О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций

А. В. ДМИТРУК
Центральный экономико-математический институт РАН,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: avdmi@cemi.rssi.ru

Н. П. ОСМОЛОВСКИЙ
Московский государственный строительный университет,
Университет технических и гуманитарных наук г. Радома (Польша)
e-mail: osmolovsky@uph.edu.pl

УДК 517.977.52

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, пакет игольчатых вариаций, оператор концевого значения, гладкая конечномерная задача, множители Лагранжа, конечнозначное условие максимума, центрированная система компактов.

Аннотация

Предлагается доказательство принципа максимума для общей задачи оптимального управления понтрягинского типа с помощью игольчатых вариаций путём сведения её к семейству гладких конечномерных задач, аргументом которых являются ширины иголок в каждом пакете, применения для каждой задачи стандартного правила множителей Лагранжа и затем «спрессовывания» полученных необходимых условий в одно универсальное условие оптимальности с помощью понятия центрированной системы компактов.

Abstract

A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovskii, On the proof of Pontryagin's maximum principle by means of needle variations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 49—73.

We propose a proof of the maximum principle for the general Pontryagin type optimal control problem, based on packets of needle variations. The optimal control problem is first reduced to a family of smooth finite-dimensional problems, the arguments of which are the widths of the needles in each packet, then, for each of these problems, the standard Lagrange multipliers rule is applied, and finally, the obtained family of necessary conditions is "compressed" in one universal optimality condition by using the concept of centered family of compacta.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 5, с. 49—73.

1. Введение

Как известно, первоначальное доказательство принципа максимума как необходимого условия сильного минимума, данное в [15], было весьма сложным и не укладывалось в рамки классических методов вариационного исчисления. Позднее усилия многих математиков были направлены на то, чтобы переосмыслить это доказательство и распространить принцип максимума на новые классы задач. Это было сделано в целом ряде отечественных и зарубежных работ; см., например, [1, 4—8, 10—13, 16, 19—21] (разумеется, этот список ни в коей мере не претендует на полноту). С другой стороны, вопрос о наиболее простом и прозрачном доказательстве принципа максимума для *классической задачи понтрягинского типа* также был предметом внимания специалистов. Это особенно важно с учебно-методической стороны в целях преподавания курса оптимального управления как в математических, так и в инженерных вузах.

Основная идея доказательства принципа максимума состоит во введении некоторого класса (семейства) вариаций управления, по которому *можно дифференцировать*. Для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений известны следующие классы вариаций:

а) равномерно малые вариации,
б) игольчатые вариации и их «пакеты»,
в) v-замена времени,
г) скользящие режимы.

Равномерно малые вариации соответствуют *слабому* минимуму и приводят к *условию стационарности*, т. е. к уравнению Эйлера—Лагранжа. Это очень важный результат, который может служить отправной точкой для дальнейших исследований данного процесса на оптимальность, однако он далёк от принципа максимума. Для получения условий *сильного* минимума этих вариаций явно недостаточно.

Простейшим вариантом «немалой» вариации является *игольчатая вариация* управления, состоящая в замене оптимального управления на любое допустимое значение управления лишь на малом интервале времени. Ширина этого интервала есть параметр вариации, по которому можно дифференцировать. Если на правый конец траектории никаких ограничений не наложено (так называемая задача *со свободным правым концом*), то целевой функционал на этом однопараметрическом семействе траекторий должен иметь минимум в нуле, и поэтому его производная по ширине иголки должна быть неотрицательной. Отсюда легко вытекают условия принципа максимума. Если же в задаче имеются ограничения на правый конец траектории, то при таком варьировании полученная траектория, вообще говоря, не будет им удовлетворять. Чтобы обеспечить попадание конца проварьированной траектории в заданные ограничения, семейство вариаций должно быть достаточно богатым, и поэтому приходится рассматривать не одну, а несколько игольчатых вариаций одновременно, так называемый *пакет* игольчатых вариаций, параметром которого является набор независимых друг от друга ширин иголок.

Игольчатые вариации и их пакеты имеют «родовой недостаток», состоящий в том, что ширины иголок по определению неотрицательны, так что получающиеся с их помощью функции определены лишь на неотрицательном ортанте конечномерного пространства (точнее, на его пересечении с окрестностью нуля) и для дальнейшего анализа полученной вспомогательной задачи, соответствующей данному пакету иголок, требуется проводить ряд специфических построений, выходящих за рамки стандартного курса анализа и дифференциальных уравнений. Это сразу утяжеляет доказательство принципа максимума, делая его практически неподъёмным для большинства слушателей. Поэтому в курсах оптимального управления, как правило, ограничиваются случаем задачи со свободным правым концом, где достаточно использовать лишь одну иголку и никаких дополнительных построений не требуется. Для изложения доказательства в задачах *с ограничениями на концы траектории* желательно, чтобы вспомогательная задача имела вид гладкой задачи более или менее стандартного (ранее изученного) типа.

Одним из приёмов, приводящих к гладкой задаче, является так называемая *v-замена времени*, предложенная А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным в [6] (см. также [4,8,13,14,17]), состоящая во введении нового времени τ и трактовке исходного времени $t = t(\tau)$ как фазовой переменной, подчинённой уравнению

$$\frac{dt}{d\tau} = v(\tau),$$

где $v(\tau) \geqslant 0$ — ещё одно управление. Обратим внимание, что эта замена времени может быть не взаимно-однозначной (и это важно!). Её простейший вариант, когда зависимость «старого» времени от «нового» кусочно-линейна (т. е. $v(\tau)$ кусочно-постоянна), подробно изложен в [13, 14]. Нетривиальность такой замены состоит в том, что малые вариации управления v приводят к игольчатым вариациям (или близким к ним) исходного управления u, и по сути дела, v-замена представляет собой такую параметризацию игольчатых вариаций, которая естественным образом имеет гладкое продолжение на «отрицательные ширины». Приём этот очень красивый, однако его применение требует хотя и очень прозрачных в идейном плане, но технически довольно громоздких и не совсем стандартных конструкций, и опыт преподавания показал, что такое доказательство принципа максимума всё-таки воспринимается студентами с трудом.

Ещё один способ доказательства принципа максимума, также предложенный А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным, — использование вариаций типа *скользящих режимов*. (Сами скользящие режимы были введены Р. В. Гамкрелидзе в [3] для доказательства существования решения задачи.) Этот способ, также красивый, позволяет далёкие обобщения (например, на задачи со смешанными ограничениями, см. [5,13,17]), но требует использования весьма нетривиальных (и нестандартных) фактов линейного и нелинейного функционального анализа, что делает вряд ли оправданным его применение в классической понтрягинской задаче, тем более в обязательном курсе лекций.

Вернёмся к игольчатым вариациям как самому простому классу «немалых» вариаций. На протяжении ряда лет на семинаре кафедры общих проблем управления мехмата МГУ под руководством В. М. Тихомирова активно обсуждались вопросы преподавания курса «Вариационное исчисление и оптимальное управление», в том числе различные схемы доказательства принципа максимума. Основное внимание было направлено на наиболее простое описание конуса концевых вариаций фазовой переменной, порождённых пакетами игольчатых вариаций управления. Здесь наиболее удачной нам представляется конструкция, предложенная Г. Г. Магарил-Ильяевым [9]. Доказательство же самого принципа максимума следует в [9] схеме первоначального доказательства из [15] (а также [2]). Если указанный конус есть всё пространство, то он будет таковым и для некоторого фиксированного пакета иголок, а тогда соответствующий нелинейный оператор, определённый на неотрицательном ортанте ширин иголок в данном пакете, обладает так называемым свойством *накрывания в точке* (образ окрестности нуля содержит окрестность образа оптимальной точки), что приводит к противоречию с оптимальностью исследуемой траектории. Если же указанный конус не совпадает со всем пространством, то применение конечномерной теоремы об отделимости легко приводит к принципу максимума. Доказательство накрывания на конусе опирается в [9] либо (в случае кусочно-непрерывного управления) на конусную модификацию *метода Ньютона*, либо (в случае измеримого управления) на довольно тонкий и нетривиальный топологический факт — *теорему Брауэра* о неподвижной точке. Ни того ни другого нет ни в одном стандартном курсе, тем более в прикладных вузах. (В [2, 15] это доказательство опиралось на ещё более специфическое топологическое понятие *индекса пересечения* или *лемму Шпернера*, которые отсутствуют даже в курсах мехмата.) Кроме того, в [9] рассматривается лишь случай задачи с фиксированными концами.

Другой путь доказательства принципа максимума с помощью игольчатых вариаций, который представляется нам более предпочтительным и которому посвящена данная статья, — это переход к стандартной конечномерной задаче, аргументом которой являлись бы ширины иголок данного пакета. Идея эта совершенно естественна и не нова (см., например, [1, 16, 21] и недавнюю статью [18]), но для её реализации требуется определить продолжение иголок на отрицательные ширины. (Как уже говорилось, альтернативой такого продолжения является указанная выше v-замена.) В [1, § 4.2] было построено явное продолжение оператора концевого значения фазовой переменной (соответствующего данному пакету иголок) на полную окрестность начала координат в пространстве ширин иголок, однако конструкция этого продолжения реализована весьма громоздко, и поэтому она также вряд ли может быть успешно изложена в общедоступном курсе. (В [16, 21] о необходимости указанного продолжения ничего не говорилось, так что доказательство принципа максимума в них фактически осталось неполным.)

