех j, т. е. $\vec{D}_-^{(j)} = f_-^{(j)}\vec{D}$ и $\vec{D}_+^{(j)} = f_+^{(j)}\vec{D}$ с некоторыми константами $f_-^{(j)}$ и $f_+^{(j)}$.

Теперь будем рассматривать коэффициент при $\gamma_+ e^{\delta}$ в $M_{j,k}^{\pm}$ отдельно для двух случаев. Величина $\gamma_+ e^{\delta}$ встречается только в коэффициентах $b_{j,k}^{\pm}$, $u_{j,k}^{\pm,\pm}$, $v_{j,k}^{\pm,\pm}$, $v_{j,k}^{+,-}$, вычисленных в лемме 2. Будет представлен только краткий набросок вычислений, поскольку они вполне элементарны.

1. Пусть вектор $\vec{D}_{\pm} = (D_{x,\pm}, D_{y,\pm})$ изотропен. Члены, выражающиеся через $v_{j,k}^{+,-}$, возникают из части суммы (27) и потому обнуляются. Коэффициенты при $\gamma_+ e^{\delta}$ в $v_{j,k}^{\pm,\pm}$ могут быть представлены единой формулой

$$\mp\bigl(D_{\sigma,\mp}^{(j/k)}\varkappa_{\nu,\pm,\pm}^{(k/j)} + D_{\nu,\mp}^{(j/k)}\varkappa_{\sigma,\pm,\pm}^{(k/j)}\bigr), \tag{28}$$

где каждый верхний индекс (a/b) состоит из верхней (a) и нижней (b) компонент (аналогично $\pm$ и $\mp$); все верхние или нижние варианты в верхних и нижних индексах выбираются одновременно. Напомним, что $\vec{D}_{\pm}^{(j)} = f_{\pm}^{(j)}\vec{D}_{\pm}$ для всех j. Поэтому в выражении для коэффициента при $\gamma_+ e^{\delta}$ в $M_{j,k}^{\pm}$ хотелось бы выделить величины $D_{\cdot,\pm}^{(\cdot)}$. Это можно сделать следующим образом. Все члены в $M_{j,k}^{\pm}$, которые зависят от $b_{j,k}^{+}$ или $b_{j,k}^{-}$, происходят из части

$$\begin{aligned} \pm\Biggl\{ &\int_{\Gamma} 2a_x(\alpha_y^+ - \alpha_y^-)\,dt\cdot D_{x,\pm}^2 + \\ &+ \int_{\Gamma}[-2a_x(\alpha_x^+ - \alpha_x^-) + 2a_y(\alpha_y^+ - \alpha_y^-)]\,dt\cdot D_{x,\pm}D_{y,\pm} - \\ &- \int_{\Gamma} 2a_y(\alpha_x^+ - \alpha_x^-)\,dt\cdot D_{y,\pm}^2\Biggr\} \end{aligned} \tag{29}$$

суммы в левой части (8) и образуют сумму

$$\begin{aligned} \pm 2\Bigl\{ &\bigl(b^+(y,x) - b^-(y,x)\bigr)D_{x,\pm}^2 + \\ &+ \bigl(b^-(x,x) - b^+(x,x) + b^+(y,y) - b^-(y,y)\bigr)D_{x,\pm}D_{y,\pm} + \\ &+ \bigl(b^-(x,y) - b^+(x,y)\bigr)D_{y,\pm}^2\Bigr\}. \end{aligned}$$

Для краткости мы опускаем здесь пару индексов (j,k) и указываем пару индексов (σ,ν), где $\sigma,\nu \in \{x,y\}$, в качестве явных переменных для $b_{j,k}$. Заметим, что приведённая выше сумма образована членами $\bigl(b^+(\sigma,\nu) - b^-(\nu,\sigma)\bigr)$. Коэффициент при $\gamma_+ e^{\delta}$ в каждом члене $\bigl(b^+(\sigma,\nu) - b^-(\nu,\sigma)\bigr)$ может быть переписан в следующем виде:

$$D_{\sigma,-}^{(j)}D_{\nu,-}^{(k)} + D_{\nu,+}^{(k)}D_{\sigma,+}^{(j)} = D_{\sigma,\pm}^{(j)}D_{\nu,\pm}^{(k)} + D_{\sigma,\mp}^{(j)}D_{\nu,\mp}^{(k)}. \tag{30}$$

После этого преобразования мы получим выражение, в котором все величины $D^{(\cdot)}_{\cdot,\cdot}$ встречаются только как $D^{(\cdot)}_{\cdot,\pm}$ или $D^{(\cdot)}_{\cdot,\mp}$. Эта форма уже подходит для подстановок $D^{(\cdot)}_{\sigma,\pm} = f^{(\cdot)}_{\pm} D_{\sigma,\pm}$.

