Об интегральном представлении Γ -предельных функционалов*

В. В. ЖИКОВ

Владимирский государственный университет
e-mail: zhikov@vlsu.ru

С. Е. ПАСТУХОВА

*Московский государственный университет
информационных технологий, радиотехники и электроники*
e-mail: pas-se@yandex.ru

УДК 517.956.8

Ключевые слова: интегральный функционал, релаксация, Γ -сходимость, нестандартное условие роста, эффект Лаврентьева, Γ -реализующая последовательность, интегральное представление.

Аннотация

Рассматривается Γ -сходимость последовательности интегральных функционалов $F_n(u)$, определённых на функциях u из соболевского пространства $W^{1,\alpha}(\Omega)$ ($\alpha > 1$), Ω — ограниченная липшицева область, с интегрантами $f_n(x, u, \nabla u)$, зависящими от самой функции u и её градиента ∇u . Интегранты $f_n(x, s, \xi)$ выпуклы по ξ и удовлетворяют двусторонней степенной оценке коэрцитивности и роста с разными показателями $\alpha < \beta$. Кроме того, интегранты $f_n(x, s, \xi)$ равномерно непрерывны по s в определённом смысле с одним и тем же модулем непрерывности. Установлено, что Γ -предельный функционал совпадает на функциях из $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ с интегральным функционалом $F(u)$, интегрант которого из того же класса, что допредельные интегранты.

Abstract

V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, On integral representation of Γ -limit functionals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 101–120.

We consider the Γ -convergence of a sequence of integral functionals $F_n(u)$, defined on the functions u from the Sobolev space $W^{1,\alpha}(\Omega)$ ($\alpha > 1$), Ω is a bounded Lipschitz domain, where the integrand $f_n(x, u, \nabla u)$ depends on a function u and its gradient ∇u . As functions of ξ , the integrands $f_n(x, s, \xi)$ are convex and satisfy a two-sided power estimate on the coercivity and growth with different exponents $\alpha < \beta$. Besides, the integrands $f_n(x, s, \xi)$ are equi-continuous over s in some sense with respect to n . We prove that for the functions from $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ the Γ -limit functional coincides with an integral functional $F(u)$ for which the integrand $f(x, s, \xi)$ is of the same class as $f_n(x, s, \xi)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00192 А), а также Российского научного фонда (проект 14-11-00398).

1. Предварительные сведения.

Постановка задачи. Основные результаты

Нас интересуют вариационные задачи для интегральных функционалов вида

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx \quad (1.1)$$

на соболевских пространствах $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, интегрант $f(x, s, \xi)$ нестандартного типа и будет уточнён позже. Если мы имеем последовательность вариационных задач, то возникает вопрос о корректном определении предельной задачи и предельного функционала. Наиболее адекватным языком для описания асимптотического поведения вариационных задач является так называемая Γ -сходимость функционалов или интегрантов. Дело в том, что Γ -сходимость функционалов или интегрантов влечёт в определённом смысле сходимость энергий и минимизантов в соответствующих вариационных задачах, отчего самую Γ -сходимость часто называют вариационной сходимостью. Другая особенность Γ -сходимости состоит в том, что широкие классы интегрантов оказываются компактными относительно этой сходимости. Для интегральных функционалов вида (1.1) Γ -сходимость ещё недостаточно изучена. В настоящей работе мы рассматриваем вопросы, связанные с интегральным представлением Γ -предельного функционала. Будет ли он вида (1.1), как допредельные? Каким образом можно найти предельный интегрант? Есть ли конструктивная процедура его отыскания?

В рамках абстрактной теории вопросы Γ -сходимости были поставлены и изучены в работах [14, 15] Э. Де Джорджи и его коллег более тридцати лет назад. Немного позже Э. Де Джорджи, Л. Карбоне, К. Сbordоне, А. Брэдис и др. (см., например, [12, 13]) конкретизировали абстрактную теорию Γ -сходимости для интегральных функционалов вариационного исчисления. Это интегральные функционалы вида

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx,$$

где выпуклый по ξ интегрант $f(x, \xi)$ подчинён стандартной оценке коэрцитивности и роста с показателем α :

$$\begin{aligned} -c_0 + c_1|\xi|^\alpha &\leq f(x, \xi) \leq c_2|\xi|^\alpha + c_0, \\ c_0 &\geq 0, \quad c_1, c_2 > 0, \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

В. В. Жиковым [1, 2] построена теория Γ -сходимости для выпуклых интегральных функционалов

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx$$

с нестандартными условиями коэрцитивности и роста:

$$\begin{aligned} -c_0 + c_1|\xi|^\alpha &\leq f(x, \xi) \leq c_2|\xi|^\beta + c_0, \\ c_0 &\geq 0, \quad c_1, c_2 > 0, \quad 1 < \alpha < \beta < \infty. \end{aligned}$$

Нас будут интересовать также интегральные функционалы с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, но зависящие одновременно от самой функции и её градиента (т. е. вида (1.1)), причём выпуклость интегранта $f(x, u, \nabla u)$ предполагается лишь по градиенту ∇u . Возникают технические сложности в связи с тем, что в такой ситуации функционалы перестают быть выпуклыми.

1.1. Из абстрактной теории Γ -сходимости

Прежде всего приведём краткие сведения из абстрактной теории Γ -сходимости. С подробностями этой теории можно ознакомиться по [4, 10, 11, 18].

Начнём с понятия *топологического предела множеств*. Γ -сходимость функций будет определена как сходимость надграфиков.

Пусть V — метрическое пространство с метрикой ρ , A_n — последовательность множеств из V .

Определение 1.1. Множество $A \subset V$ называют топологическим пределом множеств A_n , $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, если выполнены два условия:

- 1) множество A содержит все предельные точки любой последовательности точек $u_n \in A_n$;
- 2) для любой точки $u \in A$ существует последовательность $u_n \in A_n$, такая что $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Приведём простые примеры. Если $A_n = \{u_n\}$ — одноточечные множества, то $\lim A_n$ состоит из предельных точек последовательности $\{u_n\}$. При отсутствии таковых имеем $\lim A_n = \emptyset$. Непосредственно из определения следует, что множество $\lim A_n$ замкнуто. В частности, если $A_n = A$, то $\lim A_n = \bar{A}$ (черта сверху означает замыкание множества).

