

Булевозначный анализ порядково ограниченных операторов

А. Г. КУСРАЕВ

*Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и СО-А*
e-mail: kusraev@smath.ru

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: sskut@member.ams.org

УДК 517.98+512.8

Ключевые слова: булевозначная модель, принцип переноса, спуск, подъём, порядково ограниченный оператор, дизъюнктность, нерасширяющий оператор, оператор Магарама.

Аннотация

Статья представляет собой обзор некоторых новых приложений булевозначных моделей теории множеств к анализу порядково ограниченных операторов в векторных решётках.

Abstract

A. G. Kusraev, S. S. Kutateladze, Boolean-valued analysis of order-bounded operators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 89—126.

This is a survey of some recent applications of Boolean-valued models of set theory to the study of order-bounded operators in vector lattices.

Введение

Булевозначным анализом называют аппарат исследования произвольных математических объектов, основанный на сравнительном изучении их вида в двух моделях теории множеств, конструкции которых основаны на принципиально различных булевых алгебрах. В качестве этих моделей фигурируют классический универсум фон Неймана и специально построенный булевозначный универсум, в котором теоретико-множественные понятия и утверждения получают нетрадиционные толкования. Одновременное использование двух моделей для изучения одного объекта — фамильная черта так называемых нестандартных методов современной математики. В этой связи булевозначный анализ принято относить к разновидностям нестандартного анализа.

Своим возникновением булевозначный анализ обязан выдающемуся достижению П. Дж. Коэна, установившему в начале 1960-х годов непротиворечивость

добавления отрицания гипотезы континуума СН к аксиомам теории множеств Цермело—Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя о совместимости СН с ZFC установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость СН от обычных аксиом ZFC (см. [14, 34]).

Первые приложения булевозначных моделей к изучению пространств Канторовича, функциональных векторных решеток и положительных операторов появились в работах Е. И. Гордона [9—11] и Г. Такеути [71—73]. Дальнейшее развитие отражено в [25].

Цель настоящей статьи — дать обзор некоторых новых приложений булевозначных моделей теории множеств к анализу порядково ограниченных операторов в векторных решётках. В разделе 1 конспективно приведены основные конструкции булевозначных моделей, адаптированные к задачам анализа. Остальные три раздела посвящены приложениям к трём классам операторов в векторных решётках: нерасширяющим операторам, операторам, сохраняющим дизъюнктивность, и операторам типа условного математического ожидания.

Необходимые сведения по булевым алгебрам можно найти в [6, 68], по векторным решёткам и положительным операторам — в [7, 13, 33, 52, 58, 64, 76], по булевозначным моделям теории множеств — в [34, 74], по булевозначному анализу — в [24, 25].

Всюду в тексте $\mathbb{B}$ — фиксированная полная булева алгебра с нулём 0 и единицей 1 . Разбиение единицы в $\mathbb{B}$ — семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$, для которого $b_\xi \wedge b_\eta = 0$ при $b_\xi \neq b_\eta$ и $\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$.

Все рассматриваемые векторные решётки предполагаются архимедовыми. Знак $:=$ означает «равно по определению», а $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначают множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Булевы алгебры полос и порядковых проекторов векторной решётки X обозначаются через $\mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{P}(X)$. Универсальное пополнение (максимальное расширение) векторной решётки X обозначается через X^u . Идеальный центр $\mathcal{Z}(X)$ векторной решётки X представляет собой f -алгебру. Пусть $\text{Orth}(X)$ и $\text{Orth}^\infty(X)$ — f -алгебры ортоморфизмов и расширенных ортоморфизмов на X соответственно. Тогда $\mathcal{Z}(X) \subset \text{Orth}(X) \subset \text{Orth}^\infty(X)$. Через $L^\sim(X, Y)$ обозначается пространство всех порядково ограниченных операторов из X в Y . Если Y — пространство Канторовича, то $L^\sim(X, Y)$ также пространство Канторовича.

1. Булевозначный анализ

1.1. Булевозначное моделирование

В этом и следующем разделах коротко представлена необходимая информация о булевозначных моделях теории множеств. Подробное изложение имеется

в [24, 25, 34]. Всюду ниже ZF — теория множество Цермело—Френкеля, AC — аксиома выбора, ZFC := ZF + AC.

1.1.1. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра. Иерархия множеств $\{\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} : \alpha \in \text{On}\}$ определяется рекурсией по $\alpha \in \text{On}$, где On — класс всех ординалов. Именно, для произвольного ординала α полагают

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \{x : x \text{ — функция} \wedge \exists \beta (\beta < \alpha \wedge \text{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \wedge \text{Im}(x) \subset \mathbb{B})\}.$$

Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ или, другими словами, *класс $\mathbb{B}$ -множеств* вводится формулой

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}.$$

В случае двухэлементной булевой алгебры $2 := \{0, 1\}$ данное определение представляет копию классического *универсума фон Неймана*

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathbb{V}_\alpha,$$

где

$$\mathbb{V}_0 := \emptyset, \quad \mathbb{V}_{\alpha+1} := \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha), \quad \mathbb{V}_\beta := \bigcup_{\alpha < \beta} \mathbb{V}_\alpha,$$

β — предельный ординал (см. [25, теорема 4.2.8]).

