

О непрерывности обратных отображений для липшицевых возмущений накрывающих отображений

А. В. АРУТЮНОВ

Российский университет дружбы народов

С. Е. ЖУКОВСКИЙ

Российский университет дружбы народов

e-mail: S-E-Zhuk@yandex.ru

УДК 517

Ключевые слова: накрывающее отображение, сильно накрывающее отображение, теорема о возмущении.

Аннотация

В работе исследуется вопрос о существовании непрерывного правого обратного отображения к накрывающему отображению. Для описания накрывающих отображений, у которых существуют непрерывные обратные отображения, введено понятие сильной накрываемости. Показано, что свойство сильной накрываемости устойчиво при малых липшицевых возмущениях.

Abstract

A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, On the continuity of inverse mappings for Lipschitz perturbations of covering mappings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 93–99.

In this paper, we study the question of the existence of a continuous right inverse mapping for a covering mapping. To describe covering mappings that have a continuous right inverse, a concept of strong covering is introduced. It is shown that the property of strong covering is stable under small Lipschitz perturbations.

Введение

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть заданы отображение $\psi: X \rightarrow Y$ и число $\alpha > 0$. Для произвольных $x \in X$, $r \geq 0$ обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x и радиусом r .

Напомним, что отображение ψ называется α -накрывающим, если

$$B_Y(\psi(x), \alpha r) \subset \psi(B_X(x, r)) \quad \text{для любых } x \in X, r \geq 0.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 4, с. 93–99.

© 2014 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

Классический пример накрывающего отображения даёт теорема Банаха об открытом отображении, которая утверждает, что если X и Y — банаховы пространства, а отображение ψ является линейным, непрерывным и сюръективным, то существует число $\alpha > 0$, такое что отображение ψ является α -накрывающим.

Накрывающие отображения и их свойства подробно изучались во второй половине XX века. Одной из первых работ в этой области была статья [14] Л. М. Грейвса, в которой с использованием накрывающих свойств линейных операторов были получены условия локальной накрываемости гладкого отображения банаховых пространств. Впоследствии А. А. Милютиным была получена теорема, представляющая собой достаточные условия накрываемости отображения. Сформулируем её.

Теорема 1 [9]. Пусть X — полное метрическое пространство, Y — линейное метрическое пространство с метрикой ρ_Y , инвариантной относительно сдвига, отображение $\psi: X \rightarrow Y$ является непрерывным и α -накрывающим, а отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ липшицево с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда отображение $\psi + \varphi$ является $(\alpha - \beta)$ -накрывающим.

Этот результат в современной литературе принято называть теоремой А. А. Милютина о липшицевых возмущениях накрывающих отображений. Позже свойство накрывания и его устойчивость при липшицевых возмущениях исследовались в [13, 15–17].

Ещё одной задачей, к исследованию которой применима теория накрывающих отображений, является задача о точках совпадения. Напомним, что точкой совпадения двух отображений $\psi, \varphi: X \rightarrow Y$ называется решение $x \in X$ уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Достаточные условия существования точек совпадения в терминах накрывающих отображений были сформулированы в [2]. Приведём этот результат.

Теорема 2 [2]. Пусть X — полное метрическое пространство, отображение $\psi: X \rightarrow Y$ является непрерывным и α -накрывающим, а отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ липшицево с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует точка $\xi \in X$, такая что

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{и} \quad \rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} \rho_Y(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

В [2] также были получены условия существования точек совпадения многозначных отображений. Локальный вариант этих результатов был доказан в [11]. В [3, 4] была исследована устойчивость точек совпадения.

Приведённые здесь и некоторые другие результаты теории накрывающих отображений имеют приложения в исследовании управляемых систем (см. [7]), неявных дифференциальных уравнений (см. [5, 6]), уравнений Вольтерра (см. [12]).

1. Непрерывность обратного отображения

Вернёмся к определению α -накрывающего отображения. Очевидно, отображение ψ является α -накрывающим тогда и только тогда, когда существует отображение $\chi: X \times Y \rightarrow X$, такое что

I) $y = \psi(\chi(x^*; y))$ для любых $x^* \in X, y \in Y$;

II) $\rho_X(x^*, \chi(x^*; y)) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\psi(x^*), y)$ для любых $x^* \in X, y \in Y$.

Из приведённых свойств, очевидно, следует, что для каждого фиксированного $x^* \in X$ отображение $\chi(x^*; \cdot)$ является правым обратным к отображению ψ , т. е.

$$\psi(\chi(x^*; y)) = y \text{ для любых } y \in Y.$$

Кроме того, в силу свойства II), если отображение ψ является накрывающим, то при каждом фиксированном $x^* \in X$ отображение $\chi(x^*; \cdot)$ непрерывно в точке $y = \psi(x^*)$. Возникает естественный вопрос: является ли отображение $\chi(x^*; \cdot)$ непрерывным на всём пространстве Y ?