Имеет место следующий принцип выбора.

Обобщённая теорема Больцано—Вейерштрасса. *Любая последовательность множеств сепарабельного пространства содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство можно найти в [7].

Теперь пусть $F(u)$ — функция (функционал) на V , принимающая значения из расширенной числовой оси $[-\infty, +\infty]$. Напомним, что надграфиком функции F называется множество элементов $(\alpha, u) \in \mathbb{R}^1 \times V$, для которых $\alpha \geq F(u)$. Надграфик обозначается через $\text{epi } F$. Функцию F называют *замкнутой* или *полунепрерывной снизу*, если её надграфик замкнут. В обычных терминах замкнутость функции означает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u), \quad \text{если } u_n \rightarrow u.$$

Так как $\mathbb{R}^1 \times V$ — метрическое пространство, то можно применить понятие топологического предела к надграфикам. Легко убедиться, что предел надграфиков всегда надграфик, причём замкнутый.

Определение 1.2. Функция χ является Γ -пределом последовательности функций F_n на V , если $\text{epi } \chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{epi } F_n$.

Из определения следует, что $\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ — замкнутая функция.

Перепишем определение 1.2 в более привычных терминах.

Определение 1.3. Функция χ является Γ -пределом последовательности функций F_n на V , если

1) выполнено условие полунепрерывности снизу:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq \chi(u), \quad \text{как только } u_n \rightarrow u; \quad (1.2)$$

2) для любого $u \in V$ найдётся последовательность $u_n \rightarrow u$, называемая Γ -реализующей, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = \chi(u).$$

Из обобщённой теоремы Больцано—Вейерштрасса получаем следующий принцип.

Принцип выбора. Если V сепарабельно, то из всякой последовательности функций можно выбрать Γ -сходящуюся на V подпоследовательность.

Пусть S — плотное в V множество и функционал F полунепрерывен снизу. Определим релаксационный функционал (или релаксацию) $\bar{F}$ равенством

$$\bar{F}(u) = \inf_{u_n \in S} \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \quad \text{для всех } u \in V. \quad (1.3)$$

Очевидно, что $\bar{F}$ также полунепрерывен снизу и $F \leq \bar{F}$ на V . Часто наблюдается неравенство $F < \bar{F}$, тесно связанное с так называемым *эффектом Лаврентьева* для вариационных задач. В дальнейшем эти вопросы будут обсуждаться подробнее.

Итак, с последовательностью функционалов F_n можно связать два предельных объекта

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \quad \text{и} \quad \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n. \quad (1.4)$$

1.2. Γ -сходимость в соболевском пространстве

Рассмотрим функции (или функционалы) на соболевском пространстве $V = W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей. Выделим класс функционалов, подчинённых оценке

$$F(u) \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0, \quad c_1 > 0, \quad c_0 \geq 0. \quad (1.5)$$

Для предварительного определения Γ -предела наделим V метрикой пространства $L^\alpha = L^\alpha(\Omega)$. Мы не приводим это определение подробно, так как оно

отличается от абстрактного определения в метрическом пространстве V лишь тем, что в качестве сходимости по метрике ρ берётся конкретная L^α -сходимость в конкретном пространстве V . Вполне естественно в пространстве $V = W^{1,\alpha}(\Omega)$ заменить L^α -сходимость слабой сходимостью в соболевском пространстве. В результате получим следующее определение.

Определение 1.4. Функция χ является Γ -пределом последовательности функций F_n на V , если

1) выполнено условие полунепрерывности снизу:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq \chi(u), \quad \text{как только } u_n \rightharpoonup u \text{ в } V; \quad (1.6)$$

2) для любого $u \in V$ найдётся последовательность $u_n \in V$, такая что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } V, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = \chi(u). \quad (1.7)$$

Проверим, что в классе (1.5) определение 1.4 действительно эквивалентно определению Γ -сходимости с L^α -метрикой. Для примера покажем, что (1.2) следует из свойства (1.6). Для этого, взяв $u_n \xrightarrow{L^\alpha} u$, рассмотрим две возможности. Если $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_{L^\alpha} = \infty$, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = \infty$ в силу оценки (1.5) и свойство (1.2) заведомо выполнено. Если же семейство ∇u_n является ограниченным в L^α , то автоматически $u_n \rightharpoonup u$ в V и достаточно ссылки на (1.6).

Отметим также, что оценка снизу (1.5) сохраняется при Γ -сходимости. В самом деле, взяв последовательность u_n из (1.7), имеем

$$\chi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \stackrel{(1.5)}{\geq} c_1 \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0 \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0,$$

где на последнем шаге воспользовались слабой полунепрерывностью снизу функционала нормы.

Поскольку в классе (1.5) полунепрерывность снизу относительно L^α -сходимости совпадает с полунепрерывностью снизу относительно (секвенциальной) слабой сходимости в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, далее мы говорим просто о полунепрерывности снизу.

В силу указанной выше эквивалентности двух определений Γ -сходимости (с L^α -метрикой и топологией слабой сходимости в $W^{1,\alpha}$), из общей теории Γ -сходимости в метрическом пространстве выводим следующий принцип компактности.

Предложение 1.5. Класс (1.5) функционалов на пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$, компактен в смысле сходимости из определения 1.4.

1.3. Класс нестандартных интегрантов

Определим более точно интересующий нас класс интегральных функционалов вида (1.1). Интегрантами здесь являются функции Каратеодори

$f(x, s, \xi): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (непрерывные по s, ξ), выпуклые по ξ , для которых выполнена двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} c_1|\xi|^\alpha &\leq f(x, s, \xi) \leq c_2(|\xi|^\beta + 1), \\ c_1, c_2 > 0, \quad 1 < \alpha &\leq \beta < \infty. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В случае равенства $\alpha = \beta$ оценка (1.8) обеспечивает классическое условие коэрцитивности и роста. Такие интегранты будем называть стандартными.