Выполняя эти подстановки, получаем выражение, которое может быть рассмотрено как многочлен второй степени от коэффициентов $f^{(\cdot)}_{\pm}$ (вопреки (24), мы временно рассматриваем величины $\varkappa^{(j)}_{\sigma,+,+}$, $\varkappa^{(j)}_{\sigma,-,-}$ как не зависящие от $D^{(j)}_{\sigma,\pm}$ для всех j). В действительности все квадратичные члены включают только одночлен $f^{(j)}_{\pm} f^{(k)}_{\pm}$. Они возникают из-за $\big(b^+(\sigma,\nu) - b^-(\nu,\sigma)\big)$ (см. (30)) из части (29) суммы в левой части (8) и из-за $u^{\mp,\mp}_{j,k}$ из части

$$\mp \Bigg[\int\limits_{\Gamma} (5\alpha^{\mp}_x \alpha^{\mp}_y - \alpha^{\pm}_x \alpha^{\pm}_y)\, dt \cdot D^2_{x,\pm} + \\ + \Bigg\{ -5 \int\limits_{\Gamma} \big((\alpha^{\mp}_x)^2 - (\alpha^{\mp}_y)^2\big)\, dt + \int\limits_{\Gamma} \big((\alpha^{\pm}_x)^2 - (\alpha^{\pm}_y)^2\big)\, dt \Bigg\} \cdot D_{x,\pm} D_{y,\pm} - \\ - \int\limits_{\Gamma} (5\alpha^{\mp}_x \alpha^{\mp}_y - \alpha^{\pm}_x \alpha^{\pm}_y)\, dt \cdot D^2_{y,\pm} \Bigg] \tag{31}$$

этой же суммы. (Сумма в левой части (8) распадается как раз на три части (27), (29) и (31).) Легко убедиться, что суммы квадратичных членов, возникающие из (29) и из (31), тождественно обнуляются для любого (возможно, неизотропного) вектора $\vec{D}_{\pm} = (D_{x,\pm}, D_{y,\pm})$. Все члены, линейные по $f^{(\cdot)}_{\pm}$, идут от $v^{\mp,\mp}_{j,k}$ из (31), и они включают только общий множитель $f^{(k/j)}_{\pm}$ ввиду (28). Легко убедиться, что общий коэффициент при $f^{(k/j)}_{\pm}$ равен

$$- 5\big(\Psi(\vec{D}_{\pm}, \vec{D}_{\pm}, \vec{\varkappa}^{(j/k)}_{\mp,\mp}) + \Psi(\vec{D}_{\pm}, \vec{\varkappa}^{(j/k)}_{\mp,\mp}, \vec{D}_{\pm})\big) = \\ = -5\Psi(\vec{D}_{\pm}, \vec{\varkappa}^{(j/k)}_{\mp,\mp}, \vec{D}_{\pm}) = -5\big(\vec{D}_{\pm} \wedge \vec{\varkappa}^{(j/k)}_{\mp,\mp}\big)(\vec{D}_{\pm} \cdot \vec{D}_{\pm})$$

и тождественно обнуляется благодаря изотропности вектора $\vec{D}_{\pm}$. Теперь проанализируем члены, свободные от $f^{(\cdot)}_{\pm}$. Эти члены будут следующих двух видов. Члены вида $D^{(j)}_{\sigma,\mp} D^{(k)}_{\nu,\mp} D_{\alpha,\pm} D_{\beta,\pm}$, где $\sigma, \nu, \alpha, \beta \in \{x, y\}$, возникают из-за $\big(b^+(\sigma,\nu) - b^-(\nu,\sigma)\big)$ из (29) (см. (30)) и из-за $u^{\pm,\pm}_{j,k}$ из (31). Можно убедиться, что суммы этих двух наборов членов равны

$$\pm 2\Psi\big(\vec{D}_{\pm}, \vec{D}^{(j)}_{\mp}, \vec{D}^{(k)}_{\mp}\big) \quad \text{и} \quad \pm \frac{1}{2}\Big(\Psi\big(\vec{D}_{\pm}, \vec{D}^{(k)}_{\mp}, \vec{D}^{(j)}_{\mp}\big) + \Psi\big(\vec{D}_{\pm}, \vec{D}^{(j)}_{\mp}, \vec{D}^{(k)}_{\mp}\big)\Big) \tag{32}$$