1.1.2. Возьмём произвольную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ теории ZFC. *Булеву оценку истинности* $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ вводим двойной индукцией, учитывая характер построения формул из атомарных и задавая оценки атомарных формул $x \in y$ и $x = y$. При этом естественным образом интерпретируются пропозициональные связи и кванторы (например, $\llbracket \varphi_1 \vee \varphi_2 \rrbracket := \llbracket \varphi_1 \rrbracket \vee \llbracket \varphi_2 \rrbracket$ и $\llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket := \bigwedge \{\llbracket \varphi(x) \rrbracket : x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\}$). Булевы оценки для атомарных формул вводятся формулами

$$\llbracket x \in y \rrbracket = \bigvee_{t \in \text{dom}(y)} (y(t) \wedge \llbracket t = x \rrbracket),$$

$$\llbracket x = y \rrbracket = \bigvee_{t \in \text{dom}(x)} (x(t) \Rightarrow \llbracket t \in y \rrbracket) \wedge \bigvee_{t \in \text{dom}(y)} (y(t) \Rightarrow \llbracket t \in x \rrbracket).$$

($x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$). Через $\Rightarrow$ обозначается операция $(a \Rightarrow b) := (a^* \vee b)$ в $\mathbb{B}$, где a^* — *булево дополнение* элемента $a \in \mathbb{B}$. Подробности можно найти в [25, 34].

1.1.3. Принцип переноса. Для любой теоремы φ теории ZFC выполняется $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ (также в теории ZFC), т. е. φ истинна в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Если $\varphi(\cdot)$ — формула ZFC, то для любого элемента x из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, фраза « x удовлетворяет $\varphi(\cdot)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ », или, короче, « $\varphi(x)$ истинна внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ » означает, что $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = 1$. Это обстоятельство записывают также как $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x)$.

1.1.4. Имеется естественная эквивалентность $x \sim y \iff \llbracket x = y \rrbracket = 1$ на классе $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Выбирая представителя с наименьшим рангом из каждого

класса эквивалентности, или, точнее, применяя «приём Фреге—Рассела—Скотта», приходим к *отделимому булевозначному универсуму* $\bar{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$, для которого $x = y \iff \llbracket x = y \rrbracket = \mathbb{1}$ (см. [25, § 4.5]). В дальнейшем полагаем $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bar{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$.

1.1.5. Для заданных $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $b \in \mathbb{B}$ определим функцию $bx: z \mapsto b \wedge x(z)$ ($z \in \text{dom}(x)$). Здесь предполагается, что $b\emptyset := \emptyset$ для любых $b \in \mathbb{B}$. Заметим, что элемент $bx \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ корректно определён для любых $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $b \in \mathbb{B}$ (см. [25, § 4.3]).

1.1.6. Принцип перемешивания. Пусть $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$, т. е. $\sup_{\xi \in \Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ и $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbf{0}$ при $\xi \neq \eta$. Для любого семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственный элемент x из (отделимого) булевозначного универсума, такой что $\llbracket x = x_\xi \rrbracket \geq b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Этот элемент x называют *перемешиванием* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и обозначают $\text{mix}_{\xi \in \Xi} b_\xi x_\xi$.

1.1.7. Принцип максимума. Пусть $\varphi(x)$ — формула теории ZFC. Тогда (в ZFC) существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющий равенству $\llbracket (\exists x) \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(x_0) \rrbracket$.

В частности, если внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ истинно утверждение «выполняется $\varphi(x)$ для некоторого x », то существует элемент x_0 в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (в смысле универсума $\mathbb{V}$), для которого $\llbracket \varphi(x_0) \rrbracket = \mathbb{1}$. Символически:

$$(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\exists x) \varphi(x)) \implies ((\exists x_0) \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_0)).$$

1.2. Правила Эшера

В этом разделе представлены способы взаимодействия универсумов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, основанные на операциях канонического вложения, спуска и подъёма.

1.2.1. Начнём с канонического вложения универсума фон Неймана в булевозначный универсум. Для $x \in \mathbb{V}$ обозначим через $x^\wedge$ *стандартное имя* x в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. элемент, определяемый следующей схемой рекурсии:

$$\emptyset^\wedge := \emptyset, \quad \text{dom}(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\}, \quad \text{Im}(x^\wedge) := \{\mathbb{1}\}.$$

Работая с отделимым булевозначным универсумом $\bar{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$, мы сохраняем обозначение $x^\wedge$ для выделенного элемента из соответствующего класса эквивалентности. Отображение $x \mapsto x^\wedge$ называют *каноническим вложением* $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Формула называется *ограниченной*, если любая связанная переменная x встречается в виде $(\forall x \in y)$ или $(\exists x \in y)$ для некоторого y . Переменная *связанная*, если она попадает в область действия какого-нибудь квантора.

1.2.2. Ограниченный принцип переноса. Для каждой ограниченной формулы φ теории ZFC и любого набора $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ имеет место эквивалентность

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

1.2.3. Для произвольного элемента x из (отделимого) булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ класс $x\downarrow$ определяется формулой

$$x\downarrow := \{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y \in x \rrbracket = \mathbb{1}\}.$$

Этот класс называют *спуском* элемента x . При этом класс $x\downarrow$ является множеством, т. е. $x\downarrow \in \mathbb{V}$ для любого $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Если $\llbracket x \neq \emptyset \rrbracket = \mathbb{1}$, то $x\downarrow \neq \emptyset$.