Функционал (1.1) считаем заданным на всём соболевском пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$, где он может принимать значение $+\infty$. Очевидно вложение

$$W^{1,\beta}(\Omega) \subset \text{dom } F = \{u \in W^{1,\alpha}(\Omega): F(u) < \infty\}.$$

Из условий, наложенных на интегрант $f(x, s, \xi)$, вытекают следующие свойства функционала.

Предложение 1.6. *Функционал F с интегрантом класса (1.8) слабо полунепрерывен снизу на $W^{1,\alpha}(\Omega)$, коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ и непрерывен на $W^{1,\beta}(\Omega)$. Выпуклость имеет место, если интегрант не зависит от s .*

Поясним перечисленные выше свойства.

1. Функционал F коэрцитивен в банаховом пространстве $V = W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, так как в силу нижней оценки (1.8)

$$F(u) \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha, \quad \alpha > 1,$$

а по неравенству Фридрихса норму в V можно ввести как $\|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}$.

2. Интегральный функционал вида (1.1) слабо полунепрерывен снизу на $W^{1,\alpha}(\Omega)$ при весьма общих условиях (см., например, [8, гл. 1, § 1; 16]). В наших предположениях для проверки этого свойства можно рассуждать следующим образом.

Положим $g_\varepsilon(x, \xi) = f(x, u_\varepsilon(x), \xi)$, $g(x, \xi) = f(x, u(x), \xi)$. Это не зависящие от s интегранты класса (1.8), для которых применим результат о слабой полунепрерывности снизу из [3]. Считая, что $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, ввиду непрерывности $f(x, s, \xi)$ по s имеем поточечную сходимость $f(x, u_\varepsilon(x), \xi) \rightarrow f(x, u(x), \xi)$, т. е. $g_\varepsilon(x, \xi) \rightarrow g(x, \xi)$, для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, по [3, лемма 10.1] как только $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $W^{1,1}(\Omega)$, так

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} g_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} g(x, \nabla u) dx,$$

что означает, что

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx, \quad \text{если } u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega),$$

и свойство слабой полунепрерывности снизу функционала F обосновано.

3. Функционал F непрерывен на $W^{1,\beta}(\Omega)$, т. е.

$$F(v) \rightarrow F(u) \quad \text{при } v \rightarrow u \text{ в } W^{1,\beta}(\Omega).$$

Действительно, отображение $u(x) \rightarrow f(x, u(x), \nabla u(x))$ действует из $W^{1,\beta}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ ввиду верхней оценки (1.8), и по теореме Красносельского (см. [9, гл. IV, предложение 1.1]) непрерывно в нормированной топологии. Теперь из неравенства

$$|F(v) - F(u)| \leq \int_{\Omega} |f(x, v(x), \nabla v(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))| dx$$

следует свойство непрерывности.

Свойство непрерывности по s для интегрантов класса (1.8) иногда требуется усилить. Введём модуль непрерывности следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x, s', \xi) - f(x, s, \xi) &\leq \sigma(|s - s'|)f(x, s, \xi), \\ \sigma(t) : [0, \infty) &\rightarrow [0, m] \text{ непрерывна, } \sigma(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s, s' \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$. Условие (1.9) будем для краткости называть липшицевостью. Из него следует обычное свойство непрерывности по s с контролируемым модулем непрерывности:

$$|f(x, s', \xi) - f(x, s, \xi)| \leq c_3 \sigma(|s - s'|)f(x, s, \xi), \quad c_3 = m(m+1), \quad (1.10)$$

а также свойство сравнимости

$$\tilde{c}^{-1}f(x, s', \xi) \leq f(x, 0, \xi) \leq \tilde{c}f(x, s, \xi), \quad \tilde{c} = m+1, \quad (1.11)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s, s' \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$.

1.4. Основной результат и его обсуждение

Ниже рассматриваются интегральные функционалы с интегрантами класса (1.8), (1.9). Из общей теории следует, что любая последовательность таких функционалов содержит подпоследовательность, которая Γ -сходится на пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$ к некоторому предельному функционалу χ (в смысле определения 1.4), заданному также на $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Возникают многочисленные вопросы о структуре предельного функционала χ , в том числе вопрос о его интегральном представлении.

Теорема 1.7. *Для любого предельного функционала χ найдётся интегрант f класса (1.8), (1.9), такой что имеет место интегральное представление*

$$\chi(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx, \quad u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega). \quad (1.12)$$

Это утверждение следует из доказанной ниже теоремы 4.1, указывающей также, как можно найти интегрант f из представления (1.12). А именно, интегрант f совпадает с так называемым $\Gamma_1(s)$ -пределом последовательности $\{f_n(x, s, \xi)\}$, который находится при фиксированном s по известной процедуре, описанной в [2].

Теорема 1.7 относится к одному из двух предельных объектов, заявленных в (1.4), для другого, а именно для Γ -предела релаксаций $\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n$, верен аналогичный результат. При этом в определении релаксации (см. (1.3)) в качестве множества S будем брать $W^{1,\beta}(\Omega)$.

Теорема 1.8. Пусть $\chi = \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n$, где $\bar{F}_n$ — релаксация функционала с интегрантом f_n класса (1.8), (1.9). Тогда найдётся интегрант f класса (1.8), (1.9), такой что имеет место интегральное представление (1.12).

Интегральное представление для $\chi = \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n$ связано с $\Gamma_2(s)$ -пределом последовательности $\{f_n(\cdot, s, \cdot)\}$. Более подробные сведения о Γ -сходимости интегрантов даются в разделе 3.

Заметим, что интегранты, представляющие предельные функционалы в теоремах 1.7 и 1.8, не обязаны совпадать. Это одно из проявлений так называемого эффекта Лаврентьева для функционалов нестандартного типа, см. [3, 17].

Для представления (1.12) весьма существенна равномерная липшицевость интегрантов, введённая в (1.9). При отсутствии этого свойства представление неверно, как показывают результаты из [19].

