Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств*

А. Р. АЛИМОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexey.alimov@gmail.com

И. Г. ЦАРЬКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: igtsarkov@yandex.ru

УДК 517.982.256

Ключевые слова: солнце, чебышёвское множество, выпуклость, связность, монотонная линейная связность.

Аннотация

В обзоре рассматриваются структурные характеристики «солнц» в линейных нормированных пространствах. Особое внимание уделяется свойствам связности и монотонной линейной связности солнц. Рассматриваются как прямые теоремы геометрической теории приближений, в которых из структурных характеристик множеств выводят их аппроксимативные свойства, так и обратные теоремы, в которых из аппроксимативных свойств множеств получают их структурные характеристики.

Abstract

A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, Connectedness and other geometric properties of suns and Chebyshev sets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 21—91.

This survey is concerned with structural characteristics of "suns" in normed linear spaces. Special attention is paid to connectedness and monotone path-connectedness of suns. We address both direct theorems of the geometric approximation theory, in which approximative properties of sets are derived from their structural characteristics, and inverse theorems, in which from approximative characteristics of sets one derives their structural properties.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00022).

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 4, с. 21—91.

Солнце светило позади Люси, и тень непонятного предмета вытянулась за ним на песке.
К. С. Льюис «Плавание „Утреннего путника"»

1. Введение и основные определения

В середине XIX века П. Л. Чебышёв ввёл в науку важное понятие наилучшего приближения (а именно наилучшего приближения относительно равномерной нормы) и систематически применял его в приложениях. В дальнейшем понятия величины и элемента наилучшего приближения были перенесены на случай общих линейных нормированных пространств и стали исходным пунктом геометрической теории приближений.

Величиной наилучшего приближения или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Таким является прежде всего понятие элемента наилучшего приближения, или ближайшей точки. Для заданного $x \in X$ это такая точка $y \in M$, для которой $\|x-y\| = \rho(x, M)$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения или, кратко, наилучших приближений) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}.$$

В обзоре рассматриваются «солнечные» свойства подмножеств линейных нормированных пространств, представляющие собой аппроксимативно-геометрическую характеристику.

«Солнца» обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными свойствами отделимости выпуклых множеств посредством полупространств (гиперплоскостей).

Ниже мы будем рассматривать структурные характеристики солнц, наиболее важными из которых являются геометро-топологические свойства (в частности, связность и выпуклость). При этом будут рассматриваться как прямые теоремы геометрической теории приближений, в которых из структурных характеристик множеств выводят их аппроксимативные свойства, так и обратные теоремы, в которых из аппроксимативных свойств множеств получают их структурные характеристики. В качестве аппроксимативных характеристик множеств будут рассматриваться свойства единственности, существования наилучшего приближения, чебышёвости, аппроксимативной компактности и солнечности. К структурным характеристикам множеств обычно относят свойства линейности, конечномерности, компактности, выпуклости, различной связности и гладкости этих множеств. Например, хорошо известно, что из компактности непустого множества следует, что оно является множеством существования (это прямая теорема).

Обратные теоремы используются в приложениях следующим образом. После выяснения того, что исследуемый объект не обладает «хорошими» структурными характеристиками, из этих теорем выводят, что он не обладает и «хорошими» аппроксимативными свойствами. Обычно таким путём удаётся установить, что данный объект не является множеством существования или единственности.

На сегодняшний день геометрическая теория приближений находит применение в теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами [86—88, 104, 105], в теории некорректных задач [53, 169, 241], в теории неоднозначной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений [97—99, 101, 168, 221], в теории приближения функций [31, 33, 47, 58, 80, 81, 89], в топологических минимаксных теоремах [197, 220], в теории критических точек в негладком случае [126, 219], в теории обучения при построении оптимального оценщика [68], при исследовании устойчивости по различным параметрам решений общих экстремальных задач и многозначных отображений [16, 24—27, 69, 70, 103, 114, 159, 225], а также в выпуклом анализе, к примеру при исследовании функции Моро и связанного с ней свойства проксрегулярности множеств и функций, которое является локальным вариантом свойства проксимальной гладкости и играет важную роль (как в теоретическом, так и в вычислительном аспектах) в оптимизации, вариационном анализе, нелинейном анализе и задачах восстановлении сигналов [22, 82, 121, 192, 215, 221]. В связи с вышесказанным стоит также отметить обзор В. М. Тихомирова [84], в котором, в частности, подробно раскрывается роль геометрической теории приближений в задачах теория приближения функций, выпуклом анализе и других областях математики, а также обзоры [21, 43, 55, 59, 182].

В данном обзоре мы почти не затрагиваем обширную тему выпуклости чебышёвских множеств и их обобщений (подробнее об этом см. [2, 21, 32, 43, 55, 93, 94, 143, 144, 158, 170]).

Подчеркнём, что ниже мы рассматриваем классические вопросы геометрической теории приближений, не затрагивая целого ряда тем, к примеру, вопросов, связанных с приближениями относительно расстояний Брегмана [115, 116, 200, 234, 236, 242], n-расстояний [23, 30, 32] и несимметричных расстояний [1, 4, 5, 32, 132, 156], в том числе относительно неограниченных квазишаров [54, 187].

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство. Случаи, когда X — несимметрично нормированное пространство, будут оговорены особо. Далее

$B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r;
$\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r;
$S(x,r)$ — сфера с центром x и радиусом r.

Пусть $B := B(0,1)$ — единичный шар, $S = S(0,1)$ — единичная сфера.

Множество M называется множеством *существования* (*единственности*), если для каждого x множество $P_M x$ её ближайших элементов непусто (соответственно пусто или одноточечно). Множество существования всегда замкнуто и непусто: действительно, если предельная точка M не содержится в M, то вполне очевидно, что у неё нет ближайших в M. В случае конечномерного X верно и обратное утверждение: любое замкнутое непустое множество является множеством существования.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*), такая что

$$y \in P_M\bigl((1-\lambda)y + \lambda x\bigr) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1.1}$$

(геометрически это означает, что из точки y исходит «солнечный» луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (1.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, ближайшая точка y к x не обязана существовать).

Замкнутое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (*строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M. Множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности. Как правило, мы будем предполагать, что строгое протосолнце замкнуто. Отметим, что (замкнутое) строгое протосолнце не обязано являться множеством существования. Также отметим, что выпуклое множество всегда является строгим протосолнцем (выпуклое множество существования — строгим солнцем).

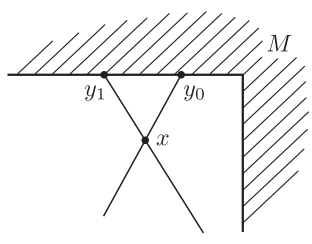

Рис. 1. Солнце M, не являющееся строгим солнцем в пространстве $\ell^\infty(2)$ (единичный шар — «квадратик»); здесь y_0 — точка светимости для x, точка y_1 принадлежит $P_M x$, но не является точкой светимости

Понятие «солнце» было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в [50]. Понятие «строгого протосолнца» вводится нами для избежания путаницы в понятиях «строгое солнце существования» (строгое солнце) и «строгое солнце без предположения о существования ближайшего элемента» (строгое протосолнце). Отметим, что строгие протосолнца совпадают с замкнутыми множествами Колмогорова (см. теорему 2.3).

Поскольку в конечномерном пространстве X замкнутое непустое множество является множеством существования, в таких X всякое строгое протосолнце является строгим солнцем. В бесконечномерном случае это уже не так: строгое протосолнце может антипроксиминальным, т. е. любая точка вне него вообще не имеет ближайших во множестве.

Отдавая дань уважения П. Л. Чебышёву как основателю теории приближений, Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [50] предложили новый термин «чебышёвское множество», который практически сразу стал общепринятым. Множество M называется *чебышёвским*, если для каждого x элемент наилучшего приближения из M существует и единственен (иными словами, чебышёвские множества — это в точности множества существования и единственности). Если чебышёвское множество является солнцем, то говорят, что оно *чебышёвское солнце*.

П. Л. Чебышёв ввёл в науку важное понятие наилучшего приближения, в частности равномерного наилучшего приближения, систематически применял его в приложениях и разработал его теоретические основы. При изучении вопроса наилучшего приближения в $C[a,b]$ множествами $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n и $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций,

$$\mathcal{R}_{m,n} := \left\{ \frac{p}{q} \;\Big|\; p \in \mathcal{P}_n,\ q \in \mathcal{P}_m,\ q \neq 0 \right\}$$

на $[a,b]$, в работах Чебышёва и его учеников родилось новое понятие альтернанса (сам термин «альтернанс» был введён позднее Н. И. Ахиезером). В дальнейшем, развивая идеи П. Л. Чебышёва об альтернансе, П. Кирхбергер [193], Э. Борель [123], Дж. В. Юнг (для многочленов) и Н. И. Ахиезер [18] и Дж. Уолш [235] (для дробно-рациональных функций) обосновали единственность наилучших приближений и установили теорему существования наилучшего приближения. По поводу вопросов, связанных с возникновением теории приближений, мы отсылаем читателя к монографиям [49, 231] и обзорным статьям [48, 150, 177].

Таким образом, множества $\mathcal{R}_{m,n}$ и $\mathcal{P}_n$ являются чебышёвскими множествами в $C[a,b]$. При этом элементы наилучшего равномерного приближения из $\mathcal{R}_{m,n}$ и $\mathcal{P}_n$ характеризуются в терминах альтернанса. Из этой характеризации вытекает, как мы увидим ниже, что множество $\mathcal{R}_{m,n}$ является чебышёвским солнцем в $C[0,1]$.

Множество обобщённо-рациональных функций

$$\mathcal{R}_{V,W} = \left\{ \frac{p}{q} \;\Big|\; p \in V,\ q \in W,\ q(x) > 0,\ x \in Q \right\}$$

является строгим протосолнцем в $C(Q)$; здесь V, W — произвольные выпуклые подмножества в действительном или комплексном $C(Q)$, Q — хаусдорфов компакт [127,141,153]). В отличие от классического случая $\mathcal{R}_{m,n}$ при приближении обобщёнными дробями $\mathcal{R}_{V,W}$ наилучшее приближение может не существовать или не быть единственным.

Напомним ещё ряд определений.

Непустое замкнутое множество M называется

— *α-солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ существует луч ℓ с вершиной x, такой что для любого $z \in \ell$ имеет место равенство $\rho(z, M) = \|z - x\| + \rho(x, M)$. Всякое солнце является α-солнцем. Отметим, что (в отличие от солнц) α-солнце может иметь собственные изолированные точки (примером является «двоеточие» $M := \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$ на плоскости с максимум-нормой);

— *δ-солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ найдётся последовательность $z_n \to x$, такая что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(z_n, M) - \rho(x, M)}{\|z_n - x\|} \to 1;$$

— *γ-солнцем*, если для любых $x \notin M$ и $r > 0$ существует последовательность (z_n), такая что $\rho(z_n, M) - \rho(x, M) \to r$, $\|z_n - x\| = r$.

Понятие α-солнца введено Л. П. Власовым в [40]; он же в [42] ввёл понятия γ- и δ-солнц.

Каждое α-солнце является γ-солнцем, а в конечномерном пространстве классы α-, δ- и γ-солнц совпадают. В банаховом пространстве классы δ- и γ-солнц равны.

В [129, 130] вводится понятие «солнца относительно сублинейного функционала» (в современных терминах — солнца относительно несимметричной нормы), что можно рассматривать как перенесение солнечности на общие экстремальные задачи, возникающие, в частности, в задачах теории приближений относительно несимметричных расстояний.

Некоторые соотношения между классами «солнц» будут рассмотрены в разделе 3.

Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, «связность»), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает

— свойством P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q;
— свойством P_0-Q, если $P_M x$ обладает свойством Q при всех $x \in X$;
— свойством B-Q, если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;
— свойством $\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

К примеру, замкнутое подмножество конечномерного пространства P-непусто, или является множеством существования (проксиминально).

Замечание 1.1. B-связные множества в литературе иногда называют V-связными (здесь буква «V» многими ассоциируется с Л. П. Власовым, который обозначал шары как $V(x,r)$). Наш термин B-связность согласуется с более привычным обозначением шаров как $B(x,r)$, а также с понятием «ограниченная связность», введённым Д. Вулбертом в 1960-х годах.

Множество называется *ограниченно компактным*, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно.

Точка $x \in X$ называется точкой *аппроксимативной компактности* для множества M ($x \in \mathrm{AC}(M)$), если из любой последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, удовлетворяющей соотношению $\|x - y_n\| \to \rho(x, M)$ (такая последовательность называется *минимизирующей*), можно выбрать сходящуюся к некоторой точке из M подпоследовательность. Нетрудно проверить, что каждая точка аппроксимативной компактности $x \in X$ является точкой существования (т. е. $P_M x \neq \varnothing$). Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если каждая точка $x \in X$ является точкой аппроксимативной компактности. Понятие аппроксимативно компактного множества было введено в [51]. Ясно, что ограниченно компактное множество аппроксимативно компактно.

К примеру, в L^p, $1 < p < \infty$, множество $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций аппроксимативно компактно, но не ограниченно компактно [51]. Однако в пространстве $C[0,1]$ множество $\mathcal{R}_{m,n}$ уже не является аппроксимативно компактным. Действительно, с одной стороны, известно [126, 202], что метрическая проекция на (чебышёвское множество) $\mathcal{R}_{m,n}$ имеет точки разрыва. С другой стороны, метрическая проекция на любое аппроксимативно компактное чебышёвское множество непрерывна (см., например, [43, следствие 2.2]).

Кратко касаясь общего вопроса о связи между классами аппроксимативно и ограниченно компактных множеств, отметим следующий результат: в любом бесконечномерном слабо компактно порождённом банаховом пространстве (т. е. в пространстве X, в котором существует слабо компактное множество, линейная оболочка которого плотна в X), в частности в любом сепарабельном банаховом пространстве, существует ограниченное аппроксимативно компактное, но не локально компактное (не ограниченно компактное) множество [29, 34, 77].

Нам понадобятся следующие классы пространств:

(B) — класс банаховых пространств;

(Rf) — класс рефлексивных пространств;

(R) — класс строго выпуклых пространств (т. е. пространств, единичная сфера которых не содержит невырожденных отрезков);

(S) — класс гладких пространств (в каждой точке $x \in S$ существует единственная опорная гиперплоскость); иными словами, $X \in (\mathrm{S})$, если норма пространства X дифференцируема по Гато во всех точках $x \neq 0$;

(SS) — класс сильно гладких пространств, т. е. таких $X \in (\mathrm{B})$, что для любой точки $x \in S$ и $f \in S^*$, $f(x) = 1$, и для любых последовательностей $(x_n) \subset X$ и $(r_n) \subset \mathbb{R}$, таких что $r_n \to \infty$ и $x \notin B(x_n, r_n) \supset B(0, 1 - 1/n)$,

$n \in \mathbb{N}$, верно включение

$$\{y \in X \mid f^*(y) < 1\} \subset \bigcup \{B(x_n, r_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Класс (SS) был введён Л. П. Власовым [39], он включает в себя локально равномерно выпуклые гладкие пространства и пространства, равномерно гладкие по каждому направлению;

(UR) — класс равномерно выпуклых пространств, т. е. таких пространств, что для каждого $\varepsilon \in (0,2]$ существует такое $\delta > 0$, что если $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, то $\|(x+y)/2\| \leqslant 1 - \delta$;

(LUR) — класс локально равномерно выпуклых пространств, т. е. таких банаховых пространств X, что для любых точек $x, x_1, x_2, \ldots \in X$ условие $\|x\| = \|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \lim \|(x + x_n)/2\|$ при $n \to \infty$ влечёт, что (x_n) сходится к x;

(CLUR) — класс пространств, обладающих свойством: из соотношений $x \in S$, $y_n \in S$, $\|x + y_n\|/2 \to 1$ следует существование сходящейся подпоследовательности у (y_n);

(ES) — класс пространств Ефимова—Стечкина; такие пространства характеризуются тем, что в них всякая гиперплоскость аппроксимативно компактна.

Понятно, что (ES) $\subset$ (Rf). Также отметим, что

$$(\mathrm{UR}) \subsetneqq (\mathrm{ES}),$$
$$(\mathrm{ES}) \not\subset (\mathrm{CLUR})$$

(см. [20, с. 11; 226]) и, далее,

$$(\mathrm{LUR}) \cap (\mathrm{Rf}) = (\mathrm{ES}) \cap (\mathrm{R}),$$
$$(\mathrm{CLUR}) \cap (\mathrm{Rf}) = (\mathrm{ES})$$

(см. [20, 21]). Иногда вместо «пространство Ефимова—Стечкина» говорят «рефлексивное пространство со свойством Кадеца—Кли» (или «рефлексивное пространство со свойством Радона—Рисса»). Термин «пространство Ефимова—Стечкина» был введён И. Зингером [226] в знак признания особых заслуг Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина в становлении геометрической теории приближений.

Существует много характеризаций пространств Ефимова—Стечкина (см. [21, 57, 60, 155, 205]). Из последних работ отметим [106]: пространство X является пространством Ефимова—Стечкина, если и только если X рефлексивно, любое замкнутое выпуклое подмножество единичной сферы S компактно и любая достижимая грань шара B является строго достижимой.

Отметим следующие включения:

$$(\mathrm{UR}) \subset (\mathrm{LUR}) \subset (\mathrm{CLUR}),$$
$$(\mathrm{LUR}) \subset (\mathrm{R}), \quad (\mathrm{LUR}) \subset (\mathrm{SS}) \subset (\mathrm{S}), \quad (\mathrm{ES}) \subset (\mathrm{UR}),$$
$$(\mathrm{UR}) \subset (\mathrm{Rf}) \cap (\mathrm{LUR}) \subset (\mathrm{Rf}) \cap (\mathrm{CLUR}) \subset (\mathrm{ES}) \subset (\mathrm{Rf}).$$

2. Отделимость. Критерий Колмогорова ближайшего элемента. Солнце и луна. Характеризации солнц

2.1. Отделимость солнц

В нелинейной теории приближений часто оказываются важными геометрические свойства, более слабые, чем выпуклость. В соответствии с геометрической формой теоремы Хана—Банаха замкнутые выпуклые множества характеризуются тем, что любую точку вне такого множества можно строго отделить от него посредством (замкнутой) гиперплоскости (открытого полупространства).

Оказывается, что аналогичный результат верен для солнц (строгих (прото)солнц) при замене открытого полупространства на открытый опорный конус: точка, не принадлежащая солнцу, строго отделяется от него посредством выпуклого открытого опорного конуса. Это утверждение содержится в теореме 2.1 (см., например, [43, гл. 3, комментарии на с. 57; 74, лемма 3; 131). Чтобы сформулировать этот результат, напомним, что множество

$$\mathring{K}(y,x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}\big(-ry+(r+1)x, (r+1)\|x-y\|\big) \tag{2.1}$$

называется *опорным конусом* $\mathring{K}(y,x)$ к шару $B(x,\|x-y\|)$ в его граничной точке y (см. [43,74]). Мы также будем использовать следующее эквивалентное представление для $\mathring{K}(y,x)$. Для точки s на единичной сфере S через $\mathcal{P}_s$ обозначим множество всех функционалов из S^*, достигающих максимума на S в точке s (S^* — единичная сфера сопряжённого пространства); пусть $\mathcal{E}_s$ — множество всех экстремальных точек выпуклого w^*-компактного множества $\mathcal{P}_s \subset S^*$. Далее, для различных точек $x, y \in X$, определим $p = (y-x)/\|y-x\|$. Тогда по [43, лемма 3.1]

$$\mathring{K}(y,x) = \big\{z \mid f(z) < f(y)\ \forall\, f \in \mathcal{P}_p\big\} = \big\{z \mid f(z) < f(y)\ \forall f \in \mathcal{E}_p\big\} = \\ = \big\{z \in X \mid [z,y] \cap \mathring{B}(x,\|x-y\|) \neq \varnothing\big\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что множество $X \setminus \mathring{K}(y,x)$ всегда является солнцем [74].

Теорема 2.1 (характеризация «солнц» в терминах отделимости). *Пусть X — линейное нормированное пространство.*

1. *Множество $\varnothing \neq M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдётся точка $y \in P_M x$, такая что $\mathring{K}(y,x) \cap M = \varnothing$.*
2. *Множество $\varnothing \neq M \subset X$ является строгим протосолнцем (строгим солнцем) в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ и для любого $y \in P_M x$ выполнено $\mathring{K}(y,x) \cap M = \varnothing$ (соответственно для каждой точки $x \notin M$ множество $P_M x$ непусто и выполнено $\mathring{K}(y,x) \cap M = \varnothing$ для любого $y \in P_M x$).*

3. *Множество* $\varnothing \neq M \subset X$ *является* α*-солнцем в* X *тогда и только тогда, когда для каждой точки* $x \notin M$ *найдётся точка* $y \in S\big(x, \rho(x, M)\big)$, *такая что* $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$.

Данный результат также верен в произвольных несимметрично нормированных пространствах [107].

Таким образом, многие результаты из линейной и выпуклой теории приближений переносятся без изменения на случай солнц и строгих (прото)солнц.

Аналогичный результат об отделимости γ-солнц получен Л. П. Власовым [44] в терминах отделимости при помощи клиноидов, представляющих собой обобщение понятия клина (конуса).

2.2. Солнечность и критерий Колмогорова ближайшего элемента

Б. Брозовский [135] (см. также [138, 160, 228, 240]) установил связь между понятием строго (прото)солнца и известным критерием Колмогорова ближайшего элемента. В связи с этим теорему 2.1 можно рассматривать как один из вариантов критерия Колмогорова (теоремы 2.2 и 2.3).

Множество M называется *множеством Колмогорова*, если из того, что $x \notin M$, $y_0 \in P_M x$, следует, что

$$\min_{f \in \mathcal{E}_{x-y_0}} f(y - y_0) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad y \in M, \tag{K}$$

где $\mathcal{E}_{x-y_0}$ — множество крайних точек (выпуклого) множества

$$\mathcal{P}_{x-y_0} := \{f \in S^* \mid f(x - y_0) = \|x - y_0\|\}.$$

Иными словами, M — множество Колмогорова, если для любого $y_0 \in P_M x$ выполнено

$$\{y \in M \mid f(y - y_0) > 0 \text{ для каждого } f \in \mathcal{E}_{x-y_0}\} = \varnothing.$$

Понятие множества Колмогорова было введено Б. Брозовским и Р. Вегманом [133, 141]. В теореме 2.3 мы увидим, что строгие протосолнца — это в точности множества Колмогорова.

Условие (K) всегда является достаточным для того, чтобы $y_0 \in P_M x$. Для множеств Колмогорова (строгих протосолнц) условие (K) также является необходимым для того, чтобы $y_0 \in P_M x$ (в точности как при характеризации наилучших приближений для выпуклых множеств).

Следующий результат, известный как критерий Колмогорова ближайшего элемента, содержится в [43, теорема 3.1; 111; 126, § II.2.A; 127; 129; 134; 135].