Где-то в середине 2000-х годов на упомянутом семинаре В. М. Тихомирова авторами данной статьи было предложено использовать возможность продолжения *произвольной* гладкой функции, заданной на пересечении неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^k_+$ с окрестностью нуля, на полную окрестность нуля с сохранением гладкости. Конечно, здесь можно было бы воспользоваться классической теоремой Уитни о продолжении гладкой функции с произвольного компакта на его окрестность (см. [10]), но опять-таки вряд ли было бы оправданно в данном простом случае обращаться к такой сложной теореме, сама формулировка которой уже весьма громоздка и требует введения дополнительных понятий. Мы предложили простой способ такого продолжения для произвольной функции, определённой на $\mathbb{R}^k_+$ и *строго дифференцируемой* лишь в нуле. Этого для наших целей достаточно. (Если функция *непрерывно дифференцируема* всюду на окрестности нуля в $\mathbb{R}^k_+$, что также достаточно для наших целей, то продолжить её на полную окрестность нуля можно покоординатным образом, что сводится к очевидному одномерному случаю. Этот способ использовался в работе [18], являющейся первой известной нам публикацией с явным построением требуемого продолжения; подробнее см. ниже.)

При наличии подобного продолжения, так или иначе построенного, отпадает необходимость определять иголки на отрезках отрицательной ширины, вводить и описывать конус концевых вариаций, а доказательство принципа максимума состоит в следующем. Для каждого пакета игольчатых вариаций мы получаем вспомогательную (или «присоединённую») *гладкую конечномерную задачу* в пространстве ширин иголок данного пакета, в которой начало координат есть точка локального минимума. Применяя стандартное правило множителей Лагранжа, получаем «конечнозначный» принцип максимума, в котором условие максимума функции Понтрягина выполнено *для данного набора иголок*. Таким образом, мы имеем *семейство конечномерных задач*, соответствующих всевозможным пакетам иголок, и в каждой задаче свой конечнозначный принцип максимума. Множество наборов множителей Лагранжа в каждой такой задаче является конечномерным компактом (это простой факт), а семейство этих компактов оказывается *центрированным* (любое их конечное число имеет непустое пересечение). Поэтому и всё это семейство компактов имеет непустое пересечение, а любой элемент этого пересечения (т. е. некоторый набор множителей Лагранжа) обеспечивает «универсальный» принцип максимума, в котором условие максимума выполнено *для любого набора иголок*, т. е. для любых моментов времени и любых допустимых значений управления.

Это доказательство использует лишь стандартные факты курсов математического анализа, дифференциальных уравнений и правило множителей Лагранжа для гладкой конечномерной задачи с ограничениями равенства и неравенства (которое предполагается уже прочитанным в курсе «Вариационное исчисление и оптимальное управление» к моменту изложения принципа максимума). Как и в других доказательствах, мы также используем некоторый топологический факт: свойство центрированной системы компактов, но это одно из эквивалентных определений компакта, и оно не должно представлять никаких трудностей для усвоения, тем более в конечномерном случае.

По сути дела, наше доказательство следует той же схеме, что и в [1]; отличие лишь в более простом способе продолжения функций на пакете иголок и несколько более простом изложении дифференциальных свойств этих функций. От [9] оно отличается тем, что вместо писания концевого конуса и доказательства теоремы о конусном накрывании мы переходим к конечномерной задаче, применяем правило множителей Лагранжа и затем пользуемся свойством центрированной системы компактов. По нашему мнению, этот способ доказательства принципа максимума для классической понтрягинской задачи (в её самой общей постановке) в некоторых отношениях проще тех, которые обычно излагаются в курсах лекций, и поэтому он заслуживает внимания.

Отметим также, что схема доказательства принципа максимума, основанная на введении семейства так называемых *присоединённых* гладких задач, выписывании условий стационарности в каждой из них и затем в использовании центрированной системы компактов (или, более общо, проективной системы компактов), была предложена А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным (см. [7, 12]) и успешно применялась не только в задаче понтрягинского типа, но и в более широком классе задач оптимального управления, включающем как фазовые, так и смешанные ограничения. В данной статье мы не рассматриваем эти обобщения, отсылая читателя к [5, 13, 17].

Перейдём к детальному изложению.

2. Общая задача понтрягинского типа, формулировка принципа максимума

На отрезке времени $[t_0, t_1]$, априори не фиксированном, будем рассматривать следующую задачу оптимального управления (назовём её *общей* (или *канонической*) *задачей понтрягинского типа*:

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad u(t) \in U, \tag{1}$$

$$K\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) = 0, \tag{2}$$

$$F\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) \leqslant 0, \tag{3}$$

$$J = F_0\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) \to \min. \tag{4}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^r$ — управление, концевые функции K, F имеют размерности $d(K)$, $d(F)$. (Отметим, что такое обозначение размерностей векторов удобно, так как позволяет «сэкономить» буквы и освобождает от запоминания размерностей.)

Предполагается, что F_0, F, K — функции класса C^1, а f непрерывна вместе с производными f_t и f_x. Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ произвольно. Задачу (1)—(4) для краткости назовём *задачей* А.

Замечание 1. Если говорить более точно, свойства функции f надо предполагать выполненными на множестве $\mathcal{Q}\times U$, где $\mathcal{Q}$ — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, а свойства функций F_0, F, K на некотором открытом множестве $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^{2n+2}$. Как правило, это всегда подразумевается без явного указания множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$. Мы также не будем отвлекаться на эти несущественные детали.

Замечание 2. Как отмечалось в [15], множество значений управления U не обязательно считать лежащим в конечномерном пространстве; в общем случае оно может быть произвольным хаусдорфовым топологическим пространством. Все нижеследующие рассуждения при этом остаются без изменений. Однако такое обобщение будет отвлекать читателя (и слушателя) на несущественные моменты, а для приложений оно вряд ли необходимо. Поэтому, как и в [15], мы считаем, что $U\subset\mathbb{R}^r$.

Решение задачи A ищется в классе абсолютно непрерывных функций $x(t)$ и измеримых ограниченных функций $u(t)$. Пару функций $w(t)=\big(x(t),u(t)\big)$ вместе с отрезком их определения $[t_0,t_1]$ будем называть *процессом* задачи. Процесс называется *допустимым*, если он удовлетворяет всем ограничениям задачи. При этом условия (1) предполагаются выполненными почти всюду. Как обычно, будем говорить, что допустимый процесс $\hat w(t)=\big(\big(\hat x(t),\hat u(t)\big)\mid t\in[\hat t_0,\hat t_1]\big)$ доставляет *сильный минимум*, если найдётся $\varepsilon>0$, такое что $J(w)\geqslant J(\hat w)$ для всех допустимых процессов $w(t)=\big(\big(x(t),u(t)\big)\mid t\in[t_0,t_1]\big)$, удовлетворяющих условиям

$$|t_0-\hat t_0|<\varepsilon,\quad |t_1-\hat t_1|<\varepsilon,$$
$$|x(t)-\hat x(t)|<\varepsilon\ \text{ для всех }\ t\in[t_0,t_1]\cap[\hat t_0,\hat t_1].$$

Сформулируем теперь *принцип максимума Понтрягина* — необходимое условие сильного минимума в задаче A. Введём *функцию Понтрягина*

$$H(\psi_x,t,x,u)=\psi_x f(t,x,u),$$

где ψ_x — вектор-строка размерности n (зависимость H от ψ_x иногда будем опускать), и *концевую функцию Лагранжа*

$$l(t_0,x_0,t_1,x_1)=(\alpha_0F_0+\alpha F+\beta K)(t_0,x_0,t_1,x_1),$$

где α_0 — число, α, β — вектор-строки тех же размерностей, что и F, K соответственно (зависимость l от α_0, α, β мы опускаем).

Пусть $w=\big(\big(x(t),u(t)\big)\mid t\in[t_0,t_1]\big)$ — допустимый процесс задачи A. Будем говорить, что для него выполнен *принцип максимума Понтрягина*, если существуют число α_0, векторы-строки $\alpha\in\mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta\in\mathbb{R}^{d(K)}$ и абсолютно непрерывные функции $\psi_x(t)$, $\psi_t(t)$ размерности n, 1 соответственно (где x и t — индексы, а не обозначения производных), такие что

(i) $\alpha_0\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$;
(ii) $\alpha_0+|\alpha|+|\beta|>0$;
(iii) $\alpha F\big(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)\big)=0$;
(iv) $-\dot\psi_x(t)=H_x\big(\psi_x(t),t,x(t),u(t)\big)$, $-\dot\psi_t(t)=H_t\big(\psi_x(t),t,x(t),u(t)\big)$;

(v) $\psi_x(t_0) = l_{x_0}\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$, $\psi_x(t_1) = -\, l_{x_1}\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$; $\psi_t(t_0) = = l_{t_0}\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$, $\psi_t(t_1) = -\, l_{t_1}\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$;

(vi) $H\big(\psi_x(t), t, x(t), u(t)\big) + \psi_t(t) = 0$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

(vii) $H(\psi_x(t), t, x(t), u') + \psi_t(t) \leqslant 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $u' \in U$.