2. О Γ -реализующих последовательностях

Сделаем некоторые замечания, облегчающие построение Γ -реализующей последовательности.

Замечание 2.1. Условие 2) в определении 1.4 можно с самого начала несколько ослабить, заменив на

2 $_{\delta}$) для любой $u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ и любого $\delta > 0$ найдётся последовательность u_n^{δ} , такая что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_n^{\delta} = u \quad (\text{слабый предел в } W^{1,\alpha}(\Omega)) \quad \text{для каждого } \delta, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, u_n^{\delta}, \nabla u_n^{\delta}) dx \leq \chi(u) + \delta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Можно показать, что условие 2 $_{\delta}$) вместе с условием 1) обеспечивают выполнение условия 2). Этот результат получается из топологических соображений, см. [10, 11, 18].

Замечание 2.2. Γ -реализующая последовательность из определения 1.4 может быть построена с усиленным свойством сходимости, как показано ниже.

Лемма 2.3. Для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдётся такая Γ -реализующая последовательность $u_n = u + w_n$, что $w_n \rightarrow 0$ в $L^{\infty}(\Omega)$.

Доказательство. Возьмём произвольную последовательность

$$u_n = u + w_n, \quad w_n \rightarrow 0 \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = \chi(u), \quad (2.2)$$

и применим к ней срезку специального вида. Полагаем

$$T_n(k) = \{x \in \Omega: |w_n| > k\}, \quad \bar{w}_n = \begin{cases} w_n & \text{вне } T_n(k), \\ \pm k & \text{на } T_n(k). \end{cases}$$

Оценим меру Лебега множества $T_n = T_n(k)$:

$$\begin{aligned} k^\alpha |T_n(k)| &\leq \int_{T_n(k)} |w_n|^\alpha dx \leq \int_{\Omega} |w_n|^\alpha dx \equiv \lambda_n, \\ |T_n(k)| &\leq \lambda_n^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $k = \lambda_n^{1/(2\alpha)}$ и $\lambda_n = \|w_n\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha$. Очевидно, что $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ввиду сильной сходимости w_n к нулю в $L^\alpha(\Omega)$, вытекающей по теореме вложения Соболева из второго соотношения в (2.2). По свойству среза можно записать соотношения

$$\begin{aligned} F_n(u + \bar{w}_n) &= \\ &= \int_{\Omega \setminus T_n} f_n(x, u + \bar{w}_n, \nabla u + \nabla \bar{w}_n) dx + \int_{T_n} f_n(x, u + \bar{w}_n, \nabla u + \nabla \bar{w}_n) dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} f_n(x, u + w_n, \nabla u + \nabla w_n) dx + \int_{T_n} f_n(x, u + \bar{w}_n, \nabla u) dx \leq \\ &\leq F_n(u_n) + c_2 \int_{T_n} (|\nabla u|^\beta + 1) dx, \end{aligned}$$

из которых ввиду (2.3) и сходимости $\lambda_n \rightarrow 0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u + \bar{w}_n) \leq F(u). \quad (2.4)$$

Этого достаточно, чтобы заключить, что построена Γ -реализующая последовательность

$$\bar{u}_n = u + \bar{w}_n,$$

обладающая дополнительным свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

что и требовалось. $\square$

3. Γ -сходимость интегрантов

3.1. О Γ -сходимости интегрантов вида $f(x, \xi)$

Остановимся подробнее на не зависящих от s интегрантах класса (1.8). Мы систематически будем использовать относящиеся к таким интегрантам результаты по Γ -сходимости, полученные в [2], которые мы сейчас напомним. Прежде

всего отметим, что для нестандартных интегрантов класса (1.8) введена Γ -сходимость двух типов.

Определение 3.1. Пусть $f_n = f_n(x, \xi)$, $f = f(x, \xi)$ — интегранты класса (1.8). Скажем, что f есть Γ_1 -предел f_n , $f = \Gamma_1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, если

1) как только $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, так

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, \nabla u_n) dx \geq \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx;$$

2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдётся $u_n \in W^{1,\alpha}(\Omega)$, такая что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, \nabla u_n) dx = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx.$$

Определение Γ_2 -предела $f = \Gamma_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ получается из приведённого выше, если в условиях 1) и 2) аппроксимирующие функции u_n брать более регулярными, а именно из пространства $W^{1,\beta}(\Omega)$. Это небольшое, на первый взгляд, отличие весьма существенно и приводит, вообще говоря, к несовпадению Γ_1 - и Γ_2 -пределов, что показано на примерах. Но при $\alpha = \beta$, очевидно, имеется сходимость одного типа, называемая просто Γ -сходимостью.

Принцип компактности. Для любой последовательности интегрантов $f_n(x, \xi)$ из класса (1.8) найдётся подпоследовательность $f_{n'}(x, \xi)$ и интегрант $f(x, \xi)$ из класса (1.8), такие что $f_{n'} \xrightarrow{\Gamma_1} f$ в любой липшицевой подобласти области Ω . Аналогичное утверждение справедливо в отношении Γ_2 -сходимости.

В дальнейшем, говоря о сходимости интегрантов $f_n \xrightarrow{\Gamma_1} f$ в области Ω , мы подразумеваем Γ_1 -сходимость их в любой липшицевой подобласти Ω' области Ω . В таком случае нетрудно показать *единственность Γ_1 -предела*. То же относится и к Γ_2 -сходимости.

При доказательстве принципа компактности в [2] показано, что Γ_1 -реализующую (Γ_2 -реализующую) последовательность можно построить с дополнительным свойством

$$u_n - u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad (3.1)$$

чем мы дальше воспользуемся.

Полезным при изучении свойств Γ -пределов является следующий принцип.

Принцип локализации. Пусть $f_n(x, \xi)$ — интегранты класса (1.8), $f_n \xrightarrow{\Gamma_i} f$, $u_n \rightharpoonup u$ есть соответствующая Γ_i -реализующая последовательность, $i = 1$ или $i = 2$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f_n(x, \nabla u_n) dx = \int_{\Omega'} f(x, \nabla u) dx$$

для любой липшицевой подобласти Ω' области Ω .