соответственно. Члены вида $D^{(j/k)}_{\sigma,\mp} \varkappa^{(k/j)}_{\nu,\pm,\pm} D_{\alpha,\pm} D_{\beta,\pm}$ возникают из-за $v^{\pm,\pm}_{j,k}$ из (31) (см. (28)). Можно убедиться, что сумма этих членов равна

$$-\Big(\Psi\big(\vec{D}_{\pm}, \vec{D}^{(j/k)}_{\mp}, \vec{\varkappa}^{(k/j)}_{\pm,\pm}\big) + \Psi\big(\vec{D}_{\pm}, \vec{\varkappa}^{(k/j)}_{\pm,\pm}, \vec{D}^{(j/k)}_{\mp}\big)\Big). \tag{33}$$

Теперь заметим, что для любого изотропного вектора $\vec{a}$ выполнено тождество

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{a_x}{a_y}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Поэтому ввиду тождества (24) сумма всех членов (всех трёх видов), составляющих коэффициент при γ_+e^δ в $M^{\pm}_{j,k}$, равна с точностью до множителя $D^{\pm}_x/D^{\pm}_y\in\{i,-i\}$

$$\pm4\bigl(\vec{D}_\pm\cdot\vec{D}^{(j/k)}_\mp\bigr)\bigl(\vec{D}_\pm\cdot\vec{D}^{(k/j)}_\mp\bigr).$$

Это выражение не будет обнуляться для подходящих j, k, если и только если $\vec{D}_\pm\cdot\vec{D}^{(l)}_\mp\neq0$ для некоторого l, где индекс l указывает исходную особую точку t_l (поскольку случай $j=k$ допускается). Ввиду изотропности $\vec{D}_\pm$ это неравенство означает, что вектор $\vec{D}_\pm$ ненулевой и $\vec{D}^{(l)}_\mp$ не пропорционален $\vec{D}_\pm$.

2. Пусть вектор $\vec{D}_\pm=(D_{x,\pm},D_{y,\pm})$ неизотропен, и пусть

$$D^{(s)}_{\sigma,-}=f^{(s)}_-D_\sigma\quad\text{и}\quad D^{(s)}_{\sigma,+}=f^{(s)}_+D_\sigma$$

для всех s и для всех $\sigma\in\{x,y\}$ с некоторыми постоянными $f^{(s)}_-$ и $f^{(s)}_+$. Тогда вектор $\vec{D}=(D_x,D_y)$ неизотропен, т. е. $D_x^2+D_y^2\neq0$. Для последующего мы можем заменить $D_{x,\pm}$ и $D_{y,\pm}$ в левой части (8) на D_x и D_y соответственно.

Заметим, что мы уже вычислили и проанализировали все члены в рассматриваемом выражении, кроме тех, которые возникают из-за $v^{+,-}_{j,k}$ из (27). Мы видели, что сумма всех вычисленных членов, которые квадратичны по $f^{(\cdot)}_\pm$, всегда обращается в нуль. В настоящем случае сумма всех вычисленных членов, которые линейны по $f^{(\cdot)}_\pm$, ввиду тождества (24) также обращается в нуль, и то же самое верно и для всех выражений (32) и (33), дающих суммы вычисленных членов, которые свободны от $f^{(\cdot)}_\pm$. Таким образом, все вычисленные ранее члены обнуляются.

Теперь мы должны вычислить и проанализировать дополнительные члены, возникающие из-за $v^{+,-}_{j,k}$ из (27), в действительности как раз из-за $\bigl(v^{+,-}(y,x)-v^{+,-}(x,y)\bigr)(\vec{D}\cdot\vec{D})$ в используемых выше обозначениях. Видно, что эти члены равны

$$\Bigl(f^{(k)}_+\bigl(\vec{D}\wedge\vec{\varkappa}^{(j)}_{-,+}\bigr)+f^{(j)}_-\bigl(\vec{D}\wedge\vec{\varkappa}^{(k)}_{+,-}\bigr)\Bigr)(\vec{D}\cdot\vec{D}).$$

Эта сумма обнуляется, если и только если имеется некоторая константа $C\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, такая что

$$\frac{f^{(k)}_+}{\vec{D}\wedge\vec{\varkappa}^{(k)}_{-,+}}=-\frac{f^{(j)}_-}{\vec{D}\wedge\vec{\varkappa}^{(j)}_{+,-}}=C$$

(где $0/0$ может интерпретироваться как произвольная величина из $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$).

