Случаи интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии следящей силы*

М. В. ШАМОЛИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: shamolin@imec.msu.ru

УДК 517+531.01

Ключевые слова: интегрируемая система, система с переменной диссипацией, трансцендентный первый интеграл.

Аннотация

Работа представляет собой обзор полученных ранее, а также новых случаев интегрируемости в динамике пятимерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введён в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий можно показать, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и её рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике пятимерного твёрдого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Abstract

M. V. Shamolin, Integrable cases in the dynamics of a multi-dimensional rigid body in a nonconservative field in the presence of a tracking force, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 3, pp. 187—222.

This paper is a survey of integrable cases in the dynamics of a five-dimensional rigid body under the action of a nonconservative force field. We review both new results and results obtained earlier. Problems examined are described by dynamical systems with so-called variable dissipation with zero mean. The problem of the search for complete sets of transcendental first integrals of systems with dissipation is quite topical; a large number of works are devoted to it. We introduce a new class of dynamical systems that have a periodic coordinate. Due to the existence of nontrivial symmetry groups of such systems, we can prove that these systems possess variable dissipation with zero mean,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00020-а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 3, с. 187—222.

which means that on the average for a period with respect to the periodic coordinate, the dissipation in the system is equal to zero, although in various domains of the phase space, either the energy pumping or dissipation can occur. Based on the facts obtained, we analyze dynamical systems that appear in the dynamics of a five-dimensional rigid body and obtain a series of new cases of complete integrability of the equations of motion in transcendental functions that can be expressed through a finite combination of elementary functions.

Введение

Работа представляет собой обзор полученных ранее, а также новых случаев интегрируемости в динамике пятимерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики (см. [1,9,10,16,18]). Предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике пятимерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удаётся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [26, 35, 52, 56].

Мы начинаем с изложения общих аспектов динамики свободного многомерного твёрдого тела: даётся понятие тензора угловой скорости тела, рассматриваются совместные динамические уравнения движения на прямом произведении $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$, формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае.

Рассмотрен вопрос о тензоре инерции пятимерного твёрдого тела. В данной работе предлагается изучать один из логически возможных случаев на главные моменты инерции (при наличии двух соотношений на главные моменты инерции): имеется четвёрка равных главных моментов инерции ($I_2 = I_3 = I_4 = I_5$). Для указанного случая систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения пятимерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных твёрдых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во всё время движения величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. [21, 23, 29—33, 52, 56]).

Результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму четырёхмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [7] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина (см. [11—15, 78]).

1. Некоторые общие рассуждения

1.1. Случаи динамической симметрии пятимерного тела

Пусть пятимерное твёрдое тело Θ массы m с гладкой четырёхмерной границей $\partial\Theta$ находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей пятимерную область евклидова пространства $\mathbf{E}^5$). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия трёх независимых равенств главных моментов инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет вид

$$\operatorname{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2\} \tag{1}$$

либо вид

$$\operatorname{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\}. \tag{2}$$

В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично.

1.2. Динамика на $\mathrm{so}(5)$ и $\mathbf{R}^5$

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твёрдого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n), \tag{3}$$

оно имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, и динамическая часть уравнений движения имеет такую же размерность, а размерность фазового пространства равна

$$n(n+1).$$

В частности, если Ω — тензор угловой скорости пятимерного твёрдого тела (а он является тензором второго ранга [8—10, 24, 25]), $\Omega \in \mathrm{so}(5)$, то та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$, имеет следующий вид [3, 4, 18, 25]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{4}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \tag{5}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5}{2},$$

$$\lambda_5 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^5$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$, $[\ ]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(5)$. Кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$. При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{7}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, 5$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^5 \to \mathrm{so}(5), \tag{8}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^5 \tag{9}$$

из $\mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^5$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(5)$, где

$$\mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N}\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}, \tag{10}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда правая часть системы (4) примет вид

$$M = \{x_{4N}F_5 - x_{5N}F_4, x_{5N}F_3 - x_{3N}F_5, x_{2N}F_5 - x_{5N}F_2, x_{5N}F_1, \\ x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1\}. \tag{12}$$

Исследуемые далее динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [52, 56—58, 61, 68]. При этом нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, а именно в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстаёт перед нами как уравнение движения центра масс — та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству $\mathbf{R}^5$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{13}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{14}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Итак, система уравнений (4), (13) пятнадцатого порядка на многообразии $\mathbf{R}^5 \times \mathrm{so}(5)$ определяет замкнутую систему динамических уравнений движения свободного пятимерного твёрдого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (3) и может быть исследована самостоятельно.

2. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (1)) твёрдого тела с «передним торцом» (четырёхмерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей пятимерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [17, 19, 20, 51, 63, 64, 66, 71, 74].

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — (обобщённые) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твёрдого тела (D — центр четырёхмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} -$$

тензор угловой скорости тела, $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5 лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2$, $I_4 = I_2$, $I_5 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2, \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3, v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\}. \tag{15}$$

При этом в случае (1) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на пятимерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0\}, \tag{16}$$

т. е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$. Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [27, 28], см. далее), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству $\mathbf{R}^5$, при котором касательные силы воздействия среды на четырёхмерный диск отсутствуют, примет вид

$$\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = -\frac{S}{m}, \tag{17}$$

$$\dot v\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ + \omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot\omega_{10} = 0, \tag{18}$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \\ - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot\omega_9 = 0, \tag{19}$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 -$$

$$
\begin{aligned}
&- \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\
&+ \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\
&+ \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot\omega_7 = 0,
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\
&\quad + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \\
&\quad + \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\
&\quad - \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\
&\quad - \sigma(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) + \sigma\dot\omega_4 = 0,
\end{aligned} \tag{21}
$$

где

$$
S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \tag{22}
$$

Вспомогательная матрица (11) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

Тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли so(5), примет вид

$$
(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5) = 0, \tag{24}
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9) = 0, \tag{25}
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6) = 0, \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7) = \\
&\quad = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2) = 0, \tag{28}
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3) = 0, \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9) = \\
&\quad = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3) = 0, \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4) = \\
&\quad = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4) = \\
&\quad = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Таким образом, фазовым пространством системы (17)—(21), (24)—(33) пятнадцатого порядка является прямое произведение пятимерного многообразия на алгебру Ли so(5):

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^4 \times \mathrm{so}(5). \tag{34}$$

Сразу же заметим, что система (17)—(21), (24)—(33) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_5 \tag{35}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0. \tag{36}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{37}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{38}$$

то в системе (17)—(21), (24)—(33) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \tag{39}$$

Выбором величины T следящей силы можно формально добиться во всё время движения выполнения равенства (38). Действительно, формально выражая величину T согласно системе (17)—(21), (24)—(33), получим при $\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega) = m\sigma(\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{3I_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\cos\beta_2 + x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{41}$$

При получении равенства (40) используются условия (36)—(38).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы за счёт наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (38). Во-вторых, мы можем рассматривать это как процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (17)—(21), (24)—(33)

в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка вида

$$\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \omega_{10} v\cos\alpha - \sigma\dot{\omega_{10}} = 0, \tag{42}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \sigma\dot\omega_9 = 0,\end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \omega_7 v\cos\alpha - \sigma\dot\omega_7 = 0,\end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ - \omega_4 v\cos\alpha + \sigma\dot\omega_4 = 0,\end{gathered} \tag{45}$$

$$3I_2\dot\omega_4 = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{46}$$

$$3I_2\dot\omega_7 = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{47}$$

$$3I_2\dot\omega_9 = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{48}$$

$$3I_2\dot\omega_{10} = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{49}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (42)—(49) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}\dot\alpha v\cos\alpha + \\ + v\cos\alpha\{\omega_{10}\cos\beta_1 + [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{-\dot{\omega_{10}}\cos\beta_1 + [\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\sin\beta_1\} = 0,\end{gathered} \tag{50}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_1 v\sin\alpha + \\ + v\cos\alpha\{[(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 - \omega_{10}\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{[\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\cos\beta_1 + \dot{\omega_{10}}\sin\beta_1\} = 0,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + v\cos\alpha\{[\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2\} + \\ + \sigma\{-[\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 - \dot\omega_9\sin\beta_2\} = 0,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + v\cos\alpha\{-\omega_4\cos\beta_3 - \omega_7\sin\beta_3\} + \\ + \sigma\{\dot\omega_4\cos\beta_3 + \dot\omega_7\sin\beta_3\} = 0,\end{gathered} \tag{53}$$

$$\dot\omega_4 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{54}$$

$$\dot\omega_7 = \frac{v^2}{3I_2}x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{55}$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \tag{56}$$

