Об одной оценке, связанной со стабилизацией нормального параболического уравнения с помощью стартового управления*

А. В. ФУРСИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: fursikov@gmail.com

Л. С. ШАТИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: l_shatina@mail.ru

УДК 514.956.45+517.971

Ключевые слова: уравнения нормального типа, стабилизация стартовым управлением.

Аннотация

После напоминания основных фактов, связанных с полилинейными параболическими уравнениями нормального типа и их нелокальной стабилизацией посредством стартового управления, приводится упрощение доказательства оценки снизу одного функционала от решения уравнения теплопроводности со специальными начальными условиями. Эта оценка является ключевой при доказательстве нелокальной стабилизации уравнений нормального типа, а предложенное упрощение доказательства оценки необходимо для дальнейшего развития теории нелокальной стабилизации.

Abstract

A. V. Fursikov, L. S. Shatina, On an estimate connected with the stabilization of normal parabolic equation by start control, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 4, pp. 197—230.

After a brief revision of facts concerning semilinear parabolic equations of normal type and their nonlocal stabilization by start control, we provide a simplification of the proof of the lower bound for a functional of the solution to the heat equation with initial condition of a special type. This bound is essential to prove the nonlocal stabilization of equations of normal type. The simplification presented is required for further development of the nonlocal stabilization theory.

*Работа выполнена в рамках программы РАН «Теоретические проблемы современной математики», проект «Оптимизация численных алгоритмов задач математической физики». Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00262a.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 4, с. 197—230.

Посвящается Владимиру Михайловичу Тихомирову

Введение

Эта работа посвящена развитию теории нелокальной стабилизации уравнений нормального типа посредством стартового управления. Полулинейные нормальные параболические уравнения были введены в [7—11] с целью лучше понять структуру решений трёхмерной системы Гельмгольца, описывающей вихрь ω векторного поля скорости v течения вязкой несжимаемой жидкости, и других похожих уравнений.

Поясним, почему это важно. Напомним, что скорость v вместе с давлением p описывается посредством трёхмерной системы Навье—Стокса. Так как v удовлетворяет энергетическому неравенству, удаётся доказать существование слабого решения системы Навье—Стокса, однако доказательство существования сильного решения (для которого известна теорема единственности) наталкивается на большие трудности, потому что поле вихря $\omega = \operatorname{rot} v$ энергетическому неравенству не удовлетворяет. (В двумерном случае ω удовлетворяет энергетическому неравенству, что позволило В. И. Юдовичу [2] доказать существование сильного решения даже для системы уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости.) Причина этого в том, что образ $B(\omega)$ нелинейного оператора B, порождаемого нелинейными членами уравнения Гельмгольца, не ортогонален вектору ω, т. е. содержит компоненту $\Phi\omega$, коллинеарную ω.

Если в системе Гельмгольца нелинейные члены, задающие оператор $B(\omega)$, заменить на члены, задающие его компоненту $\Phi\omega$, коллинеарную вектору ω, то система уравнений, полученная в результате такой операции, называется (по определению) нормальным параболическим уравнением, соответствующим системе Гельмгольца. Общий план исследования нормального параболического уравнения состоит в описании структуры динамики, порождаемой этим уравнением, и в доказательстве возможности его нелокальной стабилизации посредством соответствующего управления. В дальнейшем результаты, полученные для нормальных параболических уравнений, предполагается использовать для исследования исходной системы Гельмгольца. Реализация этого плана была начата с исследования нормального параболического уравнения, соответствующего одномерному уравнению Бюргерса. При этом пока рассматривается лишь случай нормального параболического уравнения с периодическими краевыми условиями.

К настоящему моменту структура динамики, порождаемой нормальным параболическим уравнением, изучена для нормальных параболических уравнений, порождённых не только уравнением Бюргерса (см. [7, 9]), но и системой Гельмгольца (см. [8, 10]). Однако задача нелокальной стабилизации посредством стартового управления с фиксированным носителем исследована лишь для нормального параболического уравнения, порождённого уравнением Бюргерса (см. [11]). А именно, доказано, что нормальное параболическое уравнение с произвольным начальным условием y_0 может быть стабилизировано посредством стартового управления вида $u(x) = \lambda u_0(x)$, где λ — это некоторая константа, зависящая от y_0, а $u_0(x)$ — универсальная функция, зависящая лишь от произвольного заданного заранее подынтервала $(a,b) \subset [0,2\pi)$, который содержит носитель управления u_0. Ключевой для доказательства результата о стабилизации является следующая оценка:

$$\int_0^{2\pi} S^3(t,x;u_0)\,dx \geqslant \beta e^{-6t} \quad \text{для всех} \quad t > 0, \tag{$*$}$$

где $S(t,x;u_0)$ — решение уравнения теплопроводности с начальным условием u_0, а $\beta > 0$ — некоторая константа.

Следует отметить, что доказательство оценки $(*)$, полученное в [11], является настолько сложным, что возможность его обобщение на случай нормального параболического уравнения, порождённого трёхмерной системой Гельмгольца, весьма проблематична. (Обобщение результата о нелокальной стартовой стабилизации на случай нормального параболического уравнения, порождённого трёхмерной системой Гельмгольца, является основной нашей целью на настоящем этапе.) Основным содержанием настоящей работы является получение необходимых упрощений в доказательстве оценки $(*)$.

В первых двух разделах мы напоминаем определения и некоторые факты о нормальном параболическом уравнении, порождённом уравнением Бюргерса, в частности о нелокальной стабилизации нормального параболического уравнения. Последующие разделы посвящены упрощениям доказательства оценки $(*)$.

В заключение отметим, что имеется достаточно обширная литература, посвящённая локальной стабилизации решений уравнений гидродинамического типа в окрестности стационарной точки (см., например, [3, 5, 6, 12, 15, 16], а также литературу, приведённую в обзоре [13]). Работ, посвящённых нелокальной стабилизации, как и нелокальной точной управляемости, гораздо меньше (см., например, [1, 4, 14]).

1. Полулинейное параболическое уравнение нормального типа

Ниже напоминается основная информация об нормальном параболическом уравнении: его вывод, явная формула для его решения, структура порождённой им динамики.

1.1. Вывод нормального параболического уравнения

В этой работе мы рассматриваем только нормальное параболическое уравнение, порождённое уравнением Бюргерса. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x) - \partial_x v^2(t,x) = 0 \tag{1.1}$$

с периодическим краевым условием и начальными данными

$$v(t,x+2\pi)=v(t,x),\quad v(t,x)|_{t=0}=v_0(x). \tag{1.2}$$

Как известно, из ортогональности в $L_2(0,2\pi)$ квадратичного члена $\partial_x v^2(t,x)$ уравнения (1.1) функции $x\to v(t,x)$ следует справедливость энергетического неравенства для решений уравнения Бюргерса:

$$\int_0^{2\pi} v^2(t,x)\,dx+2\int_0^t\int_0^{2\pi}\bigl(\partial_x v(t,x)\bigr)^2\,dx\,dt\leqslant\int_0^{2\pi} v_0^2(x)\,dx.$$

Но для функции $\partial_x v(t,x)$ аналогичное неравенство уже неверно. Действительно, дифференцируя (1.1) по x, получаем

$$\partial_t v_x(t,x)-\partial_{xx}v_x(t,x)-B(v,v_x)=0, \tag{1.3}$$

где $v_x=\partial v/\partial x$,

$$B(v,v_x)=2v_x^2+2v\partial_x v_x. \tag{1.4}$$

Умножая (1.4) на v_x скалярно в $L_2(T_1)$, где $T_1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — окружность, и интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} B(v,v_x)v_x\,dx=\int_0^{2\pi}(2v_x^3+2vv_x\partial_x v_x)\,dx=\int_0^{2\pi} v_x^3\,dx\neq 0. \tag{1.5}$$

Введём важное для нас пространство

$$L_2^0(T_1)=\left\{v(x)\in L_2(T_1)\colon\ \int_0^{2\pi} v(x)\,dx=0\right\} \tag{1.6}$$

и разложим в этом пространстве оператор $B(v,v_x)$ на нормальную и тангенциальную составляющие:

$$B(v,v_x)=B_n(v,v_x)+B_\tau(v,v_x), \tag{1.7}$$

где $B_n(v,v_x)=\Phi(v,v_x)v_x$, $\Phi(v,v_x)$ — функционал, тогда как вектор $B_\tau(v,v_x)$ ортогонален вектору v_x в $L_2^0(T_1)$:

$$\int_0^{2\pi} B_\tau(v,v_x)v_x dx=0. \tag{1.8}$$

Чтобы определить функционал $\Phi(v,v_x)$, подставим (1.7) в (1.5) и воспользуемся (1.8). В результате мы получим, что

$$\int_0^{2\pi} v_x^3\,dx=\int_0^{2\pi}\Phi(v,v_x)v_x^2\,dx=\Phi(v,v_x)\int_0^{2\pi} v_x^2\,dx.$$

Следовательно, функционал Φ не зависит от v, а зависит лишь от v_x, и для $v_x \neq 0$

$$\Phi(v_x) = \frac{\int_0^{2\pi} v_x^3\,dx}{\int_0^{2\pi} v_x^2\,dx}.$$

Очевидно, Φ можно по непрерывности определить нулём при $v_x \equiv 0$, т. е. $\Phi(0) = 0$.

Заменив в уравнении (1.3) член $B(v, v_x)$ на $\Phi(v_x)v_x$ и используя обозначение $v_x = y$, получаем

$$\partial_t y(t,x) - \partial_{xx} y(t,x) - \Phi(y)y = 0, \tag{1.9}$$

где

$$\Phi(y) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{2\pi} y(x)^3\,dx}{\int_0^{2\pi} y(x)^2\,dx}, & y \neq 0, \\ 0, & y \equiv 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Уравнение (1.9) называется полулинейным параболическим уравнением нормального типа или нормальным параболическим уравнением. Мы будем его рассматривать с периодическим краевым условием

$$y(t, x + 2\pi) = y(t,x) \tag{1.11}$$

и начальным условием

$$y(t,x)|_{t=0} = y_0(x). \tag{1.12}$$

Для задачи (1.9), (1.12) доказаны теоремы существования и единственности решения в соответствующих функциональных пространствах (см. [7]), как и для нормального параболического уравнения, порождённого трёхмерным уравнение Гельмгольца (см. [10]). Ради краткости мы не будем их здесь формулировать, а обратимся к свойству нормального параболического уравнения, являющегося ключевым при исследовании уравнений этого типа.

1.2. Явная формула для решения нормального параболического уравнения

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть $S(t,x;y_0)$ — решение уравнения теплопроводности*

$$\partial_t S - \partial_{xx} S = 0, \quad S|_{t=0} = y_0(x) \tag{1.13}$$

с периодическим краевым условием. Тогда решение задачи (1.9), (1.12) *можно записать в виде*

$$y(t,x;y_0) = \frac{S(t,x;y_0)}{1 - \int_0^t \Phi\big(S(\tau,x;y_0)\big)\,d\tau}. \tag{1.14}$$

Эта лемма доказана в [7]. Её доказательство сводится к подстановке указанной формулы в (1.9) и прямой проверке.

1.3. Структура динамики, порождённой нормальным параболическим уравнением

Напомним основные свойства динамического потока, порождённого задачей (1.9), (1.12). Мы разложим фазовое пространство $L_2^0(T_1)$ этой динамической системы на три множества, в которых поведение динамического потока существенно отличаются.

Определение 1.1. Множество $M_- \subset L_2^0(T_1)$ начальных условий y_0, таких что решение $y(t,x;y_0)$ задачи (1.9), (1.12) существует при всех временах $t>0$ и удовлетворяет неравенству

$$\|y(t,\cdot;y_0)\| \leqslant \alpha\|y_0\|e^{-t} \quad \text{для всех} \quad t>0, \tag{1.15}$$

называется множеством устойчивости. Здесь $\|\cdot\|$ — норма фазового пространства $L_2^0(T_1)$, $\alpha=\alpha(y_0)>1$ — некоторое фиксированное число, зависящее от y_0.