Условия (i)—(v) называются условиями неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежёсткости, сопряжёнными уравнениями и условиями трансверсальности соответственно. Условие (vi) не имеет пока стандартного названия; «в рабочем порядке» будем называть его *законом изменения энергии*, так как из него и сопряжённого уравнения для ψ_t следует уравнение для функции H, которая в механических задачах, как правило, имеет смысл энергии системы:

$$\dot{H} = H_t$$

или

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

(В случае когда управляемая система автономна, т. е. $f = f(x, u)$ не зависит от t, получаем *закон сохранения энергии*: $\dot{H} = 0$, т. е. $H = \mathrm{const}$.)

Из условий (vi) и (vii) вытекает *условие максимума* функции Понтрягина:

$$\max_{u' \in U} H(\psi_x(t), t, x(t), u') = H\big(\psi_x(t), t, x(t), u(t)\big) \quad \text{для почти всех} \quad t \in [t_0, t_1],$$

которое и дало всей совокупности условий (i)—(vii) название *принцип максимума Понтрягина*.

Отметим, что обозначения $\psi_x(t)$ и $\psi_t(t)$ для сопряжённых переменных предложены А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным. Их удобство быстро выясняется при решении конкретных задач с многими фазовыми переменными.

Замечание 3. Можно показать, что уравнение для функции ψ_t (т. е. для $-H$) вытекает из остальных условий принципа максимума, т. е. оно не является независимым. (Ниже мы покажем это для автономной задачи.) Тем не менее его включение в число условий принципа максимума вполне оправдано не только связью с принципами механики, но и тем фактом, что во многих задачах удобно использовать это условие непосредственно, в «готовом виде», не занимаясь его выводом из остальных условий принципа максимума.

Необходимые условия сильного минимума даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Если процесс $\hat{w} = \big((\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]\big)$ доставляет сильный минимум в задаче* А, *то для него выполнен принцип максимума Понтрягина.*

Сначала мы докажем эту теорему для случая, когда отрезок времени фиксирован, а управляемая система автономна. (Последнее, впрочем, не обязательно.)

3. Принцип максимума для задачи на фиксированном отрезке времени

Рассмотрим следующую задачу B:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{5}$$

$$K\big(x(t_0), x(t_1)\big) = 0, \quad F\big(x(t_0), x(t_1)\big) \leqslant 0, \tag{6}$$

$$J = F_0\big(x(t_0), x(t_1)\big) \to \min. \tag{7}$$

Здесь отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован, функции F_0, F и K непрерывно дифференцируемы, а функция f непрерывна вместе с производной f_x. Минимум ищется среди всех пар (процессов) $w = (x, u) \in W := \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times L_\infty^r[t_0, t_1]$, где $\mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ есть пространство абсолютно непрерывных функций размерности n, а $L_\infty^r[t_0, t_1]$ — пространство измеримых ограниченных функций размерности r.

По определению допустимый процесс $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{u})$ доставляет *сильный минимум*, если существует $\varepsilon > 0$, такое что $J(w) \geqslant J(\hat{w})$ для всех допустимых пар $w = (x, u)$, удовлетворяющих условию $\|x - \hat{x}\|_C < \varepsilon$. Другими словами, сильный минимум в задаче B — это локальный минимум в пространстве W относительно полунормы $\|w\|' = \|x\|_C$.

Как и выше, вводим функцию Понтрягина $H(\psi, x, u) = \psi f(x, u)$, где ψ — n-мерная вектор-строка (в общей задаче A она обозначалась ψ_x), и концевую функцию Лагранжа $l(x_0, x_1) = (\alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K)(x_0, x_1)$.

Условия принципа максимума для допустимого процесса $w = (x, u)$ задачи B состоят в следующем: существуют число α_0, векторы-строки $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$ размерности n и константа $c \in \mathbb{R}$, такие что

(i′) $\alpha_0 \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$;

(ii′) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$;

(iii′) $\alpha F\big(x(t_0), x(t_1)\big) = 0$;

(iv′) $-\dot{\psi}(t) = H_x\big(\psi(t), x(t), u(t)\big)$;

(v′) $\psi(t_0) = l_{x_0}\big(x(t_0), x(t_1)\big)$ and $\psi(t_1) = -l_{x_1}\big(x(t_0), x(t_1)\big)$;

(vi′) $H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) = c$ почти всюду на $[t_0, t_1]$;

(vii′) $H(\psi(t), x(t), u') \leqslant c$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $u' \in U$.

Заметим, что здесь вместо сопряжённого уравнения на ψ_t мы пишем условие постоянства функции Понтрягина вдоль оптимального процесса (*«закон сохранения энергии»*, как и полагается в консервативной системе).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если процесс $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{u})$ доставляет сильный минимум в задаче* B, *то для него выполнен принцип максимума* (i′)—(vii′).

Доказательство мы проведём для случая, когда управление $\hat{u}(t)$ кусочно непрерывно. Общий случай, когда оптимальное управление измеримо, технически более сложен и, как правило, не рассматривается в стандартных курсах.

Предварительно изучим некоторые дифференциальные свойства управляемой системы

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{8}$$

на произвольном её решении $\big(x(t),u(t)\big)$ на отрезке $[t_0,t_1]$. Будем рассматривать управления, равномерно ограниченные некоторой константой: $|u(t)| \leqslant M$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно (впрочем, это несложно доказать и непосредственно), что если при этом $\|u-\hat{u}\|_1$ мала и начальное значение $x_0 = x(t_0)$ мало отличается от $\hat{x}(t_0)$, то решение $x(t)$ уравнения (8) всегда существует на всем отрезке $[t_0,t_1]$ и мало отличается от $\hat{x}(t)$ в норме пространства $C[t_0,t_1]$.

Введём для процесса $\big(x(t),u(t)\big)$ с кусочно-непрерывным управлением Понятие элементарной игольчатой вариации.

Понятие элементарной игольчатой вариации

Будем считать, что управление $u(t)$ непрерывно слева во всех точках полуинтервала $(t_0,t_1]$ и непрерывно справа при $t=t_0$. Фиксируем любую точку $\theta \in (t_0,t_1)$ и любое значение $v \in U$. Для каждого достаточно малого $\varepsilon \geqslant 0$ определим на отрезке $[t_0,t_1]$ новое управление

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v, & \text{если } t \in (\theta-\varepsilon,\theta), \\ u(t), & \text{если } t \notin (\theta-\varepsilon,\theta). \end{cases}$$

(При $\varepsilon = 0$ полуинтервал $(\theta-\varepsilon,\theta]$ пуст, и управление не меняется.) Отметим, что это управление по-прежнему непрерывно слева. Семейство функций $u_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0+$ называется *элементарной игольчатой вариацией* исходного управления $u(t)$ с параметрами (θ,v).

Пусть вектор $a \in \mathbb{R}^n$ мало отличается от $x_0 = x(t_0)$. Определим на отрезке $[t_0,t_1]$ фазовую переменную $x_\varepsilon(t)$ как решение задачи Коши для управляемой системы (8):

$$\dot{x}_\varepsilon = f(x_\varepsilon,u_\varepsilon), \quad x_\varepsilon(t_0) = a. \tag{9}$$

Если $\varepsilon \geqslant 0$ достаточно мало и a достаточно близко к x_0, то, как уже было сказано, решение задачи (9) существует на всём отрезке $[t_0,t_1]$, единственно и непрерывно в норме пространства $C[t_0,t_1]$ зависит от пары (a,ε). Примем это как установленный факт. Значение фазовой переменной $x_\varepsilon(t)$ в точке t_1 обозначим через $P(a,\varepsilon)$. Таким образом, имеем отображение

$$P\colon (a,\varepsilon) \longmapsto x_\varepsilon(t_1) \in \mathbb{R}^n,$$

которое определено и непрерывно на $\Omega(x_0) \times [0,\varepsilon_0)$, где $\Omega(x_0)$ — окрестность точки $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 > 0$. При этом очевидно $P(x_0,0) = x(t_1) =: x_1$.

Установим, что отображение P в точке $(a,\varepsilon) = (x_0,0)$ имеет производную по a и правую производную по ε, которые далее будем обозначать как $P_a(x_0,0)$ и $P_\varepsilon^+(x_0,0)$ соответственно.

Для нахождения производной по a в некотором направлении $\bar{a}$ надо, как известно, решить *уравнение в вариациях*

$$\dot{\bar{x}} = f_x(x,u)\bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{a}. \tag{10}$$

При этом $P_a(x_0,0)\bar{a} = \bar{x}(t_1)$. Обратим внимание, что если $x(t)$ мы будем мало менять относительно нормы пространства $C[t_0,t_1]$, а $u(t)$ мало менять относительно нормы пространства $L_1[t_0,t_1]$ (сохраняя его равномерную ограниченность априорной константой), то матрица $f_x(x,u)$ будет мало меняться относительно нормы пространства $L_1[t_0,t_1]$, а тогда, как известно, решение уравнения (10) будет мало меняться относительно нормы $C[t_0,t_1]$.

