Микс управлений
и принцип максимума Понтрягина*

Е. Р. АВАКОВ
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН
e-mail: eramag@mail.ru

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: magaril@mech.math.msu.su

УДК 517.977.52

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, микс, теорема о неявной функции.

Аннотация

В работе приводится доказательство необходимых условий минимума — принципа максимума Понтрягина — для задачи оптимального управления на основе понятия микса, которое позволяет свести исследование исходной задачи к некоторому её линейному по управлению приближению, изучение которого уже достаточно просто.

Abstract

E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il'yaev, Mix of controls and the Pontryagin maximum principle, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 5—20.

In this paper, necessary conditions for a minimum (the Pontryagin maximum principle) for an optimal control problem are proved on the basis of the concept of a mix, which enables one to reduce the study of the original problem to some approximation thereof, which is linear in the control. The study of the latter problem proves more simple.

Введение

Принцип максимума Понтрягина — центральный результат теории оптимального управления. В работе приводится его доказательство для достаточно общей задачи оптимального управления с измеримыми управлениями. Доказательство основано на понятии микса управлений, которое впервые появилось в работе В. М. Тихомирова [5]. Суть дела состоит в том, что замыкания образов

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

произвольных множеств у возникающих в задаче интегральных операторов всегда выпуклы (хотя сами образы не обязательно таковы) и конструкция микса позволяет простым и естественным образом приблизиться к любой точке из замыкания допустимыми управлениями, что оказывается достаточным для вывода необходимых условий минимума. Этот замысел на абстрактном уровне, в нормированных пространствах, реализован в [1], где в качестве одного из следствий доказан принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями. Здесь же мы непосредственно доказываем принцип максимума, не апеллируя ни к каким общим конструкциям, и в этом смысле доказательство вполне элементарно. Мы опираемся лишь на теорему о неявной функции и некоторый вариант теоремы о разрешимости конечномерной системы нелинейных уравнений. Следует ещё сказать, что сама схема доказательства принципа максимума аналогична рассуждениям из [3], где вместо микса используются игольчатые вариации.

Статья состоит из двух разделов. В первом формулируется основной результат и приводится его доказательство, которое опирается на утверждения, собранные во втором разделе (приложении), где формулируется (в нужной нам форме) теорема о неявной функции, из неё выводятся необходимые для доказательства факты о свойствах решений дифференциальных уравнений и доказывается упомянутая теорема о разрешимости системы уравнений.

Постановка задачи и доказательство основного результата

Пусть $[t_0,t_1]$ — отрезок прямой, G — открытое подмножество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — совокупность вектор-столбцов, $(\mathbb{R}^n)^*$ — пространство, сопряжённое к $\mathbb{R}^n$, отождествляемое с вектор-строками; если $a=(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}^n)^*$, $x = (x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, то $\langle a,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ — значение линейного функционала a на элементе x; через $|x|$ обозначаем евклидову норму элемента из $\mathbb{R}^n$ или $(\mathbb{R}^n)^*$), U — непустое подмножество $\mathbb{R}^r$, функция $f\colon G\times\operatorname{cl}U\to\mathbb{R}$ ($\operatorname{cl}U$ — замыкание U) и отображение $\varphi\colon G\times\operatorname{cl}U\to\mathbb{R}^n$ непрерывны на $G\times\operatorname{cl}U$, Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $h_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_1$, и $l_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_2$, — непрерывные функции.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J\bigl(x(\cdot),u(\cdot)\bigr)=\int_{t_0}^{t_1}f\bigl(t,x(t),u(t)\bigr)\,dt\to\min,\quad \dot x=\varphi(t,x,u),\tag{1}$$

$$h_i\bigl(x(t_0),x(t_1)\bigr)\leqslant 0,\quad i=1,\dots,m_1,$$
$$l_i\bigl(x(t_0),x(t_1)\bigr)=0,\quad i=1,\dots,m_2,\quad u(t)\in U.$$

Пару $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$, где $\mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ — совокупность абсолютно непрерывных вектор-функций на $[t_0,t_1]$, назовём *допустимым процессом* в задаче (1), если $\{(t,x(t)) \mid t \in [t_0,t_1]\} \subset G$, равенство $\dot x(t) = \varphi\big(t,x(t),u(t)\big)$ и включение $u(t) \in U$ выполняются для почти всех $t \in [t_0,t_1]$, $h_i\big(x(t_0),x(t_1)\big) \leqslant 0$, $i=1,\dots,m_1$, и $l_i\big(x(t_0),x(t_1)\big) = 0$, $i=1,\dots,m_2$.

Допустимый процесс $\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$ называется *оптимальным процессом* (или *сильным минимумом*), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого процесса $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$, для которого $\|x(\cdot)-\hat x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, справедливо неравенство $J\big(x(\cdot),u(\cdot)\big) \geqslant J\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$.

Обозначим через

$$H\big(t,x,u,\lambda_0,p(t)\big) = \langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle - \lambda_0 f(t,x,u)$$

функцию Понтрягина задачи (1), где $p(\cdot)\colon [t_0,t_1] \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Отображения $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $l\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_2}$, действующее соответственно по формулам

$$h\big(x(t_0),x(t_1)\big) = \Big(h_1\big(x(t_0),x(t_1)\big),\dots,h_{m_1}\big(x(t_0),x(t_1)\big)\Big)^{\mathrm{T}}$$

и

$$l\big(x(t_0),x(t_1)\big) = \Big(l_1\big(x(t_0),x(t_1)\big),\dots,l_{m_2}\big(x(t_0),x(t_1)\big)\Big)^{\mathrm{T}},$$