1.2.4. Пусть f — отображение из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Это означает, что f , X и Y — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, причём $\llbracket f : X \rightarrow Y \rrbracket = \mathbb{1}$. Существует единственное отображение $f\downarrow$ из $X\downarrow$ в $Y\downarrow$, такое что

$$\llbracket f\downarrow(x) = f(x) \rrbracket = \mathbb{1} \quad (x \in X\downarrow).$$

При этом для любого непустого подмножества A множества X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (т. е. $\llbracket A \subset X \rrbracket = \mathbb{1}$) выполняется $f\downarrow(A\downarrow) = f(A)\downarrow$. Отображение $f\downarrow$ из $X\downarrow$ в $Y\downarrow$ называют *спуском* f из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Отображение $f\downarrow$ обладает свойством *экстенциональности*:

$$\llbracket x = x' \rrbracket \leq \llbracket f\downarrow(x) = f\downarrow(x') \rrbracket \quad (x, x' \in X\downarrow).$$

Для спусков композиции отображений $g \circ f$, обратного отображения f^{-1} и тождественного отображения I_X имеют место следующие правила:

$$(g \circ f)\downarrow = g\downarrow \circ f\downarrow, \quad (f^{-1})\downarrow = (f\downarrow)^{-1}, \quad (I_X)\downarrow = I_{X\downarrow}.$$

1.2.5. Для $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим через $(x_1, \dots, x_n)^{\mathbb{B}}$ упорядоченную n -ку внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Предположим, что P — это n -местное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $\llbracket P \subset X^n \wedge \rrbracket = \mathbb{1}$ ($n \in \omega$). Тогда существует n -местное отношение P' на $X\downarrow$, такое что

$$(x_1, \dots, x_n) \in P' \iff \llbracket (x_1, \dots, x_n)^{\mathbb{B}} \in P \rrbracket = \mathbb{1}.$$

Допуская некоторую вольность, для отношения P' также используют обозначение $P\downarrow$ и называют его *спуском* отношения P .

1.2.6. Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. x — множество, составленное из $\mathbb{B}$ -значных множеств, или, в символической записи, $x \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Пусть $\emptyset\uparrow := \emptyset$, а для $x \neq \emptyset$ положим $\text{dom}(x\uparrow) = x$ и $\text{im}(x\uparrow) = \{\mathbb{1}\}$. Элемент $x\uparrow$ неотделимого универсума (т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : \llbracket y = x\uparrow \rrbracket = \mathbb{1}\}$) называют *подъёмом* множества x . Для соответствующего элемента отделимого универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ сохраняют те же название и обозначение.

1.2.7. Пусть $X, Y, f \in \mathcal{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$ и f — отображение из X в Y . Для существования отображения $f\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющего условию

$$\llbracket f\uparrow(x) = f(x) \rrbracket = \mathbb{1} \quad (x \in X),$$

необходимо и достаточно, чтобы f было *экстенционально*, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\llbracket x = x' \rrbracket \leq \llbracket f(x) = f(x') \rrbracket \quad (x, x' \in X).$$

Отображение f с указанным свойством единственно и удовлетворяет соотношению $f\uparrow(A\uparrow) = f(A)\uparrow$ ($A \subset X$).

Композиция экстенциональных отображений экстенциональна, причём

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (g \circ f)\uparrow = g\uparrow \circ f\uparrow.$$

Отметим также, что если f и f^{-1} экстенциональны, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (f\uparrow)^{-1} = (f^{-1})\uparrow$.

1.2.8. Возьмём непустое множество X , т. е. $X \in \mathbb{V}$ и $X \neq \emptyset$. Пусть $\iota := \iota_X$ обозначает ограничение на X канонического вложения: $\iota: x \mapsto x^\wedge$ ($x \in X$). Тогда $\iota(X)\uparrow = X^\wedge$ и $X = \iota^{-1}(X^\wedge\downarrow)$. Рассмотрим произвольный элемент $Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий непустое множество. Используя указанные соотношения, можно распространить операцию подъёма на отображения f из X в $Y\downarrow$ и операцию спуска на соответствия g из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Именно, положим $f\uparrow := (f \circ \iota)\uparrow$ и $g\downarrow := g\downarrow \circ \iota$. Отображения $f\uparrow$ и $g\downarrow$ называют *модифицированным подъёмом* f и *модифицированным спуском* g . (Если контекст исключает путаницу, то говорят по-прежнему о спусках и подъёмах и используют простые стрелки.) Легко убедиться, что $g\uparrow$ — единственное отображение из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющее условию

$$\llbracket f\uparrow(x^\wedge) = f(x)\uparrow \rrbracket = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Аналогично $g\downarrow$ — единственное отображение из X в $Y\downarrow$, для которого

$$g\downarrow(x) = g(x^\wedge)\downarrow \quad (x \in X).$$

1.2.9. Для данного множества $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим через $\text{mix } X := \text{mix}(X)$ множество всех перемешиваний вида $\text{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Имеют место следующие *правила сокращения стрелок*, или, как ещё говорят, *правила Эшера*.