Для нахождения правой производной $P_\varepsilon^+(x_0,0)$ при фиксированном x_0 будем рассуждать следующим образом. Каждому $\varepsilon > 0$ соответствует своё решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (9); при $\varepsilon = 0$ имеем невозмущённое решение $x(t)$. Если $t < \theta$, то при достаточно малых ε оба решения в этой точке совпадают. Оценим разность $\Delta x_\varepsilon = x_\varepsilon - x$ в точке θ. Имеем

$$x(\theta) = x(\theta-\varepsilon) + \varepsilon f\big(x(\theta),u(\theta)\big) + o(\varepsilon),$$
$$x_\varepsilon(\theta) = x(\theta-\varepsilon) + \varepsilon f(x(\theta),v) + o(\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\Delta x_\varepsilon(\theta) = \varepsilon\cdot\Delta f(\theta,v) + o(\varepsilon),$$

где

$$\Delta f(\theta,v) = f(x(\theta),v) - f\big(x(\theta),u(\theta)\big).$$

Положим

$$\bar{x}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Delta x_\varepsilon(t)}{\varepsilon}.$$

Тогда $x_\varepsilon(t) = x(t)+\varepsilon\bar{x}(t)+o(\varepsilon)$. При этом левее точки θ очевидно имеем $\bar{x}(t) = 0$, в самой этой точке $\bar{x}(\theta) = \Delta f(\theta,v)$, а на отрезке $[\theta,t_1]$ обе функции x и x_ε удовлетворяют уравнению (8) с одним и тем же невозмущённым управлением, но с разными начальными значениями в точке θ. Поэтому, как и раньше, $\bar{x}$ удовлетворяет на отрезке $[\theta,t_1]$ уравнению в вариациях

$$\dot{\bar{x}} = f_x(x,u)\bar{x} \quad \text{с начальным значением} \quad \bar{x}(\theta) = \Delta f(\theta,v), \tag{11}$$

и тогда $P_\varepsilon^+(x_0,0) = \bar{x}(t_1)$.

Отметим, что $P_\varepsilon^+(x_0,0)$ зависит не только от параметров иголки (θ,v), но и от базовой пары $\big(x(t),u(t)\big)$, удовлетворяющей уравнению (8). Если последняя мало меняется в норме $\|x\|_C+\|u\|_1$ (при равномерно ограниченных управлениях) и пара значений $\big(\theta,u(\theta)\big)$ также меняется мало, то матрица $f_x\big(x(t),u(t)\big)$ мало изменится в норме L_1, начальный момент θ и начальное значение $\bar{x}(\theta)$ также изменятся мало, и тогда решение задачи Коши (11) мало изменится в норме C, а значит, мало изменится и его концевое значение $x(t_1)$.

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *В точке $(a,\varepsilon)=(x_0,0)$ отображение P имеет производную по a и правую производную по ε, которые выражаются формулами*

$$P_a(x_0,0)\bar{a}=\bar{x}(t_1) \quad \text{для всех} \quad \bar{a}\in\mathbb{R}^n,$$

где $\bar{x}(t)$ — решение задачи Коши (10) *на отрезке $[t_0,t_1]$,*

$$P_\varepsilon^+(x_0,0)=\bar{x}(t_1),$$

где $\bar{x}(t)$ — решение задачи Коши (11) *на отрезке $[\theta,t_1]$. Обе эти производные непрерывно зависят от изменения пары (x,u) в норме пространства $C\times L_1$ (при условии равномерной ограниченности управлений) и пары $\big(\theta,u(\theta)\big)\in\mathbb{R}^{1+r}$.*

Если теперь в качестве базового управления взять функцию $u_\varepsilon(t)$ при малом $\varepsilon>0$, в качестве начального значения взять вектор a, близкий к $x(t_0)$, а иголку строить в точке $\theta-\varepsilon$, то разность $u_\varepsilon-u$ будет мала в норме $L_1[t_0,t_1]$, разность $x_\varepsilon-x$ мала в норме $C[t_0,t_1]$, и в силу непрерывности слева функции $u(t)$ новое базовое значение $u_\varepsilon(\theta-\varepsilon)=u(\theta-\varepsilon)$ будет близко к старому $u(\theta)$. Тогда и решение задачи Коши (11) на отрезке $[\theta-\varepsilon,t_1]$, рассматриваемое на отрезке $[\theta,t_1]$, будет равномерно близко к старому решению. Поэтому из леммы 1 вытекает следствие.

Следствие. *Оператор P, соответствующий элементарной игольчатой вариации в точке θ, при любых значениях a, достаточно близких к $x(t_0)$, и любых достаточно малых $\varepsilon\geqslant 0$ имеет в точке (a,ε) производную $P_a(a,\varepsilon)$ и правую производную $P_\varepsilon^+(a,\varepsilon)$, которые непрерывно зависят от пары (a,ε).*

Конкретные выражения этих производных нам потребуются лишь для точки $(a,\varepsilon)=(x_0,0)$; они приведены выше.

Замечание 4. В случае, когда базовое управление измеримо, это следствие уже не имеет места даже если θ — *точка Лебега* функции $u(t)$. Дело в том, что в общем случае начальное значение для уравнения (11) даётся формулой

$$\bar{x}(\theta)=f(x(\theta),v)-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta} f\big(x(\theta),u(\tau)\big)\,d\tau,$$

если указанный предел существует. В самой точке θ он существует и равен $f\big(x(\theta),u(\theta)\big)$, так что по-прежнему $\bar{x}(\theta)=\Delta f(\theta,v)$, но в сдвинутой точке $\theta-\varepsilon$ при $\varepsilon>0$ этот предел может сильно измениться, и поэтому непрерывности правой производной по ε мы не получим. Можно гарантировать существование указанных производных лишь в данной точке $(x_0,0)$ и непрерывность самого отображения P в её окрестности. При этом мы выходим за рамки гладких задач и приходится использовать тонкие топологические факты типа теоремы Брауэра. В этом смысле возможности стандартных игольчатых вариаций довольно ограниченны. Ситуацию все же можно, по-видимому, исправить, если в качестве θ рассматривать *точки аппроксимативной непрерывности* функции $u(t)$ и полагать $u_\varepsilon(t)=v$ не на интервале $(\theta-\varepsilon,\theta)$, а на его пересечении с тем множеством, вдоль которого $u(t)$ непрерывна в точке θ. Но и тогда мы получим лишь строгую дифференцируемость при $\varepsilon = 0$, но не существование и непрерывность производной при $\varepsilon > 0$. Кроме того, такой способ потребует довольно сложных конструкций и глубоких фактов теории меры, что никак не годится для лекционного курса.

Тем не менее даже в случае измеримой функции $u(t)$ гладкость отображения P можно получить относительно просто, если игольчатую вариацию делать не путём *замены* данного управления $u(t)$ на выбранное значение v на интервале времени длины ε около точки θ, а путём «расшивки» этой точки до отрезка длины ε и *вставки* управления v на этом отрезке. (При этом весь отрезок $[t_0, t_1]$ увеличится до отрезка $[t_0, t_1 + \varepsilon]$.) По сути, это и будет результат упомянутой выше v-замены времени. (Букву v мы здесь вынужденно употребили в двух разных смыслах.)

Далее нам потребуется дифференцировать скалярную функцию вида $G(a, \varepsilon) = g\big(a, P(a, \varepsilon)\big)$, где $g(x_0, x_1)$ — дифференцируемая функция в окрестности точки $(\hat{x}_0, \hat{x}_1)$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Это удобно рассмотреть как отдельное свойство.

Пусть опять пара $\big(x(t), u(t)\big)$ есть решение уравнения (8). Введём для неё липшицеву функцию $\psi(t)$ (вектор-строку размерности n) как решение задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\psi f_x(x, u), \quad \psi(t_1) = -g_{x_1}(x_0, x_1). \tag{12}$$

Отметим, что $\psi(t)$ не зависит от игольчатой вариации и её параметров (θ, v).

Лемма 2. *Производная функции G по переменной a и правая производная этой функции по ε в точке $(x_0, 0)$ выражаются формулами*

$$G_a(x_0, 0)\bar{a} = \big(g_{x_0}(x_0, x_1) - \psi(t_0)\big)\bar{a} \quad \textit{для всех} \quad \bar{a} \in \mathbb{R}^n,$$
$$G_\varepsilon^+(x_0, 0) = -\psi(\theta) \cdot \Delta f(\theta, v).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — любое решение уравнения в вариациях $\dot{\bar{x}} = f_x(x, u)\bar{x}$ на некотором отрезке $[t', t'']$, неважно с каким начальным значением. Нетрудно убедиться, что произведение $\psi(t)\bar{x}(t)$ постоянно на этом отрезке. Действительно,

$$\frac{d}{dt}(\psi\bar{x}) = \dot{\psi}\bar{x} + \psi\dot{\bar{x}} = -\psi f_x\bar{x} + \psi f_x\bar{x} = 0.$$

(Этот факт верен для решения любого линейного уравнения $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ и *сопряжённого* к нему $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ с любой интегрируемой матрицей A.)

Возьмём теперь произвольное $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, и пусть $\bar{x}$ есть решение уравнения (10). Тогда с учётом леммы 1 получаем, что

$$G_a(\hat{x}_0, 0) = g_{x_0}\bar{a} + g_{x_1}P_a(\hat{x}_0, 0)\bar{a} = g_{x_0}\bar{a} + g_{x_1}\bar{x}(t_1) =$$
$$= g_{x_0}\bar{a} - \psi(t_1)\bar{x}(t_1) = g_{x_0}\bar{a} - \psi(t_0)\bar{x}(t_0) = \big(g_{x_0} - \psi(t_0)\big)\bar{a}.$$

Аналогично

$$G_\varepsilon^+(\hat{x}_0, 0) = g_{x_1}P_\varepsilon^+(\hat{x}_0, 0) = -\psi(t_1)\bar{x}(t_1) = -\psi(\theta)\bar{x}(\theta) = -\psi(\theta) \cdot \Delta f(\theta, v). \quad \square$$

Итак, мы изучили дифференциальные свойства элементарной игольчатой вариации. Однако, как известно, для доказательства принципа максимума в задаче (1)—(4) одной игольчатой вариации недостаточно. Поэтому определим следующее понятие.