Теорема 2.2. *Пусть* M *— множество существования в линейном нормированном пространстве* X, $x \in X$, $y_0 \in M$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) M *— строгое солнце*;

2) *$y_0 \in P_M x$, если и только если y_0 — ближайшая точка к x из отрезка $[y_0, y]$ для любого $y \in M$;*
3) *M — множество Колмогорова.*

Теорема 2.3. *Для замкнутого подмножества M линейного нормированного пространства X следующие условия эквивалентны:*
1) *M — строгое протосолнце;*
2) *для любого $y \in M$ множество $P_M^{-1} y := \{x \in X \mid y \in P_M x\}$ — конус с вершиной y (возможно, невыпуклый или сводящийся к одной точке y);*
3) *M — множество Колмогорова.*

Рассмотрим некоторые применения критерия Колмогорова.

2.2.1. Множество обобщённо-рациональных функций

Пусть

$$\mathcal{R}_{V,W} = \{p/q \mid p \in V,\ q \in W,\ q(t) > 0,\ t \in Q\} —$$

множество обобщённо-рациональных функций в действительном или комплексном $C(Q)$, Q — хаусдорфов компакт, V,?W — выпуклые подмножества в $C(Q)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.4 [153].
1. *Элемент $y_0 \in \mathcal{R}_{V,W}$ является элементом наилучшего приближения для $x \in C(Q)$, если и только если*
$$\max_{\{t\colon \|x-y\|=|(x-y)(t)|\}} \operatorname{Re} \overline{(x-y)(t)}\,(y-y_0)(t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{R}_{V,W}.$$
2. *Элемент $y_0 \in \mathcal{R}_{V,W}$ является единственным элементом наилучшего приближения для $x \in C(Q)$, если и только если*
$$\max_{\{t\colon \|x-y\|=|(x-y)(t)|\}} \operatorname{Re} \overline{(x-y)(t)}\,(y-y_0)(t) < 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{R}_{V,W} \setminus \{y_0\}.$$

Теперь из теоремы 2.3 следует, что $\mathcal{R}_{V,W}$ — строгое протосолнце в $C(Q)$.

Аналогичный результат в более узком случае при линейных V, W был получен Б. Брозовским и Р. Вегманом [141]. Они показали, что $\mathcal{R}_{V,W}$ — множество Колмогорова в $C(Q)$ (и значит, строгое протосолнце).

С другими аппроксимативными свойствами $\mathcal{R}_{m,n}$ и $\mathcal{R}_{V,W}$ можно ознакомиться по [28, 126, 151], а также по [58, 78—81, 127, 162, 165] и др.

2.2.2. Приближение произведениями

Множество P функций вида

$$(ax + b)(cx + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

не является строгим солнцем в $C[-1, 1]$ (см. [166]). Этот результат также можно извлечь из критерия Колмогорова. Отметим, что P является множеством существования. Также отметим, что P не является солнцем.

2.2.3. Приближение экспоненциальными суммами

Множество *экспоненциальных сумм с неотрицательными коэффициентами*

$$E_n^+ := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{t_j x} \;\Big|\; \alpha_j \geqslant 0,\ t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

является чебышёвским солнцем в $C[a,b]$. Строгая протосолнечность E_n^+ вытекает из критерия Колмогорова с учётом того, что при приближении экспоненциальными суммами с неотрицательными коэффициентами наилучшие приближения характеризуются через альтернанс. Проксимальность множества E_n^+ в $C[a,b]$ установлена Э. Шмидтом [222, следствие 3]. Единственность наилучшего приближения вытекает из известной характеризации Данхема [163] множеств единственности в терминах тотальной регулярности (см. [127] применительно к E_n^+).

Множество *экспоненциальных сумм*

$$E_n := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{t_j x} \;\Big|\; \alpha_j,\ t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

асимптотически выпукло в смысле Браесса [127] и Майнардуса и Шведта [206]. (Множество $M \subset C(Q)$ называется *асимптотически выпуклым*, если для любых $y, y_0 \in M$ найдутся такие положительная функция $g \in C(Q)$ и непрерывное отображение $[0,1] \ni t \mapsto y_t \in M$, что $\|(1-tg)y_0 + tgy - y_t\| = o(t)$, $t \to 0$.) В [127] показывается, что асимптотически выпуклое множество $M \subset C(Q)$ является множеством Колмогорова и, следовательно, строгим протосолнцем. Как следствие, E_n является строгим протосолнцем.

В невырожденных случаях E_n не является замкнутым множеством. К примеру, для $y_m(x) := m(e^{x/m} - 1) \in E_2$, $m \in \mathbb{N}$, имеем $\|y_m(x) - x\| \to 0$. Соответственно, очень часто вместо множества E_n рассматривается его замыкание $\bar{E}_n$ — множество расширенных экспоненциальных сумм, которое уже является множеством существования в $C[a,b]$ (см., например, [126, § IV.2.B]).

Множества $\bar{E}_n$ расширенных экспоненциальных сумм возникают как пространства решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, у которых характеристические полиномы имеют лишь действительные корни:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = c(D - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k) y = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant n$, $D := d/dx$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$, $y \in C^n[a,b]$.

Приближения экспоненциальными суммами возникают в широком классе прикладных задач (задачи теплопроводности, структурного анализа, радиоактивного распада и т. п.), где приближённые значения функции естественно выражать в виде экспоненциальной суммы. При этом вектор параметров может быть записан как прямая сумма двух n-мерных векторов a_1 и a_2: $a = a_1 \oplus a_2$, $a_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $a_2 = (t_1, \ldots, t_n)$.

2.2.4. Приближение γ-полиномами

Пусть $Q \subset \mathbb{R}$, I — интервал на прямой $\mathbb{R}$, $\gamma \in C(Q, I)$. Функция

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma(t_j, x)$$

называется *γ-полиномом* [126, гл. VII]; порядок полинома u равен n, если функция u не может быть представлена в виде суммы $n-1$ слагаемых. Экспоненциальные суммы есть частный случай γ-полиномов с ядром $\gamma(t,x) = e^{tx}$. Часто также рассматривают ядра $\operatorname{ch} tx$, x^t (полиномы Мюнца), $(1+xt)^{-1}$, $\operatorname{arctg} tx$, $(x-t)_+^n$ и $\log(1+tx)$. Если ядро γ удовлетворяет условию расширенной знаковой регулярности [126, с. 184], то множество γ-полиномов удовлетворяет локальному и глобальному условию Хаара [127] и, как следствие, является строгим протосолнцем.

2.3. Связь солнечности и задачи глобальной минимизации

Замкнутое множество M называется *LG-множеством* (или *глобальным минимизатором*), если для любого $x \notin M$ каждый локальный минимум функции $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, является глобальным, что объясняет происхождение термина «LG-множество» (local—global). Иными словами, из того, что $y \in P_{M \cap V} x$, $V := B(y, \varepsilon)$, следует, что $y \in P_M x$.

Из критерия Колмогорова также вытекает (см. [141, с. 382]), что любое строгое солнце (строгое протосолнце) M является LG-множеством. Легко проверить, что обратное утверждение в общем случае неверно: дополнение к открытому шару не является солнцем, однако в строго выпуклом пространстве любой локальный минимум функции $\Phi_x(y) = \|y - x\|$ является глобальным.

Рассмотрим множество $S_{m,k}$ *сплайнов* (в смысле Шумакера) *степени* $m \geqslant 1$ с $k \geqslant 1$ *нефиксированными* (*кратными*) *узлами* на отрезке $[a, b]$. (За определением и некоторыми свойствами таких сплайнов мы отсылаем читателя к монографиям [211, 224].) Из теоремы 2.2 вытекает, что $S_{m,k}$ не является строгим солнцем в $C[a, b]$ (хорошо известно, что $S_{m,k}$ является множеством существования (Л. Шумакер, см., например, [211]), однако при приближении такими сплайнами множества глобальных и локальных наилучших приближений не совпадают (см. [126, 210]); при этом до сих пор не известен критерий, когда локальное наилучшее приближение в этом случае является глобальным. Также не известно, является ли $S_{m,k}$ солнцем. Множество $\hat{S}_{m,k}$ сплайнов (минимальной гладкости) с нефиксированными простыми узлами также является множеством существования (см. [66, следствие 2.3]). Из недавних результатов о приближении множествами $\hat{S}_{m,k}$ отметим работы Е. Д. Ливщица [66, 67, 201], в которых рассматривались вопросы устойчивости оператора ε-проекции на $\hat{S}_{m,k}$ в пространствах $C[0, 1]$ и $L^p[0, 1]$. Вопрос о солнечности $\hat{S}_{m,k}$ остаётся открытым.

Для формулировки результатов о связи солнечности и задачи глобальной минимизации нам потребуется напомнить несколько определений. Пусть $M \subset X$. Точка $y_0 \in M$ называется *лунной точкой*, если

$$y_0 \in \overline{M \cap \mathring{K}(y_0, x)} \quad \text{при условии, что} \quad x \in P_M^{-1}(y_0) \quad \text{и} \quad M \cap \mathring{K}(y_0, x) \neq \varnothing.$$

Множество M называется *луной*[1], если все его точки y_0 лунные.

Понятие луны было введено Д. Амиром и Ф. Дойчем [111] и далее изучалось в [126, 127, 137—139, 229, 237]. Луна является обобщением протосолнца: известно [111, 137], что строгое протосолнце всегда является LG-множеством (глобальным минимизатором), а LG-множество, в свою очередь, является луной.

Б. Брозовский и Ф. Дойч [137] назвали пространство (MS)-*пространством*, если в нём класс лун совпадает с классом строгих протосолнц (сокращение MS происходит от английского «every Moon in X is a Sun»). Известно [111], что пространства $C(Q)$ (Q — хаусдорфов компакт), $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство), $\ell^1(\mathrm{S})$ (S — произвольное множество), а также произвольное конечномерное полиэдральное пространство [138] являются (MS)-пространствами.

Пространство называется *квазиполиэдральным* [111], если для любого $x \in S$ найдётся окрестность $\mathcal{O}(x)$, такая что $[x, y] \subset S$ при любом $y \in \mathcal{O}(x) \cap S$. В конечномерном случае квазиполиэдральность совпадает с полиэдральностью; в случае $\dim X = \infty$ это уже не так: полиэдральное пространство (такое пространство имеет единичный шар, все сечения которого конечномерными подпространствами дают многогранник) не обязано быть квазиполиэдральным [171]. Д. Амир и Ф. Дойч [111], а также Р. Вегман [237] показали, что класс (MS) содержит все квазиполиэдральные пространства.

Проблема 1. Является ли бесконечномерное полиэдральное пространство (MS)-пространством? Иными словами, совпадает ли в таком пространстве класс лун и строгих протосолнц?

Отметим также, что никакое строго выпуклое пространство не является (MS)-пространством [111]: единичная сфера строго выпуклого пространства является луной, но не является строгим протосолнцем (и вообще солнцем ни в каком смысле). Соответственно, в строго выпуклых пространствах класс строгих солнц у́же класса лун. Другой пример луны, не являющейся строгим (прото)солнцем даётся подмножеством $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2 \geqslant 1\}$ евклидовой плоскости (см. [126]).

В заключение сформулируем теорему Брозовского—Вегмана [137, 138, 237] о связи лунности и строгой протосолнечности. Особенно примечательно то, что

[1] В [111] имеется примечание, что изначально Б. Брозовский и Ф. Дойч называли такие множества *знаково регулярными*. «Термин «луна» появился в понедельник («*Moon*day») 21 сентября 1969 г., что объясняет название» [111].

в (MS)-пространствах строгая протосолнечность характеризуется ORL-непрерывностью метрической проекции. Напомним, что P_M называется ORL-непрерывной [137] в точке x, если из условий $y \in P_M x$, $(x_n) \subset \{y + \lambda(x - y) \mid \lambda \geqslant 1\}$, $x_n \to x$ следует, что $\rho(y, P_M x_n) \to 0$ (см. также § 4).

Теорема 2.5. *Пусть M — подмножество линейного нормированного пространства X. Тогда из каждого из следующих утверждений следует последующее утверждение*:

1) *M — строгое протосолнце*;
2) *метрическая проекция P_M ORL-непрерывна во всех точках*;
3) *M — LG-множество* (*глобальный минимизатор*);
4) *M — луна.*

Если X — (MS)-пространство, то условия 1)—4) *эквивалентны.*

2.4. Характеризации солнц

Л. П. Власов [233] получил характеризацию пространств, в которых всякое двухточечное множество является α-солнцем (γ-солнцем). В частности [233], если в банаховом пространстве X всякое двухточечное подмножество является α-солнцем (γ-солнцем), то X не сепарабельно (соответственно не является асплундовским пространством). Также в [233] даются необходимые и достаточные условия того, что заданное двухточечное множество является α-солнцем (γ-солнцем).

Геометрическая характеризация строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ получена в [3].

Строгие протосолнца в пространстве $C(Q)$ были охарактеризованы В. Янгом, Ч. Ли и Дж. А. Ватсоном [240] в терминах критерия Колмогорова, критерия Папини и свойства слабой промежуточности. В $C(Q, X)$ и $C_0(Q, X)$ строгие протосолнца были охарактеризованы П. Шварцем [223].

Понятие регулярного подмножества линейного нормированного пространства было введено Б. Брозовским [133, § 1] (см. также [127]) и независимо Ч. Данхемом [163] в случае $C(Q)$, а для общих пространств — в [141] (см. также [229]). Сначала дадим определение в случае приближения в равномерной норме.

Замкнутое множество $M \subset C(Q)$ называется *регулярным*, если для любых $x, y \in M$ и для любого замкнутого множества $A \subset Q$, такого что $\inf\limits_{t \in A} |x(t) - y(t)| > 0$, найдётся последовательность (v_n) точек из M, такая что

$$v_n \to y \quad \text{и} \quad \bigl(v_n(t) - y(t)\bigr)\bigl(x(t) - y(t)\bigr) > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in A.$$

Геометрически условие регулярности в $C(Q)$ достаточно прозрачно. Пусть M — регулярное замкнутое подмножество пространства $C(Q)$ и $x, y \in M$. Тогда x и y можно соединить кривой $k(\tau) \subset M$, проекция которой содержится в относительной внутренности «прямоугольника» $[\![x, y]\!] := \{z \mid z(t) \in [x(t), y(t)]\}$ (в дальнейшем такой «прямоугольник» мы будем называть интервалом), при этом если $x(t_0) \neq y(t_0)$ в некоторой точке t_0, то координатная кривая $k(\tau)(t_0)$ строго монотонна по τ.

К примеру, если M — регулярное подмножество пространства $\ell^\infty(n)$ и $x, y \in M$, причём все координаты x и y различны, то x и y можно соединить строго монотонной кривой $k(\tau)$, содержащейся в M; последнее означает, что координатные функции $k_i(\tau)$ строго монотонны по τ для любого $i = 1, \dots, n$.

Пусть теперь X — произвольное линейное нормированное пространство. Непустое подмножество $M \subset X$ называется *регулярным* (по Брозовскому—Вегману) в точке $v_0 \in M$ (см. [141, § 4; 229, § 5.3]), если для любого $x \notin M$, для любого $v \in M$, для любого $\lambda > 0$ и любого w^*-замкнутого $A \subset \operatorname{ext} S^*$, содержащего $\mathcal{E}_{x-v_0}$ и такого, что $f(v - v_0) > 0$, $f \in A$, найдётся элемент $v_\lambda \in M$, такой что

1) $f(v_\lambda - v_0) > f(x - v_0) - \|x - v_0\|$ при всех $f \in A$;
2) $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$.

Замкнутое множество M называется *регулярным*, если оно регулярно в каждой своей точке.

Здесь, как и выше, $\Sigma_x := \{f \in S^* \mid f(x) = \|x\|\}$ для $x \in X$, $\mathcal{E}_x$ — множество крайних точек Σ_x, $\operatorname{ext} S^*$ — множество крайних точек единичной сферы S^* сопряжённого пространства X^*. Следующий результат установлен Б. Брозовским и Р. Вегманом [141, лемма 1].

Предложение 2.1 (вариационная лемма). *Пусть v_0 — регулярная точка множества M, $x \in X$, и пусть $v \in M$ — такая точка, что $f(v - v_0) > 0$ при всех $f \in \mathcal{E}_{x-v_0}$. Тогда для каждого $\lambda > 0$ множество*

$$U(\lambda, v_0) := \{y \in M \mid \|y - v_0\| < \lambda\}$$

содержит точку y_λ, такую что

$$\|x - y_\lambda\| < \|x - v_0\|.$$

Из вариационной леммы следует, что множество Колмогорова (строгое протосолнце) является LG-множеством (теорема 2.5).

Следующий результат содержится в работах Б. Брозовского и Р. Вегмана [141, предложение 8] и Л. П. Власова [43].

Теорема 2.6. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *M является строгим протосолнцем;*
2) *$\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$ для любых $x \notin M$, $y \in P_M x$;*
3) *M регулярно;*
4) *M удовлетворяет критерию Колмогорова: $y_0 \in P_M x$, если и только если для любого $y \in M$ найдётся функционал $f \in S^*$, такой что*

$$f(x - y_0) = \|x - y_0\| \quad \textit{и} \quad f(y - y_0) \leqslant 0.$$

Ещё одно условие типа регулярности (H-регулярность), эквивалентное условиям теоремы 2.6, было предложено М. Зоммером [230]. Структурные свойства строгих протосолнц в пространстве $C_0(Q)$ в терминах регулярности и критерия Колмогорова изучались Р. Вегманом [237].

3. Выпуклость солнц. Соотношения между классами солнц. Светимость солнц

Из геометрической формы теоремы Хана—Банаха легко вытекает, что всякое выпуклое множество является строгим протосолнцем, а всякое выпуклое множество существования — строгим солнцем (см., например, [43, следствие 3.1; 229, с. 83]). В. Кли [194] и независимо Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [50] (см. также [38; 111; 228, с. 344]) установили частично обратный результат, именно: в гладком линейном нормированном пространстве всякое солнце выпукло (этот результат доказывался ими для строгих солнц, перенесение на случай солнц тривиально). Отметим следующую характеризацию гладких пространств: линейное нормированное пространство является гладким, если и только если всякое солнце (строгое солнце) выпукло (см., например, [126, теорема 2.5]). Для строгих протосолнц ответ оказывается иным.

Сформулируем данные результаты более аккуратно (см. [43, теоремы 3.9, 3.10]).

Непустое замкнутое подмножество M называется *почти выпуклым*, если для любого непересекающегося с M замкнутого шара $B(x,r)$ найдётся замкнутый шар $B(y,R)\supset B(x,r)$ сколь угодно большого радиуса R, также не пересекающийся с M. Данное понятие введено Л. П. Власовым [39]. (В зарубежной литературе почти выпуклые множества иногда называют *аппроксимативно выпуклыми* (см., например, [125]), что приводит к некоторой путанице, поскольку под последними иногда (см. [38,39]) понимаются P-выпуклые множества (множества, на которые метрическая проекция выпуклозначна), а иногда (см. [117]) множества M со свойством $\rho\big((x+y)/2,M\big)\leqslant 1$ для любых $x,y\in M$.)

В теореме 3.1, восходящей к Н. В. Ефимову, С. Б. Стечкину и В. Кли, рассматриваются условия на пространство, при которых всякое солнце выпукло. В приводимом виде теорема 3.1 сформулирована Л. П. Власовым [43]. Теорема 3.2 содержится в [43].

Теорема 3.1. *Следующие условия на банахово пространство X эквивалентны:*

а) *X гладко;*
б) *каждое α-солнце в X выпукло;*
в) *каждое солнце в X выпукло;*
г) *каждое строгое солнце в X выпукло;*
д) *каждое P-выпуклое строгое солнце в X выпукло.*

Теорема 3.2. *Следующие условия на банахово пространство X эквивалентны:*

а) *X^* строго выпукло*;
б) *каждое δ-солнце (γ-солнце, почти выпуклое множество) в X выпукло*;
в) *класс δ-солнц (γ-солнц, почти выпуклых множеств) в X совпадает с классом непустых выпуклых замкнутых подмножеств X.*

В связи с теоремой 3.2 отметим, что класс банаховых пространств, у которых сопряжённое строго выпукло, у́же класса всех гладких банаховых пространств (см. [232]). При этом понятно, что если $X^* \in (\mathrm{R})$, то $X \in (\mathrm{S})$.

Как следствие, в гладком рефлексивном пространстве класс δ-солнц (γ-солнц, почти выпуклых множеств) совпадает с классом непустых выпуклых замкнутых множеств.

Для строгих протосолнц ответ на вопрос об их выпуклости отличен от вопроса о выпуклости строгих солнц. При этом оказывается, что в общей ситуации строгое протосолнце (если уж оно «совсем не строгое солнце») не является выпуклым и даже почти выпуклым множеством! Соответствующие примеры строятся ниже (примеры 3.1, 3.2).

Начнём со следующего простого примера.

Пример 3.1. Если X нерефлексивно, то в X содержится невыпуклое строгое протосолнце (дополнение к антипроксиминальной гиперполосе).

Действительно, в соответствии с классической теоремой Джеймса, если X нерефлексивно, то существует функционал $f \in S^*$, не достигающий нормы на S. Гиперплоскость, порождаемая таким функционалом, замкнута и антипроксиминальна. Взяв две параллельные гиперплоскости, порождаемые таким функционалом, и взяв дополнение к открытой гиперполосе между этими гиперплоскостями, мы получим замкнутое невыпуклое антипроксиминальное строгое протосолнце, не являющееся строгим солнцем.

Можно также построить пример антипроксиминального строгого протосолнца в виде «клина». Пусть f, g, $f \neq \lambda g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), — два функционала, не достигающие своей нормы (легко убедиться, что таких функционалов для $X \notin (\mathrm{Rf})$ существует по крайней мере два[1]). Ясно, что замкнутое (антипроксиминальное) множество $M = X \setminus \{x \mid f(x) < 1,\ g(x) < 1\}$ является невыпуклым строгим протосолнцем (это следует, например, из теоремы 2.3).

Пример 3.2. Построим пример невыпуклого строгого протосолнца (замкнутой выпуклой каверны) в некотором гладком сепарабельном банаховом пространстве с дифференцируемой по Фреше нормой. В этом примере, как и выше, искомое протосолнце M антипроксиминально. В. С. Балаганский [113] построил пример строго выпуклого банахова пространства X (соответствующим образом перенормированное подпространство пространства c_0 конечной коразмерности) с дифференцируемой по Фреше нормой (такое X заведомо гладкое) и в нём —

[1]Вообще говоря, если X нерефлексивно, то множество функционалов из X^*, не достигающих своей нормы, достаточно велико. Отметим следующий результат [189]. Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда или $S^* \setminus \mathrm{NA}$ w-плотно в S^* или $X \in (\mathrm{Rf})$. Здесь NA — множество, функционалов из S^*, достигающих своей нормы.

замкнутое антипроксиминальное выпуклое ограниченное тело C. Воспользуемся ещё одним утверждением Балаганского [19, лемма 1]: если $K \subset X$ — выпуклое замкнутое антипроксиминальное тело в банаховом пространстве E, то множество $\overline{E \setminus K}$ тоже антипроксиминально. Как следствие, замкнутое множество $M := \overline{X \setminus C}$ антипроксиминально и является невыпуклым строгим протосолнцем в гладком пространстве X. Ясно, что такое M не является почти выпуклым.

Отметим, что пространство из примера 3.2 имеет дифференцируемую по Фреше норму, но не является рефлексивным, поскольку в рефлексивном пространстве выпуклое замкнутое множество является множеством существования.

Коротко остановимся на вопросе о том, в каких пространствах класс строгих солнц совпадает с классом строгих протосолнц. Данный вопрос ранее не рассматривался.