Отрицательный ответ на это вопрос был дан в [8]. В этой работе приведён пример такого 1-накрывающего непрерывного отображения $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что любая функция χ , удовлетворяющая условиям I), II) имеет разрыв в любой окрестности нуля.

В связи со сказанным представляется естественным следующее усиление свойства накрывания.

Определение 1. Отображение $\psi: X \rightarrow Y$ будем называть сильно α -накрывающим, если существует непрерывное отображение $\chi: X \times Y \rightarrow X$, удовлетворяющее свойствам I) и II).

Таким образом, из сильной α -накрываемости отображения ψ вытекает непрерывность правого обратного отображения $\chi(x^*, \cdot)$ при всех $x^* \in X$.

Следующее утверждение даёт пример сильно накрывающих отображений. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор.

Предложение 1. Пусть оператор A непрерывен и $AX = Y$. Тогда существует число $\alpha > 0$, такое что оператор A является сильно α -накрывающим.

Мы не будем приводить доказательства предложения 1, поскольку оно является прямым следствием теоремы 2 из [1]. Отметим только, что доказательство предложения 1 основано на теореме Банаха об открытом отображении и теореме Майкла о непрерывных селекторах многозначных отображений и может быть проведено по схеме, впервые предложенной В. М. Тихомировым в [10].

Как было показано А. А. Милютиным (см. теорему 1), свойство накрывания отображения устойчиво при малых липшицевых возмущениях. Далее мы покажем, что это утверждение верно и для сильно накрывающих отображений.

2. Теорема о липшицевых возмущениях сильно накрывающих отображений

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно и заданы отображения $\psi, \varphi: X \rightarrow Y$ и число $\alpha > 0$.

Теорема 3. Предположим, что X — полное метрическое пространство, Y — линейное метрическое пространство с метрикой ρ_Y , инвариантной относительно сдвига,

- i) отображение $\psi: X \rightarrow Y$ является сильно α -накрывающим, замкнутым, образ $\psi(B_X(x, r))$ любого ограниченного шара $B_X(x, r) \subset X$ ограничен в Y ;
- ii) отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ липшицево с константой Липшица $\beta < \alpha$.

Тогда отображение $\psi + \varphi$ является сильно $(\alpha - \beta)$ -накрывающим.

Доказательство. Из сильной α -накрываемости отображения ψ следует, что существует непрерывное отображение $\chi: X \times Y \rightarrow X$, удовлетворяющее свойствам I), II). По свойству II)

$$\chi(x^*, \psi(x^*)) \equiv x^*. \quad (1)$$

Чтобы доказать теорему, необходимо построить непрерывное отображение $\theta: X \times Y \rightarrow X$, такое что

$$\psi(\theta(x^*, y)) + \varphi(\theta(x^*, y)) = y \quad \text{для любых } y \in Y, x^* \in X, \quad (2)$$

$$\rho_X(x^*, \theta(x^*, y)) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \rho_Y(\psi(x^*) + \varphi(x^*), y) \quad \text{для любых } y \in Y, x^* \in X. \quad (3)$$

Для этого зададим последовательность отображений $x_n: X \times Y \rightarrow X$ формулами

$$x_0(x^*, y) \equiv x^*, \quad x_{n+1}(x^*, y) \equiv \chi(x_n(x^*, y); y - \varphi(x_n(x^*, y))), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отображения x_n непрерывны, поскольку непрерывны φ и χ .

Покажем, что

$$\psi(x_{n+1}(x^*, y)) + \varphi(x_n(x^*, y)) = y, \quad (4)$$

$$\rho_X(x_{n+2}(x^*, y), x_{n+1}(x^*, y)) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho_X(x_{n+1}(x^*, y), x_n(x^*, y)) \quad (5)$$

для любых $x^* \in X, y \in Y, n \geq 0$.

Сначала докажем (4). Согласно равенству (1) и определению отображения $x_{n+1}(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(x_{n+1}(x^*, y)) + \varphi(x_n(x^*, y)) &= \\ &= \psi(\chi(x_n(x^*, y); y - \varphi(x_n(x^*, y)))) + \varphi(x_n(x^*, y)) = \\ &= y - \varphi(x_n(x^*, y)) + \varphi(x_n(x^*, y)) = y \end{aligned}$$

для любых $x^* \in X, y \in Y, n \geq 0$. Следовательно, равенство (4) выполняется.

Докажем (5). Из определения отображения $x_{n+2}(\cdot)$, свойства II) отображения $\chi(\cdot)$, равенства (4) и инвариантности метрики относительно сдвига следует, что

$$\begin{aligned} \rho_X(x_{n+2}(x^*, y), x_{n+1}(x^*, y)) &= \\ &= \rho_X(\chi(x_{n+1}(x^*, y); y - \varphi(x_{n+1}(x^*, y))), x_{n+1}(x^*, y)) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \rho_Y(y - \varphi(x_{n+1}(x^*, y)), \psi(x_{n+1}(x^*, y))) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \rho_Y(\psi(x_{n+1}(x^*, y)) + \varphi(x_n(x^*, y)) - \varphi(x_{n+1}(x^*, y)), \psi(x_{n+1}(x^*, y))) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \rho_Y(\varphi(x_n(x^*, y)), \varphi(x_{n+1}(x^*, y))) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho_X(x_{n+1}(x^*, y), x_n(x^*, y)) \end{aligned}$$

для любых $x^* \in X$, $y \in Y$, $n \geq 0$. Следовательно, равенство (5) выполняется.