Понятие пакета игольчатых вариаций

Рассмотрим опять базовую пару (теперь мы обозначим её $\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big)$) с кусочно непрерывным управлением $\hat{u}(t)$, которое считаем непрерывным слева во всех точках полуинтервала $(t_0, t_1]$ и непрерывным справа при $t = t_0$.

Пусть $\mathcal{N}$ — произвольный конечный набор пар (θ_i, v_i), $i = 1, \ldots, s$, где $\theta_1 \leqslant \ldots \leqslant \theta_s$ — любые точки из интервала (t_0, t_1), а $v_1, \ldots, v_s$ — любые точки из множества U. Пусть задан вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ с малыми неотрицательными компонентами ε_i. Построим вариацию управления, которая принимает значения v_i на полуинтервалах Δ_i длины ε_i около точек θ_i.

Определим эти полуинтервалы следующим образом. Если все точки θ_i различны, то полагаем $\Delta_i = (\theta_i - \varepsilon_i, \theta_i]$, $i = 1, \ldots, s$. Если же среди θ_i есть повторяющиеся, то для каждого набора повторяющихся значений $\theta_k = \ldots = \theta_{k+p}$ откладываем последовательно примыкающие полуинтервалы длины ε_{k+i} влево от точки θ_k, т. е. полагаем

$$\Delta_k = (\theta_k - \varepsilon_k, \theta_k), \quad \Delta_{k+1} = (\theta_k - \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}, \theta_k - \varepsilon_k) \;\; \text{и т. д.},$$

а для всех неповторяющихся значений θ_i полагаем, как прежде, $\Delta_i = (\theta_i - \varepsilon_i, \theta_i]$. Итак, для данного набора $\mathcal{N}$ и вектора $\varepsilon \geqslant 0$ мы определили полуинтервалы Δ_i длины ε_i. Если вектор ε достаточно мал, эти полуинтервалы не пересекаются и все находятся на отрезке $[t_0, t_1]$. Обозначим через $\tau_i(\varepsilon)$ правый конец полуинтервала Δ_i. Ясно, что он непрерывно зависит от вектора ε.

Определим теперь управление

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v_i, & \text{если } t \in \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, s, \\ \hat{u}(t), & \text{если } t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \Delta_i. \end{cases}$$

Семейство функций $u_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0+$ называется *пакетом игольчатых вариаций* исходного управления $\hat{u}(t)$.

Подставив $u_\varepsilon(t)$ в управляемую систему (5), получим задачу Коши (9) с некоторым начальным значением a. Как и в случае элементарной игольчатой вариации, из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что при достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ и при начальных значениях a, достаточно близких к $\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0)$, решение уравнения (9) существует, единственно и непрерывно зависит от набора (a, ε).

Таким образом, имеем отображение

$$P\colon (a, \varepsilon) \longmapsto x_\varepsilon(t_1) \in \mathbb{R}^n,$$

которое определено и непрерывно на $\Omega(\hat{x}_0) \times (\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^s_+)$, где $\Omega(\hat{x}_0)$ — окрестность точки $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, через $\mathcal{O}$ обозначена окрестность нуля в $\mathbb{R}^s$, $x_\varepsilon(t_1)$ — значение решения (9) в конечной точке $t = t_1$.

Из леммы 1 следует, что отображение P не только непрерывно, но и является гладким в следующем смысле.

Лемма 3. *В любой точке (a, ε) своей области определения отображение P имеет производную по a и правую производную по каждому ε_i, которые непрерывно зависят от пары (a, ε).*

Доказательство. Существование указанных производных (и их выражение через конкретные формулы) установлено в лемме 1. Далее, при изменении пары (a, ε) управление u_ε непрерывно меняется в норме пространства $L_1[t_0, t_1]$, соответствующее ему x_ε непрерывно меняется в норме пространства $C[t_0, t_1]$ и для каждой i-й иголки пара её «базовых» значений $\Big(\tau_i(\varepsilon), u_\varepsilon\big(\tau_i(\varepsilon)\big)\Big)$ меняется непрерывно при изменении ε в силу непрерывности слева функции $u(t)$. Поэтому в силу леммы 1 производные отображения P будут непрерывно зависеть от пары (a, ε) в окрестности точки $(\hat{x}_0, 0)$.

Поясним сказанное на примере двух иголок в точке θ со значениями v_1, v_2 на полуинтервалах $\Delta_1 = (\theta - \varepsilon_1, \theta]$, $\Delta_2 = (\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \theta - \varepsilon_1]$. По лемме 1 здесь $P^+_{e_1}$ выражается формулой для обычной элементарной иголки в точке θ, $P^+_{e_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bar{x}(t_1)$, где $\bar{x}(t)$ — решение задачи Коши (11) на отрезке $[\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, t_1]$ с начальным значением

$$\bar{x}(\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = f(\hat{x}(\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2), v_2) - f\big(\hat{x}(\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2), \hat{u}(\theta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\big).$$

Обе эти производные непрерывно зависят от $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ вплоть до границы квадранта $\mathbb{R}^2_+$. В частности, $P^+_{e_2}(\varepsilon_1, 0)$ соответствует начальному значению

$$\bar{x}(\theta - \varepsilon_1) = f(\hat{x}(\theta - \varepsilon_1), v_2) - f\big(\hat{x}(\theta - \varepsilon_1), \hat{u}(\theta - \varepsilon_1)\big),$$

а $P^+_{e_1}(0, \varepsilon_2)$ — начальному значению

$$\bar{x}(\theta - \varepsilon_2) = f(\hat{x}(\theta - \varepsilon_2), v_2) - f\big(\hat{x}(\theta - \varepsilon_2), \hat{u}(\theta - \varepsilon_2)\big). \qquad \square$$

Покажем теперь, что если $\varepsilon \in \operatorname{int} \mathbb{R}^s_+$ (кратко пишем $\varepsilon > 0$), то существуют обычные частные производные $P_{\varepsilon_i}(a, \varepsilon)$, совпадающие с правыми производными. Это одномерный факт, он вытекает из следующего утверждения, которое является несложным упражнением по математическому анализу.

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ при всех $x \geqslant 0$ имеет правую производную $\varphi'_{\text{пр}}(x)$, которая непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Тогда φ при всех $x > 0$ имеет обычную производную, которая совпадает с правой: $\varphi'(x) = \varphi'_{\text{пр}}(x)$.*

Доказательство дано в разделе «Приложение».

Из этой леммы и леммы 3 следует, что отображение P непрерывно дифференцируемо в области $\varepsilon > 0$, точнее на $\Omega(\hat{x}_0) \times \big(\mathcal{O} \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^s_+\big)$. Кроме того, его производная имеет предел в тех точках (a, ε), где $\varepsilon \in \partial \mathbb{R}^s_+$; его мы также будем обозначать $P'(a, \varepsilon)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что отображение P

строго дифференцируемо в точке $(\hat{x}_0, 0)$, т. е. разность $P(a,\varepsilon) - P'(\hat{x}_0, 0)(a,\varepsilon)$ липшицева в окрестности точки $(\hat{x}_0, 0)$ (пересечённой, естественно, с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s_+$) с константой, стремящейся к нулю вместе с радиусом окрестности. (Понятие строгой дифференцируемости мы считаем уже изложенным ранее в данном курсе оптимального управления.)

Таким образом, гладкость отображения P, т. е. непрерывность его частных производных, сводится к непрерывности производных одной элементарной иголки в зависимости от базового процесса. Эту идею мы заимствовали у Магарил—Ильяева [9].

Ключевой пункт нашего доказательства состоит в том, что отображение P можно продолжить на «полную» окрестность точки $(\hat{x}_0, 0)$, т. е. на произвольные $a \in \Omega(\hat{x}_0)$ и произвольные малые значения вектора ε, сохраняя его строгую дифференцируемость в точке $(\hat{x}_0, 0)$. Это вытекает из следующего общего утверждения.

Лемма 5. *Пусть отображение* $P\colon \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}^m$, *где* K — *замкнутый выпуклый конус в* $\mathbb{R}^s$ *с непустой внутренностью, строго дифференцируемо в точке* $(0,0)$. *Тогда его можно продолжить до отображения* $\tilde{P}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, *также строго дифференцируемого в точке* $(0,0)$.

Доказательство леммы 5 мы отнесли в «Приложение». (У нас в качестве конуса K выступает неотрицательный ортант $\mathbb{R}^s_+$.) Указанное продолжение будем обозначать той же буквой P. Отметим, что для $K = \mathbb{R}^s_+$ и гладкого P (как в нашем случае) можно обойтись и без понятия строгой дифференцируемости, используя лишь стандартное понятие непрерывной дифференцируемости (см. [18]).

Лемма 6. *Пусть отображение* $P\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s_+ \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно дифференцируемо внутри своей области определения и его производная непрерывна вплоть до границы. Тогда его можно продолжить до отображения* $\tilde{P}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, *непрерывно дифференцируемого на всём пространстве.*

Доказательство мы также отнесли в «Приложение».

Обратим ещё раз внимание, что все предыдущие рассуждения относятся только к дифференциальным свойствам управляемой системы на пакете игольчатых вариаций и не связаны непосредственно с оптимизационной задачей. Поэтому они и сами по себе представляют интерес и могут быть использованы и в других вопросах теории управления.