Непустое замкнутое множество M называется *β-солнцем* [43], если для любых $x \notin M$ и $r > 0$ существует z, для которого $\rho(z, M) - \rho(x, M) = \|z - x\| = r$. Понятно, что α-солнце является β-солнцем, а β-солнце — γ-солнцем (почти выпуклым множеством). Отметим, что строгое протосолнце может не быть β-солнцем (см. пример 3.2).

Имеют место следующие результаты о совпадении классов солнц. В теореме 3.3 первый результат установлен Л. П. Власовым [42; [43], теорема 3.6], по поводу второго см. [20, предложение 2.1; 21, предложение 2.2].

Теорема 3.3. *Пусть $X \in (\mathrm{LUR})$, и пусть $M \subset X$ является β-солнцем или γ-солнцем существования. Тогда M — чебышёвское солнце.*

Теорема 3.4. *В равномерно выпуклом пространстве класс строгих солнц совпадает с классом строгих протосолнц и совпадает с классом чебышёвских солнц.*

Доказательство. Данный результат фактически доказан в [22] для множеств, удовлетворяющих опорному условию слабой выпуклости. Напомним [22], что подмножество M пространства X удовлетворяет *опорному условию слабой выпуклости с константой* $R > 0$, если из того, что $\rho(x, M) < R$ и $y \in P_M x$, следует неравенство

$$\rho\left(y + \frac{R}{\|x - y\|}(x - y), M\right) \geqslant R,$$

которое, как легко убедиться, эквивалентно неравенству

$$\rho\left(y + \frac{R}{\|x - y\|}(x - y), M\right) = R.$$

Множества, удовлетворяющие опорному условию слабой выпуклости при любом $R > 0$ — это в точности строгие протосолнца. В [22, лемма 4.2] показано, что если X — равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_X, множество $M \subset X$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R, $\rho(x,M) < R$ и $\varepsilon > 0$, то для множества

$$P_M^\varepsilon x := \{y \in M \mid \|x-y\| \leqslant \rho(x,M) + \varepsilon\}$$

почти наилучших приближений справедливо неравенство

$$\delta_X\left(\frac{\operatorname{diam} P_M^\varepsilon x}{4R}\right) < \frac{\varepsilon}{R - \rho(x,M)}.$$

Как следствие, $\operatorname{diam} P_M^\varepsilon x \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что влечёт, что M обладает чебышёвским слоем величины R [22, лемма 4.3]. Поскольку R произвольно, то M — чебышёвское солнце. $\square$

Проблема 2. Охарактеризовать банаховы пространства, в которых всякое строгое протосолнце является строгим солнцем.

С проблемой выпуклости солнц связана следующая задача: охарактеризовать (конечномерные) пространства (размерности не меньше 3), в которых всякое *ограниченное* строгое солнце (солнце, связное α-солнце) выпукло. В двумерном случае задача о выпуклости чебышёвских множеств совпадает с задачей о выпуклости ограниченных чебышёвских множеств: всякое чебышёвское множество на нормированной плоскости X выпукло, если и только если X гладко [149, 203, 209]. В случае $\dim X \geqslant 3$ это уже не так.

Напомним, что И. Г. Царьков (см. также [92,93,144]) установил [90], в частности, что в конечномерном линейном нормированном пространстве X всякое ограниченное чебышёвское множество (ограниченное P-ацикличное[1] множество, ограниченное B-ацикличное множество) выпукло тогда и только тогда, когда множество экстремальных точек единичной сферы S^* сопряжённого пространства плотно в ней. Такое пространство не обязано быть гладким в размерности не меньше 3. Примеры таких пространств приведены в [90, 144]. По поводу бесконечномерного случая см. [92,93]. Также отметим, что И. Г. Царьков показал [95, теорема 2.4], что в конечномерном банаховом пространстве множество экстремальных точек сопряжённой сферы $S^* \subset X^*$ плотно в ней, если и только если каждое ограниченное множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло.

По-видимому, можно полагать, что для ограниченных строгих солнц (и даже солнц) ответ будет аналогичен приведённой выше характеризации для ограниченных чебышёвских множеств. Этот вопрос имеет давнюю историю, и до сих пор полного ответа на него нет.

Проблема 3. Охарактеризовать (конечномерные) пространства (размерности не меньше 3), в которых всякое *ограниченное* строгое солнце (солнце, связное α-солнце) выпукло.

В связи с проблемой 3 ещё раз отметим, что существуют примеры негладких конечномерных пространств (размерности не меньше 3), в которых всякое ограниченное чебышёвское множество (ограниченное чебышёвское солнце) выпукло, но существует неограниченное невыпуклое чебышёвское множество.

[1] Подробнее об ацикличных множествах см. раздел 5.

Отметим ещё один результат о совпадении классов «солнц».

Теорема 3.5. *Рассмотрим следующие условия на множество M линейного нормированного пространства X:*

а) *M — δ-солнце;*

б) *M — γ-солнце;*

в) *M почти выпукло.*

Тогда б) *эквивалентно* в), *а если X банахово, то все три условия эквивалентны.*

В теореме 3.5 эквивалентность б) и в) установлена Л. П. Власовым [42; 43, теорема 3.3], им же построен пример δ-солнца, не являющегося γ-солнцем [43, следствие 3.2] (естественно, в неполном линейном нормированном пространстве).

Другие результаты о соотношениях между классами солнц можно найти в [20, 21, 43, 63].

Отметим следующий достаточно простой результат. Если M — строгое протосолнце, то

$$\operatorname{conv} P_M x \subset S\bigl(x, \rho(x, M)\bigr) \tag{3.1}$$

(см., например, [141, предложение 13], а также [229, соотношение (5.32)]; отметим, что для солнц (3.1) уже перестаёт быть верным даже в плоском случае). В дополнение к данному утверждению отметим, что (3.1) также выполняется, если M — множество существования, а оператор метрического проектирования P_M полунепрерывен снизу в точке x (см. [216, с. 56]).

Приведём следующее важное свойство солнц (легко следующее из теоремы 2.1 и представления (2.2) для опорного конуса): если y_0 — точка светимости множества M для точки $x \in X \setminus M$ и если $y \in M$, то

$$[y_0, y] \cap \mathring{B}(x, \rho(x, M)) = \varnothing;$$

если при этом $y \in P_M x$, то

$$[y_0, y] \subset S\bigl(x, \rho(x, M)\bigr) \tag{3.2}$$

(при этом вовсе не обязательно, что $[y, y_0] \subset M$ даже для строгого солнца M).

Замечание 3.1. В связи с (3.2) отметим, что в пространствах размерности не меньше 3 строгое солнце M не обязано быть P-звёздным (множество M называется звёздным относительно центра x, если $[x, y] \subset M$ для любого $y \in M$). Пример не-P-звёздного строгого солнца в $\ell^\infty(3)$ даётся множеством

$$\Bigl\{x = \bigl(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\bigr) \Bigm| x^{(2)} = \frac{1}{x^{(1)}},\ 1 \leqslant x^{(1)} \leqslant 2,\ 0 \leqslant x^{(3)} \leqslant 1\Bigr\}$$

(для точек «сверху» и «снизу» множества шар касается множества по куску гиперболы). По-видимому, можно надеяться, что в конечномерных X солнца P-стягиваемы и P-ацикличны (в конечномерном случае эти два условия эквивалентны в классе монотонно линейно связных множеств (определение монотонной линейной связности даётся ниже в разделе 8)); частичный ответ на этот вопрос даётся в разделе 8. Ответ на вопрос о P-звёздности солнц положителен в двумерных X (см. [10, 118]): для солнца M в двумерном пространстве $P_M x$ является точкой, отрезком или объединением двух отрезков, имеющих одну общую концевую точку.

В заключение коротко остановимся на вопросе о светимости границы солнца. Иными словами, нас интересует вопрос, все ли граничные точки солнц являются точками светимости (т. е. удовлетворяют (1.1) при некоторых x).

Для граничной точки y подмножества M пространства X определим *метрический прообраз* точки y (называемый также иногда *приходом* точки):

$$P_M^{-1}(y) = \{x \in X \setminus M \mid y \in P_M x\}.$$

Имеет место следующий результат [1].

Предложение 3.1. *В конечномерном пространстве X каждая граничная точка солнца является его точкой светимости.*

В бесконечномерном случае это уже не так. В качестве примера рассмотрим гильбертов кирпич

$$M := \left\{x \in \ell^2 \;\middle|\; |x^{(n)}| \leqslant \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

в пространстве ℓ^2. Так как множество M выпукло и компактно, то оно является строгим солнцем. Известно (см., например, [76, пример 1.9.1]), что граничную точку $0 \in \operatorname{bd} M$ нельзя (нестрого) отделить от M гиперплоскостью. Из этого следует, что точка 0 не является точкой светимости множества M. Действительно, если бы $0 \in P_M x$ для какого-то $x \notin M$, то по теореме 2.1 опорный конус $\mathring{K}(0, x)$ не пересекался бы с M. Пространство ℓ^2 гладкое, поэтому опорный конус — открытое полупространство, граница которого (нестрого) отделяет точку 0 от M. Получили противоречие с предыдущим утверждением об отделимости.

В связи с предложением 3.1 отметим, что для произвольного собственного замкнутого подмножества *существования* M произвольного метрического пространства имеет место достаточно очевидное равенство

$$\operatorname{cl}\{y \in \operatorname{bd} M \mid P_M^{-1}(y) \neq \varnothing\} = \operatorname{bd} M,$$

т. е. множество его граничных точек с непустым метрическим прообразом всюду плотно на границе $\operatorname{bd} M$ множества M.

4. Соотношения между классами связности. Связность чебышёвских множеств

Рассмотрим следующие классы множеств $M \subset X$:

($\mathcal{F}$) — класс непустых замкнутых множеств;

$(\mathcal{E})$ — класс множеств существования;

$(\mathring{B})$ — класс $\mathring{B}$-связных множеств;

(B) — класс B-связных множеств;

(P) — класс P-связных множеств ($P_M x \neq \varnothing$ и связно для любого $M \in (P)$);

(P_0) — класс P_0-связных множеств ($P_M x$ связно для любого $M \in (P_0)$).

Имеет место следующий результат, установленный независимо Н. В. Невесенко [72] и В. А. Кощеевым.

Теорема 4.1. *В линейном нормированном пространстве X P-связное множество является B-связным, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *P_M полунепрерывна сверху;*

б) *P_M полунепрерывна снизу.*

Н. В. Невесенко [73] также приводит ряд других условий, гарантирующих B-связность P-связного множества. Теорема 4.1 обобщает результат Л. П. Власова [43, теорема 4.1], согласно которому в линейном нормированном пространстве P-связное множество с полунепрерывной сверху метрической проекцией $\mathring{B}$-связно.

Отметим также следующий результат (см. [91]), в котором условие на множество в теореме 4.1 ослабляется за счёт ограничения на пространство.

Теорема 4.2. *В пространстве Ефимова—Стечкина замкнутое P_0-связное множество M $\mathring{B}$-связно, т. е. $(P_0) \subset (\mathring{B})$.*

Замечание 4.1. Теорема 4.2 восходит к одному результату Л. П. Власова [41; 43, теорема 4.2], который рассматривал равномерно выпуклые пространства и P-связные множества (заведомо являющиеся множествами существования) без упоминания о множествах единственности. Однако при доказательстве теоремы Л. П. Власов не опирался на свойство существования элемента наилучшего приближения. И. Г. Царьков распространил теорему 4.2 на P_0-связные множества и пространства Ефимова—Стечкина (см. также теорему 4.9 ниже). На несимметрично нормированные равномерно выпуклые пространства (такие пространства всегда метризуемы) теорема 4.2 частично обобщена П. А. Бородиным [32]: в равномерно выпуклом несимметрично нормированном пространстве P-связное множество B-связно. Е. Н. Сосов [83] перенёс теорему 4.1 на равномерно выпуклые геодезические пространства.

В общем случае теорема 4.2 не имеет места: в произвольном банаховом пространстве чебышёвское множество не обязано быть связным; известный пример Данхема несвязного чебышёвского множества в $C[0,1]$ показывает, что

$$(P) \neq (B) \cap (\mathcal{E}).$$

Множество M называется *ε-компактным* [43], если для любого $x \notin M$ найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $P_{\varepsilon,M} x$ компактно; здесь

$$P_{\varepsilon,M} := M \cap B(x, \rho(x, M) + \varepsilon)$$

(ε-проекция, или множество почти наилучших приближений). Отметим, что любое ε-компактное множество всегда аппроксимативно компактно, а ограниченно компактное всегда ε-компактно.

Теорема 4.3. *В пространстве Ефимова—Стечкина локально компактное, P-компактное и P-связное множество ε-компактно, аппроксимативно компактно, B-связно и обладает полунепрерывной сверху метрической проекцией.*

В частном случае равномерно выпуклых пространств теорема 4.3 восходит к Л. П. Власову [43, теорема 4.3]. Для доказательства теоремы 4.3 воспользуемся тем, что если $X \in (\mathrm{ES})$, то $(P_0) \cap (\mathcal{F}) \subset (\mathring{B})$ (теорема 4.2). Далее мы пользуемся тем, что всякое локально компактное, P-компактное и $\mathring{B}$-связное множество M аппроксимативно компактно и ε-компактно и его метрическая проекция полунепрерывна сверху [43, теорема 2.2]. Окончательно B-связность обеспечивается теоремой 4.4.

Легко установить (см. [43, предложение 0.5]), что

$$(B) \subset (\mathring{B}).$$

Частичный ответ на обратный вопрос даётся следующей теоремой (см. [61, теорема 8], а также теорему 4.1).

Теорема 4.4. *В линейном нормированном пространстве аппроксимативно компактное и $\mathring{B}$-связное множество B-связно, т. е.*

$$(\mathrm{AC}) \cap (\mathring{B}) \subset (B).$$

Отметим следующие факты (см. [91]). В каждом бесконечномерном банаховом пространстве существует P_0-связное, но не P-связное замкнутое множество; в каждом сепарабельном бесконечномерном банаховом пространстве существует $\mathring{B}$-связное, но не B-связное замкнутое множество.

Проблема 4. Верно ли, что в каждом бесконечномерном пространстве существует $\mathring{B}$-связное, но не B-связное замкнутое множество?

Проблема 5. Верно ли, что в произвольном пространстве $(P) \cap (\mathring{B}) \subset (B)$?

Рассмотрим класс множеств

$$(\mathring{B}_l) = \{M \subset X \mid \text{для всех } x \in X \text{ и всех } r \geqslant 0 \ \mathring{B}(x, r) \cap M \text{ линейно связно}\}.$$

Ясно, что если $M \in (\mathring{B}_l)$, то M линейно связно.

Отметим следующий общий результат (см. [91, лемма 1].

Пусть X — банахово пространство. Тогда

$$(\mathring{B}_l) \cap (\mathcal{F}) = (\mathring{B}) \cap (\mathcal{F}). \tag{4.1}$$

Таким образом, в банаховом пространстве каждое замкнутое $\mathring{B}$-связное множество линейно связно. Для незамкнутых множеств это неверно даже в $X = \mathbb{R}^2$ (соответствующий пример построен Е. В. Щепиным, см. [91, с. 178]).

Остановимся на вопросе о связности чебышёвских множеств. Исследование связности чебышёвских множеств началось в 1960-х гг. с работ Д. Вулберта

[238, 239], Й. Блаттера, Д. Вулберта, П. Морриса [122] и Л. П. Власова [41] и было продолжено в [8, 11, 32, 43, 56, 65, 91, 95, 136, 139, 140, 164, 195, 196, 212] и др.

При исследовании связности чебышёвских множеств Д. Вулберт [238, 239] ввёл понятие ограниченно связного множества (в нашей терминологии — $\mathring{B}$-связного множества) и установил [239], что в произвольном банаховом пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является $\mathring{B}$-связным (ср. с теоремой 4.1). Это утверждение было развито в [122, теорема 14], где установлено, что P-компактное множество существования с H-непрерывной метрической проекцией в линейном нормированном пространстве $\mathring{B}$-связно и P-связно. В. Поллул [216, с. 56, теорема 2] усилил этот результат, показав, что в линейном нормированном пространстве множество существования M с непрерывной (т. е. одновременно полунепрерывной сверху и снизу) метрической проекцией $\mathring{B}$-связно и P-связно (в случае аппроксимативной компактности такое M B-связно (теорема 4.4)). В дальнейшем условие непрерывности P_M было несколько ослаблено Б. Брозовским и Ф. Дойчем [139] (см. теорему 4.5 ниже).

Пусть $M \subset X$ и $x_0 \in X$. Напомним, что метрическая проекция P_M *ORU-непрерывна* (от англ. «Outer Radially Upper continuous») в точке x_0 (см. [137, 139]), если для любого $y_0 \in P_M x_0$ и любого открытого $W \supset P_M x_0$ найдётся окрестность U точки x_0, такая что $P_M x \subset W$ при любом $x \in U \cap \{y_0 + \lambda(x_0 - y_0) \mid \lambda \geqslant 1\}$. Ясно, что полунепрерывность сверху влечёт ORU-непрерывность.

Метрическая проекция P_M *IRL-непрерывна* (от англ. «Inner Radially Lower continuous») в точке x_0, если для любого $y_0 \in P_M x_0$ и любого открытого W, такого что $W \cap P_M x_0 \neq \varnothing$, найдётся окрестность U точки x_0, такая что $P_M x \cap W \neq \varnothing$ при любом $x \in U \cap \{y_0 + \lambda(x_0 - y_0) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Ясно, что из полунепрерывности снизу вытекает IRL-непрерывность. Отметим, что если M выпукло или является чебышёвским множеством, то метрическая проекция P_M IRL-непрерывна [139, следствие 3.4].

Следующий результат содержится в [139].

Теорема 4.5. *Пусть M — множество существования, для которого метрическая проекция IRL- и ORU-непрерывна. Тогда M $\mathring{B}$-связно и P-связно.*

Метрическая проекция на чебышёвское солнце IRL- и ORU-непрерывна [139]. Как следствие, имеет место следующее утверждение, в котором первое утверждение установлено Б. Брозовским и Ф. Дойчем [139, следствие 5.3], а второе вытекает из первого с учётом теоремы 4.4.

Теорема 4.6. *Чебышёвское солнце $\mathring{B}$-связно. Аппроксимативно компактное чебышёвское солнце B-связно.*

Отметим следующий результат (см. [239, теорема 3]).

Теорема 4.7. *Для локально компактного чебышёвского множества в банаховом пространстве следующие свойства эквивалентны*:

1) *метрическая проекция* P_M *непрерывна*;
2) M $\mathring{B}$*-связно*;
3) M — *солнце.*

Отметим следующие две теоремы И. Г. Царькова о связности чебышёвских и P_0-связных множеств [91, 94]. В частности, из теоремы 4.9 и (4.1) следует, что в пространстве Ефимова—Стечкина всякое чебышёвское множество линейно связно [91].

Теорема 4.8. *Всякое локально компактное множество единственности (в частности, локально компактное чебышёвское множество) в гладком пространстве Ефимова—Стечкина выпукло.*

Теорема 4.9. *Имеют место следующие утверждения*:

$$\begin{aligned} X \in (\mathrm{ES}) &\implies (P_0)\cap(\mathcal{F}) \subset (\mathring{B}); \\ X \in (\mathrm{LUR})\cap(\mathrm{Rf})\ [=(\mathrm{ES})\cap(\mathrm{R})] &\implies (P_0) \subset (B); \\ X \in (\mathrm{CLUR}) &\implies (P_0)\cap(\mathring{B})\cap(\mathcal{F}) = (B)\cap(\mathcal{F}); \\ X \in (\mathrm{Rf})\cap(\mathrm{CLUR}) &\implies (P_0)\cap(\mathcal{F}) = (B)\cap(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Из отрицательных результатов отметим следующие. Если $X \notin (\mathrm{Rf})$, то

$$\begin{gathered} (P_0)\cap\mathcal{F} \not\subset (\mathring{B}); \\ (P_0)\cap\mathcal{F} \neq (B)\cap(\mathcal{F}). \end{gathered}$$

Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть пример 3.1 (дополнение к антипроксиминальной гиперполосе). Второе утверждение установлено в [91].

Ч. Данхем [164] построил пример *несвязного чебышёвского множества* в $C[0,1]$ (множество в примере Данхема локально компактно, но не аппроксимативно компактно и не является солнцем). В. Кли [195, 196] построил пример дискретного чебышёвского множества в пространстве $l^1(\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ — бесконечный регулярный кардинал, такой что $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{n}$ (множество в примере Кли также не является солнцем: солнце не может иметь собственных изолированных точек). Пример дискретного чебышёвского множества в сепарабельном метрическом пространстве построен С. Пападопулу [212]. Стоит также отметить, что известный пример Джонсона невыпуклого ограниченного чебышёвского множества в предгильбертовом пространстве l_0^2 (см. [21, § 2; 158; 188]) может быть видоизменён таким образом, что полученное чебышёвское множество будет «несвязной пеной» [190, 191].

Среди нерешённых проблем в этой области выделим следующие.

Проблема 6. Охарактеризовать пространства, в которых каждое чебышёвское множество связно.

Проблема 7. Охарактеризовать пространства, в которых чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем. (В частности, в каких пространствах аппроксимативно компактное чебышёвское множество является солнцем?)

Положительные результаты в этом направлении содержатся в [127, 138]. К примеру, в $C(Q)$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией (в частности, аппроксимативно компактное) является солнцем [127]. О чебышёвских множествах в пространствах непрерывных функций см. также [3, 110, 127, 163].

В связи с проблемой 7 отметим следующий результат Л. П. Власова [41] (см. также [55]): в банаховом пространстве локально компактное чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем.

5. Ацикличность и клеточноподобность

В данном вспомогательном разделе мы напоминаем некоторые понятия из геометрической топологии и, в частности, приводим понятие ацикличности и клеточноподобности. Ацикличность возникает здесь в связи со следующей прямой теоремой геометрической теории приближений [43]: в банаховом пространстве P-ацикличное ограниченно компактное множество является солнцем.

Ответ на обратный вопрос в общем случае не известен (см. раздел 8). Гипотеза состоит в том, что ацикличность (P-ацикличность) здесь «по делу»; иными словами, ацикличность является свойством, присущим *всем* солнцам в конечномерных пространствах (это так в двумерных пространствах, пространстве $\ell^\infty(n)$ и, конечно, в гладких пространствах).

Теория гомологий (когомологий) связывает с каждым топологическим пространством X последовательность абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы гомологий), и $H^k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы когомологий), которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны, то и соответствующие группы гомологий изоморфны. Группы (ко)гомологий можно конструировать различными способами (есть, например, конструкция с использованием нервов покрытий, предложенная П. С. Александровым и обобщённая Э. Чехом, конструкция Л. Вьеториса, основанная на понятии истинных циклов, конструкция, основанная на понятии сингулярных цепей).

Пусть A — произвольная нетривиальная абелева группа. Метризуемое пространство называется *ацикличным*, если его группа чеховских *ко*гомологий с коэффициентами из A тривиальна. Таким образом, определение ацикличности зависит от выбранной группы коэффициентов. Здесь отметим, что гомологии (Александрова—)Чеха не образуют теории гомологий, не удовлетворяя аксиоме точности, а когомологии Чеха образуют теорию гомологий топологических пространств. Подробное изложение теории (ко)гомологий компактов, топологических и равномерных пространств можно найти в [71].