3.2. О Γ -сходимости интегрантов вида $f(x, s, \xi)$

Распространим введённую ранее Γ_1 -сходимость на более широкое множество интегрантов.

Определение 3.2. Пусть $f_n = f_n(x, s, \xi)$, $f = f(x, s, \xi)$ — интегранты класса (1.8) и F_n, F — соответствующие функционалы вида (1.1). Скажем, что f есть Γ_1 -предел f_n , если

1) как только $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, так

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u);$$

2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдётся $u_n \in W^{1,\alpha}(\Omega)$, такая что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = F(u).$$

Определение Γ_2 - $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, s, \xi)$ вводится аналогично с той лишь разницей, что в обоих условиях 1) и 2) требуем $u_n \in W^{1,\beta}(\Omega)$.

Посмотрим на определение 3.2 с абстрактной точки зрения. В случае стандартных интегрантов, когда $\alpha = \beta$ в (1.8), это определение находится в точном соответствии с определением 1.4. Иначе говоря, функционал F_n с интегрантом f_n Γ -сходится к функционалу F с интегрантом f и $f = \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

В случае $\alpha < \beta$ между указанными определениями нет полной согласованности, поскольку в определении 3.2 существование Γ -реализующей последовательности требуется только для $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ (а не для $u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$, как в определении 1.4).

Предложение 3.3. Пусть χ есть Γ -предел интегральных функционалов F_n на $W^{1,\alpha}(\Omega)$, f есть Γ_1 -предел соответствующих интегрантов f_n , F — функционал вида (1.1) с интегрантом f . Тогда

$$F \leq \chi \leq \bar{F} \text{ на } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \chi = F \text{ на } W^{1,\beta}(\Omega). \quad (3.2)$$

Опускаем несложное доказательство этого утверждения, оно приведено в [6].

Второе соотношение в (3.2) даёт интегральное представление для предельного функционала χ на гладких функциях, причём оно продолжается на $W^{1,\beta}(\Omega)$ — более широкое множество, чем в теореме 1.7. Однако применение этой формулы весьма ограничено. Дело в том, что в общем случае не доказан принцип компактности относительно Γ_1 -сходимости (или Γ_2 -сходимости) интегрантов ни в классе (1.8), ни в классе (1.8), (1.9). Установлены лишь некоторые частные случаи принципа компактности [5, 6], далее приведены некоторые из них.

Теорема 3.4. Класс (1.8), (1.9) компактен относительно Γ -сходимости интегрантов при условии на показатели $\alpha = \beta$.

Эта теорема доказана в [5]. Согласно (3.2) заключаем, что в стандартном случае (когда $\alpha = \beta$) для предельного функционала имеет место полное интегральное представление (1.12) на всём $W^{1,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 3.5. *Класс (1.8), (1.9) компактен относительно Γ_1 -сходимости (или Γ_2 -сходимости) интегрантов при условии на показатели $\beta > \alpha > d$.*

Доказательство этой теоремы дано в разделе 5. Теорема получена совместно с А. С. Хрипуновой.

Ещё один принцип компактности частного вида доказан в [6], он относится к семейству интегрантов $\{f_\varepsilon(x, s, \xi)\}$, ε -периодических по пространственной переменной, полученных из 1-периодического интегранта $f = f(y, s, \xi)$ класса (1.8), (1.9) подстановкой $y = x/\varepsilon$. Это ситуация теории усреднения. При $\alpha = \beta$ подобный результат усреднения доказан ранее в [19], он охватывает также семейства интегрантов, осциллирующих по конфигурационной переменной.

В заключение сформулируем аналог предложения 3.3, который соотносится с теоремой 1.8.

Предложение 3.6. *Пусть $f = \Gamma_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, F_n и F — функционалы вида (1.1) с интегрантами f_n и f , χ есть Γ -предел релаксационных функционалов $\bar{F}_n$. Тогда для функционалов χ и F верны соотношения (3.2).*

3.3. О $\Gamma(s)$ -сходимости интегрантов

Пусть $f_n(x, s, \xi)$ — интегранты класса (1.8), (1.9). При каждом фиксированном s к интегрантам $f_n(\cdot, s, \cdot)$, очевидно, применим приведённый выше принцип компактности. Используя диагональный процесс, можно предположить, что

$$f_n(\cdot, s, \cdot) \xrightarrow{\Gamma_1} f(\cdot, s, \cdot) \quad (3.3)$$

для любого рационального s ($s \in \mathbb{Q}$). Несложные рассуждения показывают, что предельный интегрант $f(\cdot, s, \cdot)$, $s \in \mathbb{Q}$, продолжается по непрерывности на всё множество $s \in \mathbb{R}$ с сохранением сходимости (3.3). Эти рассуждения подробно изложены в разделе 5. Важно отметить, что построенный таким образом предельный интегрант принадлежит классу (1.8), (1.9). Итак, исходным инструментом для отыскания Γ_1 -пределов в классе (1.8), (1.9) можно считать Γ_1 -сходимость при каждом фиксированном s . Тем самым установлена компактность класса (1.8), (1.9) относительно этой простейшей сходимости, которую условно будем называть $\Gamma_1(s)$ -сходимостью (точное определение этой сходимости дано в разделе 5).

Можно ожидать, что полученный выше предельный интегрант $f(x, s, \xi)$ будет Γ_1 -пределом и в смысле определения 3.2, по крайней мере в некоторых достаточно общих ситуациях. Оказывается, что эти ожидания оправданны.

4. Интегральное представление с $\Gamma(s)$ -пределом

Пусть $f_n(x, s, \xi)$ — интегранты класса (1.8), (1.9), F_n — соответствующие им функционалы, и пусть χ есть Γ -предельный функционал. Связаны ли между собой Γ -предельный функционал и $\Gamma_1(s)$ -предельный интегрант $f(x, s, \xi)$? Ответ (частичный) на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 4.1. *Имеет место интегральное представление*

$$\chi(u) = F(u) \text{ для всех } u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega), \quad (4.1)$$

где F — функционал с $\Gamma_1(s)$ -предельным интегрантом $f(x, s, \xi)$.