Определение 1.2. Множество $M_+ \subset L_2^0(T_1)$ начальных условий y_0 задачи (1.9), (1.12), таких что соответствующее решение $y(t,x;y_0)$ существует только на конечном временно́м интервале $t\in(0,t_0)$ с $t_0>0$, зависящем от y_0, и взрывающемся при $t=t_0$ (т. е. $\|y(t,\cdot;y_0)\|_0\to\infty$ при $0<t<t_0$ и $t\to t_0$), называется множеством взрывов.

По явной формуле (1.14) для решения $y(t,x;y_0)$

$$M_+ = \Bigl\{y_0\in H^0(T_1)\colon \text{найдётся } t_0>0, \text{ для которого } \int_0^{t_0}\Phi\bigl(S(\tau,\cdot;y_0)\bigr)\,d\tau = 1\Bigr\}. \tag{1.16}$$

Минимальное значение множества чисел $\{t_0\}$, удовлетворяющих (1.16), называется моментом взрыва.

Определение 1.3. Множество $M_{\mathrm{g}} \subset L_2^0(T_1)$ начальных условий y_0 задачи (1.9), (1.12), таких что соответствующее решение $y(t,x;y_0)$ существует при всех $t\in\mathbb{R}_+$ и $\|y(t,\cdot;y_0)\|_0\to\infty$ при $t\to\infty$, называется множеством роста.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Множества устойчивости, взрывов и роста не пусты*:

$$M_-\neq\varnothing,\quad M_+\neq\varnothing,\quad M_{\mathrm{g}}\neq\varnothing.$$

Более того,

$$M_-\cup M_+\cup M_{\mathrm{g}} = L_2^0(T_1).$$

Теорема доказана в [7, 10]. Заметим, что в [7, 10] изучается не только аналитическая, но и геометрическая структура множеств M_-, M_+, M_{g}. Мы не формулируем здесь многих из этих результатов, потому что не используем их. (Наиболее полные результаты о геометрической структуре множеств M_-,

M_+, M_{g} получены в [10] для случая нормального параболического уравнения, порождённого трёхмерной системой Гельмгольца. Тот же результат для нормального параболического уравнения, соответствующего уравнению Бюргерса, может быть получен в точности так же.) Теорема 1.1 необходима нам для того, чтобы обосновать содержательность теоремы о стабилизации нормального параболического уравнения посредством стартового управления.

2. Стабилизация решения нормального параболического уравнения посредством стартового управления

В этом разделе сформулированы основная теорема о стабилизации нормального параболического уравнения и необходимая для её доказательства теорема об одной оценке снизу, а также приведена схема первого этапа доказательства этой теоремы об оценке.

2.1. Формулировка главного результата о стабилизации

Рассмотрим краевую задачу для нормального параболического уравнения (1.9), (1.12), в которой начальное условие (1.12) заменено на

$$y(t,x)|_{t=0} = y_0(x) + v(x), \quad x \in T_1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

где $y_0(x)$ — заданное начальное условие, $v(x)$ — стартовое управление. Предполагается, что задан отрезок $[a,b] \subset T_1$ и по условию носитель управления $v(x)$ принадлежит $[a,b]$:

$$\operatorname{supp} v \subset [a,b]. \tag{2.2}$$

Задача стабилизации ставится следующим образом. Для заданного $y_0(x) \in \in L_2^0(T_1)$ найти такое управление $v \in L_2^0(T_1)$, удовлетворяющее (2.2), что решение $y(t,x;y_0+v)$ задачи (1.9), (1.11), (2.1) определено при всех $t>0$ и удовлетворяет оценке

$$\|y(t,\cdot;y_0+v)\| \leqslant \alpha\|y_0+v\|e^{-t} \quad \text{для всех} \quad t>0 \tag{2.3}$$

с некоторой константой $\alpha > 1$.

Отметим, что поставленная задача содержательна лишь при $y_0 \in M_+$ или $y_0 \in M_{\mathrm{g}}$, так как при $y_0 \in M_-$ согласно (1.15) для стабилизации достаточно взять управление $v \equiv 0$.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 2.1. *Для любого заданного $y_0(x) \in M_+ \cup M_{\mathrm{g}}$ существует управление $v \in L_2^0(T_1)$, удовлетворяющее (2.2), которое даёт решение задачи стабилизации.*

2.2. Формулировка ключевого результата об оценке

С помощью замены переменных

$$\tilde{x} = x - \frac{a+b}{2}$$

в (1.9), (1.11), (2.1) задача стабилизации сводится к случаю, когда условие (2.2) на носитель управления v записывается в виде

$$\operatorname{supp} v(x) \subset [-\rho, \rho], \quad 0 < \rho < \pi, \tag{2.4}$$

с $\rho = (b-a)/2$. Ниже мы будем записывать окружность T_1 как отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествлёнными концами.

Фактически предлагается универсальное стабилизирующее стартовое управление, которое с точностью до постоянного множителя определяется следующим образом. Для заданного $\rho \in (0, \pi)$ мы выбираем $p \in \mathbb{N}$, для которого

$$\frac{\pi}{2p} < \rho, \tag{2.5}$$

и определяем характеристическую функцию интервала $\big(-\pi/(2p), \pi/(2p)\big)$ по формуле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \pi/(2p), \\ 0, & \pi/(2p) < |x| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2.6}$$

Искомое управление ищется в виде $v(x) = \lambda u(x)$, где λ — некоторая константа, а функция $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \chi(x)(\cos 2px + \cos 4px). \tag{2.7}$$

Очевидно,

$$u(x) \in L_2^0(T_1), \quad \operatorname{supp} u \subset [-\rho, \rho]. \tag{2.8}$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\partial_t S(t,x) - \partial_{xx} S(t,x) = 0, \quad S(t,x)|_{t=0} = u(x) \tag{2.9}$$

с периодическим краевым условием. Для решения этой задачи справедлива следующая оценка.

Теорема 2.2. *Пусть $S(t,x,u)$ — решение краевой задачи (2.9) с начальным условием $u(x)$, определённым в (2.7). Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} S^3(t,x;u)\,dx \geqslant \beta e^{-6t} \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \tag{2.10}$$

где β — некоторая положительная константа.

Отметим, что из включения $u \in L_2^0(T_1)$ следует равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0$$

(см. (1.6)), которое сильно осложняет доказательство теоремы. Теорема 2.2 доказана в [11]. Однако некоторые части этого доказательства настолько сложны, что не ясно, допускают ли они обобщение на случай нормального параболического уравнения, порождённого трёхмерной системой Гельмгольца, а для нас стабилизация нормального параболического уравнения, порождённого системой Гельмгольца, — одна из основных целей на нынешнем этапе. Главная задача этой работы — упрощение доказательства теоремы 2.2 до приемлемого уровня. В оставшейся части этого раздела мы напоминаем схему первого этапа доказательства теоремы 2.2, а в последующих разделах даём упрощение основной части доказательства этой теоремы.

2.3. Схема первого этапа доказательства теоремы 2.2

Периодическая функция (2.7) разлагается в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx},$$

и прежде всего необходимо вычислить коэффициенты Фурье этой функции. Как показано в [11],

$$\hat{u}_{2p} = \hat{u}_{-2p} = \hat{u}_{4p} = \hat{u}_{-4p} = \frac{1}{4p} \tag{2.11}$$

и для $k \neq \pm 2p \pm 4p$

$$\hat{u}_k = \frac{k}{\pi} \sin\frac{k\pi}{2p} \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^m}{k^2-(2pm)^2} = \frac{12p^2 k \sin\frac{k\pi}{2p}}{\pi(k^2-16p^2)(k^2-4p^2)}. \tag{2.12}$$

Разложение в ряд Фурье решения $S(t,x;u)$ краевой задачи (2.9) имеет вид

$$S(t,x,u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2 t} \hat{u}_k e^{ikx},$$

где $\hat{u}_k$ — коэффициенты, определённые в (2.11), (2.12).

Согласно (2.11), (2.12) решение $S(t,x,u)$ задачи (2.9) можно переписать в виде

$$S(t,x,u) = S_1(t,x,u) + S_2(t,x,u), \tag{2.13}$$

где

$$S_1(t,x,u) = \frac{1}{4p} \sum_{m=1}^{2} (e^{2pmix} + e^{-2pmix}) e^{-(2pm)^2 t}, \tag{2.14}$$

$$S_2(t,x,u) = \frac{12p^2}{\pi} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k\notin\{\pm 2p, \pm 4p\}}} \frac{k\sin\big((k\pi)/(2p)\big)}{(k^2-16p^2)(k^2-4p^2)} e^{ikx-k^2 t}. \tag{2.15}$$

Вследствие (2.13)

$$\int_{-\pi}^{\pi} S^3(t,x,u)\,dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \big(S_1^3(t,x,u) + 3S_1^2(t,x,u)S_2(t,x,u) + 3S_1(t,x,u)S_2^2(t,x,u) + S_2^3(t,x,u)\big)\,dx, \tag{2.16}$$

и задача сводится к доказательству неотрицательности интегралов из (2.16). Неотрицательность интегралов, связанных с первыми тремя членами из правой части (2.16), доказана в [11], причём для первых двух членов доказательство совсем простое.

Интеграл, связанный с четвёртым членом, можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_2^3(t,x,u)\,dx = \\ = \frac{2^7 3^3 p^6}{\pi^2} \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm 2p,\pm 4p\},\\ k+m\notin\{\pm 2p,\pm 4p\}}} B(k)B(m)B(k+m)e^{-(k^2+m^2+(k+m)^2)t}, \tag{2.17}$$

где

$$B(k) = \frac{k\sin\big((\pi k)/(2p)\big)}{(k^2-16p^2)(k^2-4p^2)}. \tag{2.18}$$

Так как $B(k)$ — чётная функция по k, можно показать (см. [11]), что равенство (2.17) можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_2^3(t,x,u)\,dx = \frac{2^8 3^4 p^6}{\pi^2} J_1, \tag{2.19}$$

где

$$J_1 = \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\setminus\{2p,4p\},\\ k+m\notin\{2p,4p\}}} B(k)B(m)B(k+m)e^{-(k^2+m^2+(k+m)^2)t}. \tag{2.20}$$

Таким образом, доказательство основной теоремы 2.2 сведено к доказательству следующего утверждения.

Теорема 2.3. *Справедливо неравенство*

$$J_1 \geqslant \beta e^{-6t} \quad \text{для всех} \quad t > 0, \tag{2.21}$$

где J_1 — функционал (2.20), а β — некоторая положительная константа.

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть работы.

Начнём с напоминания одного результата из [11].

3. Распределение знаков слагаемых суммы J_1

Выясним, как распределены знаки слагаемых суммы J_1. Для этого нам понадобится следующая лемма, непосредственно вытекающая из определения (2.18) функции $B(k)$.

Лемма 3.1. *Пусть $B(k)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{2p, 4p\}$, — функция, определённая в* (2.18). *Тогда*

i) $B(k) = 0$ *при* $k = 2pl$, *где* $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 3$;

ii) $B(k) > 0$ *при* $k \in (0, 2p) \cup (2p, 4p) \cup \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} (4lp, (4l+2)p)$;

iii) $B(k) < 0$ *при* $k \in \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} \big((4l+2)p, 4(l+1)p\big)$.