В случае если гомология (когомология) имеет компактный носитель (т. е. удовлетворяет аксиоме компактных носителей) и коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле, понятия гомологической и когомологической ацикличности совпадают [204]. Однако в случае произвольной абелевой группы коэффициентов понятия гомологической и когомологической ацикличности могут быть различны (см., например, [167]).

Ниже, если не оговорено противное, ацикличность будет пониматься относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе.

Непустое компактное пространство называется *R_δ-множеством* (см., например, [179, (2.11)]), если оно гомеоморфно пересечению счётной убывающей последовательности абсолютных компактных ретрактов (или стягиваемых компактов [179, теорема 2.13]). R_δ-множества естественно возникают как пространства решений задачи Коши для неавтономных и автономных дифференциальных уравнений и включений [112,161,178]. Результаты такого типа восходят к Н. Ароншайну.

Компакт Y называется *клеточноподобным* (или имеющим шейп точки), если существуют абсолютный окрестностный ретракт Z и вложение $i\colon Y \to Z$, такое что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [179, (82.4)]); само клеточноподобное множество при этом не обязано быть стягиваемым. Топологическое пространство X *стягиваемо* (в точку), если тождественное отображение этого пространства в себя гомотопно отображению в точку. Из известной характеризации Д. Химана R_δ-множеств непосредственно следует, что R_δ-множество всегда клеточноподобно [186, с. 50; 199, § 4.2]. Поскольку всякое отображение компакта точечного шейпа в абсолютном окрестностном ретракте гомотопически тривиально, то компакт шейпа точки (клеточноподобный) стягивается во всякой своей окрестности в любом объемлющем ANR. Как следствие, классы R_δ-множеств и клеточноподобных (шейпа точки) компактов совпадают.

Отметим, что клеточноподобность влечёт ацикличность (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) [199, с. 854], при этом имеются примеры ацикличных, но не клеточноподобных множеств, а также клеточноподобных, но не линейно связных множеств (синусоида топологов).

6. Выборки из метрической проекции и солнечность. Ретракция

Хорошо известно, что оператор наилучшего приближения обладает недостаточной устойчивостью даже в случае чебышёвских подпространств, не говоря о нелинейных множествах. К примеру, в классическом случае приближения многочленами в $\mathcal{P}_n$ в $C[0,1]$ оператор метрической проекции не является равномерно непрерывным на единичном шаре. Более того, давно известны примеры чебышёвских подпространств с разрывной метрической проекцией (см., например, [17, 75, 142]); в невырожденных случаях метрическая проекция на множество дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ всегда имеет точки разрыва. Для исправления этой ситуации был предложен способ повышения устойчивости приближения за счёт постановки в соответствие подходящим образом приближаемому элементу одного из его почти наилучших приближений. Так появилось понятие ε-выборки (ε-селекции).

Вопросами существования непрерывной ε-выборки и устойчивости оператора почти наилучшего приближения для классических объектов теории приближений занимались Д. Вулберт, О. А. Лисковец, В. И. Бердышев, С. В. Конягин, А. В. Маринов, И. Г. Царьков, П. В. Альбрехт, К. С. Рютин, Е. Д. Лившиц и др. Стоит подчеркнуть, что задача устойчивости оператора почти наилучшего приближения возникает не только в самой теории приближений и численных методах, но и в некорректных задачах, оптимальном управлении, математическом программировании и устойчивости решений общих экстремальных задач. Обзор современного состояния в этой области дан в недавней работе Д. Реповша и П. В. Семёнова [218].

Пусть $F\colon D \to 2^X$. Отображение $\varphi\colon D \to 2^X$ называется селекцией (выборкой) F, если $\varphi x \subset Fx$ для любого $x \in D$ и если $Fx \neq \varnothing$, то $\varphi x \neq \varnothing$.

Мы будем рассматривать как однозначные, так и многозначные выборки.

Приводимые ниже теоремы 6.1—6.4 получены И. Г. Царьковым [95].

Теорема 6.1. *В банаховом пространстве множество с полунепрерывной снизу выборкой из метрической проекции P_0-связно.*

Теорема 6.2. *В линейном нормированном пространстве P-связное множество существования с полунепрерывной снизу выборкой из метрической проекции B-связно.*

Теорема 6.3. *Пусть X — конечномерное банахово пространство, $M \subset X$ — множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией. Тогда M B-ациклично.*

Теорема 6.4. *В банаховом пространстве множество существования с полунепрерывной снизу выборкой из метрической проекции B-связно.*

Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi\colon X \to M$ называют *мультипликативной* (*аддитивной*) *ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\rho(x, M) \quad (\text{соответственно } \|x - \varphi(x)\| \leqslant \rho(x, M) + \varepsilon).$$

Из классической теоремы Майкла о селекции следует, что для всех $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка на любое выпуклое замкнутое подмножество линейного нормированного пространства.

Для $M \subset X$ и произвольного $\delta > 0$ положим

$$\mathring{P}_M^\delta x := \{y \in M \mid \|x - y\| < \rho(x, M) + \delta\}.$$

По определению подмножество $A \subset X$ называется *ретрактом* множества X, если существует непрерывное отображение $r\colon X \to A$, называемое ретракцией, такое что $r|_A = 1|_A$, т. е. тождественное отображение 1_A допускает непрерывное продолжение на всё пространство X. Хорошо известно, что в конечномерном пространстве граница шара не является ретрактом шара. Однако в любом бесконечномерном пространстве сфера является липшицевым ретрактом шара [117, следствие 3.5].

Отметим следующий общий результат (см. [102]), в котором даётся характеризация замкнутых множеств в банаховых пространствах, для которых для любого $\varepsilon > 0$ найдётся непрерывная ε-выборка.

Теорема 6.5. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ непусто и замкнуто. Тогда следующие условия равносильны:*

а) $\mathring{P}^{\delta}_M x$ *является ретрактом шара для любых $x \in X$ и $\delta > 0$;*
б) $\mathring{P}^{\delta}_M x$ *стягиваемо по себе в точку для любых $x \in X$ и $\delta > 0$;*
в) *M $\mathring{B}$-бесконечно связно;*
г) *M $\mathring{B}$-стягиваемо;*
д) *для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная ε-выборка на M;*
е) *для любой положительной полунепрерывной снизу функции $\psi\colon X \to (0, +\infty)$, $\psi(x) > \rho(x, M)$ $(x \in X)$, существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $\|\varphi(x) - x\| < \psi(x)$ для всех $x \in X$;*
ж) *для любой полунепрерывной снизу функции $\theta\colon X \to (1, +\infty)$ существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $\|\varphi(x) - x\| \leqslant \theta(x)\rho(x, M)$ для всех $x \in X$.*

Отсюда видно, что непрерывность ε-выборки для всех $\varepsilon > 0$ влечёт очень жёсткое структурное ограничение на множество.

Из доказательства теоремы 6.5 вытекает следующий аналог известного утверждения о том, что B-связное множество является $\mathring{B}$-связным (см., например, [43, утверждение 0.5]).

Теорема 6.6. *B-стягиваемое множество является $\mathring{B}$-стягиваемым.*

Было бы интересно получить обратный результат к теореме 6.6 (по типу теоремы 4.4, утверждающей, что $(\mathrm{AC}) \cap (\mathring{B}) \subset (B)$).

Замечание 6.1. С. В. Конягин [58] установил, что в случае, когда множество представляет собой дробно-рациональные функции $\mathcal{R}_{n,m}$ в $C[0,1]$ или их обобщения $R_{V,W}$ в $C(Q)$ (где Q — связный хаусдорфов компакт, V, W — подпространства в $C(Q)$, причём для некоторого $w \in W$ выполнено $w(t) \neq 0$ для любого $t \in Q$), то непрерывная ε-выборка существует для всех $\varepsilon > 0$ (хотя метрическая проекция на $\mathcal{R}_{m,n}$ всегда имеет точки разрыва, за исключением вырожденных случаев; см. также [81; 217, § 6.4; 239]). Отсюда и из теоремы 6.5 вытекает $\mathring{B}$-стягиваемость множеств $\mathcal{R}_{m,n}$ и $R_{V,W}$ соответственно в $C[0,1]$ и $C(Q)$ (Q — связный компакт, V, W — подпространства). Более ранний результат Д. Вулберта [238, 239] утверждает меньше: множество $\mathcal{R}_{m,n}$ является $\mathring{B}$-связным (а значит, $\mathring{B}$-линейно связным). Отметим, что фактически

Д. Вулберт [239] установил B-связность $\mathcal{R}_{m,n}$, при этом его рассуждения переносятся на случай $R_{V,W}$ с произвольными выпуклыми V, W. Соответственно, мы утверждаем, что $R_{V,W}$ B-линейно связно и, более того, монотонно линейно связно (а значит, и B-монотонно линейно связно, см. [12, § 3]). Как следствие, отсюда и из теоремы 6.5 вытекает, что множество $R_{V,W}$ является B-стягиваемым, а в случае замкнутости B-ретрактом (последнее означает, что пересечение $R_{V,W}$ с любым замкнутым шаром пусто или является ретрактом шара).

Стоит также отметить, что множество $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций не является ограниченно слабо компактным множеством в $C[0,1]$ (см., например, [126, с. 26]).

Отображение $F\colon M \to 2^x$ называется *H-полунепрерывным сверху* (или *полунепрерывным сверху по Хаусдорфу*), если для любого $x \in M$ $Fx \neq \varnothing$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что $d(Fx, Fy) < \varepsilon$ для любого $y \in B(x,\delta) \cap M$; здесь и далее $d(A,B) = \sup \rho_{z\in B}(z,A)$ (одностороннее расстояние между множествами).

Следующее утверждение (см. [96, теорема 1]) обобщает один результат Л. П. Власова [43, теорема 4.16], рассматривавшего в данной ситуации P-компактные P-выпуклые множества.

Теорема 6.7. *Пусть X — банахово пространство и M — P-ацикличное множество с H-полунепрерывной сверху метрической проекцией. Тогда M почти выпукло (является δ- и γ-солнцем).*

Отсюда и из теоремы 6.5 вытекает (см. [96]), что если в банаховом пространстве X дано аппроксимативно компактное множество M, обладающее непрерывной аддитивной ε-выборкой при любом $\varepsilon > 0$, то M P-ациклично и почти выпукло. Если вдобавок $X \in (\mathrm{SS})$ (сильно гладко в смысле Л. П. Власова [39]; см. определение на с. 27) или X^* строго выпукло, то M выпукло.

Отметим одно следствие из теоремы 6.7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тогда в L^p найдётся элемент x, для которого множество ближайших элементов во множестве рациональных дробей $\mathcal{R}_{m,n}$ компактно и не ациклично [96].

Теоремы 6.8—6.10 и их следствия установлены И. Г. Царьковым [97, 100]. Отметим, что здесь рассматриваются многозначные ε-выборки.

Теорема 6.8. *Пусть M — аппроксимативно компактное подмножество банахова пространства X, обладающее для любого $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ацикличной аддитивной ε-выборкой из метрической проекции на себя относительно некоторого всюду плотного выпуклого подмножества пространства X. Тогда множество M является P-ацикличным.*

Теорема 6.9. *Пусть банахово пространство X таково, что $X \in (\mathrm{SS})$ или $X^* \in (\mathrm{R})$, и пусть $M \subset X$ аппроксимативно компактно и невыпукло. Тогда для любого выпуклого подмножества $L \subset X$, всюду плотного в X, найдётся точка $x \in L$, такая что множество $P_M x$ не ациклично.*

Следствие 6.1. *Пусть банахово пространство X таково, что $X \in (\mathrm{SS})$ или $X^* \in (\mathrm{R})$, и пусть M — аппроксимативно компактное P-ацикличное подмножество X. Тогда M выпукло.*

Следствие 6.2. *Пусть H — гильбертово пространство, множество $M \subset H$ аппроксимативно компактно и невыпукло. Тогда для любого выпуклого подмножества $L \subset H$, всюду плотного в H, найдётся точка $x \in L$, такая что множество $P_M x$ не ациклично (причём в случае $\dim H = \infty$ таких точек бесконечно много).*

Отметим применение теорем 6.8, 6.9 в теории обучения при построении оценщика [68].

В [97] с помощью теоремы 6.9 и вариационного принципа показана неединственность ненулевых решений в классе $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ в задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = \gamma u + F(x,u) + \varphi(x), \\ u = 0 \text{ на } \operatorname{bd}\Omega \end{cases}$$

для некоторой бесконечно дифференцируемой функции φ, носитель которой лежит в ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (см. также [128, 168, 221]).

Теорема 6.10. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$, $x \in \mathrm{AC}(M) \setminus M$. Предположим, что найдётся окрестность $O_r(x)$, для которой существует полунепрерывная сверху ацикличная ε-выборка $\varphi_\varepsilon\colon O_r(x) \to 2^M$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда x — точка δ-солнечности для M. При этом если $X \in (\mathrm{R})$, то $P_M x$ состоит из одной точки.*

Из теоремы 6.10 вытекает, что если $X \in (\mathrm{B}) \cap (\mathrm{SS})$ или $X^* \in (\mathrm{R})$, M — аппроксимативно компактное подмножество X, обладающее для любого $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ацикличной аддитивной ε-выборкой на $X \setminus M$, то M выпукло. Также из теоремы 6.10 вытекает, что если $X \in (\mathrm{R})$, M — аппроксимативно компактное подмножество X, обладающее для любого $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ацикличной аддитивной ε-выборкой, то M — чебышёвское множество. В [100] также доказывается, что если для $X \in (\mathrm{R})$ последнее условие выполнено на некотором множестве N, таком что $X \setminus M \subset \bar{N}$, то M — чебышёвское множество.

Следствие 6.3. *Пусть $X \in (\mathrm{R})$, $M \subset X$ — аппроксимативно компактное подмножество, обладающее полунепрерывной сверху ацикличной ε-выборкой на окрестности $\mathcal{O}(x)$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда метрическая проекция $P_M y$ одноточечна для всех $y \in \mathcal{O}(x)$.*

Следствие 6.4. *Пусть $X \in (\mathrm{R})$, $M \subset X$ — аппроксимативно компактное подмножество, обладающее полунепрерывной сверху ацикличной ε-выборкой на множестве $X \setminus M$ при всех $\varepsilon > 0$. Тогда M — чебышёвское множество.*

Отображение $f\colon N \to X$ называют ε-сдвигом, если $\|f(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in N$. Теоремы 6.11, 6.12 содержатся в [100].

Теорема 6.11. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$, $x \in \mathrm{AC}(M) \setminus M$, $\mathcal{O}(x) \subset X$ — некоторая окрестность точки x и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $N_\varepsilon \subset X$ и непрерывный ε-сдвиг $f_\varepsilon \colon \mathcal{O}(x) \to N_\varepsilon$. Дополнительно пусть на множестве N_ε существует полунепрерывная сверху ацикличная ε-выборка $\psi_\varepsilon \colon N_\varepsilon \to M$. Тогда x — точка δ-солнечности, и если дополнительно $X \in (\mathrm{R})$, то $P_M x$ состоит из одной точки.*

Теорема 6.12. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$, $x \in \mathrm{AC}(M) \setminus M$, $\mathcal{O}(x) \subset X$ — некоторая окрестность точки x и для любого $\varepsilon > 0$ существует выпуклое множество $K_\varepsilon \subset X$, $d\big(K_\varepsilon, \mathcal{O}(x)\big) < \varepsilon$, на котором существует полунепрерывная сверху ацикличная ε-выборка $\psi_\varepsilon \colon K_\varepsilon \to M$. Тогда x — точка δ-солнечности, и если дополнительно $X \in (\mathrm{R})$, то $P_M x$ состоит из одной точки.*

Следствие 6.5. *Пусть $X \in (\mathrm{R})$, $M \subset X$ — аппроксимативно компактное подмножество, обладающее для всех $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ацикличной ε-выборкой на некотором выпуклом множестве N, таком что $X \setminus M \subset \bar{N}$. Тогда M — чебышёвское множество.*

Замечание 6.2. Доказательство теорем 6.10—6.12 опирается на известную теорему Эйленберга—Монтгомери о неподвижной точке (см., например, [179, следствие (32.12)]) и теорему Вьеториса—Бегла об отображении. При этом ацикличность понимается в смысле групп гомологий (Александрова—)Чеха с коэффициентами в поле (в работе Эйленберга—Монтгомери ацикличность понимается в смысле циклов Вьеториса и групп гомологий над полем коэффициентов). Однако гомологии Чеха изоморфны гомологиям Вьеториса на категории компактных метризуемых пространств, а понятия гомологической и когомологической ацикличности совпадают, если коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле и носитель компактен.

В связи с широким вопросом о выборках из метрической проекции стоит также упомянуть ряд исследований по солнечным выборкам из метрической проекции [152, § 6.7.2; 184; 213].

Перейдём теперь к ретракциям. Хорошо известно, что ретракции являются важным инструментом в теоремах о неподвижных точках. К примеру, теорема Брауэра о неподвижной точке эквивалентна утверждению об отсутствии непрерывной ретракции конечномерного шара на его границу. Рассмотрим применения ретракции в теории приближений.

Начнём со следующего достаточно ясного результата. Пусть M — чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией в линейном нормированном пространстве X и $M \cap B(x,r) \neq \varnothing$ при некоторых $x \in X$, $r > 0$. Тогда

$$B(x,r) \cap M \quad \text{есть ретракт шара} \quad B(x,r). \tag{6.1}$$

Требуемая ретракция устроена просто: для $z \in B(x,r)$ мы гомотетично сдуваем шар $B(x,r)$ относительно центра гомотетии z до тех пор, пока не получим шара B_z, касающегося M. Тогда $B_z \cap M$ — это точка $\varphi(z)$. Отображение $\varphi\colon \to B(x,r) \cap M$ является требуемой ретракцией.

Имеет место следующий результат (см. [90, 144]).

Лемма 6.1. *Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство и $M \subset X$. Если M ограничено, замкнуто, невыпукло и $X \setminus M$ связно, то существуют открытое полупространство H и множество $\Sigma \subset H \cap M$, такие что*

1) *Σ является относительной границей некоторого выпуклого множества и, следовательно, Σ гомеоморфно конечномерной сфере;*
2) *Σ является ретрактом $H \cap M$.*

Вышеприведённый результат о существовании ретракции шара на его пересечение с чебышёвским множеством и лемма 6.1 были использованы И. Г. Царьковым [90] (см. также [144]) для доказательства того, что в конечномерном пространстве со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло. Действительно, предположим, что $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ и что существует невыпуклое ограниченное чебышёвское множество M. Пусть H и Σ выбраны как в лемме 6.1 (это возможно, поскольку дополнение к ограниченному чебышёвскому множеству в конечномерном пространстве связно). Полупространство H определяется посредством некоторого функционала $f \in S^*$. Слегка изменяя H, мы не меняем ситуацию, так что мы можем предположить, что $f \in \exp S^*$. Тогда если гиперплоскость $\operatorname{bd} H$ является опорной к некоторому шару, то касание происходит по гладкой точке. Согласно (2.1) можно выбрать замкнутый шар B_R достаточно большого радиуса таким образом, что $\Sigma \subset (B_R \cap M) \subset (H \cap M)$. Тогда Σ является ретрактом $B_R \cap M$, а множество $B_R \cap M$ — ретрактом B_R, но это невозможно, так как сфера не может быть ретрактом шара.

А. Л. Браун [144, теорема 1.6.1] получил обобщение (6.1) на множества более общего вида, чем чебышёвские. Важное следствие из теоремы 6.13 даётся ниже (теорема 6.16).

Теорема 6.13. *Пусть M — множество существования в линейном нормированном пространстве X. Предположим, что метрическая проекция P_M полунепрерывна сверху. Тогда если $M \cap B(x, r) \neq \varnothing$ при некоторых $x \in X$, $r > 0$, то существует полунепрерывная сверху многозначная ретракция Φ шара $B(x, r)$ на $M \cap B(x, r)$, такая что для каждого $z \in B(x, r)$ выполнено $\Phi(z) = P_M z'$ при некотором $z' \in B(x, r)$.*

Также отметим следующий результат, полученный А. Л. Брауном (см. [147]).

Теорема 6.14. *Пусть X_n — конечномерное линейное нормированное пространство, $L \subset X$ — подпространство и $M \subset L$ — замкнутое подмножество. Предположим, что $P_M x$ ациклично при всех x, для которых $\mathring{B}(x, \rho(x, M)) \cap \cap L \neq \varnothing$. Тогда M P-ациклично.*

Вышеприведённая теорема была использована А. Л. Брауном [147] для доказательства того, что солнце, лежащее в двумерном подпространстве конечномерного пространства X_n, является P-ацикличным (B-ацикличным), причём приведённое в [147] доказательство этого результата весьма нетривиально. Однако этот результат А. Л. Брауна можно доказать гораздо проще, если воспользоваться тем, что все солнца в двумерном пространстве монотонно линейно связны [10] (и, как следствие, P- и B-ацикличны), и следующим несколько неожиданным результатом из [5].

Вначале дадим одно определение. Для подпространства $H \subset X$ и точки $\theta \in \mathring{B} := \mathring{B}(0,1)$ мы полагаем:

$|\cdot|_\theta$ — несимметричная норма на X, задаваемая функционалом Минковского тела $\mathring{B} - \theta$ относительно точки 0;

$|\cdot|_{H,\theta}$ — несимметричная норма на H, индуцированная несимметричной нормой $|\cdot|_\theta$.

Напомним, что *несимметричной нормой* на X называется неотрицательный сублинейный функционал $\|\cdot\|$, такой что для всех $x, y \in X$

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geqslant 0$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

В общем случае $\|x\| \neq \|-x\|$. Отметим, что функция $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, $x \in X$, является нормой. Наиболее полный обзор общей теории несимметрично нормированных пространств дан в монографии [156], охватывающей результаты, полученные до 2013 г.

Теорема 6.15 [5]. *Пусть M является чебышёвским множеством, солнцем или строгим солнцем в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Тогда*

1) *множество M обладает аналогичным свойством в пространстве $(X, |\cdot|_\theta)$ для любого $\theta \in \mathring{B}$;*
2) *если $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ — аффинное подпространство в X и $M \subset H$, то M обладает аналогичным свойством в пространстве $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ для любого $\theta \in \mathring{B}$.*

Аналогичный результат верен также для α-солнц и полусолнц.

В пункте 2) теоремы 6.15 существенным является условие $M \subset H$. Легко построить примеры, показывающие, что пересечение $M \cap H$, где M — чебышёвское множество в X, $M \not\subset H$, не обязано быть чебышёвским множеством в H.

Следствием из теоремы 6.13 является следующий результат (см. [144, следствие 1.6.2]).

Теорема 6.16. *Если ограниченно компактное подмножество линейного нормированного пространства P-ациклично, то оно B-ациклично.*

Замечание 6.3. Теорема 6.16 может быть сформулирована в чуть более сильном виде: если M является P-ацикличным аппроксимативно компактным подмножеством банахова пространства и если пересечение M с некоторым шаром B компактно, то $M \cap B$ ациклично.

Замечание 6.4. Ограничения типа компактности в теореме 6.16 и замечании 6.3 существенны. Известный пример Данхема несвязного чебышёвского множества в $C[0,1]$ (множество в примере Данхема локально компактно, не является солнцем и не аппроксимативно компактно) показывает, что P-стягиваемость (в нашем случае чебышёвость) не влечёт B-стягиваемости (и даже связности).