Доказательство. 1. Поскольку

$$\Gamma_1(s)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad (4.2)$$

выполнено неравенство полунепрерывности снизу

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f_n(x, s, \nabla u_n) dx \geq \int_{\Omega'} f(x, s, \nabla u) dx \text{ для всех } s, \quad (4.3)$$

как только $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$,

для любой липшицевой подобласти $\Omega' \subset \Omega$.

Фиксируя произвольную функцию $u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$, найдём u_r — её кусочно-постоянную аппроксимацию в L^∞ -норме. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|u_r - u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \quad (4.4)$$

и области постоянства для u_r являются липшицевыми.

Возьмём Γ -реализующую последовательность u_n , такую что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = \chi(u), \quad (4.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0, \quad (4.6)$$

последнее свойство можно обеспечить по лемме 2.3. Запишем представление

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n(x, u_n, \nabla u_n) dx &= \int_{\Omega} f_n(x, u_n, \nabla u_n) dx - \int_{\Omega} f_n(x, u, \nabla u_n) dx + \\ &+ \int_{\Omega} f_n(x, u, \nabla u_n) dx - \int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) dx + \int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) dx = \\ &= \tau_n + \tau_n(r) + \int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) dx, \end{aligned} \quad (4.7)$$

при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_n(r) = 0 \text{ равномерно по } n. \quad (4.8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |\tau_n| &\leq \int_{\Omega} |f_n(x, u_n, \nabla u_n) - f_n(x, u, \nabla u_n)| dx \stackrel{(1.10)}{\leq} \\ &\leq c_3 \sup_{\Omega} \sigma(|u_n - u|) \int_{\Omega} f_n(x, u_n, \nabla u_n) dx \stackrel{(4.6)}{=} o(1) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ по свойствам u_n . Здесь и далее учитываем, что исходный интеграл в оценке (4.7) ограничен равномерно по n (см. (4.5)), а значит, ввиду (1.11) равномерно ограничены все участвующие там интегралы. Аналогично (используя вместо (4.6) сходимости (4.4)) доказываем второе соотношение в (4.8).

Поскольку u_r кусочно-постоянна, то

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_{r,i}, \quad u_r|_{\Omega_{r,i}} = s_{r,i}, \quad s_{r,i} \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

$$\int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) dx = \sum_i \int_{\Omega_{r,i}} f_n(x, s_{r,i}, \nabla u_n) dx, \quad (4.10)$$

и к слагаемым этой суммы применимо неравенство полунепрерывности снизу (4.3) на множествах $\Omega_{r,i}$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) dx \geq \sum_i \int_{\Omega_{r,i}} f(x, s_{r,i}, \nabla u) dx = \int_{\Omega} f(x, u_r, \nabla u) dx. \quad (4.11)$$

Наконец, по лемме Фату

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u_r, \nabla u) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx. \quad (4.12)$$

Из (4.7)–(4.12) получаем, что

$$\chi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u),$$

где F – функционал с $\Gamma_1(s)$ -предельным интегрантом (4.2).

Итак, доказано, что

$$\chi(u) \geq F(u) \quad \text{для всех } u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega). \quad (4.13)$$

2. Снова для произвольной функции $u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ берём кусочно-постоянную аппроксимацию u_r в смысле сходимости (4.4) с разбиением Ω на области постоянства, как в (4.9). Фиксируя r , на каждой подобласти $\Omega_{r,i}$ построим последовательность

$$\begin{aligned} u_n^{r,i} &= u + w_n^{r,i}, \quad w_n^{r,i} \in W_0^{1,\alpha}(\Omega_{r,i}), \quad w_n^{r,i} \xrightarrow{L^\infty} 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{r,i}} f_n(x, s_{r,i}, \nabla u_n^{r,i}) dx &= \int_{\Omega_{r,i}} f(x, s_{r,i}, \nabla u) dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

в соответствии с $\Gamma_1(s)$ -сходимостью (4.2). Второе соотношение в (4.14) обсуждалась ранее (см. п. 3.1, соотношение (3.1)), а третье соотношение в (4.14) обеспечивается подходящей срезкой по лемме 2.3.

По второму соотношению в (4.14) «собираем» последовательность $u_n \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ на всей области Ω , чтобы

$$u_n|_{\Omega_{r,i}} = u_n^{r,i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, u_r, \nabla u_n) = \int_{\Omega} f(x, u_r, \nabla u) dx. \quad (4.15)$$

Покажем, что последовательность u_n удовлетворяет условию 2_δ) из раздела 2. В самом деле, запишем представление (4.7) для $F_n(u_n)$ и перейдём в нём к пределу при $n \rightarrow \infty$, используя для последнего интеграла в представлении равенство (4.15) и относя другие слагаемые в погрешность. В результате получим, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) &\stackrel{(4.15)}{\leq} \int_{\Omega} f(x, u_r, \nabla u) dx + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n(r) \leq \\ &\leq \int_{\Omega} f(x, u_r, \nabla u) dx + \frac{\delta}{2} \leq F(u) + \delta. \end{aligned}$$

Здесь за счёт липшицевости интегрантов f_n и f погрешность $\delta > 0$ можно сделать сколь угодно малой, выбрав достаточно большим r . Подобные объяснения уже приводились ранее.

С другой стороны, по условию 1) Γ -сходимости $F_n \xrightarrow{\Gamma} \chi$ имеем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq \chi(u).$$

Следовательно,

$$\chi(u) \leq F(u) \quad \text{для каждого } u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega),$$

что вместе с (4.13) даёт интегральное представление (4.1).

Теорема доказана. $\square$

Согласно изложенному, Γ -предел релаксационных функционалов $\bar{F}_n$ также имеет интегральное представление через $\Gamma(s)$ -предельный интегрант (но соответствующий $\Gamma(s)$ -сходимости другого типа). Таким образом, теореме 1.8 отвечает следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть $f = \Gamma_2(s)$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, F_n и F — функционалы вида (1.1) с интегрантами f_n и f , χ есть Γ -предел релаксационных функционалов $\bar{F}_n$. Тогда функционалы χ и F связаны соотношением (4.1).