Из леммы 3.1 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3.2. *Знаки функции $B(k)B(m)B(k+m)$ из* (2.20) *распределены следующим образом.*

i) *В каждом квадрате*

$$\big\{(k,m) \in \big(2pa, 2p(a+1)\big) \times \big(2pb, 2p(b+1)\big)\big\},$$

где $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \begin{cases} +, & \textit{если} \quad k+m < 2p(a+b+1), \\ -, & \textit{если} \quad k+m > 2p(a+b+1). \end{cases} \tag{3.1}$$

ii) *В каждом множестве*

$$\big\{(k,m) \in \big(2pa, 2p(a+1)\big) \times (0, 2p) \cup (0, 2p) \times \big(2pa, 2p(a+1)\big)\big\},$$

где $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \begin{cases} +, & \textit{если} \quad k+m < 2p(a+1), \\ -, & \textit{если} \quad k+m > 2p(a+1). \end{cases} \tag{3.2}$$

iii) *В каждом квадрате*

$$\big\{(k,m) \in \big(2pa, 2p(a+1)\big) \times (2p, 4p) \cup (2p, 4p) \times \big(2pa, 2p(a+1)\big)\big\},$$

где $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \begin{cases} -, & \textit{если} \quad k+m < 2p(a+2), \\ +, & \textit{если} \quad k+m > 2p(a+2). \end{cases} \tag{3.3}$$

iv) *В квадрате* $(k,m) \in \{(0, 4p) \times (0, 4p)\}$

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \begin{cases} +, & \textit{если} \quad k+m < 6, \\ -, & \textit{если} \quad k+m > 6p. \end{cases} \tag{3.4}$$

Доказательство. Проверим утверждение i). Так как $k \in \big(2pa, 2p(a+1)\big)$, $m \in \big(2pb, 2p(b+1)\big)$ и $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, то из (2.18) следует, что

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi m}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right). \tag{3.5}$$

Очевидно, что при $k \in \big(2pa, 2p(a+1)\big)$

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\right) = \operatorname{sign}(-1)^a$$

В рассматриваемом случае либо $2p(a+b) < k+m < 2p(a+b+1)$, либо $2p(a+b+1) < k+m < 2p(a+b+2)$. В первом случае

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi m}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right) = \operatorname{sign}\big((-1)^{a+b}(-1)^{a+b}\big).$$

Во втором случае

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi m}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right) = \operatorname{sign}\big((-1)^{2(a+b)+1}\big).$$

Отсюда с учётом (3.5) выводим (1.1).

Проверим утверждение ii). Если $(k, m) \in \big(2pa, 2p(a+1)\big) \times (0, 2p)$, то согласно (2.18) и пункту ii) леммы 3.1

$$\operatorname{sign}\big(B(k)B(m)B(k+m)\big) = \operatorname{sign}\big(B(k)B(k+m)\big) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right),$$

и для $2pa < k+m < 2p(a+1)$ получаем, что

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right) = \operatorname{sign}\big((-1)^{2a}\big).$$

Если $2p(a+1) < k+m < 2p(a+2)$, то

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi k}{2p}\sin\frac{\pi(k+m)}{2p}\right) = \operatorname{sign}\big((-1)^{2a+1}\big).$$

Это доказывает (1.2). Другой случай пункта ii) и пункты iii) и iv) леммы 3.2 проверяются аналогично. □

Обозначим через $J_1(\mathrm{i})$, $J_1(\mathrm{ii})$, $J_1(\mathrm{iii})$, $J_1(\mathrm{iv})$ части суммы J_1, слагаемые которых описаны в пунктах i), ii), iii), iv) леммы 3.2 соответственно, и покажем положительность этих сумм.

4. Положительность сумм $J_1(\mathrm{i})$ и $J_1(\mathrm{iv})$

4.1. Положительность $J_1(\mathrm{i})$

Для начала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}$. Тогда функция*

$$D(x) = \frac{x}{(x^2 - 16p^2)(x^2 - 4p^2)} \tag{4.1}$$

монотонно убывает при $x > 4p$.

Доказательство. Несложно заметить, что при $x > 4p$

$$D(x) = \frac{1}{24p^2}\left(\frac{1}{x-4p} + \frac{1}{x+4p} - \frac{1}{x-2p} - \frac{1}{x+2p}\right). \tag{4.2}$$

Таким образом,

$$D'(x) = -\frac{1}{24p^2}\left[\left(\frac{1}{(x-4p)^2} - \frac{1}{(x-2p)^2}\right) + \left(\frac{1}{(x+4p)^2} - \frac{1}{(x+2p)^2}\right)\right] < 0. \quad \square$$

Пусть (k, m) — точка из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Обозначим через $\{(k_1, m_1), (k_2, m_2), (k_3, m_3)\}$ множество точек из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, принадлежащих треугольнику с вершинами в точках (k_1, m_1), (k_2, m_2), (k_3, m_3), а часть суммы J_1, определённой в (2.20), которая состоит из слагаемых, принадлежащих $\{(k_1, m_1), (k_2, m_2), (k_3, m_3)\}$, обозначим через $J_1(\{(k_1, m_1), (k_2, m_2), (k_3, m_3)\})$.

Перейдём к доказательству основного утверждения данного раздела.

Лемма 4.2. *Пусть $a, b, p \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$. Тогда*

$$J_1\big(\big\{(2pa, 2pb), (2p(a+1), 2pb), \big(2pa, 2p(b+1)\big)\big\}\big) + \\ + J_1\big(\big\{\big(2pa, 2p(b+1)\big), (2p(a+1), 2pb), \big(2p(a+1), 2p(b+1)\big)\big\}\big) > 0 \tag{4.3}$$

для любого $t \geqslant 0$.

Доказательство. Выполним в (4.3) замену переменных $k = 2pa + k_1$, $m = 2pb + m_1$ и введём обозначение

$$A(k) := B(k)e^{-k^2 t} = D(k)e^{-k^2 t}\sin\frac{\pi k}{2p}, \tag{4.4}$$

где последнее равенство следует из (2.18), (4.1). Тогда

$$J_1\big(\big\{(2pa, 2pb), (2p(a+1), 2pb), \big(2pa, 2p(b+1)\big)\big\}\big) = \\ = \sum_{\substack{k_1, m_1 = 1,\\ k_1 + m_1 < 2p}}^{2p-1} A(2pa + k_1)A(2pb + m_1)A(2p(a+b) + k_1 + m_1), \tag{4.5}$$

$$J_1\big(\big\{\big(2pa, 2p(b+1)\big), (2p(a+1), 2pb), \big(2p(a+1), 2p(b+1)\big)\big\}\big) = \\ = \sum_{\substack{k_1, m_1 = 1,\\ k_1 + m_1 > 2p}}^{2p-1} A(2pa + k_1)A(2pb + m_1)A(2p(a+b) + k_1 + m_1). \tag{4.6}$$

По лемме 3.2 слагаемые в

$$J_1\big(\big\{(2pa, 2pb), (2p(a+1), 2pb), \big(2pa, 2p(b+1)\big)\big\}\big)$$

положительны, а слагаемые в

$$J_1\Big(\big\{\big(2pa,2p(b+1)\big),(2p(a+1),2pb),\big(2p(a+1),2p(b+1)\big)\big\}\Big)$$

отрицательны. Для доказательства (4.3) покажем, что абсолютные значения отрицательных слагаемых не превосходят значений положительных слагаемых.

Выполним в (4.5) замену $s = 2p - k_1 - m_1$, $k = k_1$, а в (4.6) замену $s = k_1 + m_1 - 2p$, $k = k_1 - s$ и рассмотрим отношение

$$\begin{aligned}
&\frac{|A(2pa+k+s)A(2p(b+1)-k)A(2p(a+b+1)+s)|}{A(2pa+k)A(2p(b+1)-k-s)A(2p(a+b+1)-s)} = \\
&\quad = \frac{D(2pa+k+s)D(2p(b+1)-k)D(2p(a+b+1)+s)}{D(2pa+k)D(2p(b+1)-k-s)D(2p(a+b+1)-s)} \cdot e^{-12(a+b+1)ps} < \\
&\quad < \frac{D(2pa+k+s)}{D(2pa+k)}\,\frac{D(2p(b+1)-k)}{D(2p(b+1)-k-s)}\,\frac{D(2p(a+b+1)+s)}{D(2p(a+b+1)-s)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

По лемме 4.1 все три дроби в последней строке (4.7) меньше единицы. Таким образом, сумма (4.3) положительна. □

4.2. Положительность $J_1(\mathrm{iv})$

Докажем утверждение, из которого следует положительность $J_1(\mathrm{iv})$.

Лемма 4.3. *Верно соотношение*

$$J_1(\{(2p,2p),(2p,4p),(4p,2p)\}) + J_1(\{(2p,4p),(4p,4p),(4p,2p)\}) \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Выполним замену переменных $(k,m) \to (x,y)$ в треугольнике $\{(2p,2p),(2p,4p),(4p,2p)\}$ по формулам $k = 2p+2xp$, $m = 2p+2yp$, а в треугольнике $\{(2p,4p),(4p,4p),(4p,2p)\}$ по формулам $k = 4p-2xp$, $m = 4p-2yp$. Для доказательства (4.8) рассмотрим отношение слагаемых из первого и второго треугольников с одинаковыми координатами (x,y)

$$\frac{\big|B\big(2p(2-x)\big)B\big(2p(2-y)\big)B\big(2p(4-x-y)\big)\big|e^{-(2p)^2\big((2-x)^2+(2-y)^2+(4-x-y)^2\big)t}}{B\big(2p(1+x)\big)B\big(2p(1+y)\big)B\big(2p(2+x+y)\big)e^{-(2p)^2\big((1+x)^2+(1+y)^2+(2+x+y)^2\big)t}},$$

где $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$, $x+y<1$. Оценим это выражение снизу. Так как экспонента в числителе меньше экспоненты в знаменателе для всех $(x,y) \in \in (0,1)\times(0,1)$, $x+y<1$, достаточно оценить данную дробь при $t=0$. При $t=0$ она равна

$$\begin{aligned}
I(x,y) &:= \frac{\big|D\big(2p(2-x)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(2-x)]D\big(2p(2-y)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(2-y)]\big|}{\big|D\big(2p(1+x)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(1+x)]D\big(2p(1+y)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(1+y)]\big|} \times \\
&\times \frac{\big|D\big(2p(4-x-y)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(4-x-y)]\big|}{\big|D\big(2p(2+x+y)\big)\sin\frac{\pi}{2p}[2p(2+x+y)]\big|} = \frac{|\tilde D(2-x)\tilde D(2-y)\tilde D(4-x-y)|}{|\tilde D(1+x)\tilde D(1+y)\tilde D(2+x+y)|},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где первое равенство представляет собой определение функции $I(x,y)$ и

$$\tilde{D}(x) = \frac{x}{(x^2-4)(x^2-1)}. \tag{4.10}$$

Заметим, что в силу (4.10)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \frac{|\tilde{D}(2-x)|}{|\tilde{D}(1+x)|} = \frac{(2-x)(4-(1+x)^2)\big((1+x)^2-1\big)}{(4-(2-x)^2)\big((2-x)^2-1\big)(1+x)} = \\ &= \frac{(2-x)(1-x)x(3+x)(2+x)}{(4-x)(3-x)(1-x)x(1+x)} = \frac{2-x}{1+x}\,\frac{3+x}{4-x}\,\frac{2+x}{3-x}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &:= \frac{|\tilde{D}(4-z)|}{|\tilde{D}(2+z)|} = \frac{(4-z)(4-(2+z)^2)\big((2+z)^2-1\big)}{(4-(4-z)^2)\big((4-z)^2-1\big)(2+z)} = \\ &= \frac{(4-z)z(1+z)(3+z)(4+z)}{(6-z)(5-z)(3-z)(2-z)(2+z)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Так как

$$f_2(x) = \tilde{f}_2(x)x, \quad \text{где} \quad \tilde{f}_2(x) = \frac{4-x}{2-x}\,\frac{1+x}{2+x}\,\frac{1}{6-x}\,\frac{3+x}{5-x}\,\frac{4+x}{3-x},$$