7. Связность солнц

Известно, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце (строгое солнце) выпукло (см., например, [55; 229, § 5.3]). Поэтому вопрос о связности солнц и строгих солнц является содержательным только в негладких пространствах.

7.1. Связность солнц в конечномерных пространствах

Изучение B-связности солнц в произвольных пространствах было, что естественно, начато в случае $\dim X = 2$. В отличие от случая пространств большей размерности, двумерный случай достаточно геометрически нагляден: если M — солнце в двумерном X_2 и $x \notin M$, то $P_M x$ — это точка, отрезок или объединение двух отрезков с концами в одной точке [118] (т. е. в двумерном случае солнца P- и B-стягиваемы).

Х. Беренс и Л. Хетцельт [118,120] для произвольного солнца M в двумерном линейном нормированном пространстве X_2 установили его метрическую выпуклость относительно радоново трансформированной нормы $\|\cdot\|^{\#}$ (понятие радоново трансформированной нормы введено П. Грубером [181], см. также [10,118]). Для понимания сути отметим, что для замкнутого множества на нормированной плоскости его $\|\cdot\|^{\#}$-выпуклость эквивалентна его монотонной линейной связности и эквивалентна его $|\cdot|$-выпуклости относительно ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|$, см. (8.4)). В рассматриваемом случае это условие эквивалентно тому, что $P_M x$ непусто и стягиваемо для любого $x \notin M$. Отсюда согласно известным общетопологическим утверждениям вытекают P- и B-стягиваемость (и, следовательно, P- и B-клеточноподобность и P- и B-ацикличность произвольного солнца в X_2). Напомним, что стягиваемость всегда влечёт клеточноподобность, которая, в свою очередь, для компактных множеств влечёт ацикличность (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) [183, § c-5]. Для плоских компактов клеточноподобность совпадает с ацикличностью.

Заметим, что ввиду теоремы 6.15 аналогичный результат верен в произвольном линейном нормированном пространстве X для произвольного солнца, содержащегося в двумерном подпространстве пространства X.

В конечномерном случае первый общий результат о связности солнц был получен В. А. Кощеевым [61, теорема 6] в 1975 г.

Теорема 7.1. *В конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно.*

Пытаясь решить задачу о B-связности солнц в многомерном случае, Х. Беренс и Л. Хетцельт предъявили первый нетривиальный пример пространства размерности не меньше 3, в котором всякое солнце B-связно (и даже B-стягиваемо, как следует из теоремы 8.1). Именно, они установили [119] ℓ^1-связность произвольного солнца в $\ell^\infty(n)$, что влечёт (см. [14]) его монотонную линейную связность, P- и B-клеточноподобность (и поэтому P- и B-ацикличность [14]). В дальнейшем вопрос о B-связности и B-ацикличности солнц изучался в [7—10, 145, 146, 148].

Наилучший общий результат о связности солнц в произвольном конечномерном пространстве принадлежит А. Л. Брауну [146, теорема 3].

Теорема 7.2. *Если M — солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве X, то оно линейно связно и локально линейно связно. Более того, существуют положительные константы L и α, зависящие только от X, такие что для любых различных точек $x, y \in M$ найдётся путь $s\colon [0,1] \to M$, соединяющий x и y, такой что*

$$\|s(\xi) - s(\eta)\| \leqslant L\|x - y\| \cdot |\xi - \eta|^\alpha$$

для всех $\xi, \eta \in [0,1]$.

С учётом предложения 6.15 из теоремы 7.2 вытекает следующий результат для солнц, содержащихся в конечномерном подпространстве линейного нормированного пространства.

Следствие 7.1. *Пусть X — линейное нормированное пространство, M — солнце в X, содержащееся в конечномерном подпространстве. Тогда M линейно связно и локально линейно связно.*

Существенно более сильные результаты о связности солнц удаётся получить в так называемых (BM)-пространствах, введённых А. Л. Брауном [145]. В таких пространствах оказываются верными многие результаты, установленные для солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ (подробнее об этом см. в разделе 8.4).

Проблема 8. Неизвестно, является ли произвольное строгое солнце в произвольном конечномерном X_n, $n \geqslant 3$, P-ацикличным, P-клеточноподобным или P-стягиваемым. Ответ неизвестен даже для случая полиэдральных X_n (за исключением пространства $\ell^\infty(n)$ и, более общо, (BM)-пространств; см. раздел 8.3).

7.2. Связность солнц в бесконечномерном случае

Для пространств бесконечной размерности оказалось, что проблема связности чебышёвских множеств отлична от проблемы связности солнц. В известных примерах несвязных чебышёвских множеств (см. [164, 195]) построенные множества не являются солнцами. Единственный пример несвязного солнца построен В. А. Кощеевым [64, 198], при этом построенное несвязное солнце не является чебышёвским множеством.

Укажем, что известно о связности солнц в бесконечномерных линейных нормированных пространствах. Следующий результат принадлежат В. А. Кощееву [63, теорема 1].

Теорема 7.3. *Ограниченно компактное солнце в линейном нормированном пространстве не имеет собственных ограниченных связных компонент. Как следствие, компактное солнце в произвольном линейном нормированном пространстве связно.*

Проблема 9. Верно ли, что ограниченно компактное солнце в бесконечномерном линейном нормированном пространстве связно?

Отметим ещё один результат В. А. Кощеева [63].

Теорема 7.4. *Пусть M — LG-множество (в частности, M — строгое протосолнце). Тогда M не имеет собственных связных компонент, являющихся множествами существования. В частности, M не содержит собственных ограниченно компактных связных компонент.*

В. А. Кощеев показал, что в локально равномерно выпуклом пространстве всякое солнце B-связно [61, предложение 7]. Этот результат усиливает результат Б. Брозовского и Ф. Дойча (теорема 4.6) для LUR-пространств, поскольку в силу теоремы 3.3 солнце в LUR-пространстве является чебышёвским солнцем.

Линейное нормированное пространство *равномерно неквадратно*, если найдётся $0 < \varepsilon < 1$, такое что $(x+y)/2 \leqslant 1-\varepsilon$ или $(y-x)/2 \leqslant 1-\varepsilon$ для всех $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Данное понятие введено Р. С. Джеймсом. Отметим, что нормированное пространство X равномерно неквадратно тогда и только тогда, когда X^* равномерно неквадратно [63]. Равномерно неквадратное банахово пространство всегда рефлексивно.

Следующие теоремы 7.5—7.7 принадлежат В. А. Кощееву [63].

Теорема 7.5. *В равномерно неквадратном банаховом пространстве всякое γ-солнце (в частности, всякое солнце) связно.*

Линейное нормированное пространство *неквадратно*, если его единичная сфера не содержит отрезка длины 2 (что эквивалентно тому, что S не содержит «квадрата»).

Теорема 7.6. *Для связности каждого α-солнца в X необходимо и достаточно, чтобы единичная сфера S была неквадратна.*

Теорема 7.7. *Для связности каждого γ-солнца в линейном нормированном пространстве X необходимо, чтобы единичная сфера пространства X^* была неквадратна.*

Отметим, что единичная сфера конечномерного пространства X_n неквадратна тогда и только тогда, когда X_n равномерно неквадратно. Отсюда вытекает, что в конечномерном X_n всякое α-солнце (β-, δ-, γ-солнце) связно, если и только если единичная сфера пространства X неквадратна [198].

Как следствие, в конечномерном X_n всякое α-солнце (γ-солнце) связно тогда и только тогда, когда X_n равномерно неквадратно.

Отметим также следующие два результата В. А. Кощеева [198].

Теорема 7.8. *Предположим, что S^* не содержит отрезков длины, большей или равной $2-\varepsilon$, при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда в X любое γ-солнце связно (и, как следствие, связно любое β-солнце, α-солнце, солнце и строгое солнце).*

Теорема 7.9. *Предположим, что S^* не содержит отрезков длины, большей или равной $2-\varepsilon$, при некотором $\varepsilon > 0$. Пусть M — γ-солнце и $a, b \in M$. Тогда для любой точки $c \in (a, b)$*

$$\rho(c, M) \leqslant (2-\varepsilon)(4-\varepsilon)^{-1}\|(a-b)\|.$$

Отметим, что ограниченно компактное LG-множество в нормированном пространстве B-связно [61, предложение 11]. Поскольку по теореме 2.5 строгое протосолнце является LG-множеством, то имеет место следующий результат (см. [61, предложение 12]), в котором В. А. Кощеев установил B-связность; B-линейная связность обеспечивается (4.1).

Теорема 7.10. *Ограниченно компактное строгое солнце в нормированном пространстве B-связно (B-линейно связно, если X банахово).*

Как следствие, в банаховом пространстве ограниченно компактное строгое солнце (в частности, строгое солнце в конечномерном пространстве) линейно связно. Действительно, B-связное множество всегда $\mathring{B}$-связно [43], а согласно (4.1) в банаховых пространствах класс замкнутых $\mathring{B}$-связных и $\mathring{B}$-линейно связных множеств совпадает.

Частично обратный результат к теореме 7.10 установлен В. А. Кощеевым [61].

Теорема 7.11. *В локально равномерно выпуклом пространстве $\mathring{B}$-связное множество является LG-множеством.*

Легко убедиться, что теорема 7.11 перестает быть верной, если пространство не строго выпукло. Действительно, единичная сфера любого пространства $\mathring{B}$-связна, но, к примеру, в пространстве $\ell^\infty(n)$, не являющемся строго выпуклым, она не является LG-множеством. В общем случае вопрос, связанный с теоремой 7.11, о характеризации пространств, в которых классы $\mathring{B}$-связных и LG-множеств совпадают, остаётся открытым.

Следующий результат также установлен В. А. Кощеевым [61].

Теорема 7.12. *В равномерно выпуклом пространстве классы замкнутых LG-множеств и замкнутых $\mathring{B}$-связных множеств совпадают.*

Поскольку в равномерно выпуклом пространстве (и даже в пространстве Ефимова—Стечкина, см. теорему 4.9) чебышёвское множество $\mathring{B}$-связно, то из теоремы 7.12 вытекает, что в равномерно выпуклом банаховом пространстве каждое чебышёвское множество является LG-множеством [61], и следовательно, $\mathring{B}$-связно и даже $\mathring{B}$-линейно связно.

Следующая теорема частично обобщает теорему 7.12.

Теорема 7.13. *В пространстве $X \in (\mathrm{ES})$ всякое LG-множество $\mathring{B}$-линейно связно.*

Доказательство. Как и в [61], предположим, что M не является $\mathring{B}$-связным LG-множеством, т. е. при некоторых x и r пересечение $M \cap \mathring{B}(x,r)$ представляется в виде объединения непустых замкнутых в $\mathring{B}(x,r)$ непересекающиеся множеств A и B. Стандартными рассуждениями ситуация сводится к случаю $\rho(x,A) < \rho(x,B)$. Из непрерывности метрической функции $\rho(\cdot,M)$ следует, что существует $\delta > 0$, такое что $\rho(z,A) < \rho(z,B)$ для любого $z \in B(x,\delta)$. В пространстве Ефимова—Стечкина X дополнение к замкнутому непустому множеству содержится в замыкании точек существования для этого множества. Поэтому найдётся точка $z \in B(x,\delta)$, у которой $P_B z \neq \varnothing$. Соответственно, если $y_0 \in P_B z$, то y_0 — точка локального минимума, не являющаяся точкой глобального минимума. Получили противоречие с тем, что M — LG-множество. Окончательно B-линейная связность обеспечивается (4.1). $\square$

Поскольку строгое протосолнце всегда является LG-множеством, то из теоремы 7.13 и (4.1) вытекает следующий результат.

Следствие 7.2. *Строгое протосолнце M в пространстве Ефимова—Стечкина P_0-компактно и $\mathring{B}$-линейно связно.*

Доказательство. Пусть M — строгое протосолнце в $X \in (\mathrm{ES})$, $x \notin M$. Предположим, что $P_M x$ не компактно. Известно (см. (3.1)), что если M — строгое протосолнце, то $\operatorname{conv} P_M x \subset S\big(x, \rho(x,M)\big)$ для любого x. Поскольку $P_M x$ не компактно, то некоторая грань E шара B не компактна. Получили противоречие с тем, что в пространстве Ефимова—Стечкина всякое выпуклое замкнутое множество аппроксимативно компактно. Окончательно $\mathring{B}$-линейная связность следует из теоремы 7.13. $\square$

Отметим следующий результат (см. [127, теорема 6.1 и следствие 6.3]): если M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то любые две точки $x, y \in M$ можно соединить монотонной кривой $k(\cdot) \subset M$ (т. е. $k_i(t)$ — монотонные функции по t для любого $i = 1,\dots,n$); при этом если $x_i \neq y_i$ для любого $i = 1,\dots,n$, то $k_i(t)$ — строго монотонные функции. Отсюда вытекает, что строгое солнце в $\ell^\infty(n)$ монотонно линейно связно и, как следствие, B-стягиваемо (см. теорему 8.1).

Имеет место следующий результат (см. [7] и теорему 8.9 ниже): в пространстве c_0 всякое солнце связно (более того, монотонно линейно связно).

7.3. Несвязность солнц

Про несвязность солнц в бесконечномерных пространствах известно немного. Единственный пример несвязного солнца в бесконечномерном подпространстве пространства $C[0,1]$ со специально выбранной нормой построен В. А. Кощеевым [64]. Построенное В. А. Кощеевым солнце не является строгим солнцем.

7.4. Связность пересечений солнц и чебышёвских множеств с подпространствами и промежутками в пространствах типа $C(Q)$

В этом разделе мы рассмотрим задачу сохранения (в естественной постановке) аппроксимативных свойств множества M в пространствах типа $C(Q)$ при пересечении с подмножествами пространства. Конечно, чтобы получить положительный результат, множества, с которыми пересекается M, должны удовлетворять определённым условиям, и в ряде случаев оказывается возможным полностью охарактеризовать такие множества, при пересечении с которыми сохраняются аппроксимативные свойства исходного множества.

Задачу об аппроксимативных свойствах пересечений чебышёвских множеств и различных солнц с подмножествами пространства начали рассматривать достаточно недавно (см., например, [7—10, 12]).

В этом разделе мы рассмотрим данную задачу в конкретных пространствах типа $C(Q)$. Случай общих пространств будет затронут в разделе 8 при изучении монотонно линейно связных и m-связных множеств.

Пусть $X=\ell^\infty(n)$ или c_0. Пусть также $k\in\mathbb{Z}_+$, $k\leqslant\dim X$.

Введём обозначения:

$\mathrm{cAff}_k(X)$ — класс всех аффинных координатных подпространств из X размерности k, т. е. класс аффинных подпространств вида

$$\mathrm{lin}\{e_{i_1},\dots,e_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\}+x,\quad x\in X;$$

здесь $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $X=\ell^\infty(n)$ или c_0. Элементы из $\mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ называются аффинными *координатными подпространствами*;

$\mathrm{cAff}^k(c_0)$ — класс всех аффинных координатных подпространств коразмерности k, т. е. подпространств вида $\{x\in c_0\mid x_{i_1}=c_1,\dots,\ x_{i_k}=c_k\}$ для некоторого фиксированного набора индексов $i_1,\dots,i_k$ и набора констант $c_1,\dots,c_k$.

В пространстве $\ell^\infty(n)$ в данной задаче оказалось возможным получить существенное продвижение [6]. Несмотря на прозрачность утверждений теоремы 7.14, вопрос об их справедливости долгое время был открыт.

Теорема 7.14. *Пусть $M\subset\mathbb{R}^n$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, и $H\in\mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ — координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, норма на H индуцирована нормой $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $M\cap H\neq\varnothing$. Тогда*

а) *если M — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, то $M\cap H$ — чебышёвское множество в H;*

б) *если M — солнце в $\ell^\infty(n)$, то $M\cap H$ — солнце в H;*

в) *если M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то возможны два варианта: или $M \cap H$ — строгое солнце в H, или $M \cap H$ — солнце, но не строгое солнце в H, в последнем случае найдётся опорный конус $K = \mathring{K}(\xi, \zeta) \subset \mathbb{R}^n$ линейной размерности*[1] *не меньше k, такой что $H \subset \operatorname{bd} K$ и $\operatorname{int} K \cap M = \varnothing$, при этом $M \not\subset H$.*

Замечание 7.1. Утверждение б) теоремы 7.14 восходит к одному результату Х. Беренса и Л. Хетцельта [119] о характеризации солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$. В пункте в) указывается возможность существования строгого солнца M, сечение которого координатным подпространством H может не быть строгим солнцем в H (и в [3] построен пример такого строгого солнца M и такой гиперплоскости H в $\ell^\infty(3)$). Однако такая ситуация не является типичной, так как в таком случае по п. в) гиперплоскость H является опорной к M и, более того, $M \not\subset H$, и поэтому таких «неправильных» гиперплоскостей H не более 2^n.

Замечание 7.2 (о сечениях некоординатными подпространствами). Отметим, что если G — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, не являющаяся координатной, то найдётся чебышёвское множество $\hat{M}$ в $\ell^\infty(n)$, такое что сечение $\hat{M} \cap G$ не будет стягиваемым в G и, следовательно, чебышёвским множеством ни в какой норме на G [9].

Следующий результат [6] используется при доказательстве утверждения а) теоремы 7.14. Несмотря на его вспомогательный характер, он имеет самостоятельный интерес.

Теорема 7.15. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, и пусть $H \in \mathrm{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ — координатная аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $M \cap H \neq \varnothing$, то $M \cap H$ — чебышёвское множество в $(H, \|\cdot\|)$, где норма $\|\cdot\|$ на H индуцирована ℓ^∞-нормой на $\mathbb{R}^n$.*

Напомним определение интервала (бруса) и промежутка. Следуя [35,36,172], для $f_1, f_2\colon Q \to \mathbb{R}$ определим *интервал* $[\![f_1, f_2]\!]$ функций:

$$[\![f_1, f_2]\!] = \big\{ f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \text{ для всех } t \in Q \big\}. \tag{7.1}$$

Множество $\varnothing \neq \Pi \subset C(Q)$ называется *промежутком*, если для всех $f_1, f_2 \in \Pi$ выполнено $[\![f_1, f_2]\!] \subset \Pi$. В [35, 36] установлено, что подмножество $\Pi \subset C(Q)$ является замкнутым промежутком, если и только если Π представимо в виде $\Pi = [\![f_1, f_2]\!]$, где $f_1, f_2\colon Q \to \bar{\mathbb{R}}$, $f_1 \leqslant f_2$, f_1 полунепрерывна сверху на Q, а f_2 — снизу.

Рассматривая задачу об аппроксимативных свойствах пересечений чебышёвских множеств и солнц с промежутками, мы вначале отметим следующий достаточно неожиданный результат [9,110]. (Здесь и ниже через $\operatorname{ri} A$ обозначается относительная внутренность множества A.)

---

[1] Напомним, что под линейной размерностью выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C. Понятно, что для опорного конуса $\mathring{K}(x, y)$ в $\ell^\infty(n)$ такое максимальное подпространство всегда можно выбрать координатным.

Теорема 7.16. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть M — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$. Предположим, что Π — замкнутый промежуток в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri} \Pi = \varnothing$. Тогда пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*
2. *Пусть M — аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0. Предположим, что Π — замкнутый промежуток конечной коразмерности в c_0, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri} \Pi = \varnothing$. Тогда пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*

Иными словами, в $\ell^\infty(n)$ и c_0 чебышёвское множество является чебышёвским «во всём».

В теореме 7.17, которая развивает теорему 7.14, дана характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются замкнутыми промежутками в $\mathbb{R}^n$. Полный ответ на аналогичный вопрос для двумерного пространства с произвольной нормой даётся в [10]. Вопрос для монотонно линейно связных множеств и m-связных множеств рассматривается ниже в разделе 8.

Для $\varnothing \neq M \subset X$ обозначим $\mathcal{T}(M) := \{x \in X \mid \operatorname{card} P_M x = 1\}$.

Теорема 7.17. *Пусть $\varnothing \neq \Pi \subset \mathbb{R}^n$. Имеют место следующие утверждения:*

а) *Π является замкнутым промежутком в $\ell^\infty(n)$, если и только если $\Pi \cap M$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ для всякого солнца M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*

б) *Π является замкнутым промежутком в $\ell^\infty(n)$ и $\operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, если и только если $\Pi \cap M$ является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$ для любого строгого солнца M в $\ell^\infty(n)$, такого что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;*

в$_1$) *пусть Π — замкнутый промежуток в $\ell^\infty(n)$. Тогда $\Pi \subset \mathcal{T}(M \cap \Pi)$ для любого чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*

в$_2$) *пусть множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ связно и замкнуто и включение $\Pi \subset \mathcal{T}(M \cap \Pi)$ выполнено для любого чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$, такого что $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда Π — замкнутый промежуток.*

Замечание 7.3. В пункте б) теоремы 7.17 условие $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ естественно и его нельзя убрать (в [3] построен пример строгого солнца в $\ell^\infty(3)$ и координатной гиперплоскости Π в $\ell^\infty(3)$, такой что $M \cap \Pi$ не является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$ (и в H)). Также нельзя избавиться от требования связности и в пункте в) — достаточно рассмотреть в качестве Π «двоеточие».

В бесконечномерном случае имеет место следующий результат [110].

Теорема 7.18. *Пусть M — чебышёвское солнце в $X = c_0$, $X = c$ или $X = \ell^\infty$, и пусть H — координатное подпространство конечной размерности, $M \cap H \neq \varnothing$. Тогда $M \cap H$ — чебышёвское солнце в H.*

7.5. Структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам

В данном разделе рассматривается вопрос о структурных свойствах дополнения к чебышёвскому множеству или солнцу. В основном исследуется конечномерный случай и рассматривается задача о количестве компонент связности дополнения ко множеству. При этом подчеркнём, что мы не рассматриваем случай чебышёвских или протосолнечных каверн в бесконечномерном случае. Стоит отметить, что данный вопрос оказывается связанным с задачами комбинаторной геометрии выпуклых множеств.

Структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам и, в частности, задача о числе компонент связности множества изучались в [4, 107—109]. Легко проверить, что дополнение к ограниченному солнцу всегда связно (ср. [144, § 1.4.2]). В конечномерном пространстве всякое чебышёвское множество является солнцем (см., например, [43]), и следовательно, дополнение к ограниченному чебышёвскому множеству связно.

Напомним, что для симметрично или несимметрично нормированного пространства X точки $s_1, \ldots, s_n \in S$ называются *попарно далёкими* [107] (или образующими антиподальное семейство [124, § 9.11]), если для тел $B_i = B - s_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполнены условия

$$B_i \cap \operatorname{int} B_j = \varnothing, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{7.2}$$

т. е. сдвиги B_i тела B не перекрываются внутренностями и имеют общую точку 0. В симметричном случае условие (7.2) эквивалентно тому, что $\|s_i - s_j\| = 2$, $i \neq j$.

Введём обозначения:

- $k(B)$ — мощность максимального антиподального семейства шара B (максимальное число неперекрывающихся внутренностями сдвигов шара B, имеющих общую точку); в конечномерном X число $k(B)$ всегда конечно;
- $k_{\mathrm{exp}}(B)$ — мощность максимального антиподального семейства шара B, состоящего из *достижимых* точек.