Проведённые выше рассмотрения показывают, что неравенство (8) для одного из индексов $\pm$ (для обоих индексов $\pm$) гарантируется специальным выбором $\Gamma_0^{\pm}$, если выполнено предположение $\mathrm{i}_{\pm}$) (соответственно предположение iii)). Действительно, во-первых мы нашли, что коэффициент при $w_{+,-}^{(j,k)}$ не обнуляется для подходящих j, k, если вектор $\vec{D}_{\pm}$ неизотропен и не все векторы $\vec{D}_{-}^{(l)}$, $\vec{D}_{+}^{(l)}$ пропорциональны одному и тому же вектору. Ввиду предположения, что все векторы $\vec{D}_{\pm}^{(j)}$ пропорциональны $\vec{D}_{\pm}$, второе условие означает, что $\vec{D}_{\mp}^{(l)}$ не пропорционален $\vec{D}_{\pm}$ для некоторого l. Затем мы нашли, что если $\vec{D}_{\pm}$ изотропен и является ненулевым, то коэффициент при $\gamma_{+}e^{\delta}$ не равен нулю, если опять-таки $\vec{D}_{\mp}^{(l)}$ не пропорционален $\vec{D}_{\pm}$ для некоторого l. Эти результаты дают пункт $\mathrm{i}_{\pm}$) для обоих случаев изотропных и неизотропных векторов $\vec{D}_{\pm}$. Если $\vec{D}_{-}^{(l)}$, $\vec{D}_{+}^{(l)}$ пропорциональны одному и тому же неизотропному вектору $\vec{D}$ для всех l, то коэффициент при $\gamma_{+}e^{\delta}$ не обращается в нуль при условии, что неравенство пункта iii) выполнено для некоторых j, k, что даёт этот пункт. Наконец, пункт ii) легко следует из наблюдения, которое уже было использовано при попытке обобщения теоремы 8 в конце раздела 7. А именно, два случая, отвечающие индексам $\pm$, рассматриваются независимо друг от друга и поэтому при анализе одного из этих двух случаев можно исключить из рассмотрения некоторые особые точки.

Напомним, что можно взять $n = (n_1, \ldots, n_N)$ с только двумя не равными нулю компонентами n_j, n_k, поэтому относительно контура $\Gamma_0^{\pm}$, который был выбран в виде $\pi_N \circ \gamma_N^{n_N} \circ \pi_{v-1} \circ \ldots \circ \pi_1 \circ \gamma_1^{n_1} \circ \pi_0$, можно допустить следующие предположения: $N = 2$, контуры π_1 и π_0 вырождаются в одну точку t_0, контур π_2 является предписанным контуром Γ, таким что $\Gamma(0) = t_0$, $\Gamma(1) = t_0 + T$, а γ_1, γ_2 будут контурами Γ_j, Γ_k, окружающими особенности t_j, t_k. Теперь напомним, что t_k было заменено на $t_k + mT$ с целым m и что для некоторых m и $n = (n_1, n_2)$ с достаточно большим $|n|$ контур $\Gamma_0^{\pm}$ будет искомым. Напомним, что для любого $\tau \in \mathbb{C}$ мы обозначили через $\tau + \Gamma_k$ контур Γ_k, сдвинутый на τ в комплексной плоскости. Контур в U, окружающий в точности одну особую точку $t_k + mT$ и с обоими концами, расположенными в t_0, может быть выбран в виде $\Gamma_0^{-m} \circ (mT + \Gamma_k) \circ \Gamma_0^{m}$. Из этих рассмотрений немедленно следует описание объединения K контуров. Доказательство теоремы 8 завершено.

Замечание 11. Отметим, что с физической точки зрения все вычисленные выражения должны быть инвариантны относительно вращений плоских декартовых координат (x, y), и это действительно так. С математической точки зрения они даже инвариантны относительно преобразований комплексной плоскости, принадлежащих $\mathrm{SO}(2, \mathbb{C})$.