а каждый множитель в определении функции $\tilde{f}_2(x)$ возрастает, получаем, что

$$f_2(x) \leqslant \tilde{f}_2(x)|_{x=1}x = x. \tag{4.13}$$

Непосредственно вычисляя правую часть (4.11), получаем, что

$$f_1(x)f_1(1-x) \equiv 1, \quad f_1(0) = f_1\left(\frac{1}{2}\right) = f_1(1) = 1. \tag{4.14}$$

Покажем строгую выпуклость функции $f_1(x)$ на $x \in (0,1/2)$. Для этого вычислим $f'(x)$ и $f''(x)$. Непосредственными вычислениями получаем, что

$$f_1'(x) = f_1(x)g(x), \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{-3}{(1+x)(2-x)} + \frac{7}{(3+x)(4-x)} + \frac{5}{(2+x)(3-x)}, \tag{4.15}$$

следовательно

$$f_1'(0) = f_1'(1) = -\frac{1}{12}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{105}. \tag{4.16}$$

Выполнив в g, определённой в (4.15), замену $x = y + 1/2$, получим, что

$$g\left(y+\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{(9/4-y^2)} + \frac{7}{(49/4-y^2)} + \frac{5}{(25/4-y^2)},$$

следовательно, при $x \in (0,1)$, или, что эквивалентно, при $y \in (-1/2,1/2)$,

$$\partial_x g(x) = \partial_y g\left(y+\frac{1}{2}\right) = 2y\frac{\partial^2}{\partial y^2} g\left(y+\frac{1}{2}\right), \tag{4.17}$$

где

$$\frac{\partial^2 g(y+1/2)}{\partial y^2} = \frac{-3}{(9/4-y^2)^2} + \frac{7}{(49/4-y^2)^2} + \frac{25}{(25/4-y^2)^2} \leqslant \frac{-3}{(9/4-y^2)^2}\bigg|_{y^2=0} + \\ + \left(\frac{7}{(49/4-y^2)^2} + \frac{25}{(25/4-y^2)^2}\right)\bigg|_{y^2=1/4} = -\frac{16}{27} + \frac{7}{144} + \frac{5}{36} < 0. \quad (4.18)$$

Так как согласно (4.15) $f_1''(x) = f_1(x)\big(g^2(x) + g'(x)\big)$, получаем из (4.17), (4.18) строгую выпуклость $f_1(x)$ на $(0,1/2)$, из которой следует, что у функции $f_1(x)$ существует единственная точка минимума x_- и в силу (4.15)

$$1 > f_1(x_-) > 1 + \min_{x\in(0,1/2)}\left(-\frac{x}{12}, \frac{4(x-1/2)}{105}\right) = \frac{151}{153}. \quad (4.19)$$

Согласно (4.19), (4.14) $f_1(x)$ имеет на $(1/2,1)$ единственную точку максимума x_+, удовлетворяющую $x_-x_+ = 1$, и

$$1 < f_1(x_+) < \frac{153}{151}. \quad (4.20)$$

С учётом (4.9), (4.11)—(4.13)

$$\max_{\substack{x,y\in[0,1]\times[0,1],\\ x+y\leqslant 1}} I(x,y) = \\ = \max_{\substack{x,y\in[0,1]\times[0,1],\\ x+y\leqslant 1}} f_1(x)f_1(y)f_2(x+y) \leqslant \max_{\substack{x,y\in[0,1]\times[0,1],\\ x+y\leqslant 1}} f_1(x)f_1(y)(x+y).$$

Осталось показать, что правая часть этого равенства равна единице. Согласно (4.14) $f_1(x)f_1(y)(x+y) = 1$ при $x+y=1$. Рассмотрим случай $x+y<1$. Тогда

$$f_1(x)f_1(y)(x+y) < 1 \quad (4.21)$$

при $0 \leqslant x, y \leqslant 1/2$, так как $f_1 \leqslant 1$ для таких x, y. При $x_- \leqslant y < 1/2 < x$ (4.21) тоже верно, так как

$$f_1(y)f_1(x)(x+y) \leqslant f_1(y)f_1(1-y)(x+y) < 1$$

в силу (4.14). Пусть теперь $0 \leqslant y < x_-$ and $x > 1/2$. Если $x \leqslant x_+$, то

$$f_1(y)f_1(x)(x+y) \leqslant f_1(y)f_1(x^*)(x^*+y),$$

где точка $x^* \geqslant x_+$ такова, что $f_1(x) = f_1(x^*)$, и задача сводится к случаю $x \geqslant x_+$. Пусть теперь $0 \leqslant y < x_-$ and $x \geqslant x_+$. Если $f_1(y)f_1(x) \leqslant 1$, то (4.21) верно (так как $x+y<1$). При $f_1(y)f_1(x) > 1$ существует единственное $y^* \in (y, x_-)$, такое что $f_1(y^*)f_1(x) = 1$. Так как согласно (4.16)

$$f_1(y) < f_1(0) - y\frac{f_1(0)-f_1(y^*)}{y^*} = f_1(y^*) + (y^*-y)\frac{f_1(0)-f_1(y^*)}{y^*} < f_1(y^*) + \frac{y*-y}{12},$$

по (4.14), (4.20) получаем, что

$$f_1(y)f_1(x)(x+y) < \left(f_1(y^*) + \frac{y^*-y}{12}\right) f_1(x)(x+y) <$$

$$< \left(1 + \frac{f_1(x)}{12}(y^*-y)\right)\bigl(1-(y^*-y)\bigr) = 1-\left(1 - \frac{f_1(x)}{12}\right)(y^*-y) - \frac{f_1(x)}{12}(y^*-y)^2 < 1.$$

Это завершает доказательство (4.8). □

5. Положительность J_1(ii)

Пусть $(a,b)\times(c,d)$ — открытый прямоугольник на плоскости. Обозначим через $J_1(\{(a,b)\times(c,d)\})$ часть суммы J_1, содержащую слагаемые $a_{k,m}$ с $(k,m)\in$ $\in (a,b)\times(b,c)$. Доказательство положительности $J_1(\{(4p,+\infty)\times(0,p)\})$ и $J_1(\{(0,p)\times(4p,+\infty)\})$ имеется в [11] и не является сложным. В этом разделе будет показано, что за счёт слагаемых из квадрата $J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})$, а также треугольников $J_1(\{(2p,2p),(3p,p),(3p,2p)\})$ и $J_1(\{(2p,2p),(p,3p),(2p,3p)\})$ компенсируются оставшиеся отрицательные слагаемые из J_1(ii).

Лемма 5.1. *Справедливы следующие неравенства*:

$$0{,}09\, J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\}) + \sum_{\alpha=2}^{+\infty} J_1\bigl(\bigl\{\bigl((2\alpha+1)p,(2\alpha+2)p\bigr)\times(p,2p)\bigr\}\bigr) > 0, \tag{5.1}$$

$$0{,}09\, J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\}) + \sum_{\alpha=2}^{+\infty} J_1\bigl(\bigl\{(p,2p)\times\bigl((2\alpha+1)p,(2\alpha+2)p\bigr)\bigr\}\bigr) > 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. По соображениям симметрии достаточно доказать только (5.1). Выполним в $J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})$ замену $k=p+px$, $m=py$, а в $J_1\bigl(\bigl\{\bigl((2\alpha+1)p,(2\alpha+2)p\bigr)\times(p,2p)\bigr\}\bigr)>0$ замену $k=(2\alpha+2)p+px$, $m=py$, $x\in(0,1)$, $y\in(1,2)$, и рассмотрим отношение слагаемых, соответствующих одинаковым значениям x и y:

$$F_\alpha(x,y) := \left|\frac{A\bigl((2\alpha+1)p+px\bigr)A(py)A\bigl((2\alpha+1)p+px+py\bigr)}{A(p+px)A(py)A(p+px+py)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\hat{D}(2\alpha+1+x)\hat{D}(2\alpha+1+x+y)}{\hat{D}(1+x)\hat{D}(1+x+y)}\right|\cdot e^{-Kt}, \tag{5.3}$$

где $K = 8\alpha(\alpha+1)p^2 + 4\alpha p^2(2x+y) > 0$ и

$$\hat{D}(x) = \frac{x}{(x^2-4)(x^2-16)}. \tag{5.4}$$

Так как $K>0$, достаточно оценить отношение (5.3) при $t=0$. В силу (5.4)

$$\left|\frac{\hat D(2\alpha+1+x)}{\hat D(1+x)}\right| = \frac{(2\alpha+1+x)\big((1+x)^2-4\big)\big((1+x)^2-16\big)}{\big((2\alpha+1+x)^2-4\big)\big((2\alpha+1+x)^2-16\big)(1+x)} =$$
$$= \frac{2\alpha+1+x}{2\alpha-1+x}\,\frac{3+x}{1+x}\,\frac{3-x}{2\alpha-3+x}\,\frac{(1-x)(5+x)}{(2\alpha+3+x)(2\alpha+5+x)}. \quad (5.5)$$

Очевидно, что все сомножители в правой части (5.5), кроме последнего, монотонно убывают. Докажем, что монотонно убывает и последний сомножитель

$$g(x):=\frac{(1-x)(5+x)}{(2\alpha+3+x)(2\alpha+5+x)}.$$

Действительно, при $x\in(0,1)$

$$g'(x)=g(x)\left[\frac{2\alpha}{(2\alpha+5+x)(5+x)}-\frac{2\alpha+4}{(2\alpha+3+x)(1-x)}\right]\geqslant$$
$$\geqslant -\frac{4\alpha g(x)(x^2+(2\alpha+6)x+4\alpha+11)}{(2\alpha+5+x)(2\alpha+3+x)(5+x)(1-x)}.$$

Так как корни квадратного трёхчлена в числителе из правой части неравенства отрицательны, то сам трёхчлен положителен при $x\in(0,1)$, и значит, $g'(x)<0$. Поэтому, положив в правой части (5.5) $x=0$, получим оценку

$$\left|\frac{\hat D(2\alpha+1+x)}{\hat D(1+x)}\right| < \frac{45(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)(2\alpha+3)(2\alpha-3)(2\alpha+5)}. \quad (5.6)$$

Аналогично (5.5) получим, что

$$\left|\frac{\hat D(2\alpha+1+z)}{\hat D(1+z)}\right| = \left[\frac{2\alpha+1+z}{2\alpha+3+z}\,\frac{5+z}{2\alpha+5+z}\,\frac{z-1}{1+z}\,\frac{3+z}{2\alpha-1+z}\right]\frac{3-z}{2\alpha-3+z}, \quad (5.7)$$

где $z=x+y$, $z\in(1,3)$.

Исследуем сначала функцию (5.7) при $\alpha=2$. Она имеет следующий вид:

$$f_1(z):=\frac{(5+z)^2}{(1+z)^2}\,\frac{z-1}{7+z}\,\frac{3-z}{9+z}. \quad (5.8)$$

На интервале $z\in(1;3)$ функция $f_1(z)$ положительная, на концах интервала обращается в ноль. Производная функции $f_1(z)$ равна

$$f_1'(z)=f_1(z)\left(\frac{2}{5+z}-\frac{2}{1+z}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3-z}-\frac{1}{7+z}-\frac{1}{9+z}\right)=f_1(z)g(z), \quad (5.9)$$

где последнее равенство является определением функции $g(z)$.