рассматриваем как функции двух переменных $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n$ и $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n$. Если фиксирована пара $\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$, то для сокращения записи пишем $\hat h_{\zeta_i} = h_{\zeta_i}\big(\hat x(t_0),\hat x(t_1)\big)$ и $\hat l_{\zeta_i} = l_{\zeta_i}\big(\hat x(t_0),\hat x(t_1)\big)$, $i=1,2$, а также $\hat\varphi(t) = \varphi\big(t,\hat x(t),\hat u(t)\big)$, $\hat f(t) = f\big(t,\hat x(t),\hat u(t)\big)$ и аналогично для производных по x этих функций.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Пусть $\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$ — оптимальный процесс в задаче* (1). *Если функция $f\colon G \times \operatorname{cl} U \to \mathbb{R}$ и отображение $\varphi\colon G \times \operatorname{cl} U \to \mathbb{R}^n$ непрерывны вместе со своими частными производными по x на $G \times \operatorname{cl} U$, функции $h_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_1$, и $l_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_2$, непрерывны в окрестности точки $\big(\hat x(t_0),\hat x(t_1)\big)$ и дифференцируемы в этой точке, то найдутся число λ_0, векторы $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{m_i})^*$, $i=1,2$, и функция $p(\cdot) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$, такие что*

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda_0 + |\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0,$$

функция $p(\cdot)$ является решением уравнения

$$-\dot p = p\,\hat\varphi_x(t) - \lambda_0 \hat f_x(t)$$

с граничными условиями

$$p(t_0) = \lambda_1 \hat h_{\zeta_1} + \lambda_2 \hat l_{\zeta_1}, \quad p(t_1) = -\lambda_1 \hat h_{\zeta_2} - \lambda_2 \hat l_{\zeta_2}$$

и для почти всех $t \in [t_0,t_1]$ выполняется равенство

$$\max_{u \in U} H\big(t,\hat x(t),u,\lambda_0,p(t)\big) = H\big(t,\hat x(t),\hat u(t),\lambda_0,p(t)\big).$$

Доказательство. 1. Пусть $\big(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)\big)$ — оптимальный процесс в задаче (1). Обозначим

$$\mathcal{U}=\{u(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)\colon u(t)\in U \text{ для почти всех } t\in[t_0,t_1]\}$$

и зафиксируем некоторое $u(\cdot)\in\mathcal{U}$. Для каждых $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}\dot{x}=(1-\alpha)\varphi\big(t,x,\hat{u}(t)\big)+\alpha\varphi\big(t,x,u(t)\big), & x(t_0)=\xi,\\ \dot{y}=(1-\alpha)f\big(t,x,\hat{u}(t)\big)+\alpha f\big(t,x,u(t)\big), & y(t_0)=0.\end{cases}\tag{2}$$

Несложная проверка показывает, что отображение

$$\Big(\big(x(\cdot),y(\cdot)\big),\alpha,\xi\Big)\mapsto$$

$$\mapsto\Bigg(x(t)-\xi-(1-\alpha)\int\limits_{t_0}^{t}\varphi\big(\tau,x(\tau),\hat{u}(\tau)\big)\,d\tau-\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\varphi\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$y(t)-(1-\alpha)\int\limits_{t_0}^{t}f\big(\tau,x(\tau),\hat{u}(\tau)\big)\,d\tau-\alpha\int\limits_{t_0}^{t}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\,d\tau\Bigg),\quad t\in[t_0,t_1],$$

определённое в окрестности

$$\big((\hat{x}(\cdot),\hat{y}(\cdot),0,\hat{x}(t_0)\big)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

где

$$\hat{y}(t)=\int\limits_{t_0}^{t}f\big(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)\big)\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1],$$

и действующее в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Из этой теоремы следует, что если α достаточно мало по модулю, а ξ близко к $\hat{x}(t_0)$, то существует единственное решение $\Big(x\big(\cdot,\alpha,\xi;u(\cdot)\big),y\big(\cdot,\alpha,\xi;u(\cdot)\big)\Big)$ задачи Коши (2), определённое на $[t_0,t_1]$ и дифференцируемое по (α,ξ) (как отображение в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$) в точке $\big(0,\hat{x}(t_0)\big)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Тогда для достаточно малых по модулю α и ξ, близких к $\hat{x}(t_0)$, а также для любых $v_0\in\mathbb{R}$ и $v\in\mathbb{R}^{m_1}$ определено отображение F, ставящее в соответствие четвёрке (α,ξ,v_0,v) вектор из $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ по правилу

$$F\big(\alpha,\xi,v_0,v;u(\cdot)\big)=$$

$$=\Big(y\big(t_1,\alpha,\xi;u(\cdot)\big)+v_0,\;h\Big(\xi,x\big(t_1,\alpha,\xi;u(\cdot)\big)\Big)+v,\;l\Big(\xi,x\big(t_1,\alpha,\xi;u(\cdot)\big)\Big)\Big)^{\mathrm{T}}.\tag{3}$$

Ввиду условий на h и l отображение F дифференцируемо в точке $(0,\hat{x}(t_0),0,0)$. Обозначим через $F'\big(0,\hat{x}(t_0),0,0;u(\cdot)\big)$ его производную в этой точке.

Рассмотрим множество

$$C=\operatorname{conv}\big\{F'\big(0,\hat{x}(t_0),0,0;u(\cdot)\big)(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^{m_1})\colon u(\cdot)\in\mathcal{U}\big\},$$

где $\operatorname{conv} A$ обозначает выпуклую коническую оболочку множества A. В следующем пункте мы покажем, что равенство $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ противоречит оптимальности процесса $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$. Затем мы покажем, что из условия $C \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ практически сразу следуют все утверждения теоремы.

2. Итак, пусть $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$. С помощью теоремы Каратеодори (см., например, [2]) нетрудно показать, что найдутся управления $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$ и аргументы

$$(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m_1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

такие что

$$\operatorname{conv}\big\{F'\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i),\ i = 1, \ldots, k\big\} = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \tag{4}$$

Фиксируем набор управлений $\bar{u}(\cdot) = \big(u_1(\cdot), \ldots, u_k(\cdot)\big)$ и для каждого вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ и каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Коши, обозначая для краткости записи $\alpha_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$ и $u_0(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i \varphi\big(t, x, u_i(t)\big), & x(t_0) = \xi, \\ \dot{y} = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i f\big(t, x, u_i(t)\big), & y(t_0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Совершенно аналогично предыдущему отображение

$$\Big(\big(x(\cdot), y(\cdot)\big), \alpha, \xi\Big) \mapsto \Big(x(t) - \xi - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{t_0}^{t} \varphi\big(\tau, x(\tau), u_i(\tau)\big)\, d\tau,$$
$$y(t) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau), u_i(\tau)\big)\, d\tau\Big), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

определённое в окрестности

$$\big(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), 0, \hat{x}(t_0)\big) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

($\hat{y}(\cdot)$ то же, что и выше) и действующее в $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Поэтому для α, достаточно малых по норме, и ξ, близких к $\hat{x}(t_0)$, существует единственное решение $x\Big(\big(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big), y\big(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big)\Big)$ задачи Коши (5), которое определено на $[t_0, t_1]$ и дифференцируемо по (α, ξ) (как отображение в $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$) в точке $\big(0, \hat{x}(t_0)\big) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$.