Теперь мы готовы к доказательству принципа максимума для задачи B.

Принцип максимума для пакета игольчатых вариаций

Пусть процесс $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{u})$ доставляет сильный минимум в задаче B. Зафиксируем некоторый пакет $\mathcal{N}$ игольчатых вариаций. С помощью леммы 5 (или леммы 6) продолжим отображение P на полную окрестность точки $(\hat{x}_0, 0)$, где

$\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0)$, с сохранением строгой дифференцируемости в этой точке (или соответственно непрерывной дифференцируемости в её окрестности).

В конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ с элементами (a, ε) рассмотрим следующую *задачу* $\mathrm{Z}(\mathcal{N})$:

$$J\big(a, P(a,\varepsilon)\big) \to \min, \quad F\big(a, P(a,\varepsilon)\big) \leqslant 0, \quad K\big(a, P(a,\varepsilon)\big) = 0, \quad -\varepsilon \leqslant 0.$$

Эта задача является сужением задачи B, и поэтому из того, что пара $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет сильный минимум в задаче B, вытекает, что пара $(\hat{a} = \hat{x}_0, \hat{\varepsilon} = 0)$ доставляет локальный минимум в задаче $\mathrm{Z}(\mathcal{N})$ и, следовательно, удовлетворяет условиям стационарности.

Выпишем эти условия для точки $(\hat{x}_0, 0)$ в задаче $\mathrm{Z}(\mathcal{N})$. Они состоят в том, что существуют множители Лагранжа

$$\alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}, \quad \beta \in \mathbb{R}^{d(K)}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^s,$$

такие что выполнены условия

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0, \quad \alpha F(\hat{x}_0, \hat{x}_1) = 0, \tag{14}$$

$$\mathcal{L}_a(\hat{x}_0, 0) = 0, \quad \mathcal{L}_\varepsilon(\hat{x}_0, 0) = 0, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{L}(a, \varepsilon) = (\alpha_0 J + \alpha F + \beta K)\big(a, P(a,\varepsilon)\big) - \gamma\varepsilon = l\big(a, P(a,\varepsilon)\big) - \gamma\varepsilon \,—$$

функция Лагранжа задачи $\mathrm{Z}(\mathcal{N})$.

Отметим ещё раз, что, в отличие от ряда других доказательств принципа максимума, в том числе от приведённых в [2, 9, 15], мы не строим конус вариаций $\bar{x}(t_1)$, а просто рассматриваем конечномерную задачу, соответствующую данному пакету игольчатых вариаций, и пользуемся уже известными (и изложенными ранее в курсе) условиями стационарности для этой задачи.

Расшифруем условия (15). Пусть липшицева функция $\psi(t)$ — решение *сопряжённого уравнения* (к уравнению (10) вдоль оптимального процесса $(\hat{x}, \hat{u})$)

$$\dot{\psi} = -\psi f_x\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big) \tag{16}$$

с граничным условием $\psi(t_1) = -l_{x_1}(\hat{x}_0, \hat{x}_1)$. Обратим внимание, что ψ зависит только от набора множителей $(\alpha_0, \alpha, \beta)$ (поскольку концевая функция l выражается через них) и не зависит непосредственно от выбранного пакета вариаций. Более того, ψ единственным образом выражается через $(\alpha_0, \alpha, \beta)$.

По лемме 2, применённой к функции $g = \mathcal{L}$, первое равенство в (15) означает, что для всех $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}_a(\hat{x}_0, 0)\bar{a} = \big(l_{x_0}(\hat{x}_0, \hat{x}_1) - \psi(t_0)\big)\bar{a} = 0,$$

откуда следует, что $\psi(t_0) = l_{x_0}(\hat{x}_0, \hat{x}_1)$. Таким образом, функция ψ удовлетворяет следующим граничным условиям на концах отрезка:

$$\psi(t_0) = l_{x_0}, \quad \psi(t_1) = -l_{x_1}. \tag{17}$$

Они называются *условиями трансверсальности*.

Второе равенство в (15) означает, что для каждого i

$$\mathcal{L}_{\varepsilon_i}(\hat{x}_0, 0) = -\psi(\theta_i) \cdot \Delta f(\theta_i, v_i) - \gamma_i = 0, \tag{18}$$

т. е.

$$\psi(\theta_i) \cdot \Delta f(\theta_i, v_i) = \psi(\theta_i)\Big(\big(f(\hat{x}(\theta_i), v_i)\big) - f\big(\hat{x}(\theta_i), \hat{u}(\theta_i)\big)\Big) = -\gamma_i \leqslant 0.$$

Введём функцию Понтрягина $H(\psi, x, u) = \psi(x, u)$. Тогда последнее условие означает, что выполнено *конечнозначное условие максимума*

$$H(\psi(\theta_i), \hat{x}(\theta_i), v_i) \leqslant H\big(\psi(\theta_i), \hat{x}(\theta_i), \hat{u}(\theta_i)\big), \quad i = 1, \ldots, s, \tag{19}$$

а сопряжённое уравнение (16) может быть записано в виде

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\big(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)\big). \tag{20}$$

(Условие (19) можно трактовать так: при любом θ_i из данного пакета функция $H(\psi(\theta_i), \hat{x}(\theta_i), u)$ принимает максимальное значение по всем значениям управления u, имеющимся в этом пакете в точке θ_i, при оптимальном $u = \hat{u}(\theta_i)$.)

Итак, для данного пакета $\mathcal{N}$ мы получили набор множителей Лагранжа, которые порождают функцию $\psi(t)$, так что выполнены условия (13), (14), (16), (17), (19). Эти множители Лагранжа, вообще говоря, зависят от пакета. Условия (13), (14), (16), (17) одни и те же для всех пакетов, а условие максимума (19) непосредственно связано с каждым отдельным пакетом. Наша цель теперь — перейти к условию максимума для всех $\theta \in (t_0, t_1)$ и $v \in U$ с набором множителей, не зависящим от θ и v.

Предварительно заметим, что если $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$, то $l = 0$, поэтому $\psi(t_1) = 0$. Так как ψ удовлетворяет линейному однородному уравнению, $\psi(t) \equiv 0$. Тогда по (18) получаем, что $\gamma = 0$, что противоречит условию нетривиальности в (14). Следовательно, всё определяется множителями $(\alpha_0, \alpha, \beta)$, а условие нетривиальности можно записать как $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$. Заменим его условием нормировки $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$.

3.1. Организация условий оптимальности, переход к универсальному принципу максимума

Обозначим через $\Lambda(\mathcal{N})$ множество всевозможных наборов множителей $(\alpha_0, \alpha, \beta)$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1, \quad \alpha F(\hat{x}_0, \hat{x}_1) = 0, \tag{21}$$

$$\dot{\psi} = -\psi f_x\big(\hat{x}(t), \hat{u}(t)\big), \quad \psi(t_0) = l_{x_0}, \quad \psi(t_1) = -l_{x_1} \tag{22}$$

и конечнозначному условию максимума (19). (Такой набор может быть не один.) Нетрудно убедиться, что $\Lambda(\mathcal{N})$ — непустой компакт в пространстве $\mathbb{R}^{1+d(F)+d(K)}$.

Таким образом, перебирая всевозможные пакеты $\mathcal{N}$, мы для каждого из них получаем свой непустой компакт $\Lambda(\mathcal{N})$. Покажем, что семейство всех этих компактов $\{\Lambda(\mathcal{N})\}_{\mathcal{N}}$ образует *центрированную систему*. Для этого введём отношение порядка в множестве всех пакетов. Будем говорить, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$, если каждая пара (θ_i, v_i) из $\mathcal{N}_1$ входит (возможно, с другим индексом i) и в $\mathcal{N}_2$. Ясно, что для любых двух пакетов $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ найдётся третий, содержащий каждый из них, например их объединение. При расширении пакета $\mathcal{N}$ множество $\Lambda(\mathcal{N})$ сужается, т. е. включение $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$ влечёт обратное включение $\Lambda(\mathcal{N}_1) \supset \Lambda(\mathcal{N}_2)$. Пусть теперь имеется конечный набор компактов $\Lambda(\mathcal{N}_1), \ldots, \Lambda(\mathcal{N}_r)$. Возьмём любой пакет $\mathcal{N}$, содержащий в себе все пакеты $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_r$. Тогда непустой компакт $\Lambda(\mathcal{N})$ содержится в каждом из компактов $\Lambda(\mathcal{N}_1), \ldots, \Lambda(\mathcal{N}_r)$ и, следовательно, содержится в их пересечении. Отсюда вытекает центрированность системы $\{\Lambda(\mathcal{N})\}_{\mathcal{N}}$ и, значит, непустота её пересечения

$$\Lambda_* = \bigcap_{\mathcal{N}} \Lambda(\mathcal{N}).$$

Возьмём произвольный набор множителей $(\alpha_0, \alpha, \beta) \in \Lambda_*$, и пусть $\psi(t)$ — сопряжённая функция, соответствующая этому набору. Для этого набора по определению выполнены условия (21), (22), а условие (19) максимума функции Понтрягина по управлению выполнено теперь *для любой пары* $(\theta, v) \in (t_0, t_1) \times U$, ибо любая такая пара входит в какой-нибудь пакет $\mathcal{N}$. Из кусочной непрерывности функции $\hat{u}(t)$ следует, что тогда условие (19) выполнено и для концов отрезка.