Замечание 12. Кроме того, с физической точки зрения все рассмотрения должны быть инвариантны (возможно, с точностью до знаков) при обращении времени в обсуждаемой системе, которое выливается в перемену друг на друга верхних и нижних случаев в каждой паре индексов $\pm$ и $\mp$. Сейчас мы проверим эту инвариантность при обращении времени для исходного условия (8) для всех формул и вычисленных выражений и для утверждения теоремы 8. Очевидно, ускорение $\vec{a}(t)$ сохраняется. Поэтому векторы $\vec{D}_\lambda^{(j)}$, $\vec{E}_\lambda^{(j)}$ и $\vec{\varkappa}_{\lambda,\mu}^{(j)}$ преобразуются в $-\vec{D}_{\tilde\lambda}^{(j)}$, $\vec{E}_{\tilde\lambda}^{(j)}$ и $\vec{\varkappa}_{\tilde\lambda,\tilde\mu}^{(j)}$ соответственно, где $\lambda, \mu, \tilde\lambda, \tilde\mu \in \{+,-\}$ и $\tilde\lambda \neq \lambda$, $\tilde\mu \neq \mu$. Следовательно, $\vec{D}_\lambda$ также преобразуется в $-\vec{D}_{\tilde\lambda}$, если предполагается, что коэффициент $f_\lambda^{(j)}$ сохраняется. Координата $\sigma_1 = (1/2)(\alpha_\sigma^+ - \alpha_\sigma^-)$ должна сохраняться, в то время как скорость $\dot\sigma_1 = (1/2)(\alpha_\sigma^+ + \alpha_\sigma^-)$ должна поменять свой знак, и значит, происходят замены $\alpha_\sigma^+ \mapsto -\alpha_\sigma^-$ и $\alpha_\sigma^- \mapsto -\alpha_\sigma^+$. Тогда легко убедиться, что подынтегральное выражение g, введённое в (9), меняет свой знак, и поэтому левая часть (8) $\int\limits_\Gamma g\,dt$ также меняет свой знак, поскольку направление прохождения контура Γ должно быть изменено на противоположное и переменная интегрирования t должна быть умножена на -1. Последняя замена должна быть выполнена, чтобы гарантировать, что период T остаётся равен разности конца и начала контура Γ. При этом преобразовании все формулы останутся справедливы, но с одновременной заменой друг на друга всех индексов $+$ и $-$ и всех индексов j и k, поскольку обратится порядок следования точек t_j и t_k на контуре Γ. Поэтому при этой замене в изначальном выражении для $\int\limits_\Gamma g\,dt$ члены, свободные от $f_\pm^{(\cdot)}$, и коэффициенты членов, линейных по $f_\pm^{(k/j)}$, $f_\mp^{(j/k)}$, переменят свои знаки на противоположные. Из полученных формул видно, что это действительно так.

Однако если, наоборот, не обращать направление обхода контура Γ при том, что время подверглось обращению, то $\int\limits_\Gamma g\,dt$ будет сохраняться и произойдут замены

$$p_1'(m) \mapsto p_2'(m), \quad p_2'(m) \mapsto p_1'(m), \quad p_3'(m) \mapsto -p_4'(m), \quad p_4'(m) \mapsto -p_3'(m),$$

поскольку $\delta \mapsto -\delta$, $T \mapsto -T$. Более того, все формулы остаются справедливы, но с одновременной заменой друг на друга всех индексов $+$ и $-$, поскольку сохранится порядок следования точек t_j и t_k на контуре Γ. Следовательно, естественным образом получается упомянутый выше результат относительно $M_{j,k}^\pm$, что коэффициент при $p_3'(m)$ и коэффициент при $p_4'(m)$, равно как и коэффициент при $p_1'(m)$ и коэффициент при $(-p_2'(m))$, могут быть получены один из другого перестановкой индексов j и k, т. е. обращением направления прохождения Γ.

Литература

[1] Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трёх тел и символическая динамика // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, № 4. — С. 161—176.

[2] Алексеев В. М., Каток А. Б., Кушниренко А. Г. Гладкие динамические системы // Девятая летняя математическая школа (Кацивели, 1971 г.). — Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1972. — С. 50—341.

[3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Динамические системы. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985.

[4] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.

[5] Довбыш С. А. Трансверсальное пересечение сепаратрис, структура множества квазислучайных движений и несуществование аналитического интеграла в многомерных системах // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 4. — С. 153—154.

[6] Довбыш С. А. Ветвление решений в комплексной области с точки зрения символической динамики и неинтегрируемость многомерных систем // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361, № 3. — С. 303—306.

[7] Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость в задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Прикл. мат. и мех. — 2006. — Т. 70, № 1. — С. 46—61.

