

Математическое моделирование изгиба круговой пластинки с применением S -сплайнов

А. Н. ФЕДОСОВА, Д. А. СИЛАЕВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: dasilaev@mail.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: аппроксимация, сплайн, численные методы, метод конечных элементов, математическая физика, теория упругости.

Аннотация

Настоящая работа посвящена применению теории недавно разработанных полулокальных сглаживающих сплайнов, или S -сплайнов, высоких степеней к решению задач теории упругости. В данной работе речь пойдёт об S -сплайнах седьмой степени, сохраняющих непрерывными четыре производные (или класса C^4) и при этом остающихся устойчивыми. Рассматриваемая задача сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения методом Галёркина, где в качестве системы базисных функций выбраны фундаментальные S -сплайны класса C^4 . Такой подход не только обеспечивает более высокую точность получаемого численного решения при сравнительно небольшом количестве базисных функций, но и позволяет легко определить искомые нагрузки. При их определении, как известно, получаемый потенциал (решение бигармонического уравнения) следует дважды численно продифференцировать, что приводит к накоплению ошибок округления.

Abstract

A. N. Fedosova, D. A. Silaev, Mathematical modeling of bending of a circular plate with the use of S -splines, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 3, pp. 171–185.

The present paper is concerned with the application of newly developed high-order semi-local smoothing splines (or S -splines) in solving problems in elasticity. We will consider seventh-degree S -splines, which preserve the four continuous derivatives (C^4 -smooth splines) and remain stable. The problem in question can be reduced to solving an inhomogenous biharmonic equation by the Galerkin method, where as a system of basis functions we take the C^4 -smooth fundamental S -splines. Such an approach is capable of not only delivering high accuracy of the resulting numerical solution under fairly small number of basis function, but may also easily deliver the sought-for loads. In finding the loads, as is known, one has to twice numerically differentiate the resulting bipotential, which is the solution of the biharmonic equation. This results in roundoff propagation.

1. Одномерный S -сплайн седьмой степени класса C^4

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/K$ — шаг сетки. Разобьём отрезок $[a, b]$ на группы, для этого введём на $[a, b]$ ещё одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh$, $m \in \mathbb{N}$. Переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l -й полином на отрезке $[0, H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $(y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbb{R}^{K+1}$. Обозначим через

$$P_S\{u: u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7\}$$

множество полиномов седьмой степени с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 . В классе P_S ищется такой полином, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^M (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \rightarrow \min(a_5, a_6, a_7)$$

и удовлетворяет условиям гладкой склейки

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), \quad a_1^l = g'_{l-1}(H), \dots, \quad a_4^l = \frac{1}{4!} g_{l-1}^{(4)}(H) \\ \text{при } l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (1.1)$$

В случае периодического S -сплайна здесь при $l = 0$ выполнено $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$. В непериодическом случае коэффициенты $a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ задаются начальными условиями $y_0, y'_0, y''_0/2!, y_0^{(3)}/3!, y_0^{(4)}/4!$. В случае если функция задана таблицей, $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(p)}$ можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,

$$y_0^{(r)} = \left. \frac{d^{(r)} N_n(x)}{dx^r} \right|_{x=0} + O(h^{n+1-r}) \quad \text{при } r = 1, \dots, p, \quad (1.2)$$

где $N_n(x)$ — интерполяционный полином степени n , построенный по значениям y_0, y_1, \dots, y_n . В форме Ньютона этот полином имеет вид

$$N_n(x) = y_0 + \sum_{s=1}^n P_s(y_0, y_1, \dots, y_s) x(x-h) \dots (x-(s-1)h),$$

где

$$P_s(y_0, y_1, \dots, y_s) = \sum_{j=0}^s C_s^j \frac{y_{s-j}}{s! h^s} -$$

s -я разделённая разность.

Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, являются результатом каких-либо измерений. Будем

предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно будем предполагать, что если функция $f \in C^8[a, b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, K$, своими значениями y_k , то $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^8$. Здесь L — число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции или число полиномов, составляющих сплайн, $M + 1$ — количество точек осреднения, $m + 1$ — количество точек, входящих в область определения l -го полинома g_l , ξ_l — точка привязки полинома g_l , $M - m + 1$ — число точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S -сплайн, $M \geq m + 1$ [2–5, 9].