Таким образом, условия (i′)—(v′) теоремы 2 доказаны.

Постоянство функции Понтрягина для оптимального процесса

Нам осталось доказать, что вдоль оптимального процесса

$$H\big(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)\big) = \mathrm{const} \quad \text{почти всюду на} \quad [t_0, t_1], \tag{23}$$

т. е. выполнено условие (vi′). Тогда условие (vii′) будет следовать из условия максимума (19). Покажем, что условие (23) вытекает из уже доказанных условий принципа максимума. Это можно сделать двумя способами:

1) показать это непосредственно;
2) получить (23) автоматически из уже доказанных условий принципа максимума после перехода к задаче на нефиксированном отрезке времени.

Второй способ, на наш взгляд, более простой и естественный (см. следующий раздел). Достоинство первого способа состоит в том, что он устанавливает непосредственную зависимость условия (23) от остальных условий принципа максимума. Этот способ рассматривался в [2, 15]. Здесь мы приводим модификацию рассуждений из [2] (в [15] проводятся более сложные рассмотрения).

Рассмотрим функцию

$$h(t, v) = H(\psi(t), \hat{x}(t), v) = \psi(t) f(\hat{x}(t), v).$$

Нам надо показать, что $h\big(t,\hat u(t)\big)$ постоянна на $[t_0,t_1]$. Будем рассуждать следующим образом.

Во-первых, согласно условию максимума

$$h(t,v)\leqslant h\big(t,\hat u(t)\big)\quad\text{для всех}\quad t\in[t_0,t_1]\quad\text{и всех}\quad v\in U. \tag{24}$$

Далее, сама функция $h(t,v)$ и её частная производная $h_t(t,v)$ непрерывны на $[t_0,t_1]\times U$, и в любой точке непрерывности управления $\hat u(t)$

$$h_t\big(t,\hat u(t)\big)=0. \tag{25}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}h_t\big(t,\hat u(t)\big)&=\big(\dot\psi(t)f(\hat x(t),v)+\psi(t)f_x(\hat x(t),v)\dot{\hat x}(t)\big)\big|_{v=\hat u(t)}=\\&=\Big(-\psi(t)f_x\big(\hat x(t),\hat u(t)\big)f(\hat x(t),v)+\psi(t)f_x(\hat x(t),v)f\big(\hat x(t),\hat u(t)\big)\Big)\Big|_{v=\hat u(t)}=0.\end{aligned}$$

Покажем теперь, что в любой точке непрерывности $\hat u(t)$ также и полная производная равна нулю:

$$\frac{d}{dt}h\big(t,\hat u(t)\big)=0.$$

Возьмём любую такую точку t, и пусть точки $\tau_2>\tau_1$ сходятся к t. Положим $\Delta\tau=\tau_2-\tau_1$. Имеем

$$\begin{aligned}&h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big)=\\&\qquad=h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_2)\big)+h\big(\tau_1,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big).\end{aligned} \tag{26}$$

В правой части этого равенства модуль первой разности оценивается по теореме о конечном приращении:

$$\Big|h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_2)\big)\Big|\leqslant\max_{\tau\in[\tau_1,\tau_2]}\Big|h_t\big(\tau,\hat u(\tau_2)\big)\Big|\cdot|\Delta\tau|=o(\Delta\tau),$$

ибо стоящий здесь максимум стремится к $\Big|h_t\big(t,\hat u(t)\big)\Big|=0$. Вторая разность в (26) неположительна в силу условия максимума (24). Таким образом,

$$h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big)\leqslant o(\Delta\tau).$$

С другой стороны, эту же разность можно представить в виде

$$\begin{aligned}&h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big)=\\&\qquad=h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_2,\hat u(\tau_1)\big)+h\big(\tau_2,\hat u(\tau_1)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big),\end{aligned} \tag{27}$$

откуда по тем же причинам вытекает, что

$$h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big)\geqslant o(\Delta\tau).$$

Следовательно,

$$h\big(\tau_2,\hat u(\tau_2)\big)-h\big(\tau_1,\hat u(\tau_1)\big)=o(\Delta\tau).$$

Отсюда вытекает, что полная производная $\dot h\big(t,\hat u(t)\big)$ существует и равна нулю во всех точках непрерывности управления $\hat u(t)$, т. е. $h\big(t,\hat u(t)\big)=\mathrm{const}$ на каждом интервале непрерывности $\hat{u}(t)$. Покажем, что для всех интервалов эта константа одна и та же.

Пусть $\tau \in (t_0, t_1)$ — точка разрыва управления $\hat{u}(t)$ (согласно нашему предположению, их не более чем конечное число). Покажем, что $h\big(t, \hat{u}(t)\big)$ не имеет разрыва в этой точке. При $t > \tau$ в силу условия (24) имеем

$$h\big(t, \hat{u}(t)\big) \geqslant h\big(t, \hat{u}(\tau - 0)\big).$$

Переходя к пределу по $t \to \tau + 0$, получаем

$$h\big(\tau, \hat{u}(\tau + 0)\big) \geqslant h\big(\tau, \hat{u}(\tau - 0)\big).$$

Аналогично при $t < \tau$ в силу (24) имеем

$$h\big(t, \hat{u}(t)\big) \geqslant h\big(t, \hat{u}(\tau + 0)\big).$$

Переходя к пределу по $t \to \tau - 0$, получаем

$$h\big(\tau, \hat{u}(\tau - 0)\big) \geqslant h\big(\tau, \hat{u}(\tau + 0)\big).$$

Следовательно,

$$h\big(\tau, \hat{u}(\tau - 0)\big) = h\big(\tau, \hat{u}(\tau + 0)\big).$$

Отсюда и из предыдущего вытекает, что $h\big(t, \hat{u}(t)\big) = \mathrm{const}$ на всём отрезке $[t_0, t_1]$. Тем самым условие (23) доказано, а вместе с ним полностью доказана и теорема 2.

4. Доказательство принципа максимума для задачи на нефиксированном отрезке времени

Вернёмся к задаче (1)—(4) на нефиксированном отрезке времени. Мы назвали её задачей А. Пусть $w^0 = \big(\big(x^0(t), u^0(t)\big) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]\big)$ — допустимый процесс в этой задаче, для которого имеет место сильный минимум. (Здесь нам будет удобно снабжать x, u индексом 0.) Как и ранее, предположим, что управление $u^0(t)$ кусочно непрерывно.

Сведём задачу А к некоторой вспомогательной задаче на *фиксированном* отрезке времени с тем, чтобы затем воспользоваться теоремой 2. Для этого введём «новое время» τ, меняющееся на отрезке $[\tau_0, \tau_1] := [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, а исходное время t будем рассматривать как ещё одну фазовую переменную $t = t(\tau)$, подчинённую уравнению

$$\frac{dt}{d\tau} = v(\tau), \tag{28}$$

где $v(\tau) > 0$ — ещё одно управление. Исходные переменные x, u в новом времени — это $\tilde{x}(\tau) = x\big(t(\tau)\big)$, $\tilde{u}(\tau) = u\big(t(\tau)\big)$; они подчинены уравнению

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = v(\tau) f\big(t(\tau), \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\big). \tag{29}$$

Концевой блок задачи выглядит теперь так:

$$K\big(t(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), t(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1)\big) = 0, \tag{30}$$

$$F\big(t(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), t(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1)\big) \leqslant 0, \tag{31}$$

$$J = F_0\big(t(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), t(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1)\big) \to \min. \tag{32}$$

Мы видим, что он зависит только от концевых значений фазовых переменных t и $\tilde{x}$. Задачу (28)—(32) назовём задачей $\tilde{\mathrm{A}}$. В ней $t(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$ — фазовые переменные, а $v(\tau)$, $\tilde{u}(\tau)$ — управления. Условие $v > 0$ следует рассматривать как ограничение на новое управление.

Процессу w^0 в задаче A мы поставим в соответствие процесс

$$\tilde{w}^0 = \big(\big(v^0(\tau), t^0(\tau), \tilde{x}^0(\tau), \tilde{u}^0(\tau)\big) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1]\big)$$

в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$, где

$$v^0(\tau) \equiv 1, \quad t^0(\tau) \equiv \tau, \quad \tilde{x}^0(\tau) \equiv x^0(\tau), \quad \tilde{u}^0(\tau) \equiv u^0(\tau). \tag{33}$$

Ясно, что этот процесс допустим в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$. Более того, из того, что процесс w^0 доставляет сильный минимум в задаче A, вытекает, что процесс $\tilde{w}^0$ доставляет сильный минимум в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$. Это легко устанавливается от противного. По теореме 2 для $\tilde{w}^0$ выполнен принцип максимума. Выпишем его условия для процесса $\tilde{w}^0$ в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$, опуская теперь тильду и учитывая, что $dt^0/d\tau \equiv 1$ и $t^0(\tau) \equiv \tau$, так что производную по τ по-прежнему можно обозначать точкой.