[8] Довбыш С. А. О неинтегрируемости задачи о движении сферического маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса: Отчёт НИИ механики МГУ. — 2009. — № 4999.

[9] Довбыш С. А. Аппроксимационная теорема об интегралах вдоль контуров на комплексной плоскости и неинтегрируемость сферического маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса // Современные проблемы анализа и преподавания математики. Мат. Междунар. науч. конф., посвящённой 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского (17—19 мая 2010 г.) — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова. — С. 74—75.

[10] Зиглин С. Л. Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интеграла в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Прикл. мат. и мех. — 1981. — Т. 45, № 3. — С. 564—566.

[11] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3—67.

[12] Козлов В. В. О колебаниях одномерных систем с периодическим потенциалом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1980. — № 6. — С. 104—107.

[13] Неймарк Ю. И. Символическая динамика, порождаемая гомоклиническими структурами // Дифференц. уравн. — 1976. — № 2. — С. 256—262.

[14] Пуанкаре А. О проблеме трёх тел и об уравнениях динамики // Избр. труды. Т. 2. — М.: Наука, 1972. — С. 357—444.

[15] Рис Ф., Сёкефальфи-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.

[16] Холостова О. В. Некоторые задачи о движении маятника при горизонтальных вибрациях точки подвеса // Прикл. мат. и мех. — 1995. — Т. 59, № 4. — С. 581—589.

[17] Alexeyev V. M. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Vol. 2. — Paris: Gauthier-Villars, 1971. — P. 893—907.

[18] Awrejcewicz J., Holicke M. M. Smooth and Nonsmooth High Dimensional Chaos and the Melnikov-Type Methods. — Hackensack: World Scientific, 2007. (World Scientific Ser. Nonlinear Sci. Ser. A: Monographs Treatises; Vol. 60).

[19] Bountis T. Investigating non-integrability and chaos in complex time // Physica D. — 1995. — Vol. 86, no. 1-2. — P. 256—267.

[20] Bountis T., Goriely A., Kollmann M. A Mel'nikov vector for N-dimensional mappings // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 206, no. 1-2. — P. 38—48.

[21] Chow S.-N., Yamashita M. Geometry of the Melnikov vector // Nonlinear Equations in the Applied Sciences. — Academic Press, 1991. — (Math. Sci. Engineering; Vol. 185). — P. 79—148.

[22] Delshams A., Ramírez-Ros R. Melnikov potential for exact symplectic maps // Comm. Math. Phys. — 1997. — Vol. 190, no. 1. — P. 213—245.

[23] Dovbysh S. A. Transversal intersection of separatrices and non-existence of an analytical integral in multi-dimensional systems // Variational and Local Methods in the Study of Hamiltonian Systems (Proc. of the Workshop, Trieste, 24—28 October, 1994) / A. Ambrosetti, G. F. Dell'Antonio, eds. — Singapore: World Scientific, 1995. — P. 156—165.

[24] Dovbysh S. A. Branching of solutions as obstructions to the existence of a meromorphic integral in many-dimensional systems // Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — (NATO ASI Ser. Ser. C: Math. Phys. Sci.; Vol. 533). — P. 324—329.

[25] Dovbysh S. A. Transversal intersection of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems. I. Basic result: Separatrices of hyperbolic periodic points // Collect. Math. — 1999. — Vol. 50, no. 2. — P. 119—197.

[26] Goriely A., Tabor M. The singularity analysis for nearly integrable systems: homoclinic intersections and local multivaluedness // Physica D. — 1995. — Vol. 85, no. 1-2. — P. 93—125.

[27] Gruendler J. The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Anal. — 1985. — Vol. 16, no. 5. — P. 907—931.

[28] Kruskal M. D., Clarkson P. A. The Painlevé—Kowalevski and poly-Painlevé tests for integrability // Stud. Appl. Math. — 1992. — Vol. 86, no. 2. — P. 87—165.

[29] Kruskal M. D., Ramani A., Grammaticos B. Singularity analysis and its relation to complete, partial and non-integrability // Partially Integrable Evolution Equations in Physics / R. Conte, N. Boccara, eds. — Dordrecht: Kluwer, 1990. — (NATO Adv. Sci. Inst. Ser., Ser. C: Math. Phys. Sci.; Vol. 310). — P. 321—372.

[30] Sternberg S. Local contractions and a theorem of Poincaré // Amer. J. Math. — 1957. — Vol. 79, no. 4. — P. 809—824.

[31] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. — New York: Springer, 1990. — (Text in Applied Math.; Vol. 2).