5. $\Gamma(s)$ -сходимость

5.1. Принцип компактности относительно $\Gamma(s)$ -сходимости для класса нестандартных интегрантов

Начнём с точного определения $\Gamma(s)$ -сходимости интегрантов. Пусть f_n, f — интегранты класса (1.8), (1.9).

Определение 5.1. Скажем, что $f_n \xrightarrow{\Gamma_1(s)} f$, если

1) как только $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, так

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx \geq \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx \text{ для всех } s \in \mathbb{R};$$

2) для любых $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{R}$ найдётся последовательность u_n , такая что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx = \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx.$$

Определение $\Gamma_2(s)$ -предела $f = \Gamma_2(s)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ получается из приведённого выше, если в условиях 1) и 2) аппроксимирующие функции u_n берутся из $W^{1,\beta}(\Omega)$.

Теорема 5.2. Класс интегрантов (1.8), (1.9) компактен относительно $\Gamma_1(s)$ -сходимости. То же верно для $\Gamma_2(s)$ -сходимости.

Доказательство. Покажем, что для любой последовательности интегрантов f_n класса (1.8), (1.9) найдётся подпоследовательность $f_{n'}$ и предельный интегрант f того же класса, такие что $f_{n'} \xrightarrow{\Gamma_1(s)} f$.

Шаг 1. По принципу компактности, сформулированному в п. 3.1, для каждого фиксированного s семейство $\{f_n(\cdot, s, \cdot)\}$ компактно в смысле сходимости из определения 3.1. Привлекая процедуру диагонального выбора, найдём последовательность $\{n'\} \subset \{n\}$ и интегрант $f(x, s, \xi)$, такие что $f_{n'}(\cdot, s, \cdot) \xrightarrow{\Gamma_1} f(\cdot, s, \cdot)$ в смысле определения 3.1 для любого рационального s ($s \in \mathbb{Q}$).

Шаг 2. Предельный интегрант $f(x, s, \xi)$ наследует свойства (1.8), (1.9), в которых пока допустимы только рациональные s . Нетрудно показать, что эти свойства обеспечивают соотношение непрерывности

$$|f(x, s, \xi) - f(x, s', \xi)| \leq c_3 \sigma(|s - s'|)(|\xi|^\beta + 1), \quad s, s' \in \mathbb{Q},$$

благодаря которому интегрант $f(x, s, \xi)$ доопределяется по непрерывности для всех $s \in \mathbb{R}$. При этом свойства (1.8), (1.9) выполнены для $f(x, s, \xi)$ уже в полном объёме, т. е. для всех $s \in \mathbb{R}$.

Поясним упомянутый выше механизм наследования предельным интегрантом свойств допредельных интегрантов на примере соотношения (1.9).

Фиксируем шар $B \subset \Omega$ и $s, s' \in \mathbb{Q}$, запишем интегральное неравенство

$$\int_B f_n(x, s', \nabla u_n) dx - \int_B f_n(x, s, \nabla u_n) dx \stackrel{(1.9)}{\leq} \int_B \sigma(|s - s'|) f_n(x, s, \nabla u_n) dx, \quad (5.1)$$

где в качестве $u_n \rightharpoonup u$, $u(x) = x \cdot \xi$, взята Γ -реализующая последовательность из условия 2) сходимости $f_n(\cdot, s, \cdot) \xrightarrow{\Gamma} f(\cdot, s, \cdot)$. По принципу локализации (см. п. 3.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x, s, \nabla u_n) dx = \int_B f(x, s, \xi) dx$$

Кроме того, по условию 1) сходимости $f_n(\cdot, s', \cdot) \xrightarrow{\Gamma_1} f(\cdot, s', \cdot)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x, s', \nabla u_n) dx \geq \int_B f(x, s', \xi) dx.$$

Отсюда предельным переходом из (5.1) выводим

$$\frac{1}{|B|} \int_B f(x, s', \xi) dx - \frac{1}{|B|} \int_B f(x, s, \xi) dx \leq \sigma(|s - s'|) \frac{1}{|B|} \int_B f(x, s, \xi) dx.$$

Стягивая шар $B = B_r(x_0)$ (радиуса r с центром в x_0) в точку x_0 и полагая x_0 точкой Лебега для функций $f(\cdot, s', \xi)$, $f(\cdot, s, \xi)$, получаем, что

$$f(x_0, s', \xi) - f(x_0, s, \xi) \leq \sigma(|s - s'|) f(x_0, s, \xi),$$

что и требовалось.

Шаг 3. Итак, построен интегрант f класса (1.8), (1.9). Покажем, что f является $\Gamma_1(s)$ -предельным для f_n , т. е. для него выполнены два условия из определения $\Gamma_1(s)$ -предела. В самом деле, в точках $s \in \mathbb{Q}$ оба условия выполнены по построению. Теперь проверим выполнение условия 1) в произвольной точке $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Можно считать, что

$$\sup_n \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx \leq C < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n(x, s, \nabla u_n) - f_n(x, s', \nabla u_n)| dx &\stackrel{(1.10)}{\leq} c_3 \sigma(|s - s'|) \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx \\ &\leq 2C c_3 \sigma(|s - s'|) = o(1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

при $s' \rightarrow s$. Выбираем точки s' рациональными, для них условие 1) выполнено. В результате получаем, что

$$C \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s', \nabla u_n) dx + o(1) \geq \int_{\Omega} f(x, s', \nabla u) dx + o(1), \quad (5.3)$$

где

$$\int_{\Omega} f(x, s', \nabla u) dx = \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx + o(1) \quad \text{при } s' \rightarrow s,$$

что показывается аналогично (5.2) с использованием (1.10) и оценки

$$\int_{\Omega} f_n(x, s', \nabla u_n) dx \stackrel{(5.3)}{\leq} 2C,$$

если $|s - s'|$ достаточно мало. Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx \geq \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx,$$

что и требовалось.