Концевая функция Лагранжа в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$ имеет тот же вид, что и в задаче A:

$$l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K.$$

Функция Понтрягина в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$ имеет вид

$$\tilde{H}(\psi_x, \psi_t, t, x, u, v) = (\psi_x f(t, x, u) + \psi_t)v.$$

Сформулируем условия принципа максимума для процесса w^0 в задаче $\tilde{\mathrm{A}}$. Существуют число α_0, векторы $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, липшицевы функции $\psi_t(\tau)$ и $\psi_x(\tau)$ размерности 1 и n соответственно, такие что выполнены следующие условия:

— условие неотрицательности и нетривиальности

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0; \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \tag{34}$$

— условие дополняющей нежёсткости

$$\alpha F\big(t^0(\tau_0), x^0(\tau_0), t^0(\tau_1), x^0(\tau_1)\big) = 0; \tag{35}$$

— сопряжённые уравнения

$$-\dot{\psi}_x(\tau) = \tilde{H}_x = \psi_x(\tau) f_x\big(t^0(\tau), x^0(\tau), u^0(\tau)\big), \tag{36}$$

$$-\dot{\psi}_t(\tau) = \tilde{H}_t = \psi_x(\tau) f_t\big(t^0(\tau), x^0(\tau), u^0(\tau)\big), \tag{37}$$

— условие трансверсальности

$$\psi_x(\tau_0) = l_{x(\tau_0)}, \quad \psi_x(\tau_1) = -l_{x(\tau_1)}, \tag{38}$$

$$\psi_t(\tau_0) = l_{t(\tau_0)}, \quad \psi_t(\tau_1) = -l_{t(\tau_1)}, \tag{39}$$

— условие максимальности по управлениям u, v

$$\begin{aligned} &v\big(\psi_x(\tau) f(t^0(\tau), x^0(\tau), u) + \psi_t(\tau)\big) \leqslant \\ &\quad\leqslant v^0(\tau)\big(\psi_x(\tau) f\big(t^0(\tau), x^0(\tau), u^0(\tau)\big) + \psi_t(\tau)\big) \\ &\text{для всех} \quad u \in U, \quad v > 0, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]. \end{aligned} \tag{40}$$

При $u = u^0(\tau)$ из максимальности $\tilde{H}$ по $v > 0$ в точке $v^0 = 1$ следует, что

$$\psi_x(\tau) f\big(t^0(\tau), x^0(\tau), u^0(\tau)\big) + \psi_t(\tau) = 0 \quad \text{на} \quad [\tau_0, \tau_1], \tag{41}$$

и тогда (40) означает, что

$$\psi_x(\tau) f\big(t^0(\tau), x^0(\tau), u^0(\tau)\big) + \psi_t(\tau) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in U, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]. \tag{42}$$

Учитывая, что $t^0(\tau) = \tau$, мы видим, что получены все условия (i)—(vii) принципа максимума для процесса w^0 в задаче A. Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что для автономной задачи из (37) вытекает, что $\psi_t(\tau) = \mathrm{const}$, и тогда (41) означает, что $H\big(\psi_x(t), x^0(t), u^0(t)\big) = -\psi_t = \mathrm{const}$, т. е., как было сказано выше, мы автоматически получаем условие (23).

5. Приложение

Для доказательства леммы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f, такая что для всех $x \in [a, b)$ существует $f'_{\text{пр}}(x) > 0$. Тогда $f(b) > f(a)$. Отсюда также следует, что f строго возрастает на $[a, b]$.*

Доказательство. Считаем, что $f(a) = 0$. Так как $f'_{\text{пр}}(a) > 0$, то $f > 0$ на интервале $(a, a + \delta)$ при некотором $\delta > 0$. Возьмём любую точку a_1 из этого интервала, и пусть a_2 — максимальная из тех точек x, для которых $f \geqslant f(a_1)$ на отрезке $[a_1, x]$. Если $a_2 < b$, то поскольку $f'_{\text{пр}}(a_2) > 0$, в некоторой правой полуокрестности точки a_2 будет $f > f(a_2) \geqslant f(a_1)$, что противоречит максимальности a_2. Следовательно, $a_2 = b$, и тем самым лемма доказана. □

С помощью этой леммы докажем аналог теоремы Лагранжа о конечном приращении для правой производной.

Лемма 8. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b)$ имеет $f'_{\text{пр}}(x)$, непрерывную по x. Тогда*

$$f(b) - f(a) = f'_{\text{пр}}(\tilde{x})(b - a) \quad \textit{при некотором} \quad \tilde{x} \in [a, b).$$

Доказательство. Вычитая из f линейную функцию, приходим к случаю $f(a) = f(b) = 0$ (т. е. надо доказать аналог теоремы Ролля). Допустим, что утверждение леммы неверно, например $f'_{\text{пр}}(x) > 0$ для всех $x \in [a,b)$. Тогда по лемме 7 имеем $f(b) > f(a)$, что противоречит условию. □

Доказательство леммы 4. Возьмём любую точку $x > 0$. Без нарушения общности считаем, что $\varphi'_{\text{пр}}(x) = 0$. Нам надо показать, что и левая производная $\varphi'_{\text{л}}(x)$ равна нулю, т. е. что $|\varphi(x) - \varphi(x-\delta)| = o(\delta)$ при $\delta \to 0+$. По лемме 8

$$|\varphi(x) - \varphi(x-\delta)| = \varphi'_{\text{пр}}(\tilde{x})\delta \quad \text{при некотором} \quad \tilde{x} \in [x, x-\delta).$$

Ввиду непрерывности правой производной $\varphi'_{\text{пр}}(\tilde{x}) \to \varphi'_{\text{пр}}(x) = 0$, откуда следует требуемое. □

Доказательство леммы 5. Не нарушая общности, считаем, что $P'(0,0)=0$, т. е. отображение P липшицево в r-окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times K$ с константой $\mu(r) \to 0$ при $r \to 0$. Зафиксируем любой вектор $h \in \operatorname{int} K$ и для каждого $y \in \mathbb{R}^s$ положим $\lambda(y) = \min\{\lambda \geqslant 0 \mid y + \lambda h \in K\}$. Построим отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^s \to K$ по формуле $\varphi(y) = y + \lambda(y)h$. (Это проекция $\mathbb{R}^s$ на K вдоль вектора h.) Для всех $y \in K$ очевидно $\varphi(y) = y$. Ясно, что φ липшицево с некоторой константой L. Тогда отображение $\tilde{P}(x,y) = P\big(x, \varphi(y)\big)$ определено на всём $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ и липшицево в r-окрестности точки $(0,0)$ с константой $L\mu(r) \to 0$. Следовательно, оно имеет строгую производную в нуле, равную нулю. □

Отметим, что эта лемма справедлива и в случае более общего отображения $P\colon X \times K \to Z$, где X, Y, Z — произвольные нормированные пространства, а $K \subset Y$ — замкнутый выпуклый конус с непустой внутренностью. Доказательство остаётся без изменений.

Для доказательства леммы 6, как и в [18], установим следующее, по сути одномерное (и, конечно, хорошо известное, см., например, [19]), свойство.

Лемма 9. *Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}^m$ имеет производную во всех внутренних точках области определения, которая непрерывна вплоть до границы этой области. Продолжим f на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k_+$, положив для $y < 0$*

$$\tilde{f}(x,y,z) = -f(x,-y,z) + 2f(x,0,z).$$

Тогда полученное отображение $\tilde{f}$ обладает теми же свойствами гладкости уже на своей области определения.

Доказательство представляет собой элементарную проверку.

Доказательство леммы 6 состоит из последовательного применения леммы 9 ко всем компонентам вектора ε. □

Авторы выражают благодарность В. А. Дыхте за ценные замечания и Г. Г. Магарил-Ильяеву за полезные обсуждения.

Литература

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

[3] Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные скользящие режимы // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1243—1245.

[4] Гирсанов И. В. Лекции по теории экстремальных задач. — М.: МГУ, 1970.

[5] Дмитрук А. В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. — М.: Наука, ВНИИСИ, 1990. — С. 26—42.

[6] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 395—453.

[7] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Трансляции уравнений Эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1969. — Т. 9, № 6. — С. 1263—1284.

[8] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.

[9] Магарил-Ильяев Г. Г. Принцип максимума Понтрягина. Формулировка и доказательство // Докл. РАН. — 2012. — Т. 442, № 1. — С. 20—23.

[10] Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. — М.: Мир, 1968.

[11] Матвеев А. С., Якубович В. А. Абстрактная теория оптимального управления. — СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1994.

[12] Милютин А. А. Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления // УМН. — 1970. — Т. 25, № 5 (155). — С. 110—116.

[13] Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004.

[14] Оптимальное управление / Под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008.

[15] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.

[16] Carlson D. A. An elementary proof of the maximum principle for optimal control problems governed by a Volterra integral equation // J. Optim. Theory Appl. — 1987. — Vol. 54, no. 1. — P. 43—61.

[17] Dmitruk A. V. On the development of Pontryagin's Maximum principle in the works of A. Ya. Dubovitskii and A. A. Milyutin // Control Cybernet. — 2009. — Vol. 38, no. 4a. — P. 923—958.

[18] Korytowski A. A simple proof of the maximum principle with endpoint constraints // Control Cybernet. — 2014. — Vol. 43, no. 1. — P. 5—14.

[19] Lichtenstein L. Eine elementare Bemerkung zur reellen Analysis // Math. Z. — 1929. — B. 30, No. 1. — S. 794—795.

[20] Makowsky K., Neustadt L. W. Maximum principle for problems with mixed constraints // SIAM J. Control Optim. — 1974. — Vol. 12, no. 2. — P. 184—228.

[21] Michel P. Une demonstration elémentaire du principe du maximum de Pontryagin // Bull. Math. Econom. — 1977. — Vol. 14. — P. 9—23.