Вычислим производную функции $g(z)$:

$$g'(z)=g_1(z)+g_2(z),$$

где

$$g_1(z) = -\frac{2}{(5+z)^2} - \frac{1}{(z-1)^2}, \tag{5.10}$$

$$g_2(z) = \frac{2}{(1+z)^2} - \frac{1}{(3-z)^2} + \frac{1}{(7+z)^2} + \frac{1}{(9+z)^2}. \tag{5.11}$$

Очевидно, что $g_1(z)$ возрастает, а $g_2(z)$ убывает при $z \in (1,3)$, следовательно,

$$g'(z) < g_1(3) + g_2(1) < 0.$$

Таким образом, функция $g(z)$ монотонно убывает, принимая значения из $(-\infty, +\infty)$ и обращаясь в ноль ровно в одной точке. Следовательно, на интервале $(1,3)$ функция $f_1(z)$ имеет ровно одну точку экстремума, которая, очевидно, является точкой максимума.

Рассмотрим функцию $f_1(z)$ на интервале $(1{,}6; 1{,}8)$. Так как $0{,}275 < g(1{,}6) < 0{,}276$, а $-0{,}212 < g(1{,}8) < -0{,}211$, то максимум функции $f_1(z)$ принадлежит этому интервалу. При этом $g'(z) < g_1(1{,}8) + g_2(1{,}6) < -1{,}798$. Так как на интервале $(1{,}6; 1{,}8)$ имеет место оценка $0 \leqslant g^2(z) < 0{,}08$, то вторая производная функции $f_1(z)$, равная в силу (5.9)

$$f_1''(z) = f_1(z)\big(g^2(z) + g'(z)\big),$$

отрицательна, и $f_1(z)$ выпукла вверх на $(1{,}6; 1{,}8)$.

Рассмотрим касательные к графику функции $f_1(z)$ в точках $z = 1{,}6$ и $z = 1{,}8$. Их уравнения имеют вид $h_1(z) = f_1'(1{,}6)(z-1{,}6) + f_1(1{,}6)$ и $h_2(z) = f_1'(1{,}8)(z-1{,}8) + f_1(1{,}8)$ соответственно. График функции $f_1(z)$ лежит ниже точки пересечения этих касательных, следовательно,

$$f_1(z) < \frac{f_1'(1{,}6)\big(f_1(1{,}8) - 1{,}8\cdot f_1'(1{,}8)\big) - f_1'(1{,}8)\big(f_1(1{,}6) - 1{,}6\cdot f_1'(1{,}6)\big)}{f_1'(1{,}6) - f_1'(1{,}8)} < 0{,}061. \tag{5.12}$$

Аналогичным образом исследуем функцию (5.8) при $\alpha = 3$. Она имеет вид

$$f_2(z) := \frac{(7+z)(z-1)(3-z)}{(9+z)(1+z)(11+z)}. \tag{5.13}$$

На интервале $z \in (1;3)$ функция $f_2(z)$ положительная, на концах интервала обращается в ноль. Производная функции $f_2(z)$ равна

$$f_2'(z) = f_2(z)\left(\frac{1}{7+z} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3-z} - \frac{1}{9+z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{11+z}\right) = f_1(z)q(z), \tag{5.14}$$

где последнее равенство является определением функции $q(z)$.

Вычислим производную функции $q(z)$:

$$q'(z) = q_1(z) + q_2(z),$$

где

$$q_1(z) = -\frac{1}{(7+z)^2} - \frac{1}{(z-1)^2}, \tag{5.15}$$

$$q_2(z) = -\frac{1}{(3-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(9+z)^2} + \frac{1}{(11+z)^2}. \tag{5.16}$$

Очевидно, что $q_1(z)$ возрастает, а $q_2(z)$ убывает при $z \in (1,3)$, следовательно,

$$q'(z) < q_1(3) + q_2(1) < 0.$$

Таким образом, функция $q(z)$ монотонно убывает, принимая значения из $(-\infty; +\infty)$ и обращаясь в ноль ровно в одной точке. Следовательно, на интервале $(1,3)$ функция $f_2(z)$ имеет ровно одну точку экстремума, которая, очевидно, является точкой максимума.

Рассмотрим функцию $f_2(z)$ на интервале $(1{,}7; 1{,}9)$. Так как $0{,}231 < q(1{,}7) < 0{,}232$, а $-0{,}2 < q(1{,}9) < -0{,}19$, то максимум функции $f_2(z)$ принадлежит этому интервалу. При этом $q'(z) < q_1(1{,}9) + q_2(1{,}7) < -1{,}687$. Следовательно, вторая производная функции $f_2(z)$, равная в силу (5.14)

$$f_2''(z) = f_2(z)\big(q^2(z) + q'(z)\big),$$

отрицательна, и $f_2(z)$ выпукла вверх на $(1{,}7; 1{,}9)$.

Рассмотрим касательные к графику функции $f_2(z)$ в точках $z = 1{,}7$ и $z = 1{,}9$. Их уравнения имеют вид $h_1(z) = f_2'(1{,}7)(z-1{,}7) + f_2(1{,}7)$ и $h_2(z) = f_2'(1{,}9)(z-1{,}9) + f_2(1{,}9)$ соответственно. График функции $f_2(z)$ лежит ниже точки пересечения этих касательных, следовательно,

$$f_2(z) < \frac{f_2'(1{,}7)\big(f_2(1{,}9) - 1{,}9 \cdot f_2'(1{,}9)\big) - f_2'(1{,}9)\big(f_2(1{,}7) - 1{,}7 \cdot f_2'(1{,}7)\big)}{f_2'(1{,}7) - f_2'(1{,}9)} < 0{,}0221. \tag{5.17}$$

Из оценок (5.6), (5.12), (5.17) следует, что при $\alpha = 2$

$$F_\alpha(x,y) < 0{,}0714, \tag{5.18}$$

а при $\alpha = 3$

$$F_\alpha(x,y) < 0{,}005. \tag{5.19}$$

Очевидно, что в (5.8) каждый множитель, за исключением последнего, возрастает, а последний убывает. Поэтому, положив $z = 3$ в сомножителе в квадратных скобках из (5.8), и $z = 1$ в оставшемся сомножителе, получим оценку

$$\left|\frac{\hat{D}(2\alpha+1+z)}{\hat{D}(1+z)}\right| < \frac{6(\alpha+2)}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+4)}. \tag{5.20}$$

Следовательно,

$$F_\alpha(x,y) < \frac{270(\alpha+2)(2\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+4)(2\alpha-3)(2\alpha-1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)} := I(\alpha), \tag{5.21}$$

где последнее равенство является определением величины $I(\alpha)$.

Наша цель — оценить сверху сумму

$$\sum_{\alpha=2}^{\infty} I(\alpha) = I(4) + \sum_{\alpha=5}^{\infty} I(\alpha). \tag{5.22}$$

Легко убедиться, что

$$I(4) = \frac{243}{112112} < 0{,}00217 \tag{5.23}$$

и

$$\sum_{\alpha=5}^{\infty} I(\alpha) \leqslant 270 \sum_{\alpha=5}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2-1)(\alpha+4)(2\alpha-3)(2\alpha-1)(2\alpha+5)} \leqslant$$
$$\leqslant 270 \int\limits_{\alpha=4}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha^2-1)(\alpha+2{,}5)(2\alpha-3)(2\alpha-1)(2\alpha+4)}. \tag{5.24}$$

Заметим, что при $\alpha \geqslant 4$ справедливо неравенство

$$(\alpha^2-1)(\alpha+2{,}5) = \alpha^3 + 2{,}5\cdot\alpha^2 - \alpha - 2{,}5 \geqslant \alpha^3,$$

потому что оба корня квадратного трёхчлена $\alpha^3 + 2{,}5\alpha^2 - \alpha - 2{,}5$ меньше 4. Точно так же $(x-3)(x-1)(x+8) = x^3 + 4x^2 - 29x + 24 > x^3$ при $x \geqslant 8$, потому что оба корня трёхчлена $4x^2 - 29x + 24$ меньше 8. Поэтому правая часть неравенства (5.24) допускает оценку

$$\sum_{\alpha=5}^{\infty} I(\alpha) \leqslant 270 \int\limits_{\alpha=4}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha^2-1)(\alpha+4)(2\alpha-3)(2\alpha-1)(2\alpha+5)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{270}{8} \int\limits_{\alpha=4}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^6} = \frac{27}{4^6} \leqslant 0{,}007. \tag{5.25}$$

Из (5.23)—(5.25) следует оценка

$$\frac{\sum\limits_{\alpha=2}^{+\infty} J_1\big\{\big((2\alpha+1)p,(2\alpha+2)p\big)\times(p,2p)\big\}}{J_1\{(p,2p)\times(p,2p)\}} < 0{,}09, \tag{5.26}$$

завершающая доказательство леммы 5.1. □

Следующая лемма завершает данный раздел.

Лемма 5.2. *Справедливы следующие неравенства*:

$$0{,}22J_1(\{(2p,2p),(3p,2p),(3p,p)\}) \\ +\sum_{\alpha=2}^{+\infty} J_1\bigl(\bigl\{(2\alpha p,2p),\bigl((2\alpha+1)p,2p\bigr),\bigl((2\alpha+1)p,p\bigr)\bigr\}\bigr)>0, \tag{5.27}$$

$$0{,}22J_1(\{(2p,2p),(2p,3p),(p,3p)\}) \\ +\sum_{\alpha=2}^{+\infty} J_1\bigl(\bigl\{(2p,2\alpha p),\bigl((2p,2\alpha+1)p\bigr),(p,(2\alpha+1)p)\bigr\}\bigr)>0. \tag{5.28}$$

Доказательство. По соображениям симметрии достаточно доказать только (5.27). Сделаем в $J_1(\{(2p,2p),(3p,2p),(3p,p)\})$ замену переменных $k=3p-px$, $m=2p-py$, а в $J_1\bigl(\bigl\{(2\alpha p,2p),\bigl((2\alpha+1)p,2p\bigr),\bigl((2\alpha+1)p,p\bigr)\bigr\}\bigr)$ замену переменных $k=(2\alpha+1)p-px$, $m=2p-py$, $x,y\in(0,1)$, $x+y<1$, и рассмотрим отношение слагаемых, соответствующих одинаковым значениям x и y:

$$\left|\frac{A\bigl((2\alpha+1)p-px\bigr)A(2p-py)A\bigl((2\alpha+3)p-px-py\bigr)}{A(3p-px)A(2p-py)A(5p-px-py)}\right|= \\ =\left|\frac{\hat D(2\alpha+1-x)\hat D(2\alpha+3-x-y)}{\hat D(3-x)\hat D(5-x-y)}\right|\cdot e^{-Kt}, \tag{5.29}$$

где $\hat D(x)$ — функция (5.4), $K=4p^2(\alpha-1)(2\alpha+6-2x-y>0$ при $\alpha\geqslant 2$, $x,y\in(0,1)$. Достаточно оценить сверху величину (5.29) при $t=0$. Положим

$$F_1(x,\alpha):=\left|\frac{\hat D(2\alpha+1-x)}{\hat D(3-x)}\right|,\quad F_2(z,\alpha):=\left|\frac{\hat D(2\alpha+3-z)}{\hat D(5-z)}\right|. \tag{5.30}$$

В силу (5.4), (5.33)

$$F_1(x,\alpha)=\frac{2\alpha+1-x}{2\alpha-1-x}\,\frac{5-x}{2\alpha+3-x}\,\frac{7-x}{2\alpha-3-x}\,\frac{1-x}{2\alpha+5-x}\,\frac{1+x}{3-x},\quad x\in(0,1) \tag{5.31}$$

$$F_2(z,\alpha)=\frac{2\alpha+3-z}{2\alpha+5-z}\,\frac{3-z}{2\alpha-1-z}\,\frac{7-z}{2\alpha+1-z}\,\frac{1-z}{5-z}\,\frac{9-z}{2\alpha+7-x},\quad z\in(0,1). \tag{5.32}$$