Достаточно очевидно, что если $\dim X = n < \infty$, то

$$2 \leqslant k_{\mathrm{exp}}(B) \leqslant k(B) \leqslant 2^{\dim X},$$

причём оценка сверху достигается в том и только в том случае, если B — n-мерный параллелепипед [107; 124, теорема 9.11.1]. Например, если B — единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой нормой, то $k(B) = k_{\mathrm{exp}}(B) = 2$; если B — аффинный правильный шестиугольник или треугольник на несимметрично нормированной плоскости, то $k(B) = k_{\mathrm{exp}}(B) = 3$; если же $B \subset \mathbb{R}^3$ — «*игральная кость*» (т. е. трёхмерный куб со сглаженными вершинами), то $k(B) = 4$, в то время как $k_{\mathrm{exp}}(B) = 2$.

В задаче о числе компонент связности дополнений чебышёвских множеств и солнц получены следующие результаты. Теорема 7.19 установлена в [107], теорема 7.20 содержится в [4, 109], теорема 7.21 доказана в [108, 109].

Характеризация пространств (нормированных или несимметрично нормированных, не обязательно конечномерных), содержащих солнце с заданным количеством компонент связности в дополнении, даётся следующей теоремой (см. [107]).

Теорема 7.19. *Пусть X — линейное несимметрично нормированное пространство, ν — кардинальное число. Для того чтобы в X существовало солнце с ν компонентами связности дополнения, необходимо и достаточно, чтобы $k(B) \geqslant \nu$.*

Следующая теорема даёт ответ на вопрос о числе компонент связности дополнения к строгому солнцу в конечномерном пространстве.

Теорема 7.20. *Пусть X — линейное несимметрично нормированное пространство, $\dim X < \infty$, и пусть ν — натуральное число. В пространстве X существует строгое солнце с ν компонентами связности в дополнении, если и только если $k(B) \geqslant \nu$.*

Теорема 7.21. *Пусть X — конечномерное линейное несимметрично нормированное пространство. Пусть $\nu \in \{1, \ldots, k_{\exp}(B)\}$. Тогда в X найдётся чебышёвское множество с ν компонентами связности дополнения.*

Аналогичный вопрос о количестве компонент дополнения чебышёвского множества более труден и связан с известным вопросом о характеризации конечномерных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. Полный ответ получен только в размерностях не больше 4 (см. [4]).

8. Монотонная линейная связность и m-связность чебышёвских множеств и солнц

В данном разделе рассматриваются два вида связности множеств: m-связность (связность по Менгеру) и монотонная линейная связность, являющаяся усилением понятия линейной связности; в отличие от линейной связности для монотонно линейного связного множества предполагается, что любые две его точки можно связать монотонной непрерывной кривой.

8.1. Монотонно связные и m-связные множества

Следуя [145], для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ положим, что $\mathrm{m}(M)$ — *оболочка Банаха—Мазура* множества M, т. е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M. Подмножество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру* [145]), если

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$$

для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем $\mathrm{m}(\{x, y\}) = \mathrm{m}(x, y)$.

К примеру, в пространстве $C(Q)$ структура $\mathrm{m}(M)$ вполне ясна (см., например, [145, теорема 3.1]):

$$\mathrm{m}(x,y)=\{z \mid z(q)\in[x(q),y(q)],\ q\in Q\}=:[\![x,y]\!]. \tag{8.1}$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство), это следует из характеризации экстремальных элементов («значение в точке») единичной сферы сопряжённого пространства к $C_0(Q)$, полученной в [140].

Для дальнейшего мы напомним определение интервала и промежутка в произвольном линейном нормированном пространстве.

По аналогии с (7.1) определим *интервал* в произвольном линейном нормированном пространстве X:

$$[\![x,y]\!]:=\{z\in X \mid \min\{\varphi(x),\varphi(y)\}\leqslant\varphi(z)\leqslant\max\{\varphi(x),\varphi(y)\} \text{ для всех } \varphi\in\operatorname{ext}S^*\};$$

здесь $\operatorname{ext}S^*$ — множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряжённого пространства X^* (множество экстремальных точек всегда непусто). Аналогия объясняется тем, что каждый экстремальный функционал $f\in C(Q)^*$ (или $f\in C_0(Q)^*$) имеет вид $f(x)=\pm x(t)$, где $x\in C(Q)$ или $x\in C_0(Q)$, $t\in Q$.

Имея в своём распоряжении понятие интервала, мы можем по аналогии с вышесказанным определить понятие промежутка в линейном нормированном пространстве X: множество $\varnothing\neq\Pi\subset X$ называется *промежутком*, если

$$[\![x,y]\!]\subset\Pi \quad \text{для всех} \quad x,y\in\Pi.$$

Любой замкнутый шар является замкнутым промежутком. Действительно, пусть $u,v\in B$. Если для какого-либо $w\in B$ имеем $f(w)\in[f(u),f(v)]$ для любого $f\in\operatorname{ext}S^*$, то по теореме Крейна—Мильмана это неравенство распространяется на все $f\in S^*$, поэтому $\|w\|\leqslant 1$, т. е. $w\in B$.

Отметим, что функциональные промежутки естественно возникают в выпуклом и нелинейном анализе, в задачах теории приближений и оптимального управления, в задаче о расстоянии до чебышёвского подпространства, в теоремах о сильной единственности экстремальных элементов в данной задаче [89], а также в задаче оценки поперечников функциональных классов при пересечении с промежутками [37].

Следуя [173], введём в рассмотрение класс (MeI) пространств X:

$$\mathrm{m}(x,y)=[\![x,y]\!] \quad \text{для всех} \quad x,y\in X \tag{MeI}$$

(сокращение (MeI) происходит от английского «the hull $\mathrm{m}(x,y)$ equals the interval $[\![x,y]\!]$ for all x,y»).

Сразу заметим, что включение

$$\mathrm{m}(x,y)\supset[\![x,y]\!] \tag{8.2}$$

имеет место в любом X (см., например, [173, теорема 3.1]). Действительно (см. [180, с. 55; 214]), замкнутое выпуклое множество M является пересечением шаров, если и только если для любой точки вне M найдётся замкнутый шар, содержащий M, но не содержащий эту точку. Теперь осталось вспомнить понятный результат (вытекающий из того, что $\|x\| = \sup\limits_{f\in\operatorname{ext} S^*} f(x)$) о том, что точку, не принадлежащую замкнутому шару, всегда можно строго отделить от шара посредством экстремальной гиперплоскости.

Замечание 8.1. Равенство

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!] \tag{8.3}$$

имеет место для достаточно широкого класса банаховых пространств. К. Франкетти и С. Роверси [173, теорема 3.2] показали, что (8.3) имеет место для пространств, на единичной сфере которых точки гладкости образуют всюду плотное множество (в сильной топологии). К таким пространствам относятся слабо асплундовы пространства (в частности, слабо компактно порождённые пространства, а значит, сепарабельные пространства и рефлексивные пространства). Также отметим, что если пространство X таково, что $\operatorname{ext} S^*$ лежит в замыкании множества w^*-полуострых точек шара B^* (*условие Морено*), то $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ для всех $x, y \in X$; такому условию, в частности, удовлетворяют конечномерные пространства и пространства со свойством пересечения Мазура [14]. (Напомним, что точка $f \in S^*$ называется *w^*-полуострой* точкой сопряжённого шара B^* (см., например, [174]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся w^*-срез $S\ell$ шара B^*, такой что $\operatorname{diam}(\{f\}\cup S\ell) < \varepsilon$. Здесь $S\ell(B^*,x,\delta) := \{g \in S^* \mid g(x) > 1-\delta\}$, $0 < \delta < 1$, $x \in X$.)

Отметим, что условие Морено не выполнено для пространства ℓ^1 (на единичном шаре пространства ℓ^∞ отсутствуют w^*-полуострые точки [208]), однако согласно указанной теореме Франкетти—Роверси в ℓ^1 равенство (8.3) имеет место.

В конечномерном случае равенство $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ установлено А. Л. Брауном [145].

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Следуя [140], говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f\big(k(\tau)\big)$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$.

Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [8], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Понятно, что любая монотонная кривая является простой (жордановой). Отметим, что монотонно линейно связное множество всегда B-связно (т. е. его пересечение с любым замкнутым (а следовательно, и с открытым [43]) шаром связно; ср. [140, утверждение 1.3]).

Сразу отметим, что существуют примеры конечномерных пространств, в которых имеются не m-связные (и, a fortiori, не монотонно линейно связные) чебышёвские множества и не m-связные солнца (см. замечание 8.4).

Замечание 8.2. Используя (8.2), несложно проверить, что монотонно линейно связное множество необходимо m-связно. Обратное утверждение неверно даже для замкнутых множеств; соответствующий пример в $C[0,1]$ предложен в [173] (см. также [8]): пусть

$$M = M_1 \cup M_{-1},$$

где $M_\sigma = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент. В то же время несложно проверить, что M m-связно.

Однако в c_0 и в произвольном конечномерном пространстве X_n эти свойства эквивалентны для замкнутых множеств (см. [7, теорема 1] и лемму 8.2); утверждение для X_n следует из (8.2), (8.3) и теоремы 8.1).

Некоторые достаточные условия монотонной линейной связности m-связного подмножества линейного нормированного пространства даны в теореме 8.1. Отметим, что пространствах X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ класс монотонно линейно связных (m-связных) замкнутых множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств (в таких X по теореме Фелпса [214] всегда выполнено $\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]$ для любых $x, y \in X$).

Нам также понадобится следующий класс пространств, введённый К. Франкетти и С. Роверси [173]:

$$\operatorname{ext} S^* \quad w^*\text{-сепарабельно.} \tag{Ex-w^*s}$$

При этом в определении класса (Ex-w^*s) мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^* \ w^*\text{-плотно в } \operatorname{ext} S^*, \quad \operatorname{card} I \leqslant \aleph_0, \quad F = -F$$

(сокращение (Ex-w^*s) происходит от немецкого «die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^*-separabel»).

Сразу отметим, что любое пространство из класса (Ex-w^*s) имеет w^*-сепарабельный единичный шар. Действительно, так как единичный шар B^* пространства X^* является w^*-замыканием выпуклой оболочки множества $\operatorname{ext} S^*$, то w^*-сепарабельность множества $\operatorname{ext} B^*$ (границы Джеймса) влечёт w^*-сепарабельность шара B^* и, как следствие [157, с. 253], w^*-сепарабельность пространства X^*. В [157, утверждение (2)] показано, что w^*-сепарабельность шара B^* эквивалентна тому, что пространство X изометрически изоморфно подпространству пространства ℓ^∞ (известно, что последнее выполнено для всех сепарабельных банаховых пространств). Также отметим, что в [157] также предъявлен пример банахова пространства, такого что X^* w^*-сепарабельно, а шар B^* — нет.

Хорошо известно [14], что если X — сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^*-топология единичного шара B^* сопряжённого пространства X^* метризуема. Отсюда следует, что любое сепарабельное пространство лежит в классе (Ex-w^*s). Также отметим, что класс (Ex-w^*s) содержит *несепарабельное* пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда). При этом $C(Q)$ на несепарабельном (неметризуемом) Q и $c_0(\Gamma)$ на несчётном Γ не лежат в (Ex-w^*s).

Кратко суммируя сказанное выше относительно пространств класса (MeI) и (Ex-w^*s), отметим, что класс (MeI) $\cap$ (Ex-w^*s) содержит все сепарабельные банаховы пространства (в частности, все пространства $C(Q)$ на метризуемом компакте Q) и несепарабельное пространство ℓ^∞.

Пусть $X \in (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$, $F = (f_i)_{i\in I}$ — семейство функционалов из определения класса $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (мы всегда предполагаем, что $F = -F$), пусть $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, $\operatorname{card} I \leqslant \aleph_0$, и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i\in I} \alpha_i |f_i(x)|. \tag{8.4}$$

Тогда $|\cdot|$ — норма на X, которую, следуя [145], мы называем *ассоциированной* (*по Брауну*). Ясно, что $|x| \leqslant \|x\| \sum \alpha_i$.

Важность ассоциированной нормы показывает следующий результат из [14], который является естественным обобщением следствия 3.2 из [145], доказанного А. Л. Брауном в случае $\dim X < \infty$.

Лемма 8.1. *Пусть X — банахово пространство из класса* $(\mathrm{MeI}) \cap (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности, X — сепарабельное банахово пространство*), *и пусть $x, y \in X$. Следующие условия эквивалентны*:

а) $z \in \mathrm{m}(x, y)$;

б) $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ *для всех $i \in I$, где $F = (f_i)_{i\in I}$ — семейство из определения класса* $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$;

в) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$ (*т. е. z находится между x и y относительно нормы $|\cdot|$*).

Основным результатом о связи монотонно линейно связных и m-связных множеств является следующий результат (см. [14]).

Теорема 8.1. *Пусть X — банахово пространство, и пусть множество $M \subset X$ замкнуто и* m*-связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

а) *M ограниченно компактно* (*в норме $\|\cdot\|$*);

б) *M $|\cdot|$-замкнуто и $\mathrm{m}(u, v)$ $|\cdot|$-компактно для любых $x, y \in X$*;

в) *$\mathrm{m}(x, y)$ $\|\cdot\|$-компактно для любых $x, y \in X$.*

Тогда M монотонно линейно связно.

Если вдобавок M ограниченно компактно, то M P- и B-клеточноподобно, P- и B-ациклично (*относительно любой непрерывной теории* (*ко*)*гомологий*) *и является солнцем.*

Если X конечномерно, то M P- и B-стягиваемо.

С учётом того, что замкнутое множество $M \subset X$ обладает непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой из метрической проекции для всех $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда оно является $\mathring{B}$-стягиваемым (теорема 6.5), из теоремы 8.1 вытекает, что метрическая проекция на m-связное (монотонно линейно связное) замкнутое подмножество конечномерного пространства обладает непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$. По-видимому, можно надеяться, что аналогичный результат верен и в бесконечномерном случае.

Для случая слабо компактных множеств мы имеем следующий результат (см. [14]).

Теорема 8.2. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, и пусть $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно слабо компактно и* m*-связно. Тогда M монотонно линейно связно.*

Замечание 8.3. Хорошо известен следующий результат Л. П. Власова [43]: в банаховом пространстве P-ацикличное ограниченно компактное множество является солнцем (см. замечание 6.2 по поводу определения ацикличности, использованного при доказательстве теоремы Л. П. Власова). Было бы интересно, особенно в свете теоремы 8.2, распространить теорему Л. П. Власова на случай ограниченно слабо компактных множеств хотя бы в сепарабельном случае. Проблема здесь в следующем: несмотря на то что слабо компактное подмножество M сепарабельного банахова пространства метризуемо, а топология, порождаемая метрикой на M, совпадает со слабой топологией на M, теорема Эйленберга—Монтгомери о неподвижной точке неприменима, поскольку метрическая проекция на M полунепрерывна сверху лишь сильно-слабо (носитель один, а топологии на нём разные).

Отметим ещё один результат.

Теорема 8.3. *Монотонно линейно связное ограниченно компактное подмножество банахова пространства является солнцем.*

Напомним ещё одну известную проблему.

Проблема 10. Верно ли, что слабо компактное чебышёвское множество в банаховом пространстве является солнцем?

В теореме 8.1 первое утверждение идейно восходит к одному конечномерному результату Д. Браесса [127, § 6] и следующей лемме Менгера [207] (см. также [176]).

Напомним, что множество M в метрическом пространстве (X, d) называется *метрически выпуклым* (или *выпуклым по Менгеру*), если для любых $x, y \in M$ найдётся $z \in M$, $z \neq x, y$, такая что $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Лемма 8.2. *Пусть M — полное метрически выпуклое метрическое пространство. Тогда для любых точек x, y из M существует соединяющий их метрический сегмент, т. е. существует изометрия $\varphi\colon [0, \rho(x, y)] \to M$, такая что $\varphi(0) = x$, $\varphi\big(\rho(x, y)\big) = y$.*

Монотонная линейная связность в теореме 8.1 установлена в [8]. Конечномерный случай вытекает из п. а) и теоремы Брауна [146], согласно которой пересечение m-связного замкнутого подмножества конечномерного X с замкнутым шаром бесконечно связно. Теперь из известной характеризации абсолютных ретрактов (см., например, [185, теорема 11.1]) следует, что M стягиваемо и локально стягиваемо. Отметим, что условия б) и в) теоремы 8.1 a fortiori выполнены в пространстве $X = c_0$.

Напомним, что топологическое пространство, у которого первые n гомотопических (или гомологических) групп тривиальны, называется *n-связным*. Таким образом, 0-связное множество линейно связно, а 1-связное множество односвязно.

Отметим, что теорема 8.1 усиливает следующий конечномерный результат А. Л. Брауна [146].

Теорема 8.4. *Пусть M — m-связное замкнутое подмножество конечномерного линейного нормированного пространства. Тогда M бесконечно связно и его пересечение с любым замкнутым шаром бесконечно связно.*

8.2. Монотонная линейная связность и солнечность

Долгое время результаты В. А. Кощеева (см. разделы 7.1 и 7.2) о связности компактных солнц в произвольных линейных нормированных пространствах не улучшались даже в конкретных конечномерных пространствах. Существенные продвижения в этом направлении получены Х. Беренсом и Л. Хетцельтом [118, 119], которые установили метрическую выпуклость солнц в двумерных пространствах и в пространстве $\ell^\infty(n)$ (соответственно относительно радоново трансформированной нормы (определение см. в [120, 181]) и ℓ^1-нормы). Как следствие, солнца в таких пространствах монотонно линейно связны.

Сразу отметим, что существуют примеры конечномерных пространств, в которых имеются не m-связные (не монотонно линейно связные) чебышёвские солнца (см. [145, теорема 4.3; 173, с. 19]). Приведём ещё один пример.

Пример 8.1. Пусть X — линейное нормированное пространство со свойством $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$, $\dim X < \infty$. Р. Р. Фелпс [214] показал, что свойство $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ выполнено для пространства X_n, если и только если каждое выпуклое ограниченное замкнутое подмножество X_n представимо как пересечение замкнутых шаров (иными словами, такое X_n лежит в (MIP), т. е. удовлетворяет свойству пересечения Мазура); как следствие, в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. Для любого $n \geqslant 3$ И. Г. Царьков построил пример пространства X размерности n со свойством $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$, содержащего неограниченное невыпуклое чебышёвское множество M'; при этом любое *ограниченное* чебышёвское множество в X выпукло. Таким образом, M' служит примером не монотонно линейно связного B-ацикличного (P-ацикличного) множества (чебышёвского солнца).

Хотя в настоящей работе вопрос о солнечности чебышёвских множеств практически на затрагивается, приведём следующий результат (см. [11]), в котором солнечность произвольного чебышёвского множества в линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении структурных ограничений типа связности.

Теорема 8.5. *Пусть M — монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x — точка солнечности (y — точка светимости). Как след-*

ствие, монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Теорему 8.5 можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности. В частном случае пространств типа $C(Q)$ теорема 8.5 была получена в [8].

Замечание 8.4. Ответ на обратный вопрос о монотонной линейной связности B-ацикличных (P-ацикличных) множеств в общем случае неизвестен (см. пример 8.1).

Выше мы отмечали, что ограниченно компактное монотонно линейно связное множество является солнцем (теорема 8.1). Для аппроксимативно компактных множеств имеет место следующий результат.

Теорема 8.6. *Аппроксимативно компактное монотонно линейно связное подмножество банахова пространства является δ-солнцем.*

Доказательство теоремы 8.5. И. Зингеру и А. Л. Гаркави (см. также [85]) принадлежит удачная идея использования экстремальных функционалов единичной сферы S^* сопряжённого пространства X^* в общих теоремах. Полезным инструментом при этом явилась лемма о продолжении экстремальных функционалов, сформулированная И. Зингером в [52] и доказанная в полном объёме Г. Шоке [154] и А. Л. Гаркави [45, 46].

В частности, И. Зингером получен следующий результат [227]. Пусть $G \subset X$ — линейное подпространство, $x \in X \setminus G$. Предположим, что для x существует элемент наилучшего приближения g_0 из G. Тогда найдётся экстремальная гиперплоскость H_0, проходящая через точку g_0, отделяющая 0 от шара $B(x, \|x - g_0\|)$ и являющаяся опорной к нему. Как следствие, для произвольного $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{f \in S^*} f(x) = \sup_{f \in \operatorname{ext} S^*} f(x), \tag{8.5}$$

т. е. $\operatorname{ext} S^*$ является границей для пространства X.

Продолжая доказательство теоремы 8.5, предположим, что M — монотонно связное чебышёвское множество в X, не являющееся солнцем. Тогда согласно теореме 2.1 найдётся точка $x \notin M$, такая что $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$, где $P_M x = \{y\}$. Не ограничивая общности, считаем, что $x = 0$ и $\rho(x, M) = 1$. Пусть $u \in M \cap \mathring{K}(y, x)$, и пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная монотонная кривая, соединяющая y и u, $k(0) = y$, $k(1) = u$. По определению опорного конуса (2.1) найдётся $r > 1$, такое что $u \in \mathring{B}(z_r, \alpha_r) \subset \mathring{K}(y, x)$, $y \in S(z_r, \alpha_r)$, где $z_r = -ry + (r+1)x$, $\alpha_r = (r+1)$. Обозначим $\mathring{K}(\cdot) := k(\cdot) \setminus \{u, y\}$. Тогда в силу (8.5) и того, что $P_M x = \{y\}$, имеем $\mathring{K}(\cdot) \subset B(z_r, \alpha_r) \subset K(y, x)$.

Предположим, что $\mathring{K}(\cdot) \cap \mathring{B} = \varnothing$. Выберем последовательность точек $v_n \in \mathring{K}(\cdot)$, $v_n \to y$. Известно (см., например, [15]), что точку, не лежащую в замкнутом шаре, всегда можно отделить от шара посредством экстремального функционала (экстремальной аффинной гиперплоскости). Соответственно, для каждого n найдутся функционал $f_n \in \operatorname{ext} S^*$ и число $d_n \geqslant 1$, такие что экстремальная гиперплоскость $\{z \mid f_n(z) = d_n\}$ отделяет точку v_n от шара B. Так как кривая $k(\cdot)$ монотонна, то $f_n(v_n) \in [f_n(y), f_n(u)]$, откуда следует, что $f_n(v_n) \geqslant d_n$. Поскольку шар B^* w^*-компактен, то последовательность (f_n) имеет в w^*-топологии предельную точку $f \in S^*$. Поскольку $d_n \to 1$, то, переходя к пределу, имеем $f(y) = 1$ и $f(u) \geqslant 1$. В силу (2.2) последнее противоречит исходному предположению $u \in \mathring{K}(y,x)$.

Итак, случай $\mathring{K}(\cdot) \cap \mathring{B} = \varnothing$ невозможен. Но случай $\mathring{K}(\cdot) \cap \mathring{B} \neq \varnothing$ также невозможен, поскольку по предположению $\mathring{B} \cap M = \varnothing$, а $k(\cdot) \subset M$. Полученное противоречие доказывает теорему 8.5. $\square$

8.3. (BM)-пространства

При изучении связности солнц в конечномерных пространствах А. Л. Браун [145] ввёл класс (BM) линейных нормированных пространств. На такие пространства оказывается возможным перенести со случая $X = \ell^\infty(n)$ ряд нетривиальных результатов о геометро-топологических свойствах солнц.