Шаг 4. Проверим условие 2) сходимости $f_n(\cdot, s, \cdot) \xrightarrow{\Gamma_1(s)} f(\cdot, s, \cdot)$, т. е. покажем существование $\Gamma_1(s)$ -реализующей последовательности. Фиксируя $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$, возьмём

$$s_k \in \mathbb{Q}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s, \quad \sigma(|s - s_k|) \leq \frac{1}{k}, \quad (5.4)$$

и для каждого s_k найдём последовательность $\{u_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, такую что

$$u_n^k \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n^k) dx = \int_{\Omega} f(x, s_k, \nabla u) dx. \quad (5.5)$$

Последнее возможно по построению интегранта f .

Из второго соотношения в (5.5) и свойства сравнимости (1.11) для интегранта f получим равномерную оценку

$$\int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx, \quad \int_{\Omega} f(x, s_k, \nabla u) dx, \quad \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n^k) dx \leq C < \infty. \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |f(x, s_k, \nabla u) - f(x, s, \nabla u)| dx \stackrel{(1.10)}{\leq} \\ & \leq c_3 \sigma(|s - s_k|) \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx \stackrel{(5.4), (5.6)}{\leq} c_3 C \frac{1}{k}, \\ & \int_{\Omega} |f_n(x, s_k, \nabla u_n^k) - f_n(x, s, \nabla u_n^k)| dx \stackrel{(1.10)}{\leq} \\ & \leq c_3 \sigma(|s - s_k|) \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n^k) dx \stackrel{(5.4), (5.6)}{\leq} c_3 C \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (5.7)$$

равномерно по n .

Для каждого k выбираем $n_k \rightarrow \infty$ так, чтобы

$$\left| \int_{\Omega} f(x, s_k, \nabla u) dx - \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n^k) dx \right| \leq \frac{1}{k}, \quad \|u_n^k - u\|_{L^\alpha(\Omega)} \leq \frac{1}{k}, \quad n = n_k. \quad (5.8)$$

Полагая

$$u_{n_k} = u_{n_k}^k, \quad (5.9)$$

имеем для $n = n_k$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx - \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx = \\ & = \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx - \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n) dx + \int_{\Omega} f_n(x, s_k, \nabla u_n) dx - \\ & - \int_{\Omega} f(x, s_k, \nabla u) dx + \int_{\Omega} f(x, s_k, \nabla u) dx - \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx \leq 2c_3 C \frac{1}{k} + \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

где первая и третья разности оцениваются по (5.7), а вторая разность — по (5.8) по выбору последовательности u_{n_k} . Следовательно,

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x, s, \nabla u_n) dx = \int_{\Omega} f(x, s, \nabla u) dx.$$

Кроме того, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ согласно первому соотношению в (5.5) и второму соотношению в (5.8). Тем самым проверено, что в (5.9) задана искомая $\Gamma_1(s)$ -реализующая последовательность.

Доказательство теоремы завершено. $\square$

5.2. Принцип компактности относительно Γ -сходимости для одного подкласса нестандартных интегрантов

Теорема 3.5 вытекает из теоремы 5.2 и следующего утверждения.

Предложение 5.3. Пусть интегранты f_n класса (1.8), (1.9) и

$$\Gamma_1(s)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Тогда если $\beta > \alpha > d$, то

$$f_n \xrightarrow{\Gamma_1} f \text{ в смысле определения 3.2.} \quad (5.10)$$

Аналогичное утверждение верно относительно Γ_2 -сходимости интегрантов.

Для проверки условий 1) и 2) сходимости (5.10) применяем те же соображения кусочно-постоянной аппроксимации, что использованы при доказательстве теоремы 4.1. Заметим, что условие $u_n \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > d$, уже само влечёт по теореме вложения Соболева равномерную сходимость (4.6).

Литература

- [1] Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1983. — Т. 47, № 5. — С. 961—998.
- [2] Жиков В. В. О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. — 1992. — Т. 138, № 8. — С. 47—84.
- [3] Жиков В. В. О вариационных задачах и нелинейных уравнениях с нестандартными условиями роста // Пробл. мат. анализа. — 2014. — Т. 54. — С. 23—112.
- [4] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
- [5] Жиков В. В., Пастухова С. Е. Гамма-сходимость интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста // Пробл. мат. анализа. — 2013. — № 74. — С. 85—108.
- [6] Жиков В. В., Пастухова С. Е. О гамма-сходимости осциллирующих интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, № 4. — С. 33—68.
- [7] Куратовский Л. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
- [8] Струве М. Вариационные методы. — М.: МЦНМО, 2010.
- [9] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
- [10] Braides A. Γ -Convergence for Beginners. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
- [11] Braides A., Defranceschi A. Homogenization of Multiple Integrals. — Clarendon Press, 1998. — (Oxford Lect. Ser. Math. Its Appl.; Vol. 12).
- [12] Carbone L., Sbordone C. Some properties of Γ -limits of integral functionals // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1979. — Vol. 122, no. 1. — P. 1—60.
- [13] De Giorgi E. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell' area // Rend. Mat. Roma (6). — 1975. — Vol. 8. — P. 277—294.
- [14] De Giorgi E., Franzoni T., Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). — 1975. — Vol. 58, no. 6. — P. 842—850.
- [15] De Giorgi E., Letta G. Une notion generale de convergence faible des fonctions croissantes d'ensemble // Ann. Scu. Sup. Pisa (4). — 1977. — Vol. 4 no. 1. — P. 61—99.
- [16] Ioffe A. D. On lower semicontinuity of integral functionals. I // SIAM J. Control Optim. — 1977. — Vol. 15, no. 4. — P. 521—538.
- [17] Jikov V. V. On Lavrentiev's phenomenon // Russ. J. Math. Phys. — 1995. — Vol. 3, no. 2. — P. 249—269.
- [18] Dal Maso G. An Introduction to Γ -Convergence. — Boston: Birkhäuser, 1993.
- [19] Weinan E. A class of homogenization problems in the calculus of variations // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — Vol. 44, no. 7. — P. 733—759.