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha). \tag{57}$$

Введём новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины ω_4, ω_7, ω_9, ω_{10} посредством композиции трёх поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1) \circ T_{2,3}(-\beta_2) \circ T_{1,2}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

где

$$T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos\beta_3 + \omega_7 \sin\beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos\beta_3 + \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9 \cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9 \cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{59}$$

Как видно из (50)—(57), на многообразии

$$O_1 = \Big\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}) \in \mathbf{R}^8 : \\ \alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \beta_1 = \pi l_1,\ \beta_2 = \pi l_2,\ k, l_1, l_2 \in \mathbf{Z}\Big\} \tag{60}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$, $\dot{\beta}_3$. Формально, таким образом, на многообразии (60) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при чётном k и любых l_1, l_2 возникает неопределённость по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, а при нечётном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (50) вырождается. Из этого следует, что система (50)—(57) вне и только вне многообразия (60) эквивалентна системе

$$\dot{\alpha} = -z_4 + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{61}$$

$$\dot{z}_4 = \frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)+\right.$$
$$\left.+z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) - z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\right\}, \tag{62}$$

$$\dot{z}_3 = z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) - z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\right.$$
$$\left.+z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} - \frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{63}$$

$$\dot{z}_2 = z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4+z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+$$
$$+\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{64}$$

$$\dot{z}_1 = z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4 - z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$
$$-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{65}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{66}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{67}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{68}$$

где

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = -x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 +$$
$$+x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\cos\beta_2 +$$

$$
\begin{aligned}
&+ x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\
&+ x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3, \\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_2 + \\
&+ x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_2\cos\beta_3 + \\
&+ x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_2\sin\beta_3, \\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_3 + \\
&+ x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_3,
\end{aligned}
$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде (41). Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ ввиду (59).

Нарушение теоремы единственности для системы (50)—(57) на многообразии (60) при нечётном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (60) при нечётном k проходит неособая фазовая траектория системы (50)—(57), пересекая многообразие (60) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как уже говорилось, для поддержания связи вида (38) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (40).

Пусть

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = L\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right). \tag{69}
$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)\right)\right| < +\infty. \tag{70}
$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдётся из равенства

$$
T = T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega\right) = m\sigma(\omega_4^2+\omega_7^2+\omega_9^2+\omega_{10}^2) - \frac{m\sigma L v^2}{2I_2}, \tag{71}
$$

где значения ω_4, ω_7, ω_9, ω_{10} произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{72}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (71) и (72) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (60), что и доказывает сделанное замечание.

3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

3.1. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [27, 28], динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} и x_{5N} примем в виде

$$\begin{gathered}
s(\alpha) = B\cos\alpha,\\
x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A\sin\alpha\cos\beta_1,\\
x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,\\
x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3,\\
x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{5N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3,\\
A, B > 0, \quad v \neq 0,
\end{gathered} \tag{73}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, β_2, β_3). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (61)—(68), примут следующий вид:

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha, \quad \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3. \tag{74}$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (38), вне и только вне многообразия (60) динамическая часть уравнений движения (система (61)—(68)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -z_4 + \frac{\sigma ABv}{3I_2}\sin\alpha, \tag{75}$$

$$z_4' = \frac{ABv^2}{3I_2}\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{76}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{77}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{78}$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{79}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{80}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{81}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{82}$$

Вводя безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle\cdot\rangle = n_0 v \langle'\rangle, \tag{83}$$

приведём систему (75)—(82) к виду

$$\alpha' = -z_4 + b\sin\alpha, \tag{84}$$

$$z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{85}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{86}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{87}$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{88}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{89}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{90}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{91}$$

Видно, что в системе восьмого порядка (84)—(91), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^4$ к четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4$, образовалась независимая система седьмого порядка (84)—(90) на своём семимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (84)—(91) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{92}$$

система (84)—(91) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b \sin\alpha, \tag{93}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{94}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{95}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{96}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{97}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{98}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{99}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \text{ —} \tag{100}$$

функции ввиду замены (92).

Видно, что система восьмого порядка распалась на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (93)—(95) имеет порядок 3, а системы (96), (97) (конечно, после замены независимого переменного) — порядок 2. Таким образом, для полной интегрируемости системы (93)—(98) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (93)—(95), по одному — систем (96), (97) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (98). Заметим, что систему (93)—(95) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2$.

3.2. Полный список инвариантных соотношений

Система (93)—(95) имеет вид системы уравнений, возникающей в динамике трёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил.

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (93)—(95) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha},\\
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha}.
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (101) в алгебраическом виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau},\\
\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{w_3 w_4/\tau}{-w_4 + b\tau}.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$
w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{103}
$$

приведём систему (102) к виду

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b},
\end{aligned}
\tag{104}
$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b}.
\end{aligned}
\tag{105}
$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (105) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1 u_2 - bu_1}, \tag{106}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{107}
$$

Итак, уравнение (106) имеет первый интеграл

$$
\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{108}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{109}
$$

Замечание 1. Рассмотрим систему (93)—(95) с переменной диссипацией с нулевым средним [79, 82—87], становящейся консервативной при $b = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -w_4,\\
&w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$
w_4^2 + w_3^2 + \sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{111}
$$

$$
w_3\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{112}
$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (111), (112) также является первым интегралом системы (110). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$
w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{113}
$$

и (112) по отдельности не является первым интегралом системы (93)—(95). Однако отношение функций (113), (112) является первым интегралом системы (93)—(95) при любом b.

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (93)—(95). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (108) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$
\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{114}
$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$
b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{115}
$$

и фазовое пространство системы (93)—(95) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (114). Таким образом, в силу соотношения (108) первое уравнение системы (105) примет вид

$$
\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{116}
$$

где

$$
U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\}, \tag{117}
$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (115). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (93)—(95) примет вид

$$
\int\frac{d\tau}{\tau} = \int\frac{(b - u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\bigl\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\bigr\}/2}. \tag{118}
$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{119}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{120}$$

то правая часть равенства (118) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2}I_1, \tag{121}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{122}$$

При вычислении интеграла (122) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{123}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{124}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{125}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{126}$$

находим окончательный вид величины I_1.

(I) $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{127}$$

(II) $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{128}$$

(III) $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{129}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (93)—(95); предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (108). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{130}$$

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (93)—(98) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же её интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл для (потенциально отделившихся) систем (96), (97), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (98).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившихся) систем (96), (97) поставим им в соответствие следующие неавтономные уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2. \tag{131}$$

Последние равенства после несложного интегрирования приводят к искомым инвариантным соотношениям

$$\frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2. \tag{132}$$

Для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (98), поставим в соответствие уравнениям (98) и (96) неавтономное уравнение

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = -(1 + w_2^2)\cos\beta_2. \tag{133}$$

Поскольку в силу (132)

$$C_4\cos\beta_2 = \pm\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}, \tag{134}$$

то

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = \mp\frac{1}{C_4}(1 + w_2^2)\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}. \tag{135}$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp(\beta_3 + C_5) = \int \frac{C_4 dw_2}{(1+w_2^2)\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \mathrm{const}. \tag{136}$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \mathrm{const}. \tag{137}$$

Окончательно получаем, что дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (98), имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}} \pm \beta_3 = C_5, \quad C_5 = \mathrm{const}. \tag{138}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (17)—(21), (24)—(33) при условии (73) имеет двенадцать инвариантных соотношений. Это аналитическая неинтегрируемая связь вида (38), циклические первые интегралы вида (36), (37), первый интеграл вида (109), первый интеграл, выражающийся соотношениями (123)—(130), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (132) и (138).

Теорема 1. *Система* (17)—(21), (24)—(33) *при условиях* (38), (73), (37) *обладает двенадцатью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.3. Топологические аналогии

Рассмотрим систему уравнений седьмого порядка

$$\begin{gathered}
\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - [\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\sin^2\eta_1 + \dot{\eta}_3^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\ddot{\eta}_1 + b_*\dot{\eta}_1\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - (\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2\sin^2\eta_2)\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\ddot{\eta}_2 + b_*\dot{\eta}_2\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \dot{\eta}_3^2\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\ddot{\eta}_3 + b_*\dot{\eta}_3\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0, \quad b_* > 0,
\end{gathered} \tag{139}$$

описывающую закреплённый пятимерный маятник, помещённый в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил [75—77, 80, 81]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3

является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Её фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\} \tag{140}$$

к четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, при этом уравнение, переводящее систему (139) в систему на касательном расслоении к трёхмерной сфере

$$\dot{\eta}_3 \equiv 0, \tag{141}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_3 \equiv 0 \tag{142}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (139) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (140) к четырёхмерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Система* (17)—(21), (24)—(33) *при условиях* (38), (73), (37) *эквивалентна динамической системе* (139).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $\beta_2 = \eta_2$, $\beta_3 = \eta_3$, $b = -b_*$.

О более общих топологических аналогиях см. [52].

4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

4.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данный раздел посвящён динамике пятимерного твёрдого тела в пятимерном пространстве. Но, поскольку он посвящён исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введём такую зависимость с более общих позиций. К тому же данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на четырёхмерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [5, 6, 22, 36, 41—43].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{143}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}. \tag{144}$$

Здесь $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$,

$$\begin{gathered} x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_9}{v}, \\ x_{4N} = Q_4 - h_1 \frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1 \frac{\omega_4}{v}. \end{gathered} \tag{145}$$

4.2. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [27, 28]

$$\begin{gathered} Q_2 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \quad Q_3 = A \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2, \\ Q_4 = A \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3, \quad Q_5 = A \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3, \quad A > 0, \end{gathered} \tag{146}$$

динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} и x_{5N} примем в виде

$$\begin{aligned} & s(\alpha) = B \cos\alpha, \quad B > 0, \\ & x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \cos\beta_1 - h \frac{\omega_{10}}{v}, \\ & x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 + h \frac{\omega_9}{v}, \\ & x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 - h \frac{\omega_7}{v}, \\ & x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + h \frac{\omega_4}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0. \end{aligned} \tag{147}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует ещё и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причём $h_2 = h_3 = h_4 = h_5$ в силу динамической симметрии тела. При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (61)—(68), примут следующий вид:

$$\begin{gathered}
\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=A\sin\alpha-\frac{h}{v}z_4,\\
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=\frac{h}{v}z_3,\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=-\frac{h}{v}z_2,\ \Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)=\frac{h}{v}z_1.
\end{gathered}\tag{148}$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (38), вне и только вне многообразия (60) динамическая часть уравнений движения (система (61)—(68)) примет вид аналитической системы

$$\dot\alpha=-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_4+\frac{\sigma ABv}{3I_2}\sin\alpha,\tag{149}$$

$$\dot z_4=\frac{ABv^2}{3I_2}\sin\alpha\cos\alpha-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{Bhv}{3I_2}z_4\cos\alpha,\tag{150}$$

$$\begin{gathered}
\dot z_3=\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
+\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\frac{Bhv}{3I_2}z_3\cos\alpha,
\end{gathered}\tag{151}$$

$$\begin{gathered}
\dot z_2=\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\\
-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-\frac{Bhv}{3I_2}z_2\cos\alpha,
\end{gathered}\tag{152}$$

$$\begin{gathered}
\dot z_1=\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\\
+\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-\frac{Bhv}{3I_2}z_1\cos\alpha,
\end{gathered}\tag{153}$$

$$\dot\beta_1=\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{154}$$

$$\dot\beta_2=-\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\tag{155}$$

$$\dot\beta_3=\left(1+\frac{\sigma Bh}{3I_2}\right)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}.\tag{156}$$

Вводя безразмерные переменные, параметры и дифференцирование

$$z_k\mapsto n_0vz_k,\quad k=1,2,3,4,\quad n_0^2=\frac{AB}{3I_2},\quad b=\sigma n_0,\quad H_1=\frac{Bh}{3I_2n_0},\quad \langle\cdot\rangle=n_0v\langle'\rangle,\tag{157}$$

приведём систему (149)—(156) к виду

$$\alpha'=-(1+bH_1)z_4+b\sin\alpha,\tag{158}$$

$$z_4'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-H_1z_4\cos\alpha,\tag{159}$$

$$z_3' = (1+bH_1)z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1z_3\cos\alpha, \tag{160}$$

$$z_2' = (1+bH_1)z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$- (1+bH_1)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1z_2\cos\alpha, \tag{161}$$

$$z_1' = (1+bH_1)z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+ (1+bH_1)z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1z_1\cos\alpha, \tag{162}$$

$$\beta_1' = (1+bH_1)z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{163}$$

$$\beta_2' = -(1+bH_1)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{164}$$

$$\beta_3' = (1+bH_1)\,z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{165}$$

Видно, что в системе восьмого порядка (158)—(165), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^4$ к четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4$, образовалась независимая система седьмого порядка (158)—(164) на своём семимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (158)—(165) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_4\\ z_3\\ z_2\\ z_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4\\ w_3\\ w_2\\ w_1\end{pmatrix},$$
$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \tag{166}$$

система (158)—(165) распадается:

$$\alpha' = -(1+bH_1)w_4 + b\sin\alpha, \tag{167}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_4\cos\alpha, \tag{168}$$

$$w_3' = (1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_3\cos\alpha, \tag{169}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \beta_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{aligned} \tag{170}$$

$$w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{171}$$

$$\beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{172}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1+bH_1)Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = -(1+bH_1)Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = (1+bH_1)Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{173}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, - \tag{174}$$

функции ввиду замены (166).

Видно, что система восьмого порядка распалась на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (167)—(169) имеет порядок 3, а системы (170), (171) (конечно, после замены независимого переменного) — порядок 2. Таким образом, для полной интегрируемости системы (167)—(172) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (167)—(169), по одному — систем (170), (171) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (172).

При этом заметим, что систему (167)—(169) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2$.

4.3. Полный список инвариантных соотношений

Система (167)—(169) имеет вид системы уравнений, возникающей в динамике трёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил.

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (167)—(169) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 w_4\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_4 + b\sin\alpha}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{(1+bH_1)w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 w_3\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_4 + b\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{175}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (175) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - (1+bH_1)w_3^2/\tau - H_1 w_4}{-(1+bH_1)w_4 + b\tau}, \\ \frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{(1+bH_1)w_3 w_4/\tau - H_1 w_3}{-(1+bH_1)w_4 + b\tau}. \end{aligned} \tag{176}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{177}$$

приводим систему (176) к виду

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1-(1+bH_1)u_1^2 - H_1u_2}{-(1+bH_1)u_2+b}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1+bH_1)u_1u_2 - H_1u_1}{-(1+bH_1)u_2+b}, \end{aligned} \tag{178}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1+bH_1)(u_2^2-u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{-(1+bH_1)u_2+b}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-(1+bH_1)u_2+b}. \end{aligned} \tag{179}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (179) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-(1+bH_1)(u_1^2-u_2^2)-(b+H_1)u_2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{180}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right) = 0. \tag{181}$$

Итак, уравнение (180) имеет первый интеграл

$$\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{182}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2)-(b+H_1)w_4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{183}$$

Замечание 3. Рассмотрим систему (167)—(169) с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 34, 48, 62, 65, 69, 70], становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1+b^2)w_4 + b\sin\alpha, \\ w_4' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1+b^2)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bw_4\cos\alpha, \\ w_3' &= (1+b^2)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bw_3\cos\alpha. \end{aligned} \tag{184}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_4^2+w_3^2) - 2bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{185}$$

$$w_3\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{186}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (185), (186) также является первым интегралом системы (184). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2) - (b+H_1)w_4 \sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{187}$$

и (186) по отдельности не является первым интегралом системы (167)—(169). Однако отношение функций (187), (186) является первым интегралом системы (167)—(169) при любых b, H_1.

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (167)—(169). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (182) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{188}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{189}$$

и фазовое пространство системы (167)—(169) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (188). Таким образом, ввиду соотношения (182) первое уравнение системы (179) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_2^2 - 2(b+H_1)u_2 + 2 - C_1U_1(C_1,u_2)}{b-(1+bH_1)u_2}, \tag{190}$$

где

$$\begin{gathered} U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2(1+bH_1)}\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}, \\ U_2(C_1,u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}, \end{gathered} \tag{191}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (189). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (167)—(169) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \int\frac{(b-(1+bH_1)u_2)du_2}{2(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}/(2(1+bH_1))}. \tag{192}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{193}$$

Если

$$u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} = r_1, \quad b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4, \tag{194}$$

то правая часть равенства (192) примет вид

$$
-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)}{(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}-
$$
$$
-(b-H_1)(1+bH_1)\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}=
$$
$$
=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b-H_1}{2}I_1, \tag{195}
$$

где

$$
I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}. \tag{196}
$$

При вычислении интеграла (196) возможны три случая.

I. $|b-H_1|>2$.

$$
I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|
$$
$$
+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{197}
$$

II. $|b-H_1|<2$.

$$
I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{198}
$$

III. $|b-H_1|=2$.

$$
I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{199}
$$

Возвращаясь к переменной

$$
r_1=\frac{w_3}{\sin\alpha}-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}, \tag{200}
$$

находим окончательный вид величины I_1.

I. $|b-H_1|>2$.

$$
I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\pm 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+
$$
$$
+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\mp 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{201}
$$

II. $|b-H_1|<2$.

$$
I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{202}
$$

III. $|b - H_1| = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{2(1+bH_1)r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{203}$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (167)—(169); был предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (182). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{204}$$

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (167)—(172) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же её интегрируемости, как указано выше, достаточно найти по одному первому интегралу для (потенциально отделившехся) систем (170), (171), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (172).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившихся) систем (170), (171) поставим им в соответствие неавтономные уравнения первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2. \tag{205}$$

Последнее равенство после несложного интегрирования приводит к искомым инвариантным соотношениям

$$\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2. \tag{206}$$

Для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (172), поставим в соответствие уравнениям (172) и (170) неавтономное уравнение

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = -(1+w_2^2)\cos\beta_2. \tag{207}$$

Поскольку в силу (206)

$$C_4\cos\beta_2 = \pm\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}, \tag{208}$$

то

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = \mp\frac{1}{C_4}(1+w_2^2)\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}. \tag{209}$$

Интегрируя последнее равенство, приходим к квадратуре

$$\mp(\beta_3 + C_5) = \int\frac{C_4\,dw_2}{(1+w_2^2)\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \text{const}. \tag{210}$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \text{const}. \tag{211}$$

Окончательно получаем, что дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (172), имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}} \pm \beta_3 = C_5, \quad C_5 = \text{const}. \tag{212}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (17)—(21), (24)—(33) при условии (147) имеет двенадцать инвариантных соотношений. Это аналитическая неинтегрируемая связь вида (38), циклические первые интегралы вида (36), (37), первый интеграл вида (183), первый интеграл, выражающийся соотношениями (197)—(204), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (206) и (212).

Теорема 3. *Система* (17)—(21), (24)—(33) *при условиях* (38), (147), (37) *обладает двенадцатью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

4.4. Топологические аналогии

Рассмотрим систему уравнений седьмого порядка

$$\begin{gathered}
\ddot\xi + (b_* - H_{1*})\dot\xi\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
- [\dot\eta_1{}^2 + \dot\eta_2{}^2\sin^2\eta_1 + \dot\eta_3{}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\ddot\eta_1 + (b_* - H_{1*})\dot\eta_1\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - (\dot\eta_2{}^2 + \dot\eta_3{}^2\sin^2\eta_2)\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\ddot\eta_2 + (b_* - H_{1*})\dot\eta_2\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \dot\eta_3{}^2\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\ddot\eta_3 + (b_* - H_{1*})\dot\eta_3\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot\eta_2\dot\eta_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0, \\
b_* > 0, \quad H_{1*} > 0.
\end{gathered} \tag{213}$$

описывающую закреплённый пятимерный маятник, помещённый в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил [52, 59, 60, 67, 72, 73]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3

является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Её фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\} \tag{214}$$

к четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, при этом уравнение, переводящее систему (139) в систему на касательном расслоении к трёхмерной сфере,

$$\dot{\eta}_3 \equiv 0 \tag{215}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_3 \equiv 0 \tag{216}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (213) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (214) к четырёхмерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Система* (17)—(21), (24)—(33) *при условиях* (38), (147), (37) *эквивалентна динамической системе* (213).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $\beta_2 = \eta_2$, $\beta_3 = \eta_3$, $b = -b_*$, $H_1 = -H_{1*}$.

О более общих топологических аналогиях см. [52].

Литература

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985.

[2] Беляев А. В. О движении многомерного тела с закреплённой точкой в поле силы тяжести // Мат. сб. — 1981. — Т. 114, № 3. — С. 465—470.

[3] Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.

[4] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.

[5] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.

[6] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.

[7] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 5—6.

[8] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 47—50.

[9] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 635—637.

[10] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 37—41.

[11] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 16—45.

[12] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 62. Геометрия и механика.

[13] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — С. 3—10.

[14] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д. ф.-м. н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 76. Геометрия и механика. — С. 3—10.

[15] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщённые векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 76. Геометрия и механика. — С. 22—39.

[16] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.; Л.: Гостехиздат, 1953.

[17] Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.

[18] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.

[19] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3—67.

[20] Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.

[21] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.

[22] Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.

[23] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51—54.

[24] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983; 1984.

[25] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1191—1199.

[26] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 4. — С. 3—229.

[27] Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.

[28] Чаплыгин С. А. О движении тяжёлых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133—135.

[29] Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52—58.

[30] Шамолин М. В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 611—614.

[31] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. — 1996. — Т. 349, № 2. — С. 193—197.

[32] Шамолин М. В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 2. — С. 55—63.

[33] Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 2. — С. 65—68.

[34] Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, № 3. — С. 177—178.

[35] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209—210.

[36] Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 6. — С. 29—37.

[37] Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1999. — № 2. — С. 178—189.

[38] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 1999. — Т. 364, № 5. — С. 627—629.

[39] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 5. — С. 181—182.

[40] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343—346.

[41] Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 480—483.

[42] Шамолин М. В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 3. — С. 187—188.

[43] Шамолин М. В. Об устойчивости движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 1. — С. 189—193.

[44] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2001. — № 5. — С. 22—28.

[45] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твёрдого тела // Прикл. мех. — 2001. — Т. 37, № 6. — С. 74—82.

[46] Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 1. — С. 169—170.

[47] Шамолин М. В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. мех. — 2004. — Т. 40, № 4. — С. 137—144.

[48] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^n$ // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 233—234.

[49] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 482—485.

[50] Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. мат. и мех. — 2005. — Т. 69, вып. 6. — С. 1003—1010.

[51] Шамолин М. В. К задаче о пространственном торможении твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 3. — С. 45—57.

[52] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела. — М.: Экзамен, 2007.

[53] Шамолин М. В. Некоторые модельные задачи динамики твёрдого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. мех. — 2007. — Т. 43, № 10. — С. 49—67.

[54] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учёте вращательных производных момента силы её воздействия // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 3. — С. 187—192.

[55] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 169—170.

[56] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 3. — С. 3—237.

[57] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учёте зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. — 2008. — Т. 72, вып. 2. — С. 273—287.

[58] Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2008. — № 3. — С. 43—49.

[59] Шамолин М. В. Трёхпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2008. — Т. 418, № 1. — С. 46—51.

[60] Шамолин М. В. Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — С. 132—142.

[61] Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 3. — С. 338—342.

[62] Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 62. Геометрия и механика. — С. 131—171.

[63] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 3. — С. 339—343.

[64] Шамолин М. В. Пространственное движение твёрдого тела в среде с сопротивлением // Прикл. мех. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 120—133.

[65] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 1. — С. 189—190.

[66] Шамолин М. В. Движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Мат. моделирование. — 2011. — Т. 23, № 12. — С. 79—104.

[67] Шамолин М. В. Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 24—30.

[68] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 190—193.

[69] Шамолин М. В. Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трёхмерной сфере // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 5 (86). — С. 187—189.

[70] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 187—190.

[71] Шамолин М. В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Мат. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 109—132.

[72] Шамолин М. В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 78. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — С. 138—147.

[73] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 506—509.

[74] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — Т. 442, № 4. — С. 479—481.

[75] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде при учёте линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2012. — № 4. — С. 44—47.

[76] Шамолин М. В. Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 76. Геометрия и механика. — С. 84—99.

[77] Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.

[78] Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, no. 2. — P. 2526—2555.

[79] Shamolin M. V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 919—975.

[80] Shamolin M. V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 1. — P. 2841—2915.

[81] Shamolin M. V. Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Proc. of 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005). Lodz, Poland, Dec. 12—15, 2005. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 429—436.

[82] Shamolin M. V. The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007). Lodz, Poland, Dec. 17—20, 2007. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2007. — P. 415—422.

[83] Shamolin M. V. Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body // Proc. Appl. Math. Mech. — 2008. — Vol. 8. — P. 10137—10138.

[84] Shamolin M. V. Dynamical systems with variable dissipation: methods and applications // Proc. of 10th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2009). Lodz, Poland, Dec. 7—10, 2009. — Tech. Univ. Lodz, 2009. — P. 91—104.

[85] Shamolin M. V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium // Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — Vol. 9. — P. 139—140.

[86] Shamolin M. V. Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body // Proc. Appl. Math. Mech. — 2010. — Vol. 10. — P. 63—64.

[87] Shamolin M. V. Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, 3D-, and 4D-rigid body interacting with a medium // Proc. of 11th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2011). Lodz, Poland, Dec. 5—8, 2011. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2011. — P. 11—24.