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0, \|x\|) \cap (\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x\}) \neq \varnothing, \quad \text{когда} \quad [x, x-y] \cap \mathring{B}(0, \|x\|) = \varnothing. \tag{8.6}$$

Класс (BM)-пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространства $\ell^\infty(n)$, c_0, c, ℓ^∞, все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешётки $C(Q)$ с единицей [173], а также замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞-прямой суммы [145, § 5] и бесконечной c_0-прямой суммы сепарабельных (BM)-пространств [173, теорема 8.7]. (Если X_1, X_2 — линейные нормированные пространства, то ℓ^∞-прямой суммой X_1 и X_2 называется прямая сумма X_1 и X_2 с нормой $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}$.) Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM), если и только если оно гладкое [173, утверждение 8.2].

Предложение 8.1. *Пространства* ℓ^1, $\ell^1(n)$, $n \geqslant 3$, *не лежат в* (BM).

Достаточно рассмотреть случай $\ell^1(3)$. Пусть $x = (1,0,0)$ и $y = (1, 1/2, 1/2)$. Легко убедиться, что $[x, x-y] \cap \mathring{B} = \varnothing$. По (8.3) имеем, что $\mathrm{m}(x,y) = \{z \in f_i(z) \in [f_i(x), f_i(y)],\ i = 1, \ldots, 4\}$, где $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,-1)$, $f_3 = (1,-1,1)$, $f_4 = (-1,1,1)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{m}(x,y) = \left\{(1,\alpha,\alpha) \;\middle|\; 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

и видно, что $\mathrm{m}(x,y) \cap B = \{x\}$, т. е. (8.6) не выполнено.

А. Л. Браун [145, 148] (см. теорему 8.7 ниже) установил, что полиэдральные (BM)-пространства конечной размерности в точности являются ℓ^∞-прямыми суммами конечного набора симметричных полиэдральных пространств

$X_1, \dots, X_r$ размерности 1 или 2:

$$X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r. \tag{8.7}$$

Шар пространства вида (8.7) всегда является зонотопом [148] (проекцией n-мерного куба на подпространство), но класс всех зонотопов не исчерпывается такими пространствами.

Характеризация произвольных трёхмерных (BM)-пространств получена А. Л. Брауном [147]: X гладко или $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, где Y — двумерное (BM)-пространство.

8.4. Монотонная линейная связность и m-связность солнц в конечномерных пространствах

Для формулировки основных результатов раздела нам потребуется следующее определение.

Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $\dim X = n$. Подпространство $L \subset X$ называется *v-подпространством* (от англ. «vertex subspace») [148], если L есть линейная комбинация экстремальных точек единичной сферы S, содержащихся в L. Следуя А. Л. Брауну, мы говорим, что отрезок $[s_1, s_2] \subset S$ *пересекается* с подпространством L, если $[s_1, s_2] \cap L \neq \varnothing$ и $s_1, s_2 \notin L$.

Если $v_1, \dots, v_r$ — линейно независимые точки из $\operatorname{ext} S$ и отрезок $[s_1, s_2]$ пересекается с подпространством $\operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_r\}$, то точки $s_1, v_1, \dots, v_r$ также линейно независимы и можно найти $v_{r+1}, \dots, v_{n-1} \in \operatorname{ext} S$, такие что $s_1, v_1, \dots, v_{n-1}$ образует базис X. В этом случае отрезок $[s_1, s_2]$ пересекает гиперподпространство $\operatorname{lin} v_1, \dots, v_{n-1}$. Таким образом, отрезок $[s_1, s_2]$ пересекается с некоторым v-подпространством в X, если и только если он пересекается с некоторым v-гиперподпространством.

В следующей теореме все эквивалентности получены А. Л. Брауном [145, 148], за исключением эквивалентностей 2) $\Longleftrightarrow$ i). Эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 1) обеспечивается теоремой 8.1.

Теорема 8.7. *В полиэдральном конечномерном линейном нормированном пространстве X следующие условия эквивалентны:*

1) *каждое солнце в X m-связно;*
2) *каждое солнце монотонно линейно связно;*
3) *пространство X^* удовлетворяет следующему условию: никакая одномерная грань сферы S^* не пересекается ни с каким v-подпространством в X^*;*
4) *X^* есть ℓ^1-прямая сумма вида $X^* = Y_1 \oplus_1 \dots \oplus Y_r$, где $\dim Y_i = 1$ или $\dim Y_i = 2$, $i = 1, \dots, r$;*
5) *X есть ℓ^∞-прямая сумма вида $X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r$, $\dim X_i = 1$ или $\dim X_i = 2$, $i = 1, \dots, r$;*
6) *X – (BM)-пространство.*

Среди нерешённых проблем в этой области выделим следующие.

Проблема 11. Охарактеризовать пространства, в которых каждое чебышёвское множество монотонно линейно связно, m-связно.

По известной теореме Власова [43] ограниченно компактное P- или B-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем. Как следствие, в конечномерных (BM)-пространствах P- или B-ацикличность влечёт солнечность, а значит и монотонную линейную связность. В конечномерном полиэдральном пространстве X_n каждое солнце монотонно линейно связно, если и только если $X_n \in$ (BM). В связи со сказанным сформулируем следующую проблему.

Проблема 12. Известно, что $\ell^1(n) \notin$ (BM), $n \geqslant 3$, и поэтому в $\ell^1(n)$ существует не монотонно линейно связное солнце. Однако неизвестно, будет ли такое солнце P-ацикличным (или даже хотя бы P-связным).

8.5. Монотонная линейная связность в пространствах типа $C(Q)$

Отправной точкой при исследовании монотонной связности в теории приближений служит теорема Браесса [127], утверждающая (в наших терминах) монотонную линейную связность строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, а также следующий результат Х. Беренса и Л. Хетцельта [119] (тоже формулируемый в наших терминах).

Теорема 8.8. *Непустое подмножество пространства $\ell^\infty(n)$ является солнцем тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно.*

В следующей теореме [7] найдено бесконечномерное негладкое пространство, в котором *всякое* солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно).

Теорема 8.9.

1. *Произвольное солнце в c_0 монотонно линейной связно.*
2. m-*связное* (*и тем более монотонно линейно связное*) *аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем.*
3. *Пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем.*

Для случая $X = C(Q)$, где Q — метрический компакт, известные результаты о связности строгих солнц и чебышёвских множеств можно усилить следующим образом (см. [8, теорема 3]).

Теорема 8.10. *Ограниченно компактное строгое солнце* (*в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество*) *в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно и B-клеточноподобно.*

Второе утверждение в теореме 8.10 частично обращает хорошо известную теорему Власова, согласно которой ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

8.6. Солнечность и монотонная линейная связность пересечений солнц с брусами

Вопрос об аппроксимативных и геометрических свойствах пересечений солнц и строгих солнц с промежутками (брусами) в пространствах типа $C(Q)$ рассматривался в [8, 9, 13], см. также раздел 7.4. По поводу аппроксимативных свойств пересечений солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств с интервалами на нормированной плоскости см. [10].

Напомним определение бруса [15]. Для данных $M \subset X$ и $f \in X^*$ обозначим $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$; пусть $p_f(M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $f(M)$. Таким образом, $p_f(M) \subset \mathbb{R}$ — это замкнутый выпуклый числовой промежуток между $\inf f(M)$ и $\sup f(M)$. Пусть $D \subset X^*$ — произвольное подмножество сопряжённого пространства. По определению *D-брус* — это замкнутое выпуклое множество $M \subset X$ вида

$$M = \bigcap_{f \in D} f^{-1}\bigl(p_f(M)\bigr).$$

Любой D-брус есть пересечение замкнутых полупространств, поэтому D-брус является выпуклым (в обычном смысле) и замкнутым множеством. Если D — шар или сфера пространства X^*, то верно и обратное: всякое выпуклое замкнутое множество является D-брусом (это следует из теоремы отделимости). Пересечение любого числа и сумма конечного числа D-брусов снова является D-брусом.

Множество $M \subset X$ называется *брусом* [15], если M является *D-брусом* для $D \subset \operatorname{ext} S^*$. Легко убедиться, что замкнутый шар является брусом. Если норма сопряжённого пространства строго выпукла (или если точки строгой дифференцируемости плотны на сфере сопряжённого пространства [175, 214]), то брусы — это выпуклые замкнутые множества.

Отметим, что все брусы в $C(Q)$ — замкнутые промежутки [15]. Аналогичный результат верен для множеств с непустой внутренностью в любом конечномерном пространстве X_n (см. [12]). Включение $[\![x, y]\!] \subset \Pi$ при любых $x, y \in \Pi$ (Π — брус) очевидно в любом X (т. е. брус заведомо является замкнутым промежутком).

Брусы естественно возникают в задачах отделимости экстремальными функционалами, а также в теории приближений при приближении гладкими функциями при ограничении на производную. Интересно отметить, что брусы обладают следующим характеристическим свойством: они строго экстремально отделяются (т. е. строго отделяются экстремальным функционалом из S^*) от любой точки, им не принадлежащей [15]; при этом для двумерных пространств, а также для пространств типа $C(Q)$ имеет место аналог теоремы отделимости: два непересекающихся бруса строго отделяются экстремальным функционалом [15]; в общем случае (например, в $L^1(\Omega)$, $|\Omega| \geqslant 3$) это утверждение неверно.

В теоремах 8.11—8.13 (см. [12]) даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 8.14.

Теорема 8.11. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X_n$ — замкнутое m-связное множество (в частности, M — солнце в произвольном двумерном пространстве X_2 или в $X_n \in (\mathrm{BM})$), и пусть Π — брус в X_n, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда*

$$M \cap \Pi \text{ — монотонно линейно связное солнце в } X_n.$$

Теорема 8.12. *Пусть $X \in (\mathrm{MeI}) \cap (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (в частности, X — сепарабельное банахово пространство), $M \neq \varnothing$ — ограниченно компактное m-связное множество, и пусть Π — брус в X, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда*

$$M \cap \Pi \text{ — монотонно линейно связное солнце в } X.$$

Теорема 8.13. *Пусть $M \neq \varnothing$ — монотонно линейно связное множество в линейном нормированном пространстве X, и пусть Π — брус в X, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда*

$$M \cap \Pi \text{ монотонно линейно связно.}$$

Замечание 8.5. Отметим существенность требования монотонной линейной связности (m-связности) солнц в теоремах 8.11—8.13. Имея в нашем распоряжение невыпуклое чебышёвское солнце M' в X_n из примера 8.1, мы можем найти такую прямую (брус), пересечение которой с M' несвязно и, следовательно, не может быть солнцем, поскольку по упомянутой выше теореме Кощеева—Брауна любое солнце в конечномерном пространстве связно.

В следующей теореме (см. [12]) даётся характеризация строгих солнц в терминах солнечности их пересечений с замкнутыми телесными промежутками. Аналогичный результат для $C(Q)$ содержится в [13].

Теорема 8.14. *Пусть $\Pi \neq \varnothing$ — замкнутое множество в X_n. Следующие утверждения эквивалентны*:

а) Π — *брус (замкнутый промежуток)*;
б) $\Pi \cap M$ — *монотонно линейно связное солнце для любого монотонно линейно связного солнца M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$*;
в) $\Pi \cap M$ — *солнце для любого монотонно линейно связного солнца M, такого что $M \cap \Pi \neq \varnothing$*;
г) $\gamma \cap \Pi$ — *монотонно линейно связное солнце для любой монотонной дуги γ, $\gamma \cap \Pi \neq \varnothing$.*

В теореме 8.14 требование монотонной линейной связности существенно (см. замечание 8.5). Аналогичный результат для пространства $\ell^\infty(n)$ получен в [9]; для нормированной плоскости — в [10]. Солнечность пересечений строгих солнц с замкнутыми телесными промежутками (брусами) в $C(Q)$ рассмотрена в [13].

Напомним, что любой замкнутый шар является брусом. В случае $C(Q)$ отметим следующие результаты (см. [8, 13]).

Теорема 8.15. *Пусть $M \subset C(Q)$ — ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$. Предположим, что $M \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \varnothing$ для некоторых $\theta \in C(Q)$, $r > 0$. Тогда $M \cap B(\theta, r)$ — компактное строгое солнце в $C(Q)$.*

Теорема 8.16. *Имеют место следующие утверждения*:

а) *пусть M — строгое протосолнце в $C(Q)$, Π — замкнутый телесный промежуток в $C(Q)$, причём $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ — строгое протосолнце в $C(Q)$;*

б) *пусть M — строгое протосолнце в $C(Q)$, Π — замкнутый телесный промежуток в $C(Q)$, причём $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ и $M \cap \Pi$ является множеством существования. Тогда $M \cap \Pi$ — строгое солнце в $C(Q)$;*

в) *пусть M — ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$, Π — замкнутый промежуток в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ — солнце в $C(Q)$.*

В следующей теореме [13] даётся характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах солнечности их пересечений с замкнутыми телесными промежутками.

Теорема 8.17. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *M — строгое протосолнце в $C(Q)$;*

б) *$M \cap \Pi$ — строгое протосолнце в $C(Q)$ для любого замкнутого телесного промежутка Π в $C(Q)$, такого что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;*

в) *$M \cap \mathrm{m}(x, y)$ — строгое протосолнце в $C(Q)$ для любых $x, y \in C(Q)$, таких что $M \cap \operatorname{int} \mathrm{m}(x, y) \neq \varnothing$.*

Замечание 8.6. Отметим ряд следствий из приведённых результатов. К. С. Рютин [81] при исследовании вопроса равномерной непрерывности оператора почти наилучшего обобщённого рационального приближения построил ряд примеров конечномерных подпространств V, W, для которых пересечение $R_{V,W} \cap B$ компактно в $C(Q)$ (Q — связный метрический компакт), где

$$R_{V,W} = \mathrm{cl}\{v/w \mid v \in V,\ w \in W,\ w > 0 \text{ на } Q\}.$$

По теореме Рютина [81] для любого $\varepsilon > 0$ существует равномерно непрерывная мультипликативная ε-выборка $\varphi\colon B \to R_{V,W}$; ввиду теоремы 6.5 это даёт $\mathring{B}$-стягиваемость пересечения $B \cap R_{V,W}$. По теореме Б. Брозовского и Р. Вегмана [141] множество $R_{V,W}$ является строгим протосолнцем, по теореме 8.16 пересечение $R_{V,W} \cap B$ является компактным строгим солнцем, по теореме 8.10 оно монотонно линейно связно, а по теореме 8.1 — P- и B-клеточноподобно. Однако выше мы отметили, что $R_{V,W}$ монотонно линейно связно. Это замечание вместе с общей теоремой 6.5 даёт более сильный результат: $R_{V,W}$ B-стягиваемо в общем случае (см. замечание 6.1).

Авторы благодарны С. А. Богатому, В. И. Бердышеву, А. А. Васильевой, В. Б. Демидовичу, У. Х. Каримову, С. В. Конягину, Г. Г. Магарил-Ильяеву, Ю. В. Малыхину, А. В Маринову, В. Ю. Протасову, К. С. Рютину, В. М. Тихомирову, Н. И. Черных, Е. В. Щепину за полезные обсуждения. Авторы особенно благодарны П. А. Бородину за прочтение рукописи и ценные замечания.

Литература

[1] Алимов А. Р. Чебышёвские компакты на плоскости // Тр. МИАН. — 1997. — Т. 219. — С. 8—26.

[2] Алимов А. Р. Всякое ли чебышёвское множество выпукло? // Матем. просвещение. Сер. 3. — 1998. — № 2. — С. 155—172.

[3] Алимов А. Р. Геометрическая характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 1. — С. 3—11.

[4] Алимов А. Р. О структуре дополнения к чебышёвским множествам // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35, № 3. — С. 19—27.

[5] Алимов А. Р. Выпуклость чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 1. — С. 3—15.

[6] Алимов А. Р. Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 1. — С. 1—10.

[7] Алимов А. Р. Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3—18.

[8] Алимов А. Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3—18.

[9] Алимов А. Р. Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ при пересечении с подмножествами $\mathbb{R}^n$ // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — Т. 70, № 5. — С. 3—12.

[10] Алимов А. Р. Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 4. — С. 46—49.

[11] Алимов А. Р. Монотонно связное чебышёвское множество является солнцем // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 2. — С. 305—307.

[12] Алимов А. Р. Локальная солнечность солнц в линейных нормированных пространствах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 3—14.

[13] Алимов А. Р. Ограниченная строгая солнечность строгих солнц в пространстве $C(Q)$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — Т. 67, № 6. — С. 16—19.

[14] Алимов А. Р. Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2014. — Т. 78, № 4. — С. 3—19.

[15] Алимов А. Р., Протасов В. Ю. Отделимость выпуклых множеств экстремальными гиперплоскостями // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 3—12.

[16] Альбрехт П. В. Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, № 9. — С. 3—28.

[17] Андреев В. И. О существовании разрывных метрических проекций // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16, № 6. — С. 857—864.

[18] Ахиезер Н. И. Об экстремальных свойствах некоторых дробных функций // ДАН СССР. — 1930. — Т. 18. — С. 495—499.

[19] Балаганский В. С. О выпуклых антипроксиминальных множествах без наиболее удалённых точек // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 1—7.

[20] Балаганский В. С., Власов Л. П. Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в банаховых пространствах: Препринт. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1990.

[21] Балаганский В. С., Власов Л. П. Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН. — 1996. — Т. 51, № 6. — С. 125—188.

[22] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем.. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[23] Беднов Б. Б. Кратчайшие сети в банаховых пространствах: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2014.

[24] Бердышев В. И. О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 5. — С. 797—808.

[25] Бердышев В. И. Пространства с равномерно непрерывной метрической проекцией // Матем. заметки. — 1975. — Т. 17, № 1. — С. 3—12.

[26] Бердышев В. И. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 483—509.

[27] Бердышев В. И. Варьирование нормы в задаче о наилучшем приближении // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 2. — С. 181—196.

[28] Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999.

[29] Бородин П. А. Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося компактным // УМН. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 157—158.

[30] Бородин П. А. Выпуклость 2-чебышёвских множеств в гильбертовом пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — № 3. — 2008. — С. 16—19.

[31] Бородин П. А. Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 8. — С. 25—44.

[32] Бородин П. А. О выпуклости n-чебышёвских множеств // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 4. — С. 19—46.

[33] Бородин П. А. Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 11. — С. 23—40.

[34] Бородин П. А. Примеры множеств с заданными аппроксимативными свойствами в WCG-пространстве // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 5. — С. 643—647.

[35] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, № 1. — С. 135—138.

[36] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 75—116.

[37] Васильева А. А. Критерий существования гладкой функции при ограничениях // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 3. — С. 335—346.

[38] Власов Л. П. Аппроксимативно выпуклые множества в банаховых пространствах // ДАН СССР. — 1965. — Т. 163. — С. 18—21.

[39] Власов Л. П. О чебышёвских и аппроксимативно выпуклых множествах // Матем. заметки. — Т. 2, № 2. — 1967. — С. 191—200.

[40] Власов Л. П. Чебышёвские множества и их обобщения: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Свердловск, 1967.

[41] Власов Л. П. Чебышёвские множества и некоторые их обобщения // Матем. заметки. — Т. 3, № 1. — 1968. — С. 59—69.

[42] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. — Т. 7, № 5. — 1970. — С. 593—604.

[43] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. — Т. 28, № 6. — 1973. — С. 3—66.

[44] Власов Л. П. О почти выпуклых множествах // Матем. заметки. — 1975. — Т. 18, № 3. — С. 343—356.

[45] Гаркави А. Л. Общие теоремы об очистке // Rev. Math. Pures Appl. — 1961. — Vol. 6, no. 2. — P. 293—303.

[46] Гаркави А. Л. О критерии элемента наилучшего приближения // Сиб. матем. журн. — 1964. — Т. 5, № 2. — С. 472—476.

[47] Гаркави А. Л. О существовании наилучшего приближения функции двух переменных суммами плоских волн // Тр. МИАН. — 1997. — Т. 219. — С. 130—136.

[48] Гончаров В. Л. Теория наилучшего приближения функций // Научное наследие П. Л. Чебышёва. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. — С. 122—172.

[49] Гусак А. А. Теория приближения функций. — Минск: БГУ, 1972.

[50] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Некоторые свойства чебышёвских множеств // ДАН СССР. — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 17—19.

[51] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества // ДАН СССР. — 1961. — Т. 140, № 3. — С. 522—524.

[52] Зингер И. О продолжении линейных функционалов // Rev. Math. Pures Appl. — 1956. — Vol. 1, no. 2. — P. 115—123.

[53] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. — М.: Наука, 1988.

[54] Иванов Г. Е., Лопушански М. С. Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 94—104.

[55] Карлов М. И., Царьков И. Г. Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 967—978.

[56] Конягин С. В. Связность множеств в задачах наилучшего приближения // ДАН СССР. — 1981. — Т. 261, № 1. — С. 20—23.

[57] Конягин С. В. О множествах точек непустоты и непрерывности метрической проекции // Матем. заметки. — 1983. — Т. 33, № 5. — С. 641—655.

[58] Конягин С. В. О непрерывности оператора обобщённого рационального приближения // Матем. заметки. — 1988. — Т. 44, № 3. — С. 404.

[59] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, № 4. — С. 979—989.

[60] Конягин С. В., Царьков И. Г. Пространства Ефимова—Стечкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1986. — № 5. — С. 20—27.

[61] Кощеев В. А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. — 1975. — Т. 17, № 2. — С. 193—204.

[62] Кощеев В. А. Некоторые свойства δ-проекции в линейных нормированных пространствах // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1976. — № 5. — С. 36—42.

[63] Кощеев В. А. Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. — 1976. — Т. 19, № 2. — С. 267—278.

[64] Кощеев В. А. Пример несвязного солнца в банаховом пространстве // Матем. заметки. — 1979. — Т. 26, № 1. — С. 89—92.

[65] Кощеев В. А. Связность по Власову—Вулберту множеств в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 5. — С. 790—792.

[66] Лившиц Е. Д. Об устойчивости оператора ε-проекции на множество сплайнов в пространстве $C[0,1]$ // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 1. — С. 99—130.

[67] Лившиц Е. Д. О почти наилучшем приближении кусочно-полиномиальными функциями в пространстве $C[0,1]$ // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 4. — С. 629—634.

[68] Малыхин Ю. В. Условие выпуклости в теоремах Кукера—Смейла в теории обучения // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84, № 1. — С. 144—148.

[69] Маринов А. В. Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции // Матем. заметки. — 1994. — Т. 55, № 4. — С. 47—53.

[70] Маринов А. В. Константы Липшица оператора метрического ε-проектирования в пространствах с заданными модулями выпуклости и гладкости // Изв. РАН. Сер. матем. — 1998. — Т. 62, № 2. — С. 103—130.

[71] Мелихов С. А. Стинродовские гомотопии // УМН. — 2009. — Т. 64, № 3 (387). — С. 73—166.

[72] Невесенко Н. В. Строгие солнца и полунепрерывность метрической проекции в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 4. — С. 563—572.

[73] Невесенко Н. В. Метрическая проекция и связность множеств в линейных нормированных пространствах // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1979. — № 1. — С. 51—53.

[74] Ошман Е. В. Чебышёвские множества и непрерывность метрической проекции // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1970. — № 9 (100). — С. 78—82.

[75] Ошман Е. В. Характеристика подпространств с непрерывной метрической проекцией в линейном нормированном пространстве // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207, № 2. — С. 78—82.

[76] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.

[77] Пятышев И. А. Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным // УМН. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 163—164.

[78] Рубинштейн Г. Ш. О равномерном приближении функции с помощью обобщённых рациональных функций // УМН. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 232—234.

[79] Рютин К. С. Липшицевость ретракций и оператор обобщённого рационального приближения // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, № 4. — С. 1205—1220.

[80] Рютин К. С. Аппроксимативные свойства обобщённых рациональных функций: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2002.

[81] Рютин К. С. О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщённого рационального приближения // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 147—150.

[82] Соловьёв В. Н. О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций // Изв. РАН. Сер. матем. — 1998. — Т. 62, № 4. — С. 173—200.

[83] Сосов Е. Н. О непрерывности и связности метрической δ-проекции в равномерно выпуклом геодезическом пространстве // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2001. — № 3. — С. 55—59.

[84] Тихомиров В. М. Теория приближений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1987. — Т. 14. — С. 103—260.

[85] Фонф В. П. Слабо экстремальные свойства банаховых пространств // Матем. заметки. — 1989. — Т. 45, № 6. — С. 83—92.

[86] Фурсиков А. В. Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье—Стокса // Матем. сб. — 1982. — Т. 118, № 3. — С. 323—349.

[87] Фурсиков А. В. Некоторые вопросы теории оптимального управления нелинейными системами с распределёнными параметрами // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 167—189.

[88] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[89] Хавинсон С. Я. Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций // Analysis Math. — 2003. — Т. 29. — С. 87—105.

[90] Царьков И. Г. Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки. — 1984. — Т. 36, № 1. — С. 73—87.

[91] Царьков И. Г. О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 2. — С. 174—196.

[92] Царьков И. Г. О компактных и слабо компактных чебышёвских множествах в линейных нормированных пространствах // ДАН СССР. — 1988. — Т. 300, № 1. — С. 41—42.

[93] Царьков И. Г. Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Т. 189. — С. 169—184.

[94] Царьков И. Г. Локальная «однородность» множества единственности // Матем. заметки. — 1989. — Т. 45, № 5. — С. 121—123.

[95] Царьков И. Г. Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47, № 2. — С. 137—147.

[96] Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^{δ} // Матем. заметки. — 1990. — Т. 48, № 1. — С. 122—131.

[97] Царьков И. Г. Неединственность решений некоторых дифференциальных уравнений и их связь с геометрической теорией приближения // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 2. — С. 287—301.

[98] Царьков И. Г. Устойчивость однозначной разрешимости для некоторых дифференциальных уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. — 2008. — № 3. — С. 170—182.

[99] Царьков И. Г. Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 6. — С. 133—158.

[100] Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих устойчивой ε-выборкой // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, № 4. — С. 608—613.

[101] Царьков И. Г. Устойчивость однозначной разрешимости квазилинейных уравнений по дополнительной информации // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 6. — С. 918—946.

[102] Царьков И. Г. Множества, обладающие непрерывной выборкой из оператора почти наилучшего приближения // Современные проблемы математики и механики. К 80-летию механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Т. 9, вып. 2. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. — С. 54—58.

[103] Чеснокова К. В. Коэффициент линейности метрической проекции для одномерных чебышёвских подпространств в пространстве C // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 4. — С. 588—595.

[104] Яшина М. В. О плотности множества некоторых экстремальных задач // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1986. — № 6. — С. 54—56.

[105] Яшина М. В. О единственности решения нелинейных задач управления системами с распределёнными параметрами: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1989.

[106] Aizpuru A., Garcia-Pacheco F. J. Some questions about rotundity and renormings in Banach spaces // J. Aust. Math. Soc. — 2005. — Vol. 79. — P. 131—140.

[107] Alimov A. R. A number of connected components of sun's complement // East J. Approx. — 1995. — Vol. 1, no. 4. — P. 419—429.

[108] Alimov A. R. Chebyshev set's complement // East J. Approx. — 1996. — Vol. 2, no. 2. — P. 215—232.

[109] Alimov A. R. The number of connected components of Chebyshev sets and suns complement // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 1998. — Vol. 117. — P. 135—136

[110] Alimov A. R. Characterisations of Chebyshev sets in c_0 // J. Approx. Theory. — 2004. — Vol. 129. — P. 217—229.

[111] Amir D., Deutsch F. Suns, moons and quasi-polyhedra // J. Approx. Theory. — 1972. — Vol. 6. — P. 176—201.

[112] Andres J., Gabor G., Górniewicz L. Acyclicity of solution sets to functional inclusions // Nonlinear Anal. — 2002. — Vol. 49. — P. 671—688.

[113] Balaganskii V. S. An antiproximinal set in a strictly convex space with Frechet differentiable norm // East J. Appr. — 1996 — Vol. 2, no. 2. — P. 131—138.

[114] Balashov M. V., Repovš D. Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 360, no. 1. — P. 307—316.

[115] Bauschke H. H., Wang X., Ye J., Yuan X. Bregman distances and Chebyshev sets // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 159. — P. 3—25.

[116] Bauschke H. H., Wang X., Ye J., Yuan X. Bregman distances and Klee sets // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 158. — P. 170—183.

[117] Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis. Vol. 1. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000.

[118] Berens H., Hetzelt L. Suns and contractive retracts in the plane // Теория приближений функций (Тр. Междунар. конф., Киев, 31 мая — 5 июня, 1983) / Под ред. Н. П. Корнейчука и др. — М.: Наука, 1983. — С. 483—487.

[119] Berens H., Hetzelt L. Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$ // Aequat. Math. — 1984. — Vol. 27. — P. 274—287.

[120] Berens H., Hetzelt L. On accretive operators on ℓ_n^∞ // Pacific J. Math. — 1986. — Vol. 125, no. 2. — P. 301—315.

[121] Bernard F., Thibault L. Prox-regularity of functions and sets in Banach spaces // Set-Valued Anal. — 2004. — Vol. 12. — P. 25—47.

[122] Blatter J., Morris P. D., Wulbert D. E. Continuity of the set-valued metric projection // Math. Ann. — 1968. — Vol. 178, no. 1. — P. 12—24.

[123] Borel É. Leçons sur les fonctions de variables reelles et les développements en séries de polynomes. — Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[124] Böröczky K., Jr. Finite Packing and Covering. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

[125] Borwein J. M., Vanderwerff J. D. Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.

[126] Braess D. Nonlinear Approximation Theory. — Berlin: Springer, 1986.

[127] Braess D. Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 11. — P. 260—274.

[128] Breckner B. E., Horváth A., Varga C. A multiplicity result for a special class of gradient-type systems with non-differentiable term // Nonlinear Anal. — 2009. — Vol. 70. — P. 606—620.

[129] Breckner W. W. Zur Charakterisierung von Minimallösungen // Mathematica (Cluj). — 1970. — Vol. 12 (35), no. 1. — P. 25—38.

[130] Breckner W. W., Brosowski B. Ein Kriterium zur Charakterisierung von Sonnen // Mathematica (Cluj) — 1971. — Vol. 13. — P. 181—188.

[131] Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets // Math. Scand. — 1965. — Vol. 17, no. 1. — P. 5—16.

[132] Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets. II // Math. Scand. — 1965. — Vol. 18, no. 1. — P. 5—15.

[133] Brosowski B. Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation. — Mannheim: Bibliogr. Inst. Hochschulskripten, 1968. — Bd. 808/808a.

[134] Brosowski B. Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Kriterium. Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik // Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik. Vortragsauszüge der Tagung

über funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik vom 19. bis 25. November 1967 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) / L. Collatz, H. Unger, eds. — Basel: Birkhäuser, 1969. — P. 25—34.

[135] Brosowski B. Nichtlineare Approximation in normierten Vektorraumen // Abstract Spaces and Approximation. Proc. Conf. held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, July 18—27, 1968 / P. L. Butzer, B. Szőkefalvi-Nagy, eds. — Basel: Birkhäuser, 1969. — P. 140—159.

[136] Brosowski B., Deutsch F. On some geometrical properties of suns: Preprint. — Göttingen: Ges. Wiss. Datenverarb. MBH, 1972.

[137] Brosowski B., Deutsch F. Some new continuity concepts for metric projections // Bull. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 6. — P. 974—978.

[138] Brosowski B., Deutsch F. On some geometric properties of suns // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 10. — P. 245—267.

[139] Brosowski B., Deutsch F. Radial continuity of set-valued metric projection // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 11. — P. 236—253.

[140] Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P. D. Chebyshev sets which are not suns // Math. Ann. — 1974. — Vol. 212, no. 1. — P. 89—101.

[141] Brosowski B., Wegmann R. Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen // J. Approx. Theory. — 1970. — Vol. 3, no. 4. — P. 369—397.

[142] Brown A. L. A rotund, reflexive space having a subspace of co-dimension 2 with a discontinuous metric projection // Michigan Math. J. — 1974. — Vol. 21. — P. 145—151.

[143] Brown A. L. Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces // Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1980. — Vol. 41. — P. 297—339.

[144] Brown A. L. Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory. Proc. Int. Conf., Indian Inst. Techn. Bombay, 16—20.XII.1985 / C. A. Micchelli, ed. — Basel: Birkhäuser, 1986. — P. 97—121.

[145] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. — 1987. — Vol. 279. — P. 87—101.

[146] Brown A. L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. — 1988. — Vol. 20. — P. 1—15.

[147] Brown A. L. On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces // Rend. Circ. Math. Palermo. Ser. II — 2002. — Vol. 68. — P. 315—328.

[148] Brown A. L. Suns in polyhedral spaces // Sem. Math. Anal. Proc. Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002—Feb. 2003 / D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, eds. — Sevilla: Univ. de Sevilla, 2003. — P. 139—146.

[149] Bunt L. N. H. Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen: Thesis. — Amsterdam, 1934.

[150] Butzer P., Jongmans F. P. L. Chebyshev (1821—1894): A guide to his life and work // J. Approx. Theory. — 1999 — Vol. 96. — P. 111—138.

[151] Cheney E. W. Introduction to Approximation Theory. — New York: McGraw-Hill, 1966.

[152] Chidume Ch. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations. — London: Springer, 2009.

[153] Chong L., Watson G. A. Characterization of a best and a unique best approximation from constrained rationals // Comput. Math. Appl. — 1995. — Vol. 30. — P. 51—57.

[154] Choquet G. Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés // Rev. Math. Pures Appl. — 1963 — Vol. 8, no. 4. — P. 541—542.

[155] Cobzaş S. Geometric properties of Banach spaces and the existence of nearest and farthest points // J. Abstr. Appl. Anal. — 2005. — No. 3. — P. 259—285.

[156] Cobzaş S. Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2012.

[157] Dancer E., Sims B. Weak star separability // Bull. Aust. Math. Soc. — 1979 — Vol. 20, no. 2. — P. 253—257.

[158] Deutsch F. R. Best Approximation in Inner Product Spaces. — Berlin: Springer, 2001.

[159] Deutsch F., Lambert J. M. On continuity of metric projections // J. Approx. Theory. — 1980. — Vol. 29, no. 2. — P. 116—131.

[160] Dierieck C. Characterization for best nonlinear approximations: A geometrical interpretation // J. Approx. Theory. — 1975. — Vol. 14, no. 3. — P. 163—187.

[161] Dragoni R., Macki J. W., Nistri P., Zecca P. Solution Sets of Differential Equations in Abstract Spaces. — Harlow: Longman, 1996.

[162] Dunham Ch. Rational Chebyshev approximation on subsets approximation // J. Approx. Theory. — 1968. — Vol. 1. — P. 484—487.

[163] Dunham Ch. Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation // J. Approx. Theory. — 1969. — Vol. 2. — P. 374—383.

[164] Dunham Ch. Chebyshev sets in $C[0,1]$ which are not suns // Can. Math. Bull. — 1975. — Vol. 18, no. 1. — P. 35—37.

[165] Dunham Ch. Transformed rational Chebyshev approximation // J. Approx. Theory. — 1977. — Vol. 19. — P. 200—204.

[166] Dunham Ch. Chebyshev approximation by products // J. Approx. Theory. — 1985. — Vol. 43. — P. 299—301.

[167] Eda K., Karimov U. H., Repovš D. On (co)homology locally connected spaces // Topol. Appl. — 2002. — Vol. 120. — P. 397—401.

[168] Faraci F., Iannizzotto A. An extension of a multiplicity theorem by Ricceri with an application to a class of quasilinear equations // Stud. Math. — 2006. — Vol. 172. — P. 275—287.

[169] Faraci F., Iannizzotto A. Well posed optimization problems and nonconvex Chebyshev sets in Hilbert spaces // SIAM J. Optim. — 2008. — Vol. 19, no. 1. — P. 211—216.

[170] Fletcher J. The Chebyshev set problem: Master of Science Thesis. — Univ. of Auckland, 2013.

[171] Fonf V. P., Lindenstrauss J., Veselý L. Best approximation in polyhedral Banach spaces // J. Approx. Theory. — 2011. — Vol. 163. — P. 1748—1771.

[172] Franchetti C., Cheney E. W. The embedding of proximinal sets // J. Approx. Theory. — 1986 — Vol. 48, no. 2. — P. 213—225.

[173] Franchetti C., Roversi S. Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces: Preprint no. 50139. — Ist. di Mat. Appl. «G. Sansone», 1988.

[174] Giles J. R. The Mazur intersection problem // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13, no. 3-4. — P. 739—750.

[175] Giles J. R., Gregory D. A., Sims B. Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property // Bull. Aust. Math. Soc. — 1978 — Vol. 18. — P. 105—123.

[176] Goebel K., Kirk W. A. Topics in Metric Fixed Point Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[177] Goncharov V. L. The theory of best approximation of functions // J. Approx. Theory. — 2000. — Vol. 106. — P. 2—57.

[178] Górniewicz L. Topological structure of solution sets: current results // Arch. Math. (Brno) — 2000. — Vol. 36 — P. 343—382.

[179] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Berlin: Springer, 2006.

[180] Granero A. S., Jiménez-Sevilla M., Moreno J. P. Intersections of closed balls and geometry of Banach spaces // Extracta Math. — 2004. — Vol. 19, no. 1. — P. 55—92.

[181] Gruber P. M. Planar Chebyshev sets // Mathem. Structure—Computational Math.—Math. Modelling. Vol. 2. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 1984. — P. 184—191.

[182] Haghshenas H., Assadi A., Narang T. D. A look at proximinal and Chebyshev sets in Banach spaces // Le Matematiche — 2014. — Vol. 69, Fasc. I. — P. 71—87.

[183] Hart K. P., Nagata J., Vaughan J. E. Encyclopedia of General Topology. — Amsterdam: Elsevier, 2004.

[184] Hsiao H. K., Smarzewski R. Optimal sunny selections for metric projections // J. Approx. Theory. — 1995. — Vol. 82, no. 3. — P. 440—467.

[185] Sze-Tsen Hu. Theory of Retracts. — Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.

[186] Hu Sh., Papageorgiou N. S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. II: Applications. — Dordrecht: Kluwer, 2000.

[187] Ivanov G. E. On well posed best approximation problems for a nonsymmetric seminorm // J. Convex Anal. — 2013 — Vol. 20, no. 2. — P. 501—529.

[188] Jiang M. On Johnson's example of a nonconvex Chebyshev set // J. Approx. Theory. — 1993. — Vol. 74. — P. 152—158.

[189] Jiménez-Sevilla M., Moreno J. P. A note on norm attaining functionals // Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 1989—1997.

[190] Johnson G. G. Chebyshev foam // Topology Appl. — 1999. — Vol. 74. — P. 163—171.

[191] Johnson G. G. Closure in a Hilbert space of a preHilbert space Chebyshev set // Topology Appl. — 2005. — Vol. 153. — P. 239—244.

[192] Jourani A., Thibault L., Zagrodny D. Differential properties of the Moreau envelope // J. Funct. Anal. — 2014. — Vol. 266. — P. 1185—1237.

[193] Kirchberger P. Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden // Math. Ann. — 1903. — Vol. 57. — P. 509—540.

[194] Klee V. A characterization of convex sets // Am. Math. Mon. — 1949. — Vol. 56. — P. 247—249.

[195] Klee V. Dispersed Chebyshev sets and covering by balls // Math. Ann. — 1981. — Vol. 257, no. 2. — P. 251—260.

[196] Klee V. Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tiling? // Stud. Sci. Math. Hungar. — 1986. — Vol. 21. — P. 415—427.

[197] König H. A general minimax theorem based on connectedness // Arch. Math. (Basel). — 1992. — Vol. 59. — P. 55—64.

[198] Koshcheev V. A. On the structure of suns in Banach spaces // Approximation of Functions / Z. Ciesielski, ed. — Gdańsk: North-Holland, 1979. — P. 371—376.

[199] Kryszewski W. On the existence of equilibria and fixed points of maps under constraints // Handbook of Topological Fixed Point Theory / R. F. Brown, M. Furi et al., eds. — Berlin: Springer, 2005.

[200] Li C., Song W., Yao J.-C. The Bregman distance, approximate compactness and convexity of Chebyshev sets in Banach spaces // J. Approx. Theory. — 2010. — Vol. 162. — P. 1128—1149.

[201] Livshits E. D. Continuous selections of operators of almost best approximation by splines in the space $L^p[0,1]$. I // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, no. 2. — P. 215—218.

[202] Maehly H. J., Witzgall Ch. Tschebyscheff-Approximation in kleinen Intervallen. II. Stetigkeitssatze flir gebrochen rationale Approximationen // Numer. Math. — 1960. — Vol. 2. — P. 293—307.

[203] Mann H. Untersuchungen über Wabenzellen bei allgemeiner Minkowskischer Metrik // Monatsh. Math. Phys. — 1937. — Vol. 42. — P. 74—83.

[204] Massey W. S. Homology and Cohomology Theory. — New York: Marcel Dekker, 1978.

[205] Megginson R. E. An Introduction to Banach Space Theory. — New York: Springer, 1998.

[206] Meinardus G., Schwedt D. Nichtlineare Approximation // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1964. — Vol. 17. — P. 297—326.

[207] Menger K. Untersuchungen über allgemeine Metrik // Math. Ann. — 1928. — Vol. 100. — P. 75—163.

[208] Moreno J. P., Schneider R. Continuity properties of the ball hull mapping // Nonlinear Anal. — 2007. — Vol. 66. — P. 914—925.

[209] Motzkin T. S. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Rend. Ac. Lincei, Cl. VI. — 1935. — Vol. 21. — P. 562—567.

[210] Nürnberger G. Strongly unique spline approximation with free knots // Constr. Approx. — 1987. — Vol. 3. — P. 31—42.

[211] Nürnberger G. Approximation by Spline Functions. — Berlin: Springer, 1989.

[212] Papadopoulou S. A connected separable metric space with a dispersed Chebyshev set // J. Approx. Theory. — 1983. — Vol. 39. — P. 320—323.

[213] Papini P. L. Minimal and closest points nonexpansive and quasi-nonexpansive retractions in real Banach spaces // Convexity and Its Applications / P. M. Gruber, J. M. Wills, eds. — Basel: Birkhäuser, 1983. — P. 248—263.

[214] Phelps R. R. A representation theorem for bounded convex sets // Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 976—983.

[215] Poliquin R. A., Rockafellar R. T. Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Am. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348. — P. 1805—1838.

[216] Pollul W. Topologien auf Mengen von Teilmengen und Stetigkeit von mengenwertigen metrischen Projektionen: Diplomarbeit. — Bonn, 1967.

[217] Repovš D., Semenov P. V. Continuous Selections of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Kluwer, 1998.

[218] Repovš D., Semenov P. V. Continuous selections of multivalued mappings // Recent Progress in General Topology III / K. P. Hart, J. van Mill, P. Simon, eds. — Atlantis Press, 2014. — P. 711—750.

[219] Ricceri B. A general multiplicity theorem for certain nonlinear equations in Hilbert spaces // Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133. — P. 3255—3261.

[220] Ricceri B. Recent advances in minimax theory and applications // Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria / A. Chinchuluun et al., eds. — Berlin: Springer, 2008. — P. 23—52.

[221] Ricceri B. A conjecture implying the existence of non-convex Chebyshev sets in infinite-dimensional Hilbert spaces // Matematiche (Catania) — 2010. — Vol. 65, no. 2. — P. 193—199.

[222] Schmidt E. Stetigkeitsaussagen bei der Tschebyscheff-Approximation mit positiven Exponentialsummen // Math. Z. — 1970. — Vol. 113. — P. 159—170.

[223] Schwartz P. Two theorems on suns in continuous function spaces // Approximation Theory. Proc. Int. Sympos. Univ. Texas, Austin / G. G. Lorentz, ed. — New York: Academic Press, 1973. — P. 477—480.

[224] Shumaker L. L. Spline Functions. Basic theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.

[225] Shvartsman P. Lipschitz selections of set-valued mappings and Helly's theorem // J. Geom. Anal. — 2002. — Vol. 12, no. 2. — P. 289—324.

[226] Singer I. Some remarks on approximative compactness // Rev. Math. Pures Appl. — 1964. — Vol. 9, no. 2. — P. 167—177.

[227] Singer I. On the extension of continuous linear functionals and best approximation in normed linear spaces // Math. Ann. — 1965. — Vol. 159, no. 5. — P. 344—355.

[228] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. — New York: Springer, 1970.

[229] Singer I. The Theory of Best Approximation and Functional Analysis. — Philadelphia: SIAM, 1974.

[230] Sommer M. Charakterisierung von Minimallösungen in normierten Vektorräumen durch Eigenschaften von Hyperebenen // J. Approx. Theory. — 1975. — Vol. 14. — P. 103—114.

[231] Steffens K.-G. The History of Approximation Theory. From Euler to Bernstein. — Bonn: Birkhäuser, 2006.

[232] Troyanski S. L. An example of a smooth space whose dual is not strictly normed // Stud. Math. — 1970. — Vol. 35. — P. 305—309.

[233] Vlasov L. P. «Suns» and geometric properties of the unit sphere in a Banach space // Тр. ИММ УрО РАН — 1998. — Т. 5. — С. 1—7.

[234] Volle M., Hiriart-Urruty J.-B. A characterization of essentially strictly convex functions on reflexive Banach spaces // Nonlinear Anal. — 2012. — Vol. 75. — P. 1617—1622.

[235] Walsh J. L. The existence of rational functions of best approximation // Trans. Am. Math. Soc. — 1931. — Vol. 33. — P. 668—689.

[236] Wang X. On Chebyshev functions and Klee functions // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — Vol. 368. — P. 293—310.

[237] Wegmann R. Some properties of the peak-set-mapping // J. Approx. Theory. — 1973. — Vol. 8. — P. 262—284.

[238] Wulbert D. E. Continuity of metric projections. Approximation theory in a normed linear lattice: Thesis. — Austin, 1966.

[239] Wulbert D. E. Continuity of metric projections // Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — Vol. 134, no. 2. — P. 335—341.

[240] Yang W., Li Ch., Watson G. A. Characterization and uniqueness of nonlinear uniform approximation // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1997. — Vol. 40. — P. 473—482.

[241] Zajíček L. On σ-porous sets in abstract spaces // Abstr. Appl. Anal. — 2005. — No. 5. — P. 509—534.

[242] Zhang Y., Li Q., Zou X. One property of Bregman projection onto closed convex sets in Banach spaces and applications // J. Math. Res. — 2011. — Vol. 3, no. 4.