Определение 1. S -сплайном назовём функцию $S_{m,M}(x)$, совпадающую с полиномом $g_l(x)$ на каждом отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам a_5, a_6, a_7 . Для этого продифференцируем $\Phi^l(g)$ по этим коэффициентам и полученные производные приравняем к нулю. Получим

$$\begin{cases} a_5^l h^5 S_{10} + a_6^l h^6 S_{11} + a_7^l h^7 S_{12} = c_1^l, \\ a_5^l h^5 S_{11} + a_6^l h^6 S_{12} + a_7^l h^7 S_{13} = c_2^l, \\ a_5^l h^5 S_{12} + a_6^l h^6 S_{13} + a_7^l h^7 S_{14} = c_3^l. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь

$$S_j = \sum_{k=0}^M k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^M [(y_{m_l+k} - a_0^l - a_1^l h k - a_2^l h^2 k^2 - a_3^l h^3 k^3 - a_4^l (h k)^4) k^{4+j}]. \quad (1.4)$$

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов S -сплайна, состоит из уравнений двух видов:

- уравнений склейки для каждой пары последовательных полиномов (1.1);
- уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при младших степенях.

Сделаем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i$, $i = 0, 1, \dots, 7$. При этом уравнения а) будут иметь вид

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + m^2\tilde{a}_2^{l-1} + m^3\tilde{a}_3^{l-1} + m^4\tilde{a}_4^{l-1} + m^5\tilde{a}_5^{l-1} + m^6\tilde{a}_6^{l-1} + m^7\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m\tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2\tilde{a}_3^{l-1} + 4m^3\tilde{a}_4^{l-1} + 5m^4\tilde{a}_5^{l-1} + 6m^5\tilde{a}_6^{l-1} + 7m^6\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \\ \tilde{a}_2^{l-1} + 3m\tilde{a}_3^{l-1} + 6m^2\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^3\tilde{a}_5^{l-1} + 15m^4\tilde{a}_6^{l-1} + 21m^5\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_2^l, \\ \tilde{a}_3^{l-1} + 4m\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^2\tilde{a}_5^{l-1} + 20m^3\tilde{a}_6^{l-1} + 35m^4\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_3^l, \\ \tilde{a}_4^{l-1} + 5m\tilde{a}_5^{l-1} + 15m^2\tilde{a}_6^{l-1} + 35m^3\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_4^l. \end{cases} \quad (1.5)$$

Уравнения б) из системы (1.3) имеют вид

$$\begin{cases} S_5\tilde{a}_0^l + S_6\tilde{a}_1^l + S_7\tilde{a}_2^l + S_8\tilde{a}_3^l + S_9\tilde{a}_4^l + S_{10}\tilde{a}_5^l + S_{11}\tilde{a}_6^l + S_{12}\tilde{a}_7^l = P_1^l, \\ S_6\tilde{a}_0^l + S_7\tilde{a}_1^l + S_8\tilde{a}_2^l + S_9\tilde{a}_3^l + S_{10}\tilde{a}_4^l + S_{11}\tilde{a}_5^l + S_{12}\tilde{a}_6^l + S_{13}\tilde{a}_7^l = P_2^l, \\ S_7\tilde{a}_0^l + S_8\tilde{a}_1^l + S_9\tilde{a}_2^l + S_{10}\tilde{a}_3^l + S_{11}\tilde{a}_4^l + S_{12}\tilde{a}_5^l + S_{13}\tilde{a}_6^l + S_{14}\tilde{a}_7^l = P_3^l, \end{cases} \quad (1.6)$$

где

$$P_j^l = \sum_{k=0}^M y_{ml+k} k^{p+j}, \quad j = 1, \dots, n-p. \quad (1.7)$$

Здесь $l = 0, \dots, L-1$ — номер полинома, причём если $l = 0$, то в периодическом случае выражение \tilde{a}^{l-1} означает \tilde{a}^{L-1} . В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать «волну» над переменными a_k^l .