При $\alpha=2$ функции (5.31)(5.32) принимают вид

$$F_1(x,2)=\frac{(5-x)^2(1+x)}{(3-x)^2(9-x)}, \tag{5.33}$$

$$F_2(z,2)=\frac{(7-z)^2(1-z)}{(5-z)^2(11-z)}. \tag{5.34}$$

Так как каждый множитель в (5.33) возрастает, то

$$F_1(x,2)<F_1(1,2)=1\quad\text{при}\quad x\in(0,1). \tag{5.35}$$

Далее,

$$F_2'(z,2) = \frac{7-z}{5-z}\,\frac{4}{(5-z)^2}\,\frac{1-z}{11-z} - \left(\frac{7-z}{5-z}\right)^2 \frac{10}{(11-z)^2} = \\ = -\frac{6F_2(z,2)(z^2-12z+51)}{(1-z)(5-z)(7-z)(11-z)}.$$

Так как дискриминант квадратного трёхчлена из числителя дроби в правой части этого равенства отрицателен, то $F_2(z,2)$ убывает, и с учётом (5.35) окончательно получим, что

$$F_1(x,2)F_2(z,2) < F_1(1,2)F_2(0,2) = \frac{49}{275} \quad \text{при} \quad x,z \in (0,1). \tag{5.36}$$

При $\alpha \geqslant 3$ каждый множитель в (5.32) монотонно убывает, поэтому

$$F_2(z,\alpha) < F_2(0,\alpha) = \frac{189(2\alpha+3)}{5(2\alpha-1)(2\alpha+1)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}. \tag{5.37}$$

Так как $1+x < 3-x$ при $x \in (0,1)$, то, заменяя скобку $(1+x)$ в числителе (5.31) на $(3-x)$, получим, что

$$F_1(x,\alpha) < \frac{(2\alpha+1-x)}{(2\alpha+3-x)}\,\frac{(5-x)}{(2\alpha-1-x)}\,\frac{(7-x)}{(2\alpha+5-x)}\,\frac{(1-x)}{(2\alpha-3-x)}. \tag{5.38}$$

Каждый множитель в правой части (5.38) монотонно убывает, поэтому

$$F_1(x,\alpha) < \frac{35(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)(2\alpha+3)(2\alpha-3)(2\alpha+5)}. \tag{5.39}$$

Таким образом, из (5.37) и (5.39) следует оценка

$$F_1(x,\alpha)F_2(z,\alpha) < \frac{1323}{(2\alpha-1)^2(2\alpha+5)^2(2\alpha+7)(2\alpha-3)} := \hat{I}(\alpha), \tag{5.40}$$

причём последнее равенство в (5.40) является определением величины $\hat{I}(\alpha)$ при $\alpha \geqslant 3$. В соответствии с (5.36) положим $\hat{I}(2) = 49/275$.

Аналогично (5.23) и (5.24) согласно (5.36), (5.40) получим, что

$$\hat{I}(2) = \frac{49}{275} < 0{,}18, \quad \hat{I}(3) = \frac{7}{605} < 0{,}012 \tag{5.41}$$

и

$$\sum_{\alpha=4}^{\infty} I(\alpha) \leqslant \int_3^{\infty} \hat{I}(\alpha)\,d\alpha = \frac{1323}{2}\int_6^{\infty} \frac{dx}{(x-1^2)(x+5)^2(x+7)(x-3)}. \tag{5.42}$$

Так как при $x \geqslant 6$ справедливы неравенства $(x-1)(x+5) = x^2+4x-5 > x^2$ и $(x+7)(x-3) > x^2$, то

$$\frac{1323}{2}\int_6^{\infty} \frac{dx}{(x-1^2)(x+5)^2(x+7)(x-3)} < \frac{1323}{2}\int_6^{\infty} \frac{dx}{x^6} = \frac{161}{8640} < 0{,}019. \tag{5.43}$$

Из соотношений (5.41)—(5.43) следует оценка

$$\frac{\sum\limits_{\alpha=2}^{\infty} J_1\big(\big\{(2\alpha p, 2p), \big((2\alpha+1)p, 2p\big), \big((2\alpha+1)p, p\big)\big\}\big)}{J_1(\{(2p,2p),(3p,2p),(3p,p)\})} < 0{,}211, \tag{5.44}$$

которая завершает доказательство леммы 5.2. □

6. Положительность суммы J_1(iii)

В этом разделе мы докажем положительность части суммы J_1 из области iii) и некоторой окрестности.

6.1. Положительность основной части J_1(iii)

Установим положительность части суммы J_1(iii) без слагаемых, соответствующих

$$k, n \in \{(4p,4p),(4p,2p),(6p,2p)\} \cup \{(4p,4p),(2p,4p),(2p,6p)\}.$$

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant \alpha \leqslant 100$. Тогда справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} J_1(\{(2p\alpha,4p),(2p(\alpha+1),4p),(2p(\alpha+1),2p)\}) \\ + J_1(\{(2p(\alpha+1),2p),(2p(\alpha+2),2p),(2p(\alpha+1),4p)\}) > 0, \end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} J_1\big(\big\{(4p,2p\alpha),\big(4p,2p(\alpha+1)\big),\big(2p,2p(\alpha+1)\big)\big\}\big) \\ + J_1\big(\big\{\big(2p,2p(\alpha+1)\big),\big(2p,2p(\alpha+2)\big),\big(4p,2p(\alpha+1)\big)\big\}\big) > 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Доказательство. Так как при замене в сумме из (6.1) переменных суммирования $(k,m) \to (m,k)$ эта сумма переходит в сумму из (6.2), достаточно доказать только неравенство (6.1).

По лемме 3.2 слагаемые в $J_1(\{(2p\alpha,4p),(2p(\alpha+1),4p),(2p(\alpha+1),2p)\})$ положительны, а слагаемые в $J_1(\{(2p(\alpha+1),2p),(2p(\alpha+2),2p),(2p(\alpha+1),4p)\})$ отрицательны. Как и при доказательстве лемм 4.2 и 4.3, рассмотрим отношение абсолютных значений отрицательных слагаемых к значениям положительных и покажем, что это отношение не превосходит единицы.

Выполним в сумме

$$J_1(\{(2p\alpha,4p),(2p(\alpha+1),4p),(2p(\alpha+1),2p)\})$$

замену переменных $k = 2(\alpha+1)p - l$, $m = 4p - q$, а в

$$J_1(\{(2p(\alpha+1),2p),(2p(\alpha+2),2p),(2p(\alpha+1),4p)\})$$

замену переменных $k + m = 2(\alpha+3)p - l$, $m = 2p + q$, причём в обеих суммах новые переменные изменяются в пределах

$$0 < l < 2p, \quad 0 < q < 2p, \quad l + q < 2p.$$

Рассмотрев отношение слагаемых, соответствующих одинаковым значениям l и q, получим, учитывая (4.4), что

$$\left|\frac{A(2(\alpha+2)p-l-q)A(2p+q)A(2(\alpha+3)p-l)}{A(2(\alpha+1)p-l)A(4p-q)A(2(\alpha+3)p-l-q)}\right| = \\ = \left|\frac{D(2(\alpha+2)p-l-q)D(2p+q)D(2(\alpha+3)p-l)}{D(2(\alpha+1)p-l)D(4p-q)D(2(\alpha+3)p-l-q)}\right| \cdot e^{-Kt}, \quad (6.3)$$

где коэффициент K в показателе экспоненты равен

$$K = (2(\alpha+2)p-l-q)^2 - (2(\alpha+3)p-l-q)^2 + (2p+q)^2 - (4p-q)^2 + \\ + (2(\alpha+3)p-l)^2 - (2(\alpha+1)p-l)^2 = 4p(2\alpha p - l + 4q) > 0.$$

Поэтому для доказательства леммы 6.1 достаточно показать, что правая часть равенства (6.3) меньше единицы при $t=0$.

Перейдя в этом соотношении от переменных l, q к переменным x, y по формулам $l = 2px$, $q = 2py$, получим согласно (4.1), (4.10) равенство

$$\left|\frac{\tilde{D}(\alpha+2-x-y)\tilde{D}(1+y)\tilde{D}(\alpha+3-x)}{\tilde{D}(\alpha+1-x)\tilde{D}(2-y)\tilde{D}(\alpha+3-x-y)}\right| = f_1(x)f_2(y)f_3(x+y), \quad (6.4)$$

где $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < x+y < 1$ и

$$f_1(x) = \frac{\tilde{D}(\alpha+3-x)}{\tilde{D}(\alpha+1-x)}, \quad f_2(y) = \frac{\tilde{D}(1+y)}{\tilde{D}(2-y)}, \quad f_3(x+y) = \frac{\tilde{D}(\alpha+2-x-y)}{\tilde{D}(\alpha+3-x-y)}. \quad (6.5)$$

Оценим сверху каждую из этих функций. В силу (4.10)

$$f_1(x) = \frac{(\alpha+3-x)\big((\alpha+1-x)^2-4\big)\big((\alpha+1-x)^2-1\big)}{\big((\alpha+3-x)^2-4\big)\big((\alpha+3-x)^2-1\big)(\alpha+1-x)} = \\ = \frac{\alpha+3-x}{\alpha+5-x}\,\frac{\alpha+3-x}{\alpha+4-x}\,\frac{\alpha-x}{\alpha+1-x}\,\frac{\alpha-1-x}{\alpha+1-x}. \quad (6.6)$$

Каждый из сомножителей правой части последнего из равенств — убывающая функция, и поэтому

$$\max_{0<x<1} f_1(x) = f_1(0) = \frac{(\alpha+3)^2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+5)(\alpha+4)} < 1 \quad \forall\,\alpha \geqslant 2. \quad (6.7)$$

Далее,

$$f_3(z) = \frac{(\alpha+2-z)\big((\alpha+3-z)^2-4\big)\big((\alpha+3-z)^2-1\big)}{\big((\alpha+2-z)^2-4\big)\big((\alpha+2-z)^2-1\big)(\alpha+3-z)} = \\ = \left(\frac{\alpha+2-z}{\alpha+3-z}\right)^2 \frac{\alpha+5-z}{\alpha-z} \quad (6.8)$$

и

$$f_3'(z) = f_3(z)\left[\frac{-2}{(\alpha+3-z)(\alpha+2-z)} + \frac{5}{(\alpha-z)(\alpha+5-z)}\right] = \\ = \frac{3f_3(z)(z^2-(2\alpha+5)z+\alpha^2+5\alpha+10)}{(\alpha+3-z)(\alpha+2-z)(\alpha-z)(\alpha+5-z)}. \quad (6.9)$$

Так как дискриминант квадратного трёхчлена в числителе правой части последнего из равенств отрицателен, функция $f_3(z)$ является возрастающей, и поэтому

$$\max_{0<z<1} f_3(z) = f_3(1) = \frac{(\alpha+1)^2(\alpha+4)}{(\alpha+2)^2(\alpha-1)}. \quad (6.10)$$

Наконец,

$$f_2(y) = \frac{(1+y)\big(4-(2-y)^2\big)\big((2-y)^2-1\big)}{\big(4-(1+y)^2\big)\big((1+y)^2-1\big)(2-y)} = \frac{1+y}{2-y}\,\frac{3-y}{2+y}\,\frac{4-y}{3+y}. \quad (6.11)$$

Чтобы оценить функцию $f_2(y)$, представим её в виде

$$f_2(y) = 1 + \frac{2y^3-3y^2+y}{12+4y-3y^2-y^3}. \quad (6.12)$$

На интервале $y \in (0,1)$ числитель дроби в (6.12) достигает максимума в точке $y = (3-\sqrt{3})/6$. Так как корнями кубического многочлена $h(y) = 12+4y-3y^2-y^3$ из знаменателя дроби являются числа 2, -2, -3, то на интервале $(0,1)$ у $h(y)$ имеется единственный экстремум, являющийся максимумом, а из равенства $h(0) = h(1) = 12$ следует, что минимум h на отрезке $[0,1]$ достигается в его концах. Поэтому верна оценка

$$f_2(y) < 1 + \frac{1}{12}\left(2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3 - 3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) < 1{,}017. \quad (6.13)$$

Из (6.7), (6.10), (6.13) следует, что

$$\max_{0<x<1,\ 0<y<1} f_1(x)f_2(y)f_3(x+y) < \\ < f_1(0)f_3(1)\cdot 1{,}017 = 1{,}021\cdot\frac{(\alpha+3)^2\alpha}{(\alpha+2)^2(\alpha+5)} := 1{,}017\cdot g(\alpha), \quad (6.14)$$

где последнее равенство является определением функции $g(\alpha)$. Очевидно,

$$g'(\alpha) = g(\alpha)\left[\frac{-2}{(\alpha+3)(\alpha+2)} + \frac{5}{\alpha(\alpha+5)}\right] = \\ = \frac{3g(\alpha)(\alpha^2+5\alpha+6)}{\alpha(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+5)} > 0, \quad \alpha > 0,$$

и значит, $g(\alpha) \leqslant g(100)$ при $2 \leqslant \alpha \leqslant 100$. Следовательно,

$$\max_{0<x<1,\ 0<y<1} f_1(x)f_2(y)f_3(x+y) < 1, \tag{6.15}$$

и лемма 6.1 доказана. □

Следующая лемма завершает доказательство положительности рассматриваемой части суммы $J_1(\mathrm{iii})$.

Лемма 6.2. *Верно неравенство*

$$\sum_{m=2p+1}^{4p-1}\left(B(p)B(m)B(p+m) + \sum_{k=200p+1}^{+\infty} A(k)A(m)A(k+m)\right) > 0. \tag{6.16}$$

Доказательство. Для доказательства (6.16) достаточно показать, что при каждом $m \in [2p+1; 4p-1]$ верно неравенство

$$B(p)B(p+m) > -\sum_{k=200p+1}^{+\infty} A(k)A(k+m). \tag{6.17}$$

Оценим сперва сумму из правой части неравенства (6.17). Согласно определению функции $A(k)$ и лемме 4.1

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=200p+1}^{\infty} A(k)A(k+m)\right| &\leqslant \sum_{k=200p+1}^{\infty} D(k)D(k+m) < \\ &< \sum_{k=200p+1}^{\infty} D^2(k) = \sum_{k=200p+1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2-4p^2)(k^2-16p^2)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=200p+1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{1}{p^6}\sum_{px=200p+1}^{\infty}\frac{1}{x^6} \leqslant \frac{1}{p^6}\int_{200}^{+\infty}\frac{dx}{x^6} = \frac{1}{5\cdot(200)^5p^6}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Рассмотрим функцию

$$B(k) = \frac{\sin\frac{\pi k}{2p}}{k-4p}\cdot \hat{B}(k),$$

где

$$\hat{B}(k) = \frac{k}{(k-2p)(k+2p)(k+4p)}.$$

Так как $\sin x > (2/\pi)x$ при $x \in (0,\pi/2)$ и $-\sin x > -(2/\pi)x$ при $x \in (-\pi/2, 0)$, то

$$\frac{\sin\frac{\pi k}{2p}}{k-4p} = \frac{\sin\frac{\pi q}{2p}}{q} > 1, \quad \text{где} \quad k = 4p+q, \quad q \in (-p,p).$$

Следовательно, при $m \in (2p, 4p)$

$$B(p+m) = \hat{B}(p+m).$$

Так как функция $\hat{B}(p+m)$ монотонно убывает при $p+m>2p$, то верна оценка

$$B(p)B(p+m)\geqslant B(p)\hat{B}(5p)=\frac{1}{9\cdot 189p^6}. \qquad (6.19)$$

Соотношения (6.18) и (6.19) завершают доказательство (6.16). □

6.2. Положительность $J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})+J_1(\{(4p,5p)\times\times(2p,3p)\})+J_1(\{(2p,3p)\times(4p,5p)\})$

В разделе 5 в лемме 5.1 было использовано только $0{,}18\cdot J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})$. В этом разделе мы покажем, что за счёт суммы $J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})$ компенсируются и отрицательные слагаемые из $J_1(\{(4p,5p)\times(2p,3p)\})$ и $J_1(\{(2p,3p)\times(4p,5p)\})$.

Лемма 6.3. *Верны следующие оценки*:

$$0{,}28\cdot J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})+J_1(\{(4p,5p)\times(2p,3p)\})>0, \qquad (6.20)$$

$$0{,}28\cdot J_1(\{(p,2p)\times(p,2p)\})+J_1(\{(2p,3p)\times(4p,5p)\})>0. \qquad (6.21)$$

Доказательство. Так как неравенство (6.21) получается из (6.20) простой заменой $(k,m)\to(m,k)$, достаточно доказать только (6.20). Выполним в $J_1\{(p,2p)\times(p,2p)\}$ замену переменных $k=2p-px$, $m=2p-py$, а в $J_1\{(4p,5p)\times(2p,4p)\}$ замену переменных $k=4p+px$, $m=2p+py$, $x,y\in(0,1)$, и рассмотрим отношение слагаемых, соответствующих одинаковым значениям x и y:

$$\left|\frac{A(4p+px)A(2p+py)A(6p+px+py)}{A(2p-px)A(2p-py)A(4p-px-py)}\right|=\\
=\frac{\hat{D}(4+x)\hat{D}(2+y)\hat{D}(6+x+y)}{\hat{D}(2-x)\hat{D}(2-y)\hat{D}(4-x-y)}\cdot e^{-Kt}, \qquad (6.22)$$

где $K=8p^2(8+8x+7y)>0$, а $\hat{D}(x)$ определена в (5.4).

Оценим (6.22) снизу при $t=0$. При $t=0$ дробь (6.22) принимает вид

$$F(x,y):=\frac{\hat{D}(4+x)}{\hat{D}(2-x)}\,\frac{\hat{D}(2+y)}{\hat{D}(2-y)}\,\frac{\hat{D}(6+x+y)}{\hat{D}(4-x-y)}=f_1(x)f_2(y)f_3(x+y), \qquad (6.23)$$

где ввиду (5.4)

$$f_1(x)=\frac{\hat{D}(4+x)}{\hat{D}(2-x)}=\frac{(4+x)\big((2-x)^2-4\big)\big((2-x)^2-16\big)}{\big((4+x)^2-4\big)\big((4+x)^2-16\big)(2-x)}=\\
=\frac{4+x}{6+x}\frac{6-x}{8+x}\frac{4-x}{2-x}, \qquad (6.24)$$

$$f_2(y)=\frac{\hat{D}(2+y)}{\hat{D}(2-y)}=\frac{(2+y)\big((2-y)^2-4\big)\big((2-y)^2-16\big)}{\big((2+y)^2-4\big)\big((2+y)^2-16\big)(2-y)}=\\
=\left(\frac{2+y}{2-y}\right)^2\frac{4-y}{4+y}\frac{6-y}{6+y}, \qquad (6.25)$$

$$f_3(z) = \frac{\hat{D}(6+z)}{\hat{D}(4-z)} = \frac{(6+z)\big((4-z)^2-4\big)\big((4-z)^2-16\big)}{\big((6+z)^2-4\big)\big((6+z)^2-16\big)(4-z)} =$$
$$= \frac{z(2-z)(6-z)(6+z)(8-z)}{(2+z)(4-z)(4+z)(8+z)(10+z)}, \quad z \in (0,2). \tag{6.26}$$

Оценим каждую из функций (6.24)—(6.26).

Вычислим производную функции (6.24):

$$f_1'(x) = 2f_1(x)\left(\frac{32+4x+2x^2}{(4+x)(6+x)(4-x)(2-x)} - \frac{7}{(6-x)(8+x)}\right) =$$
$$= f_1(x)\big(h_1(x) - h_2(x)\big),$$

где последнее равенство является определением функций $h_1(x)$, $h_2(x)$. Числитель $h_1(x)$ возрастает при $x \in (0,1)$, а знаменатель, равный $(16-x^2)(12-4x-x^2)$, убывает, следовательно, $h_1(x)$ возрастает при $x \in (0,1)$. Знаменатель $h_2(x)$ равен $48-2x-x^2$ и убывает на $x \in (0,1)$, значит, сама функция $h_2(x)$ возрастает. Таким образом,

$$f_1'(x) > 2f_1(x)\big(h_1(0) - h_2(1)\big) = \frac{1}{90} > 0,$$

и функция $f_1(x)$ монотонно возрастает при $x \in (0,1)$.

Далее вычислим производную функции $f_2(y)$:

$$f_2'(y) = 4f_2(y)\left(\frac{2}{4-y^2} - \frac{2}{16-y^2} - \frac{3}{36-y^2}\right) =$$
$$= 12f_2(y)\frac{244+12y^2-y^4}{(4-y^2)(16-y^2)(36-y^2)} > 0.$$

Из возрастания функций $f_1(x)$ и $f_2(y)$ следует оценка

$$f_1(x)f_2(y) < f_1(1)f_2(1) = \frac{25}{21}\,\frac{27}{7} = \frac{225}{49}. \tag{6.27}$$

Рассмотрим функцию $f_3(z)$ на интервале $(0,2)$. В концах интервала $f_3(z)$ обращается в ноль, внутри интервала принимает положительные значения. Её производная равна

$$f_3'(z) = f_3(z)\left(-\frac{1}{2-z} + \frac{1}{6+z} - \frac{1}{8-z} - \frac{1}{6-z} + \frac{1}{z} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4+z} + \frac{1}{4-z} - \frac{1}{8+z} - \frac{1}{10+z} - \frac{1}{2+z}\right) =: f_3(z)g(z), \tag{6.28}$$

где последнее равенство является определением функции $g(z)$.

Производная функции $g(z)$ равна

$$g'(z) = g_1(z) + g_2(z),$$

где

$$g_1(z) = \left(-\frac{1}{(2-z)^2} - \frac{1}{(6-z)^2} - \frac{1}{(8-z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \frac{1}{(4+z)^2} + \frac{1}{(8+z)^2}\right),$$

$$g_2(z) = \left(-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(6+z)^2} + \frac{1}{(4-z)^2} + \frac{1}{(10+z)^2}\right).$$

Очевидно, что функция $g_1(z)$ убывает, а функция $g_2(z)$ возрастает, следовательно,

$$g'(z) < g_1(0) + g_2(1) < -0{,}864, \quad z \in (0,1], \tag{6.29}$$

$$g'(z) < g_1(1) + g_2(2) < -0{,}944, \quad z \in (1,2). \tag{6.30}$$

Таким образом, $g'(z) < -0{,}864$, $z \in (0,2)$, следовательно, функция $g(z)$ убывает при $z \in (0,2)$, пробегая значения $(-\infty; +\infty)$, и обращается в ноль ровно в одной точке. Таким образом, на интервале $(0,2)$ у функции $f_3(z)$ есть ровно одна точка максимума.

В силу монотонности $g(z)$, так как $0{,}622 < g(1/2) < 0{,}623$, а $-0{,}603 < g(1) < -0{,}602$, то $f_3(z)$ возрастает на $(0,1/2)$ и убывает на $(1,2)$.

Рассмотрим функцию $f_3(z)$ на $(1/2;1)$. На этом интервале $0 \leqslant g^2(z) < 0{,}389$, следовательно, ввиду оценок (6.29)(6.30) вторая производная $f_3(z)$, равная согласно (6.28)

$$f_3''(z) = f_3(z)\big(g^2(z) + g'(z)\big),$$

отрицательна. Значит, $f_3(z)$ выпукла вверх и её график целиком лежит ниже касательной в каждой точке $z \in (1/2, 1)$.

Рассмотрим касательную, проведённую к графику $f_3(z)$ в точке $z = 0{,}7$. Её уравнение имеет вид $h(z) = f_3'(0{,}7)(z - 0{,}7) + f_3(0{,}7)$, при этом $f_3'(0{,}7) < -3{,}37 \cdot 10^{-4}$. Таким образом,

$$f_3(z) \leqslant h(z) < h(0{,}5) < 0{,}0606. \tag{6.31}$$

Из (6.27) и (6.31) следует оценка

$$F(x,y) < \frac{225}{49} \cdot 0{,}0606 < 0{,}28,$$

завершающая доказательство (6.20). □

6.3. Положительность $J_1(\{(5p,2p),(6p,2p),(5p,3p)\}) + J_1(\{(3p,2p),(2p,2p),(3p,p)\})$ и $J_1(\{(2p,5p),(2p,6p),(3p,5p)\}) + J_1(\{(2p,3p),(2p,2p),(p,3p)\})$

В этом разделе мы покажем, что остаток сумм $J_1(\{(3p,2p),(2p,2p),(3p,p)\})$ и $J_1(\{(2p,3p),(2p,2p),(p,3p)\})$, рассмотренных в лемме5.2, компенсирует отрицательные слагаемые из $J_1(\{(5p,2p),(6p,2p),(5p,3p)\})$ и $J_1(\{(2p,5p),(2p,6p),(3p,5p)\})$ соответственно.

Лемма 6.4. *Верны следующие неравенства*:

$$\frac{7}{33}J_1(\{(3p,2p),(2p,2p),(3p,p)\}) + J_1(\{(5p,2p),(6p,2p),(5p,3p)\}) > 0, \tag{6.32}$$

$$\frac{7}{33}J_1(\{(2p,3p),(2p,2p),(p,3p)\}) + J_1(\{(2p,5p),(2p,6p),(3p,5p)\}) > 0. \tag{6.33}$$

Доказательство. Ввиду симметрии достаточно доказать только неравенство (6.32).

Выполним в $J_1(\{(3p,2p),(2p,2p),(3p,p)\})$ замену переменных $k = 3p - px$, $m = 2p - py$, а в $J_1(\{(5p,2p),(6p,2p),(5p,3p)\})$ замену переменных $k = 5p + px$, $m = 2p + py$, $x, y \in (0,1)$, $x + y < 1$, и рассмотрим отношение слагаемых с одинаковыми значениями x и y:

$$\left|\frac{A(5p+px)A(2p+py)A(7p+px+py)}{A(3p-px)A(2p-py)A(5p-px-py)}\right| = \\ = \left|\frac{\hat{D}(5+x)\hat{D}(2+y)\hat{D}(7+x+y)}{\hat{D}(3-x)\hat{D}(2-y)\hat{D}(5-x-y)}\right| \cdot e^{-Kt}, \tag{6.34}$$

где $K = 8p^2(5 + 5x + 4y) > 0$ при $x, y \in (0,1)$, а функция $\hat{D}(x)$ определена в (5.4).

При $t = 0$ правая часть (6.34) принимает вид

$$F(x,y) := f_1(x)f_2(y)f_3(x+y), \tag{6.35}$$

где согласно (5.4)

$$f_1(x) = \frac{\hat{D}(5+x)}{\hat{D}(3-x)} = \frac{(5+x)\big((3-x)^2-4\big)(16-(3-x)^2)}{\big((5+x)^2-4\big)\big((5+x)^2-16\big)(3-x)} = \\ = \frac{5+x}{3+x}\,\frac{1-x}{3-x}\,\frac{5-x}{7+x}\,\frac{7-x}{9+x}, \tag{6.36}$$

$$f_2(x) = \frac{\hat{D}(2+y)}{\hat{D}(2-y)} = \frac{(2+y)(4-(2-y)^2)(16-(2-y)^2)}{\big((2+y)^2-4\big)(16-(2+y)^2)(2-y)} = \\ = \frac{2+y}{4+y}\,\frac{2+y}{6+y}\,\frac{4-y}{2-y}\,\frac{6-y}{2-y}, \tag{6.37}$$

$$f_3(z) = \frac{\hat{D}(7+z)}{\hat{D}(5-z)} = \frac{(7+z)\big((5-z)^2-4\big)\big((5-z)^2-16\big)}{\big((7+z)^2-4\big)\big((7+z)^2-16\big)(5-z)} = \\ = \frac{7+z}{5+z}\,\frac{3-z}{9+z}\,\frac{7-z}{3+z}\,\frac{1-z}{5-z}\,\frac{9-z}{11+z}. \tag{6.38}$$

Так как каждый сомножитель $f_1(x)$ и $f_3(z)$ убывает, а каждый сомножитель $f_2(y)$ возрастает, то

$$F(x,y) < f_1(0)f_2(1)f_3(0) = \frac{7}{33}. \tag{6.39}$$

Оценка (6.39) завершает доказательство леммы 6.32. □

6.4. Положительность $J_1(\{(2p,p),(2p,2p),(3p,p)\}) + J_1(\{(4p,3p),(4p,4p),(5p,3p)\})$ и $J_1(\{(p,2p),(2p,2p),(p,3p)\}) + J_1(\{(3p,4p),(4p,4p),(3p,5p)\})$

Данный раздел завершает доказательство положительности суммы J_1 в области iii) и её окрестности. Покажем, что суммы $J_1(\{(2p,p),(2p,2p),(3p,p)\})$ и $J_1(\{(p,2p),(2p,2p),(p,3p)\})$ компенсируют отрицательные слагаемые из $J_1(\{(4p,3p),(4p,4p),(5p,3p)\})$ и из $J_1(\{(3p,4p),(4p,4p),(3p,5p)\})$ соответственно.

Лемма 6.5. *Имеют место следующие неравенства*:

$$\frac{7}{33}J_1(\{(2p,p),(2p,2p),(3p,p)\}) + J_1(\{(4p,3p),(4p,4p),(5p,3p)\}) > 0, \tag{6.40}$$

$$\frac{7}{33}J_1(\{(p,2p),(2p,2p),(p,3p)\}) + J_1(\{(3p,4p),(4p,4p),(3p,5p)\}) > 0. \tag{6.41}$$

Доказательство. Ввиду симметрии достаточно доказать только неравенство (6.40).

Выполним в $J_1\{(2p,p),(2p,2p),(3p,p)\}$ замену переменных $k = 2p + px$, $m = p + py$, а в $J_1\{(4p,3p),(4p,4p),(5p,3p)\}$ замену переменных $k = 4p + px$, $m = 3p + py$, $x, y \in (0,1)$, $x + y < 1$, и рассмотрим отношение слагаемых с одинаковыми значениями x и y:

$$\left|\frac{A(4p+px)A(3p+py)A(7p+px+py)}{A(2p+px)A(p+py)A(3p+px+py)}\right| = \\ = \left|\frac{\hat D(4+x)\hat D(3+y)\hat D(7+x+y)}{\hat D(2+x)\hat D(1+y)\hat D(3+x+y)}\right| \cdot e^{-Kt}, \tag{6.42}$$

где $K = 12p^2(5+x+y) > 0$ при $x, y \in (0,1)$, а функция $\hat D(x)$ определена в (5.4).

При $t = 0$ правая часть (6.34) принимает вид

$$F(x,y) := f_1(y)f_2(y)f_3(x+y), \tag{6.43}$$

где согласно (5.4)

$$f_1(x) = \frac{\hat D(4+x)}{\hat D(2+x)} = \frac{(4+x)\big((2+x)^2-4\big)(16-(2+x)^2)}{\big((4+x)^2-4\big)\big((4+x)^2-16\big)(2+x)} = \frac{(4+x)^2}{(2+x)^2}\,\frac{2-x}{x+8}, \tag{6.44}$$

$$f_2(x) = \frac{\hat D(3+y)}{\hat D(1+y)} = \frac{(3+y)(4-(1+y)^2)(16-(1+y)^2)}{\big((3+y)^2-4\big)(16-(3+y)^2)(1+y)} = \frac{(3+y)^2}{(1+y)^2}\,\frac{(3-y)}{(7+y)}, \tag{6.45}$$

$$f_3(z) = \frac{\hat D(7+z)}{\hat D(3+z)} = \frac{(7+z)\big((3+z)^2-4\big)(16-(3+z)^2)}{\big((7+z)^2-4\big)\big((7+z)^2-16\big)(3+z)} = \\ = \frac{(7+z)^2}{(3+z)^2}\,\frac{1-z^2}{(9+z)(11+z)}. \tag{6.46}$$

Так как каждый сомножитель $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(z)$ убывает, то

$$F(x,y) < f_1(0)f_2(0)f_3(0) = \frac{7}{33}. \qquad \square$$

Литература

[1] Фурсиков А. В., Эмануилов Ю. С. Точная управляемость уравнений Навье—Стокса и Буссинеска // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, вып. 3 (227). — С. 93—146.

[2] Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3. — С. 1032—1066.

[3] Barbu V., Lasiecka I., Triggiani R. Abstract setting of tangential boundary stabilization of Navier—Stokes equations by high-and low-gain feedback controllers // Nonlinear Analysis. — 2006. — Vol. 64, no. 12. — P. 2704—2746.

[4] Coron J. M. On null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domains // SIAM J. Control Optim. — 1999. — Vol. 37, no. 6. — P. 1874—1896.

[5] Coron J. M. Control and Nonlinearity. — (Math. Surv. Monographs; Vol. 136). — Providence: Amer. Math. Soc., 2007.

[6] Fursikov A. V. Stabilization for the 3D Navier-Stokes system by feedback boundary control // Discrete Contin. Dynam. Syst. — 2004. — Vol. 10, no. 1-2. — P. 289—314.

[7] Fursikov A. V. The simplest semilinear parabolic equation of normal type // Math. Control Related Fields. — 2012. — Vol. 2, no. 2. — P. 141—170.

[8] Fursikov A. V. On the normal semilinear parabolic equations corresponding to 3D Navier—Stokes system // System Modeling and Optimization: 25th IFIP TC 7 Conf., CSMO 2011, Berlin, Germany, September 12—16, 2011, Revised Selected Papers / D. Hömberg, F. Tröltzsch, eds. — Berlin: Springer, 2013. — (IFIP Adv. Inform. Commun. Tech.; Vol. 391). — P. 338—347.

[9] Fursikov A. V. On one semilinear parabolic equation of normal type // Mathematics and Life Sciences. — (De Gruyter Ser. Math. Life Sci.; Vol. 1). — Berlin: De Gruyter, 2013. — P. 147—160.

[10] Fursikov A. V. On parabolic system of normal type corresponding to 3D Helmholtz system // Amer. Math. Soc. Transl. — 2014. — Vol. 232. — P. 99—118.

[11] Fursikov A. V. Stabilization of the simplest normal parabolic equation // Commun. Pure Appl. Analysis. — 2014. — Vol. 13, no. 5. — P. 1815—1854.

[12] Fursikov A. V., Gorshkov A. V. Certain questions of feedback stabilization for Navier—Stokes equations // Evolution Equations Control Theory. — 2012. — Vol. 1, no. 1. — P. 109—140.

[13] Fursikov A. V., Kornev A. A. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: theory and calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. — LMS Lect. Notes Ser.; Vol. 402. — P. 130—172

[14] Krstic M. On global stabilization of Burgers' equation by boundary control // Systems Control Lett. — 1999. — Vol. 37. — P. 123—141.

[15] Raymond J.-P. Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier—Stokes equations // J. Math. Pures Appl. — 2007. — Vol. 87, no. 6. — P. 627—669.

[16] Tucsnk M., Weiss G. Observation and Control for Operator Semigroups. — Berlin: Birkhäuser, 2009.