Докажем теперь, что

$$\rho_X(x_{n+k}(x^*, y), x_n(x^*, y)) \leq \frac{\rho_Y(\psi(x^*) + \varphi(x^*), y)}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \quad (6)$$

для любых $x^* \in X$, $y \in Y$, $n \geq 0$, $k \geq 2$. Действительно, ввиду неравенства треугольника, неравенства (5), определения отображения $x_1(\cdot)$ и условия II) имеем

$$\begin{aligned} \rho_X(x_{n+k}(x^*, y), x_n(x^*, y)) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \rho_X(x_{n+j}(x^*, y), x_{n+j+1}(x^*, y)) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j \rho_X(x_n(x^*, y), x_{n+1}(x^*, y)) \leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \rho_X(x_n(x^*, y), x_{n+1}(x^*, y)) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rho_X(x_0(x^*, y), x_1(x^*, y)) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rho_X(x^*, \chi(x^*; y - \varphi(x^*))) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha} \rho_Y(y - \varphi(x^*), \psi(x^*)) = \frac{\rho_Y(y, \varphi(x^*) + \psi(x^*))}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \end{aligned}$$

для любых $x^* \in X$, $y \in Y$, $n \geq 0$, $k \geq 2$.

Из неравенства (6) следует, что при любых $x^* \in X$, $y \in Y$ последовательность $\{x_n(x^*, y)\}$ является фундаментальной в X и, значит, сходится к некоторой точке $\theta(x^*, y) \in X$ в силу полноты X . Поскольку отображение ψ переводит ограниченное множество в ограниченное, то из неравенства (6) следует, что последовательность отображений x_n сходится к отображению θ равномерно на любом ограниченном подмножестве пространства $X \times Y$. Следовательно, отображение θ непрерывно на $X \times Y$.

Поскольку отображение φ непрерывно, для произвольных $x^* \in X$, $y \in Y$ последовательность $\{\varphi(x_n(x^*, y))\}$ сходится к точке $\varphi(\theta(x^*, y))$. Поэтому

из равенства (4) следует, что последовательность $\{\psi(x_n(x^*, y))\}$ сходится к $y - \varphi(\theta(x^*, y))$. Из замкнутости отображения ψ вытекает, что $\{\psi(x_n(x^*, y))\}$ сходится к $\psi(\theta(x^*, y))$, и значит, $\psi(\theta(x^*, y)) = y - \varphi(\theta(x^*, y))$. Следовательно, (2) выполняется. Переходя в (6) при $n = 0$ к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство (3). $\square$

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности, проект № 1.333.2014/К.

Литература

- [1] Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46, № 2. — С. 205—215.
- [2] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. — 2007. — Т. 416, № 2. — С. 151—155.
- [3] Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, № 2. — С. 163—169.
- [4] Арутюнов А. В. Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу—Хайерсу // Докл. РАН. — 2014. — Т. 455, № 4. — С. 379—383.
- [5] Арутюнов А. В., Аваков Е. Р., Жуковский Е. С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравн. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 613—634.
- [6] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производной // Дифференц. уравн. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1523—1537.
- [7] Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференц. уравн. — 2010. — Т. 46, № 11. — С. 1561—1570.
- [8] Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Существование обратных отображений и их свойства // Тр. Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 271. — С. 12—22.
- [9] Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. — 1980. — Т. 35, № 6 (216). — С. 11—46.
- [10] Тихомиров В. М. Теорема Люстерника о касательном пространстве и некоторые её модификации // Оптимальное управление. Матем. вопр. управления производством. — 1977. — Вып. 7. — С. 22—30.
- [11] Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. — 2009. — Vol. 5, no. 1. — P. 105—127.
- [12] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. — 2012. — Vol. 75, no. 3. — P. 1026—1044.
- [13] Dontchev A. L., Rockafellar R. T. Implicit Functions and Solution Mappings. — Berlin: Springer, 2009. — (Monographs Math.).

- [14] Graves L. M. Some mapping theorems // *Duke Math. J.* — 1950. — Vol. 17. — P. 111—114.
- [15] Mordukhovich B. Sh. Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1993. — Vol. 340. — P. 1—35.
- [16] Mordukhovich B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory.* — Berlin: Springer, 2006.
- [17] Uderzo A. A metric version of Milyutin theorem // *Set-Valued Var. Anal.* — 2012. — Vol. 20, no. 2. — P. 279—306.