Снова, как и выше, для достаточно малых по норме α и ξ, близких к $\hat{x}(t_0)$, любых $v_0 \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{R}^{m_1}$ определим отображение F, ставящее в соответствие четвёрке (α, ξ, v_0, v) вектор из $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ по формуле

$$F\big(\alpha, \xi, v_0, v; \bar{u}(\cdot)\big) = \\ = \bigg(y\big(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big) + v_0,\ h\Big(\xi, x\big(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big)\Big) + v,\ l\Big(\xi, x\big(t_1, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big)\Big)\bigg)^{\mathrm{T}}. \quad (7)$$

Это отображение дифференцируемо в точке $(0, \hat{x}(t_0), 0, 0)$. Обозначим через $F'\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)$ его производную в этой точке.

Из формулы $(**)$ для производной неявной функции (см. приложение) следует, что частная производная по α отображения $(\alpha, \xi) \mapsto x\big(\cdot, \alpha, \xi; u(\cdot)\big)$ в точке $\big(0, \hat{x}(t_0)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (обозначим её $y\big(\cdot; u(\cdot)\big)$) удовлетворяет на $[t_0, t_1]$ дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = \hat{\varphi}_x(t)y + \varphi\big(t, \hat{x}(t), u(t)\big) - \hat{\varphi}(t), \quad y(t_0) = 0, \quad (8)$$

а частная производная по ξ (обозначим её $w(\cdot)$) удовлетворяет на $[t_0, t_1]$ матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{w} = \hat{\varphi}_x(t)w, \quad w(t_0) = E, \quad (9)$$

где E — единичная матрица.

Выписывая совершенно аналогично частную производную по α_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, отображения $(\alpha, \xi) \mapsto x\big(\cdot, \alpha, \xi; \bar{u}(\cdot)\big)$ в точке $\big(0, \hat{x}(t_0)\big) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, видим, что она удовлетворяет тем же соотношениям (8), но с $u(\cdot) = u_i(\cdot)$, а частные производные по ξ, v_0 и v этих отображений просто совпадают.

Учитывая эти замечания, вернёмся к равенству (4). Оно означает, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ найдётся такой вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k_+$, что

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^k F'\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)(\hat{\alpha}_i, \hat{\xi}_i, \hat{v}_{0i}, \hat{v}_i)\beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^k F_\alpha\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)\hat{\alpha}_i\beta_i + \sum_{i=1}^k F_\xi\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)\hat{\xi}_i\beta_i + \\ &+ \sum_{i=1}^k F_{v_0}\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)\hat{v}_{0i}\beta_i + \sum_{i=1}^k F_v\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u_i(\cdot)\big)\hat{v}_i\beta_i = \\ &= F_\alpha\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)(\hat{\alpha}_1\beta_1, \ldots, \hat{\alpha}_k\beta_k)^{\mathrm{T}} + \\ &+ F_\xi\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)(\beta_1\hat{\xi}_1 + \ldots + \beta_k\hat{\xi}_k) + \\ &+ F_{v_0}\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)(\hat{v}_{01}\beta_1 + \ldots + \hat{v}_{0k}\beta_k) + \\ &+ F_v\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)(\beta_1\hat{v}_1 + \ldots + \beta_k\hat{v}_k). \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$F_\alpha\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)\mathbb{R}^k_+ + F_\xi\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)\mathbb{R}^n + \\ + F_{v_0}\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)\mathbb{R}_+ + F_v\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; \bar{u}(\cdot)\big)\mathbb{R}^{m_1}_+ = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1},$$

или
$$F'\big(0,\hat{x}(t_0),0,0;\bar{u}(\cdot)\big)(\mathbb{R}^k_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+)=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \qquad (10)$$

Теперь мы построим семейство непрерывных отображений, равномерно аппроксимирующих F, и, воспользовавшись леммами 1 и 2, придём к противоречию с тем, что $\big(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)\big)$ — оптимальный процесс. Для этого сначала построим микс управлений $\hat{u}(\cdot),u_1(\cdot),\ldots,u_k(\cdot)$. Пусть вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)^{\mathrm{T}}$ принадлежит симплексу
$$\Sigma^k=\Big\{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k_+:\ \sum_{i=1}^k\alpha_i\leqslant 1\Big\}$$
и $0<\nu<t_1-t_0$. Разобьём отрезок $[t_0,t_1]$ на подотрезки Δ длины не больше ν ($|\Delta|\leqslant\nu$). Затем каждый из таких подотрезков разобьём на подподотрезки $\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_k$ соответственно длины $\alpha_0|\Delta|,\ldots,\alpha_k|\Delta|$, где $\alpha_0=1-\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i$, и определим (с точностью до меры нуль) функцию $M\big(\cdot,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)$, где $\bar{u}(\cdot)=\big(\hat{u}(\cdot),u_1(\cdot),\ldots,u_k(\cdot)\big)$, следующим образом: на каждом подотрезке Δ $M\big(t,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)=\hat{u}(t)$, если $t\in\Delta_0$, и $M\big(t,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)=u_i(t)$, если $t\in\Delta_i$, $1\leqslant i\leqslant k$. Ясно, что $M\big(\cdot,0,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)=\hat{u}(\cdot)$ для любого ν и что $M\big(\cdot,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\in\mathcal{U}$. Нетрудно также проверить, что отображение $\alpha\mapsto M\big(\cdot,0,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)$ (как отображение из Σ^k в $L_1([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$) непрерывно равномерно по ν. Будем называть функцию $M\big(\cdot,0,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)$ *миксом* (управлений $\hat{u}(\cdot),u_1(\cdot),\ldots,u_k(\cdot)$ при данных α и ν).

Для каждых $0<\nu<t_1-t_0$, $\alpha\in\Sigma^k$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Коши
$$\begin{cases}\dot{x}=\varphi\Big(t,x,M\big(t,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\Big), & x(t_0)=\xi,\\ \dot{y}=f\Big(t,x,M\big(t,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\Big), & y(t_0)=0.\end{cases} \qquad (11)$$

Отображение
$$\Big(\big(x(\cdot),y(\cdot)\big),\alpha,\xi\Big)\mapsto\Big(x(t)-\xi-\int_{t_0}^{t}\varphi\Big(\tau,x(\tau),M\big(\tau,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\Big)\,d\tau,$$
$$y(t)-\int_{t_0}^{t}f\Big(\tau,x(\tau),M\big(\tau,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\Big)\,d\tau\Big),\quad t\in[t_0,t_1], \qquad (12)$$
определённое в окрестности
$$\big((\hat{x}(\cdot),\hat{y}(\cdot),0,\hat{x}(t_0)\big)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$$
и действующее в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяет теореме о неявной функции, сформулированной в приложении. Этот факт детально проверен в [1]. Из этой теоремы следует, что найдутся окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ и точки $\hat{x}(t_0)$ в $\mathbb{R}^n$, такие что для всех $\alpha\in\Sigma^k$ и ξ, принадлежащим этим

окрестностям, и всех $0 < \nu < t_1 - t_0$ существует единственное решение $\Big(x_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big), y_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)$ задачи Коши (11), определённое на $[t_0,t_1]$ и непрерывное по (α,ξ) (как отображение в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$) равномерно по ν.

Теперь для каждого $0<\nu<t_1-t_0$, для указанных α, ξ, а также для любых $v_0\in\mathbb{R}$ и $v\in\mathbb{R}^{m_1}$ определим отображение Φ_ν, ставящее в соответствие четвёрке (α,ξ,v_0,v) вектор из $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ по правилу

$$\Phi_\nu\big(\alpha,\xi,v_0,v;\bar u(\cdot)\big)= \\ =\bigg(y_\nu\big(t_1,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)+v_0,\, h\Big(\xi,x_\nu\big(t_1,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)+v,\, l\Big(\xi,x_\nu\big(t_1,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)\bigg)^{\mathrm T}. \tag{13}$$

Из сказанного выше и условий на h и l следует, что это непрерывная функция по совокупности переменных α, ξ, v_0 и v.

Теперь воспользуемся леммами 1 и 2. Обозначим производную отображения F (определённого формулой (7)) в точке $(0,\hat x(t_0),0,0)$ через Λ. Согласно (10) справедливо равенство $\Lambda K=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$, где $K=\mathbb{R}^k_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}$ — выпуклый конус. Из леммы 1 и гладкости отображений h и l следует, что $\Phi_\nu\big(\alpha,\xi,v_0,v;\bar u(\cdot)\big)\mapsto F\big(\alpha,\xi,v_0,v;\bar u(\cdot)\big)$ при $\nu\to 0$ равномерно по $(\alpha,\xi,v_0,v)\in\in V\cap K$, где V — некоторая окрестность точки $(0,\hat x(t_0),0,0)$. Кроме того, ясно, что $\Phi_\nu\big(0,\hat x(t_0),0,0;\bar u(\cdot)\big)=F\big(0,\hat x(t_0),0,0;\bar u(\cdot)\big)$ для всех $0<\nu<t_1-t_0$. Можно считать, что $V=\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\mathcal{O}_3\times\mathcal{O}_4$, где $\mathcal{O}_i$, $i=1,2,3,4,$ — окрестности соответственно $0\in\mathbb{R}^k$, $\hat x(t_0)\in\mathbb{R}^n$, $0\in\mathbb{R}$ и $0\in\mathbb{R}^{m_1}$. Тогда

$$V\cap K=(\mathcal{O}_1\cap\mathbb{R}^k_+)\times\mathcal{O}_2\times(\mathcal{O}_3\cap\mathbb{R}_+)\times(\mathcal{O}_4\cap\mathbb{R}^{m_1}_+).$$

По лемме 2 существует окрестность W точки $F\big(0,\hat x(t_0),0,0;\bar u(\cdot)\big)$, такая что для любого $y\in W$ найдётся набор $\big(\alpha(y),\xi(y),v_0(y),v(y)\big)$ из $V\cap K$, для которого выполнены соотношения

$$\Phi_{\nu(y)}\big(\alpha(y),\xi(y),v_0(y),v(y);\bar u(\cdot)\big)=y \tag{14}$$

и

$$\big|\big(\alpha(y),\xi(y),v_0(y),v(y)\big)-(0,\hat x(t_0),0,0)\big|\leqslant\varkappa\big|y-F\big(0,\hat x(t_0),0,0;\bar u(\cdot)\big)\big|. \tag{15}$$

Отсюда уже легко прийти к противоречию с тем, что $\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$ — оптимальный процесс. Действительно, так как, очевидно, $F\big(0,\hat x(t_0),0,0;\bar u(\cdot)\big)= =\big(J\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big),0,0\big)$, то для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ вектор $y_\varepsilon=\big(J\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)-\varepsilon,0,0\big)$ принадлежит W. Согласно (13) найдётся четвёрка $\big(\alpha(y_\varepsilon),\xi(y_\varepsilon),v_0(y_\varepsilon),v(y_\varepsilon)\big)\in V\cap K$, такая что

$$v_0(y_\varepsilon)+\int_{t_0}^{t_1} f\Big(t,x_{\nu(y_\varepsilon)}(t,\alpha(y_\varepsilon),\xi(y_\varepsilon);M\big(t,\alpha(y_\varepsilon),\nu(y_\varepsilon)\big)\Big)dt=J\big(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)\big)-\varepsilon, \tag{16}$$

а также

$$h\Big(\xi(y_\varepsilon),x_{\nu(y_\varepsilon)}\big(t_1,\alpha(y_\varepsilon),\xi(y_\varepsilon);\bar u(\cdot)\big)\Big)+v(y_\varepsilon)=0$$

и

$$l\Big(\xi(y_\varepsilon), x_{\nu(y_\varepsilon)}\big(t_1, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot)\big)\Big) = 0.$$

Так как $\xi(y_\varepsilon) = x_{\nu(y_\varepsilon)}\big(t_0, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot)\big)$ (см. (11)), то из последних двух соотношений (с учётом того, что $v(y_\varepsilon) \geqslant 0$) вытекает, что пара $\Big(x_{\nu(y_\varepsilon)}\big(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{u}(\cdot)\big), M\big(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \nu(y_\varepsilon)\big)\Big)$ допустима в задаче (1), а из (16) следует ($v_0(y_\varepsilon) \geqslant 0$), что на этой паре минимизируемый функционал в (1) меньше, чем на $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$.

Далее, из неравенства (14) следует, что $\big|\big(\alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon) - \hat{x}(t_0)\big)\big| \leqslant \varkappa\varepsilon$, т. е. $\alpha(y_\varepsilon) \to 0$ и $\xi(y_\varepsilon) \to \hat{x}(t_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда в силу отмеченной выше непрерывности отображения $(\alpha, \xi) \mapsto x_\nu\big(\cdot, \alpha, \xi; \bar{x}(\cdot)\big)$ равномерно по ν получаем, что $x_{\nu(y_\varepsilon)}\big(\cdot, \alpha(y_\varepsilon), \xi(y_\varepsilon); \bar{x}(\cdot)\big) \to \hat{x}(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым мы приходим к противоречию с тем, что $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$ — локальный минимум в (1).

Итак, случай $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ невозможен.

3. Пусть $C \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$. Отделяя выпуклый конус C от любой точки, ему не принадлежащей, получаем, что существует ненулевой вектор $\bar{\lambda} = (\mathbb{R}^{m_1+m_2+1})^*$, такой что

$$\langle \bar{\lambda}, F'\big(0, \hat{x}(t_0), 0, 0; u(\cdot)\big)(\alpha, \xi, v_0, v)\rangle \geqslant 0$$
$$\text{для всех} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad v_0 \geqslant 0, \quad v \in \mathbb{R}^{m_1}_+. \tag{17}$$

Учитывая формулы (8) и (9), получаем, что производная функции $(\alpha, \xi) \mapsto y\big(t_1, \alpha, \xi; u(\cdot)\big)$ в точке $\big(0, \hat{x}(t_0)\big)$ действует по правилу

$$(\alpha, \xi) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} \big(\big\langle \hat{f}_x(t), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle + f\big(t, \hat{x}(t), u(t)\big) - \hat{f}(t)\big)\, dt\, \alpha + \Big\langle \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t) w(t)\, dt, \xi \Big\rangle, \tag{18}$$

а производные отображений h и l в $\big(0, \hat{x}(t_0)\big)$ — по правилу

$$\begin{aligned} (\alpha, \xi) &\mapsto \hat{h}_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\alpha + \hat{h}_{\zeta_1}\xi + \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1)\xi, \\ (\alpha, \xi) &\mapsto \hat{l}_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\alpha + \hat{l}_{\zeta_1}\xi + \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1)\xi. \end{aligned} \tag{19}$$

Представляя вектор $\bar{\lambda}$ в виде $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{m_i})^*$, $i = 1, 2$, запишем соотношение (17) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \big(\big\langle \hat{f}_x(t), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle + f\big(t, \hat{x}(t), u(t)\big) - \hat{f}(t)\big) dt\, \alpha + \lambda_0 \Big\langle \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t) w(t)\, dt, \xi \Big\rangle + \\ + \lambda_0 v_0 + \big\langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle\alpha + \langle \lambda_1, \hat{h}_{\zeta_1}\xi + \hat{h}_{\zeta_2} w(t_1)\xi\rangle + \\ + \langle \lambda_1, v\rangle + \big\langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle\alpha + \langle \lambda_2, \hat{l}_{\zeta_1}\xi + \hat{l}_{\zeta_2} w(t_1)\xi\rangle \geqslant 0 \end{aligned} \tag{20}$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $\alpha \geqslant 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $v_0 \geqslant 0$ и $v \in \mathbb{R}^k_+$.

Пусть $\alpha = 0$, $\xi = 0$ и $v = 0$. Тогда из (20) следует, что $\lambda_0 \geqslant 0$.

Если $\alpha = 0$, $\xi = 0$ и $v_0 = 0$, то из (20) получаем, что $\lambda_1 \geqslant 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $\xi = 0$, $v_0 = 0$ и $v = 0$. Тогда из (20) в силу произвольности $\alpha \geqslant 0$ следует, что

$$\lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \big(\big\langle \hat f_x(t), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle + f\big(t, \hat x(t), u(t)\big) - \hat f(t)\big)\, dt + \\ + \big\langle \lambda_1, \hat h_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle + \big\langle \lambda_2, \hat l_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle \geqslant 0 \quad (21)$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Обозначим через $p(\cdot)$ решение линейного уравнения

$$-\dot p = p\, \hat\varphi_x(t) - \lambda_0 \hat f_x(t), \quad p(t_1) = -\lambda_1 \hat h_{\zeta_2} - \lambda_2 \hat l_{\zeta_2}. \quad (22)$$

Подставляя в (21) вместо функции $\lambda_0 \hat f_x(\cdot)$ её выражение из (22), а затем вместо функции $\hat\varphi_x(\cdot) y\big(\cdot, u(\cdot)\big)$ её выражение из (8) и учитывая начальные условия в (8) и (9), будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{t_0}^{t_1} &\Big(\big\langle \big(p(t)\hat\varphi_x(t) + \dot p(t)\big), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle + \lambda_0\big(f\big(t, \hat x(t), u(t)\big) - \hat f(t)\big)\Big) dt + \\ &+ \big\langle \lambda_1, \hat h_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle + \big\langle \lambda_2, \hat l_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big(\big\langle p(t), \dot y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle + \big\langle \dot p(t), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle\big)\, dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Big(H\big(t, \hat x(t), \hat u(t), \lambda_0, p(t)\big) - H\big(t, \hat x(t), u(t), \lambda_0, p(t)\big)\Big) dt + \\ &+ \big\langle \lambda_1, \hat h_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle + \big\langle \lambda_2, \hat l_{\zeta_2} y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle = \\ &= \big\langle p(t), y\big(t, u(\cdot)\big)\big\rangle\big|_{t_0}^{t_1} + \big\langle \lambda_1 \hat h_{\zeta_2}, y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle + \big\langle \lambda_2 \hat l_{\zeta_2}, y\big(t_1, u(\cdot)\big)\big\rangle + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Big(H\big(t, \hat x(t), \hat u(t), \lambda_0, p(t)\big) - H\big(t, \hat x(t), u(t), \lambda_0, p(t)\big)\Big) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Big(H\big(t, \hat x(t), \hat u(t), \lambda_0, p(t)\big) - H\big(t, \hat x(t), u(t), \lambda_0, p(t)\big)\Big) dt; \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{t_0}^{t_1} H\big(t, \hat x(t), \hat u(t), \lambda_0, p(t)\big)\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} H\big(t, \hat x(t), u(t), \lambda_0, p(t)\big)\, dt$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Но это неравенство равносильно условию максимума в теореме, если в качестве множества полной меры из $[t_0, t_1]$ взять множество, на котором функция $\hat{u}(\cdot)$ аппроксимативно непрерывна (см. [1]).

Пусть, наконец, $\alpha = 0$, $v_0 = 0$ и $v = 0$ в (20). Тогда в силу произвольности $\xi \in \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\lambda_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t)w(t)\,dt + \lambda_1\hat{h}_{\zeta_1} + \lambda_1\hat{h}_{\zeta_2}w(t_1) + \lambda_2\hat{l}_{\zeta_1} + \lambda_2\hat{l}_{\zeta_2}w(t_1) = 0. \tag{23}$$

Подставим в интеграл вместо $\lambda_0\hat{f}_x(\cdot)$ его выражение из (22), а затем воспользуемся (9). Имеем

$$\begin{aligned}\lambda_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{f}_x(t)w(t)\,dt &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\dot{p}(t)w(t) + p(t)\dot{w}(t)\big)\,dt = p(t)w(t)\big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= p(t_1)w(t_1) - p(t_0)w(t_0) = p(t_1)w(t_1) - p(t_0) = \\ &= -\lambda_1\hat{h}_{\zeta_2}w(t_1) - \lambda_2\hat{l}_{\zeta_2}w(t_1) - p(t_0).\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (23), получаем, что

$$p(t_0) = \lambda_1\hat{h}_{\zeta_1} + \lambda_2\hat{l}_{\zeta_1}.$$

Отсюда и из (22) следуют второе и третье утверждения теоремы, и тем самым её доказательство завершено. □

Приложение

Теорема о неявной функции

Все необходимые нам свойства решений дифференциальных уравнений являются непосредственными следствиями теоремы о неявной функции. Здесь мы приводим её формулировку в той форме, которая нам нужна и которую можно найти, например, в [4]. Отметим, что доказательство теоремы несложно и основано на методе Ньютона решений нелинейных уравнений.

Теорема (о неявной функции). *Пусть Σ — топологическое пространство, X и Y — банаховы пространства, $\hat{\sigma} \in \Sigma$, V — окрестность точки $\hat{x} \in X$ и $F\colon V \times \Sigma \to Y$. Если*

1) $F(\hat{x}, \hat{\sigma}) = 0$,
2) *F непрерывно на $V \times \Sigma$,*
3) *F дифференцируемо по x в точке $(\hat{x}, \hat{\sigma})$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют окрестности $V(\varepsilon) \subset V$ и $U(\varepsilon)$ точек $\hat{x}$ и $\hat{\sigma}$, такие что для всех $x, x' \in V(\varepsilon)$ и $\sigma \in U(\varepsilon)$ выполняется соотношение*

$$\|F(x,\sigma) - F(x',\sigma) - F_x(\hat{x},\hat{\sigma})(x - x')\|_Y \leqslant \varepsilon\|x - x'\|_X,$$

4) $F_x(\hat{x},\hat{\sigma})$ — *обратимый оператор,*

то найдутся окрестности $V_0 \subset V$ *и* U_0 *точек* $\hat{x}$ *и* $\hat{\sigma}$ *и непрерывное отображение* $\varphi\colon U_0 \to V$, *такие что*

$$F(\varphi(\sigma),\sigma) = 0 \quad и \quad \|\varphi(\sigma) - x\|_X \leqslant 2\|F_x^{-1}(\hat{x},\hat{\sigma})\|\,\|F(x,\sigma)\|_Y \tag{$*$}$$

для всех $(x,\sigma) \in V_0 \times U_0$. *При этом равенство* $F(x,\sigma)=0$ *на* $V_0 \times U_0$ *возможно лишь тогда, когда* $x = \varphi(\sigma)$. *Кроме того, если* Σ — *окрестность* $\hat{\sigma}$ *в нормированном пространстве и отображение* F *дифференцируемо по* σ *в точке* $(\hat{x},\hat{\sigma})$, *то отображение* φ *дифференцируемо в точке* $\hat{\sigma}$ *и*

$$\varphi'(\hat{\sigma}) = -\big(F_x(\hat{x},\hat{\sigma})\big)^{-1} F_\sigma(\hat{x},\hat{\sigma}). \tag{$**$}$$

Основное свойство микса управлений

Положим

$$G\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} \varphi\big(t,x(t),u(t)\big)\,dt,\ \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\,d\tau\right),$$

где $t \in [t_0,t_1]$. Это отображение определено на $V \times \mathcal{U}$, где V — некоторая окрестность $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, и действует в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$.

Выше для $\alpha = (\alpha,\ldots,\alpha_k)^{\mathrm{T}} \in \Sigma^k$ и $0 < \nu < t_1 - t_0$ был построен микс $M\big(\cdot,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)$ управлений $\bar{u}(\cdot) = \big(\hat{u}(\cdot),u_1(\cdot),\ldots,u_k(\cdot)\big)$. Будем обозначать для краткости записи $\alpha_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$ и $u_0(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$.

Основное свойство микса состоит в том, что существует такая окрестность $\mathcal{O}$ *точки* $\hat{x}(\cdot) \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, *что при* $\nu \to 0$

$$G\Big(x(\cdot),M\big(\cdot,\alpha,\nu;\bar{u}(\cdot)\big)\Big)(\cdot) \mapsto \sum_{i=0}^{k}\alpha_i G\big(x(\cdot),u_i(\cdot)\big)(\cdot) \tag{24}$$

в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$ *равномерно по* $x(\cdot) \in \mathcal{O}$ *и* $\alpha \in \Sigma^k$.

Отсюда, в частности, следует, что для указанных $x(\cdot)$ замыкание образа множества $\mathcal{U}$ при отображении $u(\cdot) \mapsto G\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)(\cdot)$ выпукло в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})$.

Хотя основное свойство микса проверяется несложно, доказательство его мы опустим, отсылая читателя к работе [1].

Напомним, что функция $\Big(x_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar{u}(\cdot)\big),y_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar{u}(\cdot)\big)\Big)$ — решение задачи Коши (11), а функция $\Big(x\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar{u}(\cdot)\big),y\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar{u}(\cdot)\big)\Big)$ — решение задачи Коши (5).

Лемма 1. *Существуют такие окрестности* U_1 *и* U_2 *точек* $0 \in \mathbb{R}^k$ *и* $\hat{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $0 < \nu(\varepsilon) < t_1 - t_0$, *такое что для всех*

$(\alpha,\xi)\in(U_1\cap\Sigma^k)\times U_2$ *справедлива оценка*

$$\Big\|\Big(x_{\nu(\varepsilon)}\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big),y_{\nu(\varepsilon)}\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)-\\ -\Big(x\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big),y\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)\Big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}<\varepsilon. \quad (25)$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой $(*)$ в теореме о неявной функции с отображением, определённым формулой (12), которое обозначим через F_2. Производную этого отображения по $\big(x(\cdot),y(\cdot)\big)$ в точке $\Big(\big(\hat x(\cdot),\hat y(\cdot)\big),0,\hat x(t_0)\Big)$ обозначим через A_2. В этой оценке в качестве $\varphi(\sigma)$ выступает пара $\Big(x_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)$, $y_\nu\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)$, а в качестве x — пара $\Big(x\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big),y\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)\Big)$ при α, близких к нулю, и ξ, близких к $\hat x(t_0)$. Заметим ещё, что если через F_1 обозначить отображение, определённое формулой (6), то ясно, что $F_1\Big(\Big(x\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)$, $y\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big),\alpha,\xi\Big)(\cdot)\Big)=0$.

Пусть $\varepsilon>0$. Согласно основному свойству микса существует такое $0<\nu(\varepsilon)<t_1-t_0$, что

$$\Big\|G\Big(x(\cdot),M\big(\cdot,\alpha,\nu(\varepsilon);\bar u(\cdot)\big)\Big)(\cdot)-\sum_{i=0}^{k}\alpha_iG\big(x(\cdot),u_i(\cdot)\big)(\cdot)\Big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}<\frac{\varepsilon}{2\|A_2^{-1}\|} \quad (26)$$

для всех $x(\cdot)\in\mathcal{O}$ и $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)^{\mathrm T}\in\Sigma^k$.

Пусть окрестности U_1 и U_2 точек $0\in\mathbb{R}^k$ и $\hat x(t_0)\in\mathbb{R}^n$ таковы, что для всех $(\alpha,\xi)\in U_1\times U_2$ функция $x\big(\cdot,\alpha,\xi;\bar u(\cdot)\big)$ принадлежит окрестности $\mathcal{O}$, и можно считать (уменьшая, если необходимо, эти окрестности), что для $(U_1\cap\Sigma^k)\times U_2$ справедливы утверждения теоремы о неявной функции с отображением F_2. Тогда согласно оценке $(*)$ имеем, учитывая сделанные выше замечания (для краткости зависимость от $\bar u(\cdot)$ не отмечаем),

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(x_{\nu(\varepsilon)}(\cdot,\alpha,\xi),y_{\nu(\varepsilon)}(\cdot,\alpha,\xi)\big)-\big(x(\cdot,\alpha,\xi),y(\cdot,\alpha,\xi)\big)\big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant\\
&\quad\leqslant 2\|A_2^{-1}\|\,\Big\|F_2\Big(\big(x(\cdot,\alpha,\xi),y(\cdot,\alpha,\xi)\big),\alpha,\xi\Big)(\cdot)\Big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}=\\
&\quad=2\|A_2^{-1}\|\,\Big\|F_2\Big(\big(x(\cdot,\alpha,\xi),y(\cdot,\alpha,\xi)\big),\alpha,\xi\Big)(\cdot)-\\
&\quad-F_1\big((x(\cdot,\alpha,\xi),y(\cdot,\alpha,\xi),\alpha,\xi)(\cdot)\big)\Big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}=\\
&\quad=2\|A_2^{-1}\|\times\\
&\quad\times\Big\|G(x(\cdot,\alpha,\xi),M\big(\cdot,\alpha,\nu(\varepsilon)\big)(\cdot)-\sum_{i=0}^{k}\alpha_iG\big(x(\cdot,\alpha,\xi),u_i(\cdot)\big)(\cdot)\Big\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})}<\\
&\quad<2\|A_2^{-1}\|\frac{\varepsilon}{2\|A_2^{-1}\|}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Лемма о разрешимости системы уравнений

Доказываемая здесь лемма о разрешимости опирается на теорему Брауэра о неподвижной точке.

Лемма 2. *Пусть V — окрестность точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^k$, K — выпуклый конус в $\mathbb{R}^k$, отображение $F\colon V \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в $\hat{x}$ и $F'(\hat{x})(K) = \mathbb{R}^m$. Пусть, далее, $\{\Phi_\nu\}_{\nu>0}$ — семейство отображений $\Phi_\nu\colon V \cap (\hat{x}+K) \to \mathbb{R}^m$, непрерывных на $V \cap (\hat{x}+K)$, и при этом $\Phi_\nu(\hat{x}) = F(\hat{x})$ для любого $\nu > 0$ и $\Phi_\nu(x) \to F(x)$ при $\nu \to 0$ равномерно по $x \in V \cap (\hat{x}+K)$. Тогда существует окрестность W точки $F(\hat{x})$ и константа $\varkappa > 0$, такие что для любого $y \in W$ найдутся $\nu(y) > 0$ и $x(y) \in V \cap (\hat{x}+K)$, для которых справедливы соотношения*

$$\Phi_{\nu(y)}(x(y)) = y \quad \text{и} \quad |x(y) - \hat{x}| \leqslant \varkappa |y - F(\hat{x})|. \tag{27}$$

Доказательство. Обозначим $\Lambda = F'(\hat{x})$ и покажем сначала, что существуют непрерывное отображение $R\colon \mathbb{R}^m \to K$ (правое обратное к Λ) и константа $\gamma > 0$, такие что $\Lambda R(z) = z$ и $|R(z)| \leqslant \gamma |z|$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$.

Действительно, пусть $e_1, \dots, e_m$ — базис в $\mathbb{R}^m$. По предположению найдутся такие $f_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, что $\Lambda f_i = e_i$ и $\Lambda f_{m+i} = -e_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Для каждого $z = \sum_{i=1}^m z_i e_i \in \mathbb{R}^m$ положим $R(z) = \sum_{i=1}^m |z_i| g_i$, где $g_i = f_i$, если $z_i \geqslant 0$ и $g_i = f_{m+i}$, если $z_i < 0$. Ясно, что R непрерывно, $R(z) \in K$,

$$\Lambda R(z) = \sum_{i=1}^m |z_i| \Lambda g_i = \sum_{i=1}^m z_i e_i = z$$

и

$$|R(z)| \leqslant \sum_{i=1}^m |z_i|\,|g_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |z_i| \sum_{i=1}^{2m} |f_i| \leqslant \gamma |z|,$$

где $\gamma = \sum_{i=1}^{2m} |f_i|$.

В силу дифференцируемости F в $\hat{x}$ существует такое $\delta > 0$, что $U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta) \subset V$ и

$$|F(x) - F(\hat{x}) - \Lambda(x - \hat{x})| \leqslant \frac{1}{4\gamma} |x - \hat{x}| \tag{28}$$

для всех $x \in U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta)$.

Положим $W = U_{\mathbb{R}^m}\big(F(\hat{x}), \delta/(2\gamma)\big)$, и пусть $y \in W$. Если $y = F(\hat{x})$, то соотношения (27) выполняются очевидным образом. Пусть $y \neq F(\hat{x})$. По условию существует $\nu(y) > 0$, такое что

$$\big|\Phi_{\nu(y)}(x) - F(x)\big| \leqslant \frac{1}{2} |y - F(\hat{x})| \tag{29}$$

для всех $x \in V \cap (\hat{x}+K)$.

Пусть $B_X(x, r)$ обозначает замкнутый шар в нормированном пространстве X с центром в точке X радиуса r. Рассмотрим отображение

$$G_y\colon B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|) \to \mathbb{R}^m,$$

определённое формулой
$$G_y(z) = y + z - \Phi_{\nu(y)}\Big(\hat{x} + R\big(z - F(\hat{x})\big)\Big).$$
Определение корректно, так как, если $z \in B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$, то
$$\big|R\big(z - F(\hat{x})\big)\big| \leqslant \gamma|z - F(\hat{x})| < 2\gamma|y - F(\hat{x})| < 2\gamma\left(\frac{\delta}{2\gamma}\right) = \delta,$$
и значит,
$$\hat{x} + R\big(z - F(\hat{x})\big) \subset U_{\mathbb{R}^k}(\hat{x}, \delta) \cap (\hat{x} + K) \subset V \cap (\hat{x} + K).$$

Покажем, что образ G_y содержится в шаре $B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$. Действительно, после элементарных преобразований и применения неравенств (28) и (29) получаем
$$\begin{aligned}
&|G_y(z) - F(\hat{x})| \leqslant |y - F(\hat{x})| + \\
&\quad + \Big|\Phi_{\nu(y)}\Big(\hat{x} + R\big(z - F(\hat{x})\big)\Big) - F\Big(\hat{x} + R\big(z - F(\hat{x})\big)\Big)\Big| + \\
&\quad + \Big|F\Big(\hat{x} + R\big(z - F(\hat{x})\big)\Big) - F(\hat{x}) - \Lambda R\big(z - F(\hat{x})\big)\Big| \leqslant \\
&\quad \leqslant |y - F(\hat{x})| + \frac{1}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4\gamma}\big|R\big(z - F(\hat{x})\big)\big| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{3}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4\gamma}\gamma|z - F(\hat{x})| \leqslant \frac{3}{2}|y - F(\hat{x})| + \frac{1}{4}2|y - F(\hat{x})| = 2|y - F(\hat{x})|.
\end{aligned}$$

Отображение G_y непрерывно в силу непрерывности отображений $\Phi_{\nu(y)}$ и R. Поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке существует $\bar{z} = \bar{z}(y) \in B_{\mathbb{R}^m}(F(\hat{x}), 2|y - F(\hat{x})|)$, такое что $G_y(\bar{z}) = \bar{z}$, или $\Phi_{\nu(y)}\Big(\hat{x} + R\big(\bar{z} - F(\hat{x})\big)\Big) = y$. Положим $x(y) = \hat{x} + R\big(\bar{z} - F(\hat{x})\big)$. Тогда $\Phi_{\nu(y)}\big(x(y)\big) = y$ и
$$|x(y) - \hat{x}| = \big|R\big(\bar{z} - F(\hat{x})\big)\big| \leqslant \gamma|\bar{z} - F(\hat{x})| \leqslant 2\gamma|y - F(\hat{x})|.$$
Осталось обозначить $\varkappa = 2\gamma$. □

Литература

[1] Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // УМН. — 2013. — Т. 68, № 3. — С. 5—38.

[2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г. Принцип максимума Понтрягина. Формулировка и доказательство // Докл. РАН. — 2012. — Т. 442, № 1. — С. 20—23.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 262. — С. 156—177.

[5] Тихомиров В. М. Теорема о касательном пространстве и некоторые её модификации // Оптим. управл. — 1977. — Вып. 7. — С. 22—30.