Запишем полученную систему в матричной форме. Введём обозначения

$$A_0 = \begin{vmatrix} S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} \\ S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} & S_{11} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} S_{10} & S_{11} & S_{12} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{13} & S_{14} \end{vmatrix},$$

$$B_0 = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 & m^4 \\ 0 & 1 & 2m & 3m^2 & 4m^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3m & 6m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} m^5 & m^6 & m^7 \\ 5m^4 & 6m^5 & 7m^6 \\ 10m^3 & 15m^4 & 21m^5 \\ 10m^2 & 20m^3 & 35m^4 \\ 5m & 15m^2 & 35m^3 \end{vmatrix}.$$

Пусть, кроме того,

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ P_3^l \end{pmatrix}, \quad X_0^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ a_2^l \\ a_3^l \\ a_4^l \end{pmatrix}, \quad X_1^l = \begin{pmatrix} a_5^l \\ a_6^l \\ a_7^l \end{pmatrix}, \quad \text{где } l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (1.8)$$

Тогда уравнения а) из системы (1.5) примут вид

$$B_0 X_0^l + B_1 X_1^l = X_0^{l+1}, \quad (1.9)$$

а уравнения б) из системы (1.6) примут вид

$$A_0 X_0^l + A_1 X_1^l = P^l. \quad (1.10)$$

2. Существование и единственность S-сплайна класса C^p

Предположим, что m и M таковы, что матрица A_1 имеет обратную. Тогда из (1.10) выводим, что

$$X_1^l = A_1^{-1} P^l - A X_0^l, \quad (2.1)$$

где $A = A_1^{-1} A_0$. Подставим выражение для X_1^l в (1.9). Тогда получим рекуррентное соотношение, связывающее пять младших коэффициентов $(l+1)$ -го полинома через пять младших коэффициентов l -го полинома:

$$X_0^{l+1} = U X_0^l + \Psi^l, \quad (2.2)$$

где $\Psi^l = B_1 A_1^{-1} P^l$, матрица устойчивости $U = B_0 - B_1 A_1^{-1} A_0$ имеет размерность 5×5 .

Рассмотрим сначала непериодический случай. Зададим начальный вектор

$$X_0^0 = \left(y_0, hy_0', \dots, \frac{1}{4!} h^4 y_0^{(4)} \right)^T,$$

где значения производных, входящих в X_0^0 , могут быть вычислены приближённо с высокой степенью точности с помощью формул численного дифференцирования (1.2).

Теорема 1. Пусть числа m, M, p, n таковы, что $\det A_1 \neq 0$. Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/K$, и начального вектора X_0^0 существует единственный непериодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса C^p .

Доказательство. Пользуясь формулами (2.1), (2.2), последовательно находим $X_1^0, X_0^1, \dots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих сплайн, однозначно определены. \square

Теорема 2. Пусть числа m, M, p, n таковы, что $\det A_1 \neq 0$ и собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L — число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/K$, существует единственный периодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса C^p .

Доказательство. В периодическом случае, применяя рекуррентную формулу (2.2) $L - 1$ раз, получаем

$$\begin{aligned} X_0^0 &= X_0^L = U X_0^{L-1} + \Psi^{L-1} = U(U X_0^{L-2} + \Psi^{L-2}) + \Psi^{L-1} = \dots = \\ &= U^L X_0^0 + \sum_{s=1}^L U^{L-s} \Psi^{s-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$X_0^0 = (E - U^L)^{-1} \sum_{s=1}^L U^{L-s} \Psi^{s-1}.$$

Затем последовательно находим $X_1^0, X_0^1, \dots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих периодический сплайн, однозначно определены. \square

3. Сходимость S -сплайна класса C^4

Теорема 3. Пусть $f(x) \in C^8[a, b]$ — периодическая функция, и пусть выполнено условие

$$|f(x_k) - y_k| \leq C_0 h^{8+\varepsilon}, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{3.1}$$

Пусть, кроме того, числа m, M, p, n таковы, что $\det A_1 \neq 0$ и собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы, т. е.

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, p+1. \quad (3.2)$$

Тогда периодический сплайн $S_{m,M} \in C^4[a, b]$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 и для $x \in [a, b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} S_{m,M}(x) \right| \leq C_r h^{8-r} \quad \text{для } r = 0, 1, \dots, 7, \quad (3.3)$$

$x \neq \xi_l$ при $r = 5, 6, 7$; в этом случае $S_{m,M}^{(r)}(x)(\xi_l) \equiv S_{m,M}^{(r)}(x)(\xi_l + 0)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для непериодического случая. Доказательство производится аналогично доказательству теоремы о сходимости S -сплайна в [2, 4, 9].

4. Устойчивость S -сплайна седьмой степени класса C^4

Для устойчивости S -сплайна необходимо, чтобы собственные числа матрицы U по модулю были меньше единицы (достаточным условием является то, что они ещё и различны). Собственные числа матрицы U определяются из уравнения

$$\det(U - \lambda E) = 0. \quad (4.1)$$

Как показано для кубических сплайнов, для обеспечения этого условия устойчивости необходимо перекрывание. Это означает, что имеются элементы исходной таблицы значений функции, участвующие в определении коэффициентов не менее двух соседних полиномов, составляющих сплайн. Если перекрывание достаточно большое, то это в ряде случаев является и достаточным условием [2, 9]. На практике наиболее употребительными являются сплайны, для построения которых используется небольшое число точек осреднения M .

Для малых значений M (при $3 \leq M \leq 10$) были вычислены значения собственных чисел матрицы U . Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M , при которых достигаются наименьшие значения $\max |\lambda_i|$ и аппроксимация S -сплайнами устойчива, представлены в таблице 1.

M	m	$\max \lambda_i $	M	m	$\max \lambda_i $	M	m	$\max \lambda_i $	M	m	$\max \lambda_i $
4	1	0,690	4	2	0,881	5	1	0,715	5	2	0,824
6	1	0,756	6	3	0,770	7	1	0,787	7	2	0,693
7	3	0,790	7	4	0,817	8	1	0,812	8	2	0,698

Таблица 1. Собственные числа матрицы U

Авторы благодарят студента факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова Ю. К. Кочнева, который выполнял вычисление собственных чисел матрицы устойчивости U . В дальнейшем $M = 7$, $m = 2$ и $\lambda_{\max} = 0,693$, что гарантирует устойчивость.

5. Выбор базисных функций

Определение 2. Фундаментальный S -сплайн $C_i(\varphi)$ — это периодический S -сплайн, построенный на отрезке $[0; 2\pi]$ по данным $y = (y_0, y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ вида $\{y_i = \delta_{ij} \mid i = 0, \dots, N\}$. Здесь

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} -$$

символ Кронекера. Заметим, что точки 0 и 2π тождественны. Число полиномов, составляющих сплайн, равно $Q = N/m$ (рис. 1).

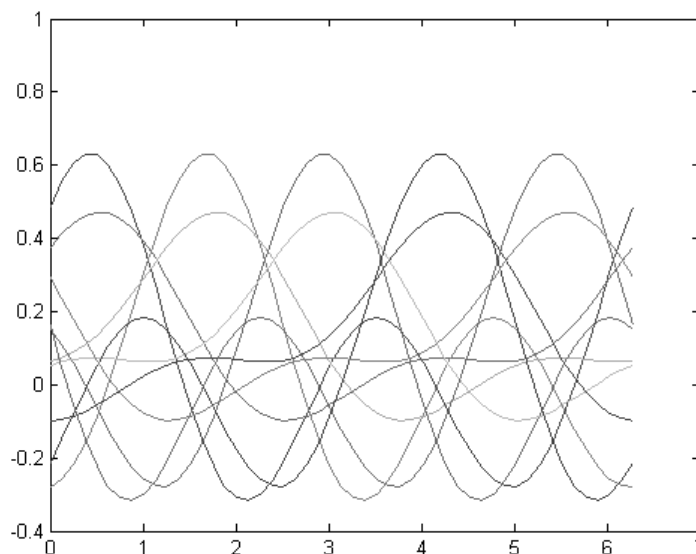


Рис. 1. Периодические фундаментальные сплайны $C_i(\varphi)$

Аналогично вводится фундаментальный непериодический S -сплайн $D_j(r)$, построенный на отрезке $r \in [0; 1]$ по данным $y = (y_0, y_1, \dots, y_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+2}$ и нулевым начальным условиям. Здесь $Kh = 1$, в $(K + 1)$ -й точке фундаментальный сплайн строится для лучшего приближения границы. Добавляются четыре

фундаментальных сплайна $D_{01}(r), \dots, D_{04}(r)$, построенных по начальным условиям $y' = (hy'_0, \dots, h^4 y_0^{(4)}/4!)$, где $\{y_0^{(i)} = \delta_{ij} \mid i = 0, \dots, 4\}$, при этом значение функции во всех точках принимается равным нулю (рис. 2 и 3).

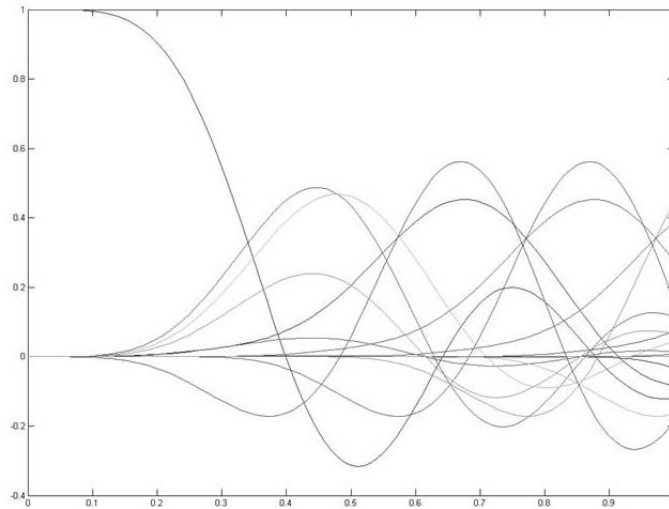


Рис. 2. Непериодические фундаментальные сплайны $D_j(r)$

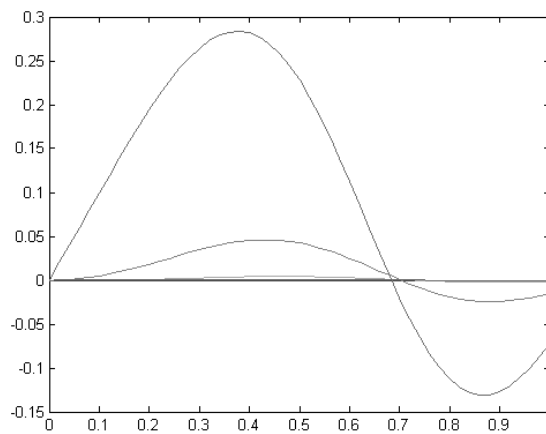


Рис. 3. Фундаментальные сплайны $D_{0j}(r)$

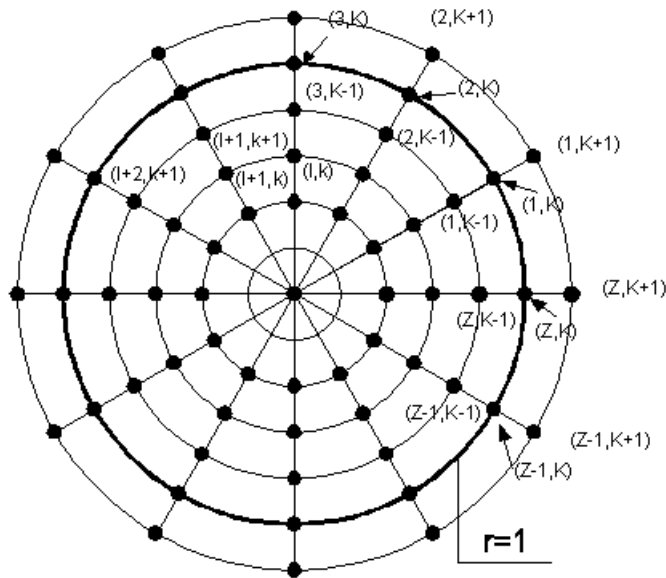


Рис. 4. Разбиение круга

Введём на круге равномерную сетку по φ и r (рис. 4). Разобьём отрезок $r \in [0; 1]$ K точками, шаг разбиения $h_1 = 1/K$. Для лучшей аппроксимации на границе области добавим к разбиению две дополнительные точки, выходящие за пределы круга; так, в $(K + 2)$ -й точке значение r будет равно $1 + 2h$. Отрезок $\varphi \in [0; 2\pi]$ разбиваем N точками с шагом $h_2 = 2\pi/N$. Тогда каждая точка сетки будет иметь координату $\{(i, j) \mid i = \overline{0, N}, j = \overline{0, K + 2}\}$.

Пусть $f \in C^8[0; 1] \times [0; 2\pi]$. Рассмотрим S -сплайн на круге, построенный по значениям функции f .

Теорема 4. Пусть $\tilde{h} = \max(h_1, h_2)$. Справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} f(\varphi, r) \right| < C_{pq} \tilde{h}^{8-p-q}, \quad 0 \leq p + q \leq 7. \quad (5.1)$$

Теорема доказывается построением двумерного сплайна и представлением его в виде линейной комбинации фундаментальных одномерных сплайнов с учётом сходимости одномерных сплайнов (см. [6, 8]).

6. Моделирование изгиба пластинки

Уравнение Софи Жермен—Лагранжа изгиба пластин [10] имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad \text{в круге } \Omega \{ (0 \leq r < 1) \times (0 < \varphi \leq 2\pi) \}, \quad (6.1)$$

где U — прогиб пластинки, D — жёсткость пластинки при изгибе, q — интенсивность поперечной нагрузки. Теория изгибных колебаний пластин была обоснована Г. Кирхгофом [13]. Он показал, что достаточно двух граничных условий:

$$U|_{r=1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=1} = g(\varphi). \quad (6.2)$$

Приближённое решение задачи (6.1), (6.2) будем искать по методу Галёркина [1, 12] в виде

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 U_{0ij} C_i(\varphi) D_{0j}(r), \quad (6.3)$$

где U_{ij} , U_{0ij} — коэффициенты, подлежащие определению. Здесь $\{C_i(\varphi) \mid i = 1, \dots, N\}$ — построенная выше система одномерных фундаментальных периодических сплайнов, $\{D_j(r) \mid j = 0, \dots, K+1\}$ — одномерные фундаментальные непериодические сплайны, дополненные сплайнами $\{D_{0j}(r) \mid j = 1, \dots, 4\}$. Для удобства объединим последние две системы в одну: $\tilde{D}_j(r) = (D_{0j}(r), D_j(r))$, в дальнейшем «волну» над $\tilde{D}_j(r)$ будем опускать. Получим

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r). \quad (6.4)$$

Подставляем (6.4) в уравнение (6.1) и вычисляем невязку:

$$V(r, \varphi) = \Delta^2 U(\varphi, r) - \tilde{q}(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} \Delta^2 (C_i(\varphi) D_j(r)) - \tilde{q}(\varphi, r), \quad (6.5)$$

где $\tilde{q} = q/D$.

Бигармонический оператор в полярных координатах имеет вид

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^8 \Delta_i, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial^4}{\partial r^4}, & \Delta_2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial r^2}, & \Delta_3 &= \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}, & \Delta_4 &= \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3}, \\ \Delta_5 &= -\frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2 \partial r}, & \Delta_6 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}, & \Delta_7 &= \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & \Delta_8 &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты U_{ij} (их $N \times (K + 6)$ штук) будем выбирать из условия ортогональности невязки $V(r, \varphi)$ к выбранным базисным функциям $C_l(\varphi)D_k(r)$, но таким, что $(r_k, \varphi_l) \in \Omega$. Этим требованиям удовлетворяют все $\{C_l(\varphi) \mid l = \overline{1, N}\}$, а также сплайны $D_k(r)$ с номерами $k = \overline{0, K-1}$ (точка с номером K является граничной, а $(K+1)$ -я точка вообще не принадлежит области), а также четыре вспомогательных сплайна $\{D_{0j}(r)\}$. Таким образом, возможное число комбинаций базисных функций $C_l(\varphi)D_k(r)$ равно $N \times (K+4)$. Оставшиеся $2 \times N$ неизвестных определим из граничных условий 6.3:

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) = f(\varphi_l), \quad l = \overline{1, N}, \quad (6.7)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D'_j(1) = g(\varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \quad (6.8)$$

Умножим невязку $V(r, \varphi)$ на $r^3 C_l(\varphi) D_k(r)$ и проинтегрируем по кругу Ω . Получим $N \times (K+4)$ уравнений вида

$$\sum_{i,j} U_{i,j} \iint_{\Omega} C_l(\varphi) D_k(r) \Delta^2 (C_i(\varphi) D_j(r)) r^4 dr d\varphi = \iint_{\Omega} \tilde{q}(\varphi, r) C_l(\varphi) D_k(r) r^4 dr d\varphi. \quad (6.9)$$

Здесь $k = \overline{0, K-1+4}$, $l = \overline{1, N}$. Интеграл, стоящий в левой части уравнения (6.9), разбивается на восемь по числу слагаемых, составляющих бигармонический оператор (см. (6.6)):

$$\iint_{\Omega} C_l(\varphi) D_k(r) \Delta^2 (C_i(\varphi) D_j(r)) r^4 dr d\varphi = \sum_{n=1}^8 I_n(i, j, l, k), \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j^{(4)}(r) D_k(r) r^4 dr, \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j''(r) D_k(r) r^2 dr, \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i^{(4)}(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j(r) D_k(r) dr, \\ I_4 &= 2 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'''(r) D_k(r) r^3 dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= -2 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'(r) D_k(r) r dr, \\
I_6 &= - \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j''(r) D_k(r) r^2 dr, \\
I_7 &= 4 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j(r) D_k(r) dr, \\
I_8 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'(r) D_k(r) r dr.
\end{aligned}$$

С целью уменьшения порядка производных было произведено интегрирование по частям. Ввиду значительного объёма подсчётов эти выкладки в работе не приводятся.

Порядок аппроксимации и устойчивость метода Галёркина [1, 12] определяются выбором базисных функций, а значит, мы получаем устойчивую схему восьмого порядка аппроксимации.

7. Результаты расчётов

В качестве тестового решения была использована функция $w(\varphi, r) = (r - 1)^2 \sin \varphi$. Она удовлетворяет уравнению (6.1) при

$$\tilde{q} = \frac{q}{D} = \frac{-3 \sin \varphi (r^2 + 1)}{r^4}$$

и нулевых граничных условиях (6.2).

Под *единицей машинного времени* (приблизительно 2 мин 40 с) будем понимать время, затраченное на выполнение программной реализации данного метода в указанной тестовой задаче при $K = 2$ и $N = 12$ на однопроцессорном компьютере со следующими характеристиками: частота процессора 2.81 ГГц, оперативная память 1 Гб. Здесь $N = 6K$, так как отрезок $\varphi \in [0; 2\pi]$ примерно в 6 раз больше отрезка $r \in [0; 1]$. Результаты расчётов приведены в таблице 2, где T_{RUN} — время выполнения программы, измеряемое в принятых единицах времени, χ — максимум модуля отклонения точного решения w от найденного приближённого S во внутренних узлах сетки, $\tilde{h} = \max(h_1, h_2)$ — максимальный шаг разбиения, δ — доля машинного времени, уходящая на вычисление правой части системы. Следует сказать, что приведённые результаты в части подсчётов машинного времени носят условный характер, очевидно, что существуют алгоритмы, реализующие данный метод за лучшее время. Около 35 % общего времени исполнения занимает вычисление правой части системы. Это связано с использованием символьных переменных, с помощью которых

Таблица 2. Результаты численного эксперимента

K	N	$K \cdot N$	T_{RUN}	χ	\tilde{h}	\tilde{h}^8	δ
2	6	12	0,05	0,1614	1,0472	1,4448	–
2	12	24	1	$4,6782 \cdot 10^{-3}$	0,5236	$5,6593 \cdot 10^{-3}$	35,7 %
2	14	28	1,34	$2,4635 \cdot 10^{-3}$	0,50	$3,9063 \cdot 10^{-3}$	35,7 %
4	24	96	9,86	$1,9844 \cdot 10^{-5}$	0,2618	$2,2068 \cdot 10^{-5}$	34,7 %
4	26	104	11,83	$1,1123 \cdot 10^{-5}$	0,25	$1,5259 \cdot 10^{-5}$	34,6 %
6	36	216	16,46	$6,6789 \cdot 10^{-7}$	0,1745	$8,5973 \cdot 10^{-7}$	33,8 %

возможно вычисление интегралов с заданной точностью. Возможно, использование квадратурных формул высокого порядка аппроксимации позволило бы сократить это время. Погрешность составила $O(h^8)$, при этом наибольшее отклонение достигается в нуле, там, где функция в силу особенности выбранной правой части начинает быстро возрастать. Даже при малом количестве точек разбиения ($K = 2, N = 12$, что соответствует $\tilde{h} \approx 0,5236$) различия между точным и приближённым решениями на графике уже не видны (рис. 5).

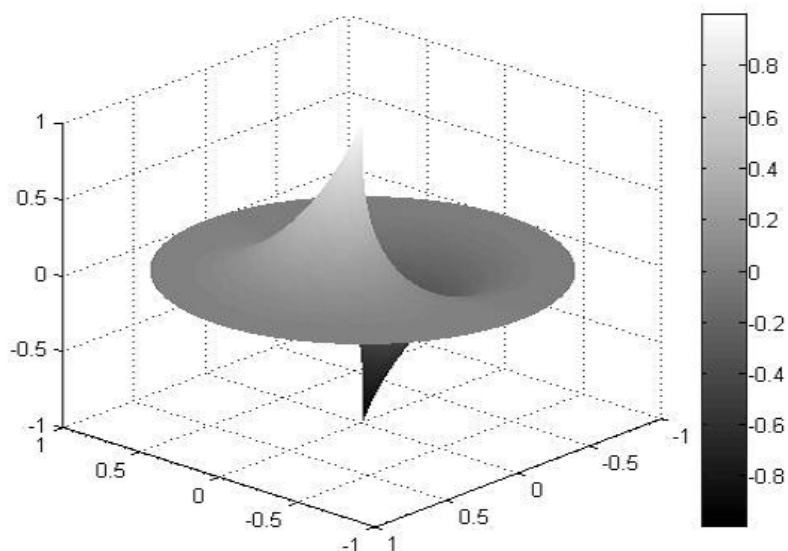


Рис. 5. Приближённое решение задачи при $\tilde{h} \approx 0,5236$

В качестве второго тестового решения была использована функция $w(\varphi, r) = r \cos \varphi + (r^2 - 1)r^2 \sin 2\varphi$. Она удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению (6.1) при граничных условиях

$$w|_{r=1} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = \cos \varphi (\sin \varphi + 1). \quad (7.1)$$

Были получены следующие результаты (табл. 3).

Таблица 3. Результаты второго численного эксперимента

K	N	$K \cdot N$	T_{RUN}	χ	\tilde{h}	\tilde{h}^8
2	12	24	0,643	$1,700 \cdot 10^{-3}$	0,5236	$5,6593 \cdot 10^{-3}$
2	24	48	0,854	$4,1613 \cdot 10^{-4}$	0,50	$3,9063 \cdot 10^{-3}$
4	24	96	6,761	$8,5135 \cdot 10^{-6}$	0,2618	$2,2068 \cdot 10^{-5}$
4	26	104	8,312	$6,7831 \cdot 10^{-6}$	0,25	$1,5259 \cdot 10^{-5}$
6	36	216	14,65	$3,6878 \cdot 10^{-8}$	0,1745	$8,5973 \cdot 10^{-7}$

А. С. Гостев, используя S -сплайны девятой степени класса C^4 , при аналогичном количестве узлов сетки (216) получил погрешность $\chi = 1,5223 \cdot 10^{-9}$, однако выполнение программы увеличилось на 20 %. При этом им существенно использовалась однородность задачи, так как исходная задача сводилась к системе двух гармонических уравнений и последовательно решались две задачи Дирихле (см. [11]). Поскольку в данной задаче отсутствовала правая часть, символьные вычисления здесь использовались только для подсчёта граничных условий, что привело к сокращению времени выполнения программы.

Полученные результаты красноречиво свидетельствуют об эффективности данного метода. При небольшом числе точек разбиения, к примеру 96, удалось получить колоссальную точность. Применение хорошо реализуемой разностной схемы для обеспечения той же точности потребовало бы $(96)^4$ (!) точек. Если заменить базис, составленный из специальной системы S -сплайнов, на систему тригонометрических функций $\{\cos nx, \sin nx\}$, для обеспечения той же точности потребовалось бы взять около 500 слагаемых(!). Если учесть слабую сходимость рядов Фурье и накопление ошибок округления, применять данный базис при таком количестве слагаемых просто опасно.

S -сплайны класса C^4 предоставляют возможность применять полиномы высоких степеней, не опасаясь потери устойчивости, что позволяет на несколько порядков сократить количество узлов сетки, а это значит, что для решения ряда задач отпадает потребность в применении суперкомпьютеров.

Литература

- [1] Марчук Г. И., Агашков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1987.
- [2] Силаев Д. А. Дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный сглаживающий сплайн // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 5. — С. 11–19.
- [3] Силаев Д. А. Полулокальные сглаживающие S -сплайны // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 349–358.
- [4] Силаев Д. А., Амилющенко А. В., Лукьянов А. И., Кортаев Д. О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 2007. — Вып. 26. — С. 347–367.
- [5] Силаев Д. А., Ингтем Ж. Г. Полулокальные сглаживающие сплайны седьмой степени // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2010. — Вып. 6. — С. 104–112.
- [6] Силаев Д. А., Кортаев Д. О. S -сплайн на круге // Тез. междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование». — Пущино. — 2003. — С. 157.
- [7] Силаев Д. А., Кортаев Д. О. Решение краевых задач с помощью S -сплайна // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. тр. Т. 2 / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — С. 85–104.
- [8] Силаев Д. А., Кортаев Д. О. Решение краевых задач с помощью S -сплайна // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 161–172.
- [9] Силаев Д. А., Якушина Г. И. Приближение S -сплайнами гладких функций // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1984. — Вып. 10. — С. 197–206.
- [10] Тимошенко С. П. История сопротивления материалов с краткими сведениями из теории упругости и теории сооружений. — М.: Гостехиздат, 1957.
- [11] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953.
- [12] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. — М.: Мир, 1988.
- [13] Kirchhoff G. R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. — 1850. — Bd. 40.