Пусть X и X' — подмножества $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $f: X \rightarrow X'$ — экстенциональное отображение. Предположим, что элементы $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таковы, что $\llbracket Y \neq \emptyset \rrbracket = \llbracket g: Y \rightarrow Y' \rrbracket = \mathbb{1}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X\uparrow\downarrow &= \text{mix}(X), & Y\downarrow\uparrow &= Y; \\ f\uparrow\downarrow &= f, & g\downarrow\uparrow &= g. \end{aligned}$$

Имеются и другие правила сокращения стрелок, но они нам не понадобятся.

1.3. Булевозначные числа и векторные решётки

Здесь мы рассмотрим булевозначную интерпретацию поля вещественных (комплексных) чисел и векторных решёток.

1.3.1. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум. В силу принципа максимума существует элемент $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $\llbracket \mathcal{R} \text{ — поле действительных чисел} \rrbracket = \mathbb{1}$. Если формула $\varphi(x)$ представляет собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля (для x), то она эквивалентна ограниченной формуле. Так как для поля действительных чисел $\mathbb{R}$ формула $\varphi(\mathbb{R})$ истинна, то согласно ограниченному принципу переноса $\llbracket \varphi(\mathbb{R}^\wedge) \rrbracket = \mathbb{1}$, т. е. $\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ — архимедово упорядоченное поле} \rrbracket = \mathbb{1}$. Можно считать при этом, что $\mathbb{R}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{R}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

1.3.2. Пусть $\mathbb{R}$ — несущее множество поля $\mathcal{R}$, на котором заданы алгебраические операции и порядок, обозначаемые через $\oplus$, $\otimes$ и $\otimes$ соответственно. Тогда $\mathcal{R}$ представляет собой упорядоченную пятёрку $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; символически: $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = (\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Спуском поля $\mathcal{R}$ назовём множество $\mathbb{R}\downarrow$, на котором определены операции $\oplus\downarrow$, $\otimes\downarrow$ и предикат $\otimes\downarrow$ в соответствии с правилами 1.2.4 и 1.2.5, а также имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$; символически: $\mathcal{R}\downarrow = (\mathbb{R}\downarrow, \oplus\downarrow, \otimes\downarrow, \otimes\downarrow, 0^\wedge, 1^\wedge)$. Умножение элементов $\mathcal{R}\downarrow$ на действительные числа определяется правилом

$$y = \lambda x \iff [y = \lambda^\wedge \otimes x] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{R}\downarrow, \lambda \in \mathbb{R}).$$

1.3.3. Теорема Гордона. Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathcal{R}\downarrow$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное пространство Канторовича с порядковой единицей $\mathbb{1} = 1^\wedge$. Более того, существует булев изоморфизм χ булевой алгебры $\mathbb{B}$ на базу $\mathbb{P}(\mathcal{R}\downarrow)$, такой что для любых $x, y \in \mathcal{R}\downarrow$ и $b \in \mathbb{B}$ справедливы эквивалентности

$$\chi(b)x = \chi(b)y \iff b \leq [x = y], \quad \chi(b)x \leq \chi(b)y \iff b \leq [x \leq y]. \quad (\text{G})$$

1.3.4. Векторную решётку называют *f-алгеброй*, если она одновременно является вещественной алгеброй, удовлетворяющей двум условиям (для любых $a, x, y \in X_+$):

- 1) из $x \geq 0$ и $y \geq 0$ следует $xy \geq 0$;
- 2) $x \perp y = 0$ влечёт $(ax) \perp y$ и $(xa) \perp y$.

Напомним, что по определению $x \perp y$ означает $|x| \wedge |y| = 0$. Умножение в архимедовой *f-алгебре* коммутативно и ассоциативно. *Полупростой* или *точной* называют *f-алгебру*, в которой $xy = 0$ влечёт $x \perp y$ для любых x и y . Расширенное пространство Канторовича $\mathcal{R}\downarrow$ со спущенной операцией умножения является полупростой *f-алгеброй* с кольцевой единицей $bbu = 1^\wedge$.

1.3.5. В силу принципа максимума существует элемент $\mathcal{C} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\mathcal{C} \text{ — поле комплексных чисел}] = \mathbb{1}$. Так как $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, то согласно ограниченному принципу переноса

$$[\mathbb{C}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \oplus i^\wedge \mathbb{R}^\wedge] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, можно считать также, что $\mathbb{C}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathcal{C}$. Если 1 — единица поля $\mathbb{C}$, то $1^\wedge$ — единица поля $\mathcal{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Будем писать i вместо $i^\wedge$ и $\mathbb{1}$ вместо $1^\wedge$. По теореме Гордона $\mathcal{C}\downarrow = \mathcal{R}\downarrow \oplus i\mathcal{R}\downarrow$ — расширенное комплексное пространство Канторовича, т. е. комплексификация векторной решётки $\mathcal{R}\downarrow$. Более того, $\mathcal{C}\downarrow$ является *комплексной f-алгеброй*, определяемой как комплексификация вещественной *f-алгебры*, с единицей $1^\wedge$.

1.3.6. Пусть A — некоторая *f-алгебра*. Векторную решётку X называют *f-модулем над A*, если выполнены следующие условия:

- 1) X является модулем над A (с умножением $A \times X \ni (a, x) \mapsto ax \in X$);

- 2) $ax \geq 0$ для всех $a \in A_+$ и $x \in X_+$;
 3) $x \perp y$ влечёт $ax \perp y$ для всех $a \in A_+$ и $x, y \in X$.

Векторная решётка X допускает естественную структуру f -модуля над $\text{Orth}(X)$, т. е. $\pi x := \pi(x)$ для всех $x \in X$ и $\pi \in \text{Orth}(X)$. Как видно, X — f -модуль над любой f -подалгеброй $A \subset \text{Orth}(X)$ и, в частности, над $\mathcal{Z}(X)$. Будем говорить, что A -модуль X является *правильным*, если естественное представление $\mathbb{P}(A)$ в X служит правильной подалгеброй булевой алгебры $\mathbb{P}(X)$.

1.3.7. Теорема. Пусть X — правильный f -модуль над $\mathcal{Z}(Y)$, где Y — некоторое пространство Канторовича. Положим $\mathbb{B} = \mathbb{P}(Y)$ и $A := \mathcal{R}_\downarrow$. Тогда существует элемент $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, такой, что $[\mathcal{X}]$ — векторная решётка над $\mathcal{R}_\downarrow = \mathbb{1}$, $\mathcal{X}_\downarrow$ — f -модуль над A и существует $\mathcal{Z}(Y)$ -линейный изоморфизм h из X в $\mathcal{X}_\downarrow$, для которого $\mathcal{X}_\downarrow = \text{mix}(h(X))$.

1.3.8. Теорема Гордона установлена в [9]. Понятие f -модуля введено в [41].

1.4. Булевозначные функционалы

Анализ некоторых классов линейных операторов можно свести к изучению функционалов посредством погружения в подходящую булевозначную модель. Ниже X — векторная решётка, Y — фундамент расширенного пространства Канторовича $\mathcal{R}_\downarrow$.

1.4.1. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и $\mathcal{R}$ — поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тот факт, что X — архимедова векторная решётка над полем $\mathbb{R}$, можно записать ограниченной формулой, например $\varphi(X, \mathbb{R})$. В силу ограниченного принципа переноса $[\varphi(X^\wedge, \mathbb{R}^\wedge)] = \mathbb{1}$. Последнее же равносильно тому, что $X^\wedge$ — архимедова векторная решётка над полем $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Пусть $X^{\wedge\sim} := L^\sim(X^\wedge, \mathcal{R})$ — пространство порядково ограниченных $\mathbb{R}^\wedge$ -линейных функционалов из $X^\wedge$ в $\mathcal{R}$. Точнее, $\mathcal{R}$ рассматривается как векторное пространство над полем $\mathbb{R}^\wedge$, и в силу принципа максимума существует элемент $X^{\wedge\sim} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, такой что

$[\mathcal{X}^{\wedge\sim}]$ — векторное пространство над $\mathcal{R}$
 всех $\mathbb{R}^\wedge$ -линейных порядково ограниченных функционалов из $X^\wedge$ в $\mathcal{R}$,
 упорядоченное конусом положительных функционалов] = $\mathbb{1}$.

Функционал $\tau \in X^{\wedge\sim}$ положителен, если $[(\forall x \in X^\wedge) \tau(x) \geq 0] = \mathbb{1}$.

1.4.2. Легко проверяется, что теорема Рисса—Канторовича остаётся в силе, если X — векторная решётка над плотным подполем $\mathbb{P}$ поля $\mathbb{R}$, а Y — пространство Канторовича (над $\mathbb{R}$). Тем самым векторное пространство $L_\mathbb{P}^\sim(X, Y)$ над $\mathbb{R}$ всех $\mathbb{P}$ -линейных порядково ограниченных операторов из X в Y , упорядоченное конусом положительных операторов, служит пространством Канторовича. Булевозначная интерпретация этого факта приводит к выводу, что $X^\wedge := L_{\mathbb{R}^\wedge}^\sim(X^\wedge, \mathbb{R})$ является пространством Канторовича внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B} := \mathbb{P}(Y)$. В частности, спуск $X^{\wedge\sim} \downarrow$ пространства $X^{\wedge\sim}$ также будет пространством Канторовича.

Пусть $L_{dp}^\sim(X, Y)$ обозначает пространство всех порядково ограниченных операторов из X в Y , сохраняющих дизъюнктивность. Следующий результат основан на конструкции 1.2.8.

1.4.3. Теорема. Пусть X — векторная решётка, а Y — расширенное пространство Канторовича, реализованное как $Y = \mathcal{R}\downarrow$. Модифицированный подъём $T\uparrow$ оператора $T \in L^\sim(X, Y)$ представляет собой порядково ограниченный $\mathbb{R}^\wedge$ -линейный функционал на $X^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $\llbracket T\uparrow \in X^{\wedge\sim} \rrbracket = \mathbb{1}$. Отображение $T \mapsto T\uparrow$ осуществляет решёточный изоморфизм между пространствами Канторовича $L^\sim(X, Y)$ и $X^{\wedge\sim}\downarrow$.

1.4.4. Следствие. Для операторов $R, S \in L^\sim(X, Y)$ положим $\sigma := S\uparrow$ и $\tau := T\uparrow$. Имеют место следующие эквивалентности:

- 1) $S \leq T \iff \llbracket \sigma \leq \tau \rrbracket = \mathbb{1}$;
- 2) $S = |T| \iff \llbracket \sigma = |\tau| \rrbracket = \mathbb{1}$;
- 3) $S \perp T \iff \llbracket \sigma \perp \tau \rrbracket = \mathbb{1}$;
- 4) $\llbracket T \in \text{Hom}(X, Y) \rrbracket \iff \llbracket \tau \in \text{Hom}(X^\wedge, \mathcal{R}) \rrbracket = \mathbb{1}$;
- 5) $T \in L_{dp}^\sim(X, Y) \iff \llbracket \tau \in (X^{\wedge\sim})_{dp} \rrbracket = \mathbb{1}$.

1.4.5. Рассмотрим векторную решётку X и порядковый идеал D в ней. Линейный оператор T из D в X называют *нерасширяющим*, если $x \perp y$ влечёт $Tx \perp y$ для всех $x \in D$ и $y \in X$ или, что эквивалентно, $Tx \in \{x\}^{\perp\perp}$ для всех $x \in D$ (дизъюнктивные дополнения берутся в X). Если X — векторная решётка с главными проекциями, то оператор $T: D \rightarrow E$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, если T коммутирует с порядковыми проекторами: $\pi Tx = T\pi x$ для всех $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $x \in D$.

1.4.6. Пусть $\text{End}_N(X_{\mathbb{C}})$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в $X_{\mathbb{C}}$, где $X := \mathcal{R}\downarrow$. Ясно, что $\text{End}_N(X_{\mathbb{C}})$ — комплексное векторное пространство. Более того, $\text{End}_N(X_{\mathbb{C}})$ будет точным унитарным модулем над кольцом $X_{\mathbb{C}}$, если определить оператор gT формулой $gT: x \mapsto g \cdot Tx$ ($x \in X_{\mathbb{C}}$). Это следует из того, что умножение на элемент $X_{\mathbb{C}}$ представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов — нерасширяющий оператор.

1.4.7. Обозначим через $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$ -линейных отображений из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Тогда $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C})\downarrow$ — точный унитарный модуль над f -алгеброй $X_{\mathbb{C}}$.

1.4.8. Утверждение. Линейный оператор в пространстве Канторовича X или $X_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален.

Доказательство. Как видно из теоремы Гордона, для линейного оператора $T: X \rightarrow X$ условие экстенциональности $\llbracket x = y \rrbracket \leq \llbracket Tx = Ty \rrbracket$ ($x, y \in X = \mathcal{R}\downarrow$) означает, что для любых $x, y \in X$ и $\pi \in \mathbb{P}(X)$ из равенства $\pi x = \pi y$ следует $\pi Tx = \pi Ty$. Ввиду линейности T последнее равносильно условию

$\pi x = 0 \implies \pi T x = 0$ ($x \in X$, $\pi \in \mathbb{P}(X)$). Если взять $y := \pi^\perp u$, получим, что $\pi T \pi^\perp = 0$, или, что то же самое, $\pi T = \pi T \pi$. Согласно пункту 1.4.5 T — нерасширяющий оператор. $\square$

1.4.9. Теорема. Модули $\text{End}_N(X_{\mathbb{C}})$ и $\text{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathcal{C}) \downarrow$ изоморфны. Изоморфизм устанавливается путём постановки в соответствие нерасширяющему оператору его подъёма. То же самое остаётся в силе, если заменить $\mathcal{C}$ и $\mathbb{C}$ на $\mathcal{R}$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

Доказательство. Согласно утверждению 1.4.8 применимы конструкции 1.2.4, 1.2.7 и правила сокращения 1.2.9. $\square$

2. Нерасширяющие операторы

2.1. Проблема Викстеда и функциональное уравнение Коши

В этом разделе мы покажем, что изучение нерасширяющих линейных операторов в расширенном пространстве Канторовича сводится к анализу функционального уравнения Коши.

2.1.1. Проблема Викстеда. Описать векторные решётки, в которых любой нерасширяющий линейный оператор является порядково ограниченным.

Эту задачу сформулировал Э. Викстед в [75]. Этапы решения представлены в [1, 2, 19, 20, 47, 62]. Комбинированный подход изложен в [21]. Обзор основных идей и результатов по этой проблеме и её модификациям можно найти в [49].

Пусть X — расширенное пространство Канторовича, T — нерасширяющий линейный оператор в X . По теореме Гордона можем считать, что $X = \mathcal{R} \downarrow$, где $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $\mathbb{B} = \mathbb{B}(X)$. Более того, согласно теореме 1.4.9 можно также считать, что $T = \tau \downarrow$, где $\tau \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — внутренний $\mathbb{R}^\wedge$ -линейный оператор из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$. При этом T будет порядково ограниченным в том и только в том случае, когда

$\llbracket \tau \rrbracket$ является порядково ограниченным

(т. е. он ограничен на любом отрезке $[a, b] \subset \mathcal{R}$) $\llbracket \tau \rrbracket = \mathbb{1}$.

2.1.2. Через $\mathbb{F}$ обозначаем числовое поле, совпадающее с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Функциональное уравнение Коши* с неизвестной функцией $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ имеет вид

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}).$$

Нетрудно убедиться, что решение этого уравнения автоматически оказывается $\mathbb{Q}$ -однородным, т. е. удовлетворяет ещё одному функциональному уравнению: $f(qx) = qf(x)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$ и $x \in \mathbb{F}$.

В связи с проблемой Викстеда нас интересует более общая ситуация. А именно, будем рассматривать систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{F}), \end{cases} \quad (\text{L})$$

где $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$, содержащее $\mathbb{Q}$. Обозначим через $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Как видно, решение системы (L) — это $\mathbb{P}$ -линейные функции из $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ в $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

2.1.3. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, а $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$ — пространство всех функций из $\mathcal{E}$ в $\mathbb{F}$. Множество всех решений системы (L) представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, изоморфное $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$. Изоморфизм осуществляется постановкой в соответствие решению f его ограничения $f|_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}$. Обратный изоморфизм $\varphi \mapsto f_{\varphi}$ действует следующим образом: если $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathbb{F})$, то по определению

$$f_{\varphi}(x) := \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi(e) \psi(e) \quad (x \in \mathbb{F}_{\mathbb{P}}),$$

где $x = \sum_{e \in \mathcal{E}} \psi(e)e$ — разложение x по базису Гамеля $\mathcal{E}$.

2.1.4. Теорема.

1. Произвольное решение системы уравнений (L) либо $\mathbb{F}$ -линейно, либо имеет график, всюду плотный в пространстве $\mathbb{F}^2 := \mathbb{F} \times \mathbb{F}$.
2. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ и $f_{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — единственное $\mathbb{P}$ -линейное продолжение функции $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда f порядково ограничена в том и только в том случае, когда $\varphi(e)/e = \text{const}$ ($e \in \mathcal{E}$).

Доказательство. Доказательство аналогично случаю $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ (см. [32, 51]). $\square$

2.1.5. Рассмотрим теперь $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство решений системы (L) — комплексификация пространства решений той же системы при $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Точнее, если $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $\mathbb{P}_0$ -линейная функция, то существует единственная $\mathbb{P}$ -линейная функция $\tilde{g}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$\tilde{g}(z) = g(x) + ig(y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Наоборот, если $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — $\mathbb{P}$ -линейная функция, то существует единственная пара $\mathbb{P}_0$ -линейных функций $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $f(z) = \tilde{g}_1(z) + i\tilde{g}_2(z)$ ($z \in \mathbb{C}$). Таким образом, любое решение f системы (L) имеет вид $f = f_1 + if_2$, где $f_1, f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{P}_0$ -линейны и $f_i(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). Будем говорить, что f монотонна или ограничена, если таковы функции f_1 и f_2 .

2.1.6. Теорема. Пусть $\mathbb{P}$ — плотное подполе поля $\mathbb{F}$, причём $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$, если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Равносильны следующие утверждения:

- 1) $\mathbb{F} = \mathbb{P}$;
- 2) любое решение системы (L) является порядково ограниченным.

Доказательство. Импликация (1) $\implies$ (2) тривиальна. Противоположную импликацию докажем от противного. Предположение $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$ означает, что базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ содержит по крайней мере два ненулевых несовпадающих элемента $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$. Определим функцию $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{F}$ так, чтобы $\varphi(e_1)/e_1 \neq \varphi(e_2)/e_2$. Тогда $\mathbb{P}$ -линейная функция $f = f_{\varphi}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, совпадающая с φ на $\mathcal{E}$, не может быть порядково ограниченной по теореме 2.1.4. $\square$

2.1.7. Если к системе (L) добавлено уравнение $f(xy) = f(x)f(y)$ ($x, y \in \mathbb{F}$), то ненулевые решения полученной системы называют $\mathbb{P}$ -эндоморфизмами поля $\mathbb{F}$. Если же к (L) добавлено уравнение $f(xy) = f(x)y + xf(y)$ ($x, y \in \mathbb{F}$), то решения такой системы именуют $\mathbb{P}$ -дифференцированиями поля $\mathbb{F}$. Вопрос о существовании $\mathbb{P}$ -дифференцирований и нетривиальных $\mathbb{P}$ -эндоморфизмов поля можно анализировать по указанной выше схеме, но вместо базиса Гамеля нужно привлекать *базис трансцендентности*. Интерпретация таких результатов приводит к существованию нерасширяющих эндоморфизмов и дифференцирований в расширенной f -алгебре (см. [20, 21], а также [25]).

2.2. Локально одномерные векторные решётки

В этом разделе обсуждается понятие локального базиса Гамеля, которое восходит к работе [39], а в обсуждаемом контексте впервые использовано в [1, 2].

2.2.1. Говорят, что в X имеется *кофинальное множество* порядковых проекторов, если для любой полосы $B \subset X$ существует порядковый проектор $\pi \in \mathbb{P}(X)$, такой что $\pi(X) \subset B$. Пусть X — векторная решётка с кофинальным множеством порядковых проекторов. Скажем, что $x, y \in X$ *различаются* на $\pi \in \mathbb{P}(X)$, если $\pi|x - y|$ — порядковая единица в $\pi(X)$, или, эквивалентно, $\pi(X) \subset |x - y|^{\perp\perp}$. Как видно, x и y различаются на π в том и только в случае, если $\rho x = \rho y$ влечёт $\pi\rho = 0$ для любого $\rho \in \mathbb{P}(X)$. Подмножество $\mathcal{E} \subset X$ называют *локальным линейно независимым* или *d-независимым*, если для любого ненулевого порядкового проектора π в X , любого набора различающихся на π элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ равенство $\pi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ влечёт за собой, что $\lambda_k = 0$ для всех $k := 1, \dots, n$. Другими словами, $\mathcal{E}$ локально линейно независимо, если для любого порядкового проектора $\pi \in \mathbb{P}(X)$ любое множество в $\pi(\mathcal{E})$, состоящее из различающихся на π элементов, линейно независимо. Это определение можно дать и в произвольной векторной решётке, не привлекая порядковые проекторы (см. [29, 31]).

Максимальное по включению локально линейно независимое множество в X называют *локальным базисом Гамеля* или *d-базисом* X . Справедливо следующее утверждение (см. [30, предложение 6.2]).

2.2.2. Утверждение. В любой векторной решётке с кофинальным множеством порядковых проекторов существует локальный базис Гамеля.

2.2.3. Локально линейно независимое множество $\mathcal{E}$ в X будет локальным базисом Гамеля в том и только в том случае, если для любого $x \in X$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathbb{P}(X)$ и числовое семейство $(\lambda_{\xi,e})_{\xi \in \Xi, e \in \mathcal{E}}$, такие что имеет место разложение

$$x = o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_{\xi,e} \pi_\xi e \right),$$

причём для любого $\xi \in \Xi$ множество $\{e \in \mathcal{E} : \lambda_{\xi,e} \neq 0\}$ состоит из конечного числа попарно различающихся на π_ξ элементов. Более того, такое разложение единственно с точностью до измельчение упомянутого разбиения единицы (см. [30, § 6; 52, § 5.1]). Эффективность введённых понятий в различных приложениях связана со следующим результатом (см. [16, предложение 4.6 (1)]).

2.2.4. Теорема. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таковы, что

$$\llbracket \mathcal{X} \text{ — векторное подпространство } \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \rrbracket = \mathbb{1}$$

и $\llbracket \mathcal{E} \subset \mathcal{X} \rrbracket = \mathbb{1}$. Положим $X := \mathcal{X} \downarrow$. Тогда

$$\llbracket \mathcal{E} \text{ — базис Гамеля векторного пространства } \mathcal{X} \text{ (над } \mathbb{R}^\wedge) \rrbracket = \mathbb{1}$$

в том и только в том случае, если $\mathcal{E} \downarrow$ — локальный базис Гамеля векторной решётки X .

2.2.5. Векторную решётку X называют *локально одномерным*, если для любых двух недизъюнктивных $x_1, x_2 \in X$ существует ненулевые пропорциональные компоненты u_1 и u_2 элементов x_1 и x_2 соответственно (см. [30, определение 11.1]). Другие определения можно найти в [52, предложение 5.1.2].

2.2.6. Утверждение. Пусть X — латерально полная векторная решётка, $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — её булевозначное представление, где $\mathbb{B} := \mathbb{P}(X)$. Тогда X локально одномерна в том и только в том случае, когда $\mathcal{X}$ — одномерная векторная решётка над $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $\llbracket \mathcal{R} = \mathbb{R}^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$.

2.2.7. Теорема. Расширенное пространство Канторовича локально одномерно в том и только в том случае, когда всякий нерасширяющий линейный оператор в нём является порядково ограниченным.

Доказательство. По теореме Гордона можно считать, что $X = \mathcal{R} \downarrow$, где $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $\mathbb{B} \simeq \mathbb{P}(X)$. Тогда задача сводится к вопросу существованию разрывного решения уравнения (L), ответ на который содержится в теореме 2.1.6. $\square$

2.2.8. Утверждение. Пусть $\mathbb{R}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$. Тогда существует $\mathbb{P}$ -линейное подпространство $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}$, такое что $\mathcal{X}$ и $\mathbb{R}$ изоморфны как векторные пространства над $\mathbb{P}$, но не изоморфны как упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{P}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{R}$ над $\mathbb{P}$. Так как $\mathcal{E}$ бесконечно, то можно выбрать собственное подмножество $\mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}$ той же мощности: $|\mathcal{E}_0| = |\mathcal{E}|$. Если $\mathcal{X}$ обозначает $\mathbb{P}$ -линейное подпространство $\mathbb{R}$,

порождённое множеством $\mathcal{E}_0$, то $\mathcal{X} \subsetneq \mathbb{R}$, но $\mathcal{X}$ и $\mathbb{R}$ изоморфны как векторные пространства над $\mathbb{P}$. Если бы между $\mathcal{X}$ и $\mathbb{R}$ имелся сохраняющий порядок $\mathbb{P}$ -линейный изоморфизм, то $\mathcal{X}$ был бы порядково полным и, как следствие, мы получили бы противоречивое равенство $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. $\square$

2.2.9. Теорема. Пусть X — расширенное пространство Канторвича, не являющееся локально одномерным. Тогда существуют векторная подрешётка $X_0 \subset X$ и нерасширяющая линейная биекция $T: X_0 \rightarrow X$, такие что оператор T^