Обратные функции и принципы существования

Я. БРИНКХЕЙС

Университет им. Эразма Роттердамского, Нидерланды

e-mail: brinkhuis@ese.eur.nl

УДК 517.51

Ключевые слова: задачи с ограничениями, нелинейное программирование, образование, сравнительный статический анализ, теорема об обратной функции, принцип Эккланда, теорема Минти—Браудера.

Аннотация

В работе доказывается, что каждый из шести общих принципов существования (принцип компактности (теорема Вейерштрасса), принцип полноты (метод Ньютона или модифицированный метод Ньютона), топологический принцип (теорема Брауэра о неподвижной точке), гомотопический принцип (о стягивании сферы к её центру), вариационный принцип (принцип Эккланда) и принцип монотонности (теорема Минти—Браудера)) приводит к теореме об обратной функции, что даёт новое понимание известных результатов. Утверждения отличаются начальными предположениями и алгоритмическими свойствами, причём некоторые из них были построены специально для данной работы. Приводятся простые доказательства последних двух принципов. Дано короткое и самодостаточное доказательство правила множителей Лагранжа, основанное только на оптимизационных методах. Приведённые доказательства представляют самостоятельный интерес, а также могут быть полезны для получения новых методов, основанных на теореме об обратной функции, например методов сравнительной статики в экономике.

Abstract

J. Brinkhuis, Inverse functions and existence principles, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 35–47.

Each one of six general existence principles (of compactness (the extreme value theorem), completeness (the Newton method or the modified Newton method), topology (Brouwer's fixed point theorem), homotopy (on contractions of a sphere to its center), variational analysis (Ekeland's principle), and monotonicity (the Minty—Browder theorem)) is shown to lead to the inverse function theorem, each one giving some novel insight. There are differences in assumptions and algorithmic properties; some of the propositions have been constructed specially for this paper. Simple proofs of the last two principles are included. The proof by compactness is shorter and simpler than the shortest and simplest known proof, that by completion. This gives a very short self-contained proof of the Lagrange multiplier rule, which depends only on optimization methods. The proofs are of independent interest and are intended as well to be useful in the context of the ongoing efforts to obtain new variants of methods that are based on the inverse function theorem, such as comparative statics methods.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 5, с. 35–47.

© 2014 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

1. Введение

Сравнительный статический анализ

Одно из основных приложений теоремы об обратной функции состоит в том, что на ней основываются методы сравнительной статики. Однако часто бывает сложно или даже невозможно применить этот классический приём (см. обсуждение в [5]). Это обычно приводит к использованию численных методов: для классического подхода требуются сильные параметрические ограничения, а также нереалистичное предположение о невозможности множественного равновесия. Всё это приводит к попыткам разработать новые методы сравнительной статики. Например, в недавней работе [1] Д. Аджемоглу и М. К. Енсен предлагают первые сильные методы сравнительной статики для стохастических динамических моделей экономики. Разумно предположить, что каждый новый метод может быть основан на некотором принципе существования.

Принципы существования

Шесть главных общих принципов существования не были выведены специально для целей доказательства теоремы об обратной функции. Тем не менее каждый из них приводит к такому доказательству (некоторые из них построены в этой работе) и позволяет посмотреть на теорему с новой точки зрения. С одной стороны, удивительно, что такой фундаментальный факт, как теорема об обратной функции, имеет под собой столько разных оснований. С другой стороны, это можно объяснить важностью данной теоремы («все дороги ведут в Рим»). По этой же причине все доказательства имеют самостоятельный интерес. Кроме того, если некоторый метод, основанный на теореме об обратной функции, неприменим (как в сравнительной статике), то данные доказательства можно использовать для нахождения новых методов, основанных на одном из основных общих принципов существования.

Ядро теоремы об обратной функции

В данной работе мы сосредоточимся на доказательстве следующего утверждения, которое является ядром теоремы об обратной функции. Рассмотрим непрерывную вектор-функцию F из пространства n -мерных вектор-столбцов в себя, переводящую ноль в ноль, дифференцируемую в нуле с обратимой производной. Тогда существует константа $k > 0$, такая что векторное уравнение $F(x) = y$ имеет решение x для всех достаточно малых y , и при этом $|x| \leq k|y|$.

Компактность

Мы решаем задачу минимизации евклидовой нормы вектора $F(x) - y$ для данного y , где x принадлежит маленькому замкнутому шару с центром в нуле. Эта задача имеет решение, которое является также решением уравнения $F(x) = y$, если только оно не лежит на границе множества допустимых x . Чтобы исключить граничные решения, требуются определённые усилия во всех известных на данный момент доказательствах; даже эффективное доказательство из [6] не обходится без ряда дополнительных неравенств. Однако в данной работе мы предлагаем новый подход к исключению граничных решений, основанный лишь на прямой проверке того, что некоторый нижний предел положителен. Это даёт более короткое и простое доказательство теоремы об обратной функции (а также правила множителей Лагранжа), чем то, которое до сих пор считалось наиболее простым (доказательство, основанное на стягиваемости). Полученное самостоятельное доказательство правила множителей Лагранжа имеет привлекательную особенность: оно основано лишь на экстремальных принципах: необходимых условиях стационарности для задач без ограничений и теореме об экстремальных значениях.

Полнота

Если заменить принцип компактности принципом полноты, а также принять во внимание метод Ньютона численного решения системы из n уравнений с n неизвестными, мы получим итеративную процедуру, ведущую в силу полноты к искомому решению векторного уравнения $F(x) = y$. Мы используем «простую» версию метода Ньютона, в которой не изменяется «угол наклона касательной»: он работает без необоснованно строгих предположений, но имеет худшие алгоритмические свойства. По сути, это общеизвестная теорема о неподвижной точке в банаховых пространствах. Доказательство становится более естественным при использовании модифицированного метода Ньютона, так что мы сочли целесообразным также включить его в работу.

Топология

Для доказательства с минимальными предположениями естественно обратиться к топологическому принципу существования: теореме Брауэра о неподвижной точке. Для удобства данное доказательство было включено в работу, так как нелегко найти соответствующую ссылку.

Гомотопия

Вероятно, наиболее интуитивно понятное доказательство, предложенное В. М. Тихомировым, получается с использованием гомотопии. При стягивании шара к его центру необходимо «пройти» через каждую его точку, что мо-

жет быть использовано для доказательства существования решения уравнения $F(x) = y$.

Монотонность

Ещё одно очевидная попытка — использовать монотонность или, точнее, теорему Минти—Браудера. Доказательство теоремы об обратной функции, основанное на монотонности, было построено специально для данной работы. Также дано доказательство теоремы Минти—Браудера (которая здесь используется), и оно представляется более простым, чем представленные в литературе.

Вариационный анализ

Наконец, мы используем принцип существования из вариационного анализа: принцип Экланда (см. [3]). Построенное на нём доказательство вдохновлено работой [2], в которой показано, что строгая дифференцируемость влечёт слабую метрическую регулярность. В данную работу включено простое доказательство принципа Экланда.

2. Теорема об обратной функции

Сформулируем сейчас ту часть теоремы об обратной функции, которая касается существования.

Теорема 1. Для каждой непрерывной функции $F = (f_1, \dots, f_n)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(0_n) = 0_n$, имеющей в нуле обратимую производную, существует константа $k > 0$, такая что для всякого $y \in \mathbb{R}^n$ с достаточно малой евклидовой нормой $|y|$ найдётся $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $F(x) = y$ и при этом $|x| \leq k|y|$.

Из этой теоремы сразу следует, что в качестве k можно взять любое число из $(c, +\infty)$ или $[c, +\infty)$, где $c = \|F'(0)^{-1}\| > 0$. Здесь $\|\cdot\|$ — матричная норма, определяемая для каждой $(n \times n)$ -матрицы A по правилу $\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$.

3. Компактность

В этом разделе предполагается, что функции f_i , $1 \leq i \leq n$, дифференцируемы и что их производные непрерывны в нуле. Мы используем теорему об экстремальных значениях, которая утверждает, что непрерывная функция на непустом компакте (т. е. на ограниченном замкнутом множестве) в $\mathbb{R}^n$ достигает своего минимального значения.

Доказательство. Выберем число $k > \|F'(0)^{-1}\|$. Для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу минимизации функции $g_y(x) = |F(x) - y|^2$ при ограничении

$|x| \leq k|y|$. По теореме об экстремальных значениях задача имеет глобальное решение $\hat{x}(y)$. Если это внутренняя точка, то выполняется условие стационарности $g'_y(x) = 0$. Тогда имеем

$$g'_y(x) = 2(F(x) - y)^T F'(x)$$

и для достаточно малых y производная $F'(\hat{x}(y))$ обратима, так как обратима производная $F'(0)$ (F' непрерывна в 0 и $|\hat{x}(y)| < k|x|$). Таким образом, условие стационарности означает, что $\hat{x}(y)$ удовлетворяет уравнению $F(x) = y$. Осталось исключить возможность того, что решение находится на границе ограничения при достаточно малых $|y|$. Для этого достаточно доказать, что для каждой граничной точки x внутреннее произведение производной $g'_y(x)$ и вектора x положительно для достаточно малых $|y|$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что нижний предел функции $(g'_y(x)x)/|x|^2$ на множестве $\{(x, y) \mid |x| = k|y|\}$ при $(x, y) \rightarrow 0$ положителен. Подставим вместо $g'_y(x)$ его выражение $2(F(x) - y)^T F'(x)$, и тогда функция примет вид $(2(F(x) - y)^T F'(x)x)/|x|^2$. Заменяем в этом выражении $F(x)$ на $F'(0)x$ и $F'(x)$ на $F'(0)$ (это не изменит нижнего предела) и тогда получим $(2(F'(0)x - y)^T F'(0)x)/|x|^2$. Теперь раскроем скобки, применим неравенство Коши—Шварца к векторам y и $F'(0)x$ и преобразуем выражение: это даёт нижнюю оценку

$$2 \frac{|F'(0)x|}{|x|} \left(\frac{|F'(0)x|}{|x|} - k^{-1} \right).$$

Нижний предел этого выражения положителен, поскольку $k^{-1} < \|F'(0)^{-1}\|^{-1}$ и, по определению, он равен инфимуму выражения $(|F'(0)x|)/|x|$ по всем ненулевым x . $\square$

Как из теоремы об обратной функции выводится правило множителей Лагранжа

Для простоты изложения рассмотрим случай двух переменных, и пусть будет только одно ограничение. Общий случай, по сути, доказывается так же; более того, аналогичным образом можно вывести условия Ф. Джона. Пусть $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функции класса C^1 , для которых $f(0_2) = g(0_2) = 0$. Правило множителей утверждает, что если 0_2 — локальный минимум $f(x)$ при ограничении $g(x) = 0$, то существуют множители Лагранжа $\varkappa, \lambda$, не равные одновременно нулю, такие что 0_2 — стационарная точка функции Лагранжа $L = \varkappa f + \lambda g$. Доказываем от противного. Предположим, что 0_2 не является стационарной точкой функции Лагранжа ни при каких $\varkappa, \lambda$, не равных одновременно нулю. Другими словами, $f'(0_2)$ и $g'(0_2)$ линейно независимы. Тогда по теореме об обратной функции существует константа k , такая что для каждого достаточно малого $\delta > 0$ найдётся $x \in \mathbb{R}^2$, для которого $f(x) = -\delta$, $g(x) = 0$, $|x| \leq k\delta$. Это означает, что 0_2 не локальный минимум в данной задаче.

4. Полнота

В этом разделе предполагается, что функции f_i , $1 \leq i \leq n$, строго дифференцируемы в нуле, т. е. в терминах отображения F

для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что

$$|F(x) - F(x') - F'(0)(x - x')| \leq \varepsilon|x - x'| \text{ для } |x|, |x'| \leq \delta$$

(это предположение немного слабее, чем « C^1 в окрестности нуля»). Идея приводимого доказательства состоит в том, чтобы применить для данного y , близкого к нулю, итерационную процедуру модифицированного метода Ньютона решения уравнения $F(x) = y$, стартуя от точки $x = 0$. На каждом шаге находим приближённое решение $\bar{x}$ уравнения $F(x) = y$ как решение уравнения $F(\bar{x}) + F'(0)(x - \bar{x}) = y$ (напомним, что в методе Ньютона вместо этого уравнения рассматривается уравнение $F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x - \bar{x}) = y$). Получаемая последовательность приближённых решений обладает свойством «сжатия» (см. неравенство (3) ниже), и тем самым она является последовательностью Коши. В силу полноты эта последовательность сходится. Её предел и есть решение уравнения $F(x) = y$.

Доказательство. Выберем константу $k > c$ и положим $\varepsilon = 1 - k^{-1}c \in (0, 1)$. Тогда $(1 - \varepsilon)^{-1}c = k$. Пусть $\delta > 0$ такое, что

$$|F(x) - F(x') - F'(0)(x - x')| \leq \varepsilon c^{-1}|x - x'|, \text{ если } |x|, |x'| \leq \delta. \quad (1)$$

Рассмотрим $y \in \mathbb{R}^n$, у которого норма $|y|$ достаточно мала. Точнее говоря, нам необходимо, чтобы $|y| \leq k^{-1}\delta$. Пусть оператор T_y на $\mathbb{R}^n$ определён так, что $\bar{x} = T_y(\bar{x})$ есть решение уравнения $F(\bar{x}) + F'(0)(x - \bar{x}) = y$, т. е. $T_y(\bar{x}) = \bar{x} + F'(0)^{-1}(y - F(\bar{x}))$ для каждого $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Подставляя сюда выражения для $T_y(x)$ и $T_y(x')$, будем иметь после несложных преобразований:

$$F(x) - F(x') - F'(0)(x - x') = -F'(0)(T_y(x) - T_y(x')), \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2) следует, что $c^{-1}|T_y(x) - T_y(x')| \leq \varepsilon c^{-1}|x - x'|$, и таким образом,

$$|T_y(x) - T_y(x')| \leq \varepsilon|x - x'| \text{ для } |x|, |x'| \leq \delta. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность $(x_l)_{l \geq 0}$, которая возникает, начиная с точки $x_0 = 0$, при итеративном применении оператора T_y , т. е. $x_0 = 0$ и $x_{l+1} = T_y(x_l)$ для всех $l \geq 0$. В частности, $x_1 = F'(0)^{-1}y$. Проверим, что

$$|x_{r+s} - x_r| \leq \varepsilon^r k|y| \text{ для всех } r, s \geq 0. \quad (4)$$

Доказываем по индукции по $m = r + s$. Ясно, что неравенство (4) справедливо при $m = 0$ и $m = 1$: единственный нетривиальный случай, когда $r = 0$, $s = 1$, но $|x_1 - x_0| = |F'(0)^{-1}y| \leq c|y| \leq k|y|$ и (4) выполняется. Предположим, что неравенство (4) справедливо вплоть до некоторого m . Взяв, в частности, $r = 0$, получаем, что $|x_s| \leq k|y| \leq \delta$ для всех $s \leq m$. Тогда в силу (3)

$$|x_{l+1} - x_l| \leq \varepsilon|x_l - x_{l-1}| \text{ для всех } l \leq m. \quad (5)$$

Следовательно, если $r + s = m + 1$, то, используя (5), приходим к нужному соотношению:

$$\begin{aligned} |x_{r+s} - x_r| &\leq |x_{m+1} - x_m| + \dots + |x_{r+1} - x_r| \leq \\ &\leq (\varepsilon^m + \dots + \varepsilon^r)|x_1 - x_0| \leq \varepsilon^r(1 - \varepsilon)^{-1}c|y| = \varepsilon^r k|y|, \end{aligned}$$

Неравенство (4) даёт, если взять $r = 0$, что $|x_s| \leq k|y|$ для всех $s \geq 0$. Более того, оно показывает, что последовательность $(x_k)_k$ есть последовательность Коши. Пусть $\hat{x}(y)$ — её предел. Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ в неравенстве $|x_l| \leq k|y|$ и соотношении $F(x_l) + F'(0)(x_{l+1} - x_l) = y$, получаем, что $|\hat{x}(y)| \leq k|y|$ и $F(\hat{x}(y)) = y$. $\square$

5. Топология

В этом разделе мы не делаем никаких дополнительных предположений. Будем использовать теорему Брауэра о неподвижной точке, которая утверждает, что непрерывное отображение замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$ в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Идея доказательства теоремы 1, основанная на этом топологическом принципе, заключается в том, что для y , близких к нулю, оператор

$$\tilde{y} \mapsto S_y(\tilde{y}) = y + \tilde{y} - F(F'(0)^{-1}\tilde{y})$$

переводит замкнутый шар достаточно малого радиуса с центром в нуле в себя. Тогда, применяя оператор $F'(0)^{-1}$ к неподвижной точке, получаем решение уравнения $F(x) = y$.

Доказательство. Выберем константу $k > c$. Пусть $\delta > 0$ такое, что $|F(x) - F'(0)x| \leq (c^{-1} - k^{-1})|x|$, если $|x| \leq \delta$. Рассмотрим произвольное $y \in \mathbb{R}^n$, норма которого $|y|$ достаточно мала. Точнее, нам необходимо, чтобы $|y| \leq k^{-1}\delta$. Покажем, что оператор

$$\tilde{y} \mapsto S_y(\tilde{y}) = y + \tilde{y} - F(F'(0)^{-1}\tilde{y})$$

переводит замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $(k/c)|y|$ в себя. Действительно, для каждого $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, для которого $|\tilde{y}| \leq (k/c)|y|$, имеем

$$|F'(0)^{-1}\tilde{y}| \leq c|\tilde{y}| \leq k|y| \leq \delta.$$

Таким образом,

$$|F(F'(0)^{-1}\tilde{y}) - \tilde{y}| \leq (c^{-1} - k^{-1})|F'(0)^{-1}\tilde{y}| \leq \frac{k-c}{k}|\tilde{y}|.$$

Следовательно,

$$|S_y(\tilde{y})| = |y + (\tilde{y} - F(F'(0)^{-1}\tilde{y}))| \leq |y| + \frac{k-c}{k}|\tilde{y}| \leq |y| + \frac{k-c}{c}|y| = \frac{k}{c}|y|,$$

Теперь согласно теореме Брауэра о неподвижной точке существует решение $\tilde{y} = \tilde{y}(y)$ уравнения $\tilde{y} = y + (\tilde{y} - F(F'(0)^{-1}\tilde{y}))$, для которого $|\tilde{y}| \leq (k/c)|y|$. Тогда, полагая $\hat{x}(y) = F'(0)^{-1}\tilde{y}(y)$, получаем, что $F(\hat{x}(y)) = y$ и $|\hat{x}(y)| \leq k|y|$. $\square$

6. Гомотопия

В этом разделе также не делается никаких дополнительных предположений. Мы используем тот факт, что, стягивая гомотопически сферу в $\mathbb{R}^n$ к её центру, мы проходим через каждую точку внутри сферы. Ничего, очевидно, не изменится, если вместо сферы иметь дело с эллипсоидами. Идея доказательства теоремы 1, основанная на этом факте, заключается в следующем. Мы рассматриваем для каждого y , близкого к нулю, эллипсоид $E = \{F'(0)x \mid |x| = k|y|\}$, где $k > c$. Оказывается, что точка y лежит внутри этого эллипсоида и не очень близко к самому множеству E . Мы построим гомотопию из E к нулю, двигаясь сначала от E к окрестности гиперповерхности $G = \{F(x) \mid |x| = k|y|\}$, переходя от точки $F'(0)\bar{x}$ к $F(\bar{x})$ по прямой линии, а затем устроим сжатие из G к нулю, двигаясь из $F(\bar{x})$ к нулю вдоль кривой, которая является образом при отображении F прямой линии, соединяющей $\bar{x}$ с нулём. Эта гомотопия должна проходить через каждую внутреннюю точку эллипсоида E и, в частности, через точку y . Этого не может произойти в первой фазе гомотопии, поскольку y находится не очень близко к эллипсоиду E и, кроме того, поверхности G и E находятся рядом друг с другом. Следовательно, это должно случиться во второй фазе, а это показывает, что существует решение уравнения $F(x) = y$.

Доказательство. Выберем константу $k > c$. Пусть $\delta > 0$ такое, что

$$|F(x) - F'(0)x| \leq \frac{1}{2}(c^{-1} - k^{-1})|x|,$$

если $|x| \leq \delta$. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$, норма которого $|y|$ достаточно мала. Точнее, нам необходимо, чтобы $|y| \leq k^{-1}\delta$. Определим гомотопию из эллипсоида $E = \{F'(0)x \mid |x| = k|y|\}$ к нулю на временном интервале $[0, 1]$ следующим образом: на отрезке $[0, 1/2]$ двигаемся по прямой линии с постоянной скоростью от $F'(0)x$ до $F(x)$, а на отрезке $[1/2, 1]$ — это образ при действии отображения F прямой линии, соединяющей x и 0, причём эта прямая параметризована этой постоянной скоростью. Таким образом, гомотопия задаётся так:

$$\begin{aligned} F'(0)x + 2t(F(x) - F'(0)x) & \quad \text{для всех } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ F((2 - 2t)x) & \quad \text{для всех } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

Гомотопия проходит через каждую внутреннюю точку E . Точка y лежит внутри E , так как $|F'(0)^{-1}y| \leq k|y|$. Следовательно, гомотопия проходит через y . Проверим, что этого не может случиться на временном интервале $[0, 1/2]$. Действительно, если $|x| = k|y|$ and $0 \leq t \leq 1/2$, то

$$\begin{aligned} |F'(0)x + 2t(F(x) - F'(0)x)| & \geq |F'(0)x| - |(F(x) - F'(0)x)| \geq \\ & \geq c^{-1}|x| - \frac{1}{2}(c^{-1} - k^{-1})|x| > k^{-1}|x| = |y|, \end{aligned}$$

поэтому гомотопия не проходит через точку y в течение интервала $[0, 1/2]$. Отсюда следует, что $y = F((2 - 2\bar{t})\bar{x})$ для некоторого $\bar{t} \in [1/2, 1]$ и некоторого $\bar{x}$, где $|\bar{x}| = ky$. Тогда если $\hat{x}(y) = (2 - 2\bar{t})\bar{x}$, то $F(\hat{x}(y)) = y$ и $|\hat{x}(y)| = |(2 - 2\bar{t})\bar{x}| \leq |\bar{x}| = k|y|$. $\square$

7. Вариационный принцип Экланда

В этом разделе предполагается, что функции f_i , $1 \leq i \leq n$, дифференцируемы и что их производные непрерывны в нуле. Мы используем вариационный принцип Экланда, утверждающий, что для каждой полунепрерывной снизу функции g на полном метрическом пространстве X , ограниченной снизу, каждого $\varepsilon > 0$, каждого $x_0 \in X$, для которого $g(x_0) \leq \inf g + \varepsilon$, и каждого $\lambda > 0$ существует элемент $v = v(\lambda) \in X$, такой что

- а) $g(v) \leq g(x_0)$,
- б) $d(x_0, v) \leq \lambda$,
- в) $x \mapsto g(x) + (\varepsilon/\lambda)d(x, v)$ имеет единственный минимум в точке v .

Доказательство. Доказываем от противного. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Пусть k — произвольное положительное число. Тогда существует $y \in \mathbb{R}^n$, сколь угодно близкое к нулю, такое что $\text{distance}(0, F^{-1}(y)) > k|y|$. Применим принцип Экланда к функции $z \mapsto |F(z) - y|$, числам $\varepsilon = |y|$, $\lambda = \min(k\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$ и точке $z = 0$. Это приводит к существованию точки $v = v(\lambda) \in \mathbb{R}^n$, для которой $|v| \leq \min(k|y|, \sqrt{|y|})$, и v доставляет минимум функции $z \rightarrow |F(z) - y| + \max(k^{-1}, \sqrt{|y|})|z - v|$. Мы получаем, что $F(v) \neq y$, комбинируя соотношения $|v| \leq k|y|$ и $\text{distance}(0, F^{-1}(y)) > k|y|$. Более того, производная функции $z \mapsto |F(z) - y|$ в точке $z = v$ равна

$$F'(v)^T \frac{F(v) - y}{|F(v) - y|}$$

(T обозначает транспонирование) и производные по всем направлениям функции $z \mapsto |z - v|$ в точке $z = v$ равны по модулю 1. Следовательно, свойство минимальности v приводит к неравенству

$$\left| F'(v)^T \frac{F(v) - y}{|F(v) - y|} \right| \leq k^{-1}.$$

Левая часть этого неравенства не меньше $\|F'(v)^{-1}\|^{-1}$. Поэтому $\|F'(v)^{-1}\|^{-1} \leq k^{-1}$, и значит, $\|F'(v)^{-1}\| \geq k$. Мы можем сделать $|v|$ произвольно малым, выбирая y так, чтобы $|y|$ был достаточно малым, и тогда $F'(v)$ может быть сколь угодно близко к $F'(0)$ (из-за непрерывности F' в нуле). Тогда $c = \|F'(0)^{-1}\| \geq k$ — противоречие с тем, что k — произвольное положительное число. $\square$

Представим короткий вариант доказательства принципа Экланда. Без ограничения общности можно предполагать, что $\lambda = 1$ и $g(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Метод доказательства — некий аналог метода бисекции. Пусть $z = (\xi, \beta) \in X \times [0, +\infty)$. Обозначим множество

$$\{(x, \alpha) \in X \times [0, +\infty) \mid 0 \leq \alpha \leq \beta, d(x, \xi) \leq \beta - \alpha\}$$

через $S(z)$. Пусть $z_0 = (x_0, g(x_0))$. Если $S(z_0) \cap \text{epi } g = z_0$, то всё доказано: $\hat{x} = x_0$. Если это не так, то рассмотрим шар $B(x_0, g(x_0))$ и положим $S_0 := \text{epi } g \cap \Xi_0$, где $\Xi_0 := \{(x, \alpha) \in S(z_0) \mid 0 \leq \alpha \leq g(x_0)/2\}$. Если $S_0 \neq \emptyset$, мы берём $z_1 = (x_1, g(x_1)) \in S_0$, шар $B(x_1, g(x_1))$ и повторяем нашу процедуру. Если же $S_0 = \emptyset$, берём $(x_1, g(x_1)) \in S(z_0) \setminus \Xi_0$, шар $B(x_1, g(x_1) - g(x_0)/2)$ и повторяем процедуру. В результате получаем последовательность вложенных шаров, центры которых стремятся к точке $\hat{x}$. Тогда ясно, что $\hat{x}$ — та точка, которую мы ищем.

8. Монотонность

В этом разделе предполагается, что функции f_i , $1 \leq i \leq n$, строго дифференцируемы в нуле. Мы используем следующий вариант теоремы Минти—Браудера: для каждого непрерывного оператора $G: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющегося строго монотонным на замкнутом ограниченном выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ (т. е. найдётся $\alpha > 0$, такое что $\langle G(x_1) - G(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha |x_1 - x_2|^2$ для всех $x_i \in A$, $i = 1, 2$), существует $\hat{x} \in A$, которое удовлетворяет вариационному неравенству $\langle G(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0$ для всех $x \in A$. Идея доказательства заключается в том, чтобы для подходящего маленького шара B с центром в нуле и для каждого y , близкого к нулю, рассмотреть оператор $G(x) = F'(0)^T(F(x) - y)$ на B . Мы проверяем, что G строго монотонен и что $G(x)$ не может быть неположительным мультипликатором x , если x — граничная точка B . Тогда мы применяем теорему Минти—Браудера, и это даёт существование внутренней точки $\hat{x}$ шара B , для которой $F(\hat{x}) = y$. Наконец, мы показываем, что свойство монотонности позволяет решить уравнение $F(x) = y$ посредством алгоритма отрезающей плоскости. Действительно, из этого свойства вытекает, что для каждой точки $\bar{x} \in B$, для которой $F(\bar{x}) \neq y$, не может быть решения уравнения $F(x) = y$ в B , содержащегося в открытом полупространстве $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - \bar{x}, F(\bar{x}) - y \rangle \geq 0\}$; следовательно, это полупространство может быть отрезано.

Доказательство. Положим $G_y(x) = F'(0)^T(F(x) - y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Непрерывность $G_y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ очевидна. Выберем положительное число ε так, чтобы

$$\varepsilon < \|F'(0)\|^{-1} \|F'(0)^{-1}\|^{-1}$$

и

$$\varepsilon < \|F'(0)\|^{-1} \|(F'(0)^T F'(0))^{-1}\|^{-1}.$$

Пусть $\delta > 0$ такое, что $|F(x) - F(x') - F'(0)(x - x')| \leq \varepsilon|x - x'|$ для всех $x, x' \in \mathbb{R}^n$, где $|x|, |x'| \leq \delta$. В частности, $|F(x) - F'(0)x| \leq \varepsilon|x|$, если $|x| \leq \delta$ (так как $F(0) = 0$). Проверим, что G_y — монотонное отображение на замкнутом шаре $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \delta\}$ для каждого $y \in \mathbb{R}^n$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle G_y(x) - G_y(x'), x - x' \rangle &= \\ &= \langle F'(0)^T(F(x) - y) - F'(0)^T(F(x') - y), x - x' \rangle = \\ &= \langle F'(0)^T(F(x) - F(x') - F'(0)(x - x')), x - x' \rangle + \\ &+ \langle F'(0)^T F'(0)(x - x'), x - x' \rangle, \end{aligned}$$

и тем самым

$$\begin{aligned} \langle G_y(x) - G_y(x'), x - x' \rangle &\geq |F'(0)(x - x')|^2 - \|F'(0)\|\varepsilon|x - x'|^2 \geq \\ &\geq (\|F'(0)^{-1}\|^{-1} - \|F'(0)\|\varepsilon)|x - x'|^2, \end{aligned}$$

если $|x|, |x'| \leq \delta$. По выбору ε получаем, что $\|F'(0)^{-1}\|^{-1} - \|F'(0)\|\varepsilon > 0$, значит, G_y строго монотонно на шаре B . Тогда мы можем применить версию теоремы Минти—Браудера, приведённую выше, к отображению G , ограниченному на шар B . Отсюда следует, что существует элемент $\hat{x} \in B$, для которого справедливо следующее вариационное неравенство: $\langle F'(0)^T(F(\hat{x}) - y), x - \hat{x} \rangle \geq 0$ для всех $x \in B$. Возможны два случая:

- 1) $\hat{x}$ — внутренняя точка шара B ; тогда вариационное неравенство приводит к равенству $F(\hat{x}) = y$;
- 2) $\hat{x}$ — граничная точка B ; тогда вариационное неравенство приводит к тому, что $F'(0)^T(F(\hat{x}) - y)$ — неположительный мультипликатор $\hat{x}$.

Следовательно, для того чтобы доказать теорему, остаётся исключить случай, когда $\hat{x}$ — граничная точка шара B , если $|y|$ достаточно мало. Рассмотрим произвольное $y \in \mathbb{R}^n$, для которого

$$|y| < (\|F'(0)\|^{-1} \| (F'(0)^T F'(0))^{-1} \|^{-1} - \varepsilon) \delta.$$

Предположим теперь, что $\hat{x}$ — граничная точка B (т. е. $|x| = \delta$), и покажем, что это приводит к противоречию. Для каждого $\rho \leq 0$ имеем

$$F'(0)^T(F(\hat{x}) - y) = \rho \hat{x}.$$

Перепишем это в виде

$$F'(0)^T y = (F'(0)^T F'(0) - \rho) \hat{x} + F'(0)^T(F(\hat{x}) - F'(0)\hat{x}).$$

Оценивая по норме, получаем, что

$$|F'(0)^T y| \geq \| (F'(0)^T F'(0) - \rho)^{-1} \|^{-1} |x| - \|F'(0)\| |F(x) - F'(0)x|.$$

Тогда, учитывая, что $\rho \leq 0$, $|F(x) - F'(0)x| \leq \varepsilon|x|$ и $|x| = \delta$, приходим к неравенству

$$|y| \geq (\|F'(0)\|^{-1} \| (F'(0)^T F'(0))^{-1} \|^{-1} - \varepsilon) \delta,$$

которое противоречит выбору y . □

Приведём здесь простое доказательство варианта теоремы Минти—Браудера, сформулированного выше. Доказываем индукцией по n .

База индукции. Пусть $n = 1$. В этом случае предполагается, что A — конечный замкнутый интервал $[a, b]$ и что $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой существует $\alpha > 0$, такое что $G(x) - G(x') \geq \alpha(x - x')$ для всех $x, x' \in [a, b]$, где $x' < x$. В частности, G строго монотонно возрастает в обычном смысле. Вариационное неравенство сводится к тому, что $G(a) \geq 0$, если $\hat{x} = a$, к $G(b) \leq 0$, если $\hat{x} = b$, и к $G(\hat{x}) = 0$ в остальных случаях. Таким образом, для $n = 1$ теорема следует из хорошо известного факта, что непрерывная строго монотонно возрастающая функция на замкнутом интервале $[a, b]$ принимает нулевое значение ровно в одной точке интервала (a, b) , если она отрицательна в точке a и положительна в точке b .

Индукционный шаг. Предположим, что утверждение доказано для $n = r - 1$. Пусть A — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^r$ и $G: A \rightarrow \mathbb{R}^r$ — непрерывный строго монотонный оператор. Пусть $\alpha > 0$ такое, что $\langle G(x_1) - G(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha|x_1 - x_2|^2$ для всех $x_i \in A$, $i = 1, 2$. Пусть, наконец, $\pi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}$ определено по правилу $\pi(x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_{r-1})$ для всех $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, а $\rho: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\rho(x_1, \dots, x_r) = x_r$ для всех $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$. Тогда $\tilde{A} := \pi(A)$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{R}^{r-1}$. Для каждого $\tilde{x} \in \tilde{A}$ определим множество $A_{\tilde{x}} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\tilde{x}, x) \in A\}$ и функцию $G_{\tilde{x}}$ на $A_{\tilde{x}}$ по формуле $G_{\tilde{x}}(x) = \rho(G(\tilde{x}, x))$ для всех $x \in A_{\tilde{x}}$. Ясно, что функция $G_{\tilde{x}}$ непрерывна. Проверим, что она монотонна. Действительно, для всех $x_i \in A_{\tilde{x}}$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \langle G_{\tilde{x}}(x_1) - G_{\tilde{x}}(x_2), x_1 - x_2 \rangle &= \langle G(\tilde{x}, x_1) - G(\tilde{x}, x_2), (0, \dots, 0, x_1 - x_2) \rangle = \\ &= \langle G(\tilde{x}, x_1) - G(\tilde{x}, x_2), (\tilde{x}, x_1) - (\tilde{x}, x_2) \rangle \geq \alpha|x_1 - x_2|^2, \end{aligned}$$

Теперь мы можем применить теорему Минти—Браудера к $G_{\tilde{x}}$. Из неё следует, что существует единственная точка $\hat{x}(\tilde{x}) \in A_{\tilde{x}}$, такая что $G_{\tilde{x}}(\hat{x}(\tilde{x}))(x - \hat{x}(\tilde{x})) \geq 0$ для всех $x \in A_{\tilde{x}}$. Проверим, что функция $\tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}: \tilde{x} \mapsto \hat{x}(\tilde{x})$ непрерывна. Её график имеет вид

$$\{(\tilde{x}, \bar{x}) \in A \mid \rho(G(\tilde{x}, \bar{x}))(x - \bar{x}) \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}, \text{ таких что } (\tilde{x}, x) \in A\}.$$

Отсюда видно, что это множество является пересечением семейства замкнутых множеств и, значит, само замкнуто. Отсюда следует непрерывность функции $\tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}: \tilde{x} \mapsto \hat{x}(\tilde{x})$. Определим оператор $\tilde{G}: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}$ по формуле $\tilde{G}(\tilde{x}) = \pi(G(\tilde{x}, \hat{x}(\tilde{x})))$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{A}$. Ясно, что это непрерывный оператор. Проверим его монотонность. Рассмотрим выражение

$$\langle G(\tilde{x}_1, \hat{x}(\tilde{x}_1)) - G(\tilde{x}_2, \hat{x}(\tilde{x}_2)), (\tilde{x}_1, \hat{x}(\tilde{x}_1)) - (\tilde{x}_2, \hat{x}(\tilde{x}_2)) \rangle$$

где $x_i \in \tilde{A}$, $i = 1, 2$. С одной стороны, в силу монотонности G это выражение не меньше $\alpha|(\tilde{x}_1, \hat{x}(\tilde{x}_1)) - (\tilde{x}_2, \hat{x}(\tilde{x}_2))|^2$. С другой стороны, оно может быть записано в виде суммы

$$\begin{aligned} & \left\langle \pi(G(\tilde{x}_1, \hat{x}(\tilde{x}_1))) - \pi(G(\tilde{x}_2, \hat{x}(\tilde{x}_2))), \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \right\rangle + \\ & \quad + \langle G_{\tilde{x}_1}(\hat{x}(\tilde{x}_1)) - G_{\tilde{x}_2}(\hat{x}(\tilde{x}_2)), \hat{x}(\tilde{x}_1) - \hat{x}(\tilde{x}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $\langle \tilde{G}(\tilde{x}_1) - \tilde{G}(\tilde{x}_2), \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \rangle$ по определению $\tilde{G}$. Второе можно записать в виде разности:

$$\langle G_{\tilde{x}_1}(\hat{x}(\tilde{x}_1)), \hat{x}(\tilde{x}_1) - \hat{x}(\tilde{x}_2) \rangle - \langle G_{\tilde{x}_2}(\hat{x}(\tilde{x}_2)), \hat{x}(\tilde{x}_1) - \hat{x}(\tilde{x}_2) \rangle.$$

Согласно вариационным неравенствам, которые характеризуют $\hat{x}(\tilde{x}_i)$, $i = 1, 2$, это разность неположительного и неотрицательного чисел, и следовательно, она неположительна. Эти рассуждения приводят к неравенству

$$\langle \tilde{G}(\tilde{x}_1) - \tilde{G}(\tilde{x}_2), \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \rangle \geq \alpha |(\tilde{x}_1, \hat{x}(\tilde{x}_1)) - (\tilde{x}_2, \hat{x}(\tilde{x}_2))|^2 \geq \alpha |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|^2$$

для всех $\tilde{x}_i \in \tilde{A}$, $i = 1, 2$. Итак, мы проверили, что $\tilde{G}$ строго монотонно. Теперь мы можем применить теорему Минти—Браудера согласно индуктивному предположению. Значит, существует $\tilde{x} \in \tilde{A}$, для которого $\langle \tilde{G}(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle \geq 0$ для всех $x \in \tilde{A}$. Проверим, что $(\tilde{x}, \hat{x}(\tilde{x}))$ удовлетворяет требуемому вариационному неравенству для оператора G . Действительно, согласно вариационным неравенствам, характеризующим $\hat{x}(\tilde{x})$ и $\tilde{x}$, имеем, что

$$\langle G(\tilde{x}, \hat{x}(\tilde{x})), x - (\tilde{x}, \hat{x}(\tilde{x})) \rangle = \langle \tilde{G}(\tilde{x}), \pi(x) - \tilde{x} \rangle + \langle G_{\tilde{x}}(\hat{x}(\tilde{x})), \rho(x) - \hat{x}(\tilde{x}) \rangle \geq 0$$

для всех $x \in A$.

Мне доставляет большое удовольствие выразить благодарность профессору В. М. Тихомирову за его внимание и поддержку.

Литература

- [1] Acemoglu D., Jensen M. K. Robust Comparative Statics in Large Dynamic Economies. — 2014. — <http://economics.mit.edu/files/9619>.
- [2] Borwein J. M., Lewis A. S. Convex Calculus and Nonlinear Optimization: Theory and Examples. — New York: Springer, 2006.
- [3] Ekeland I. On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 47. — P. 324—353.
- [4] Krantz S. G., Park H. R. The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications. — Basel: Birkhäuser, 2012.
- [5] Milgrom P., Roberts J. Computing Equilibria // Am. Econ. Rev. — 1994. — Vol. 84. — P. 441—459.
- [6] Spivak M. Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. — Westview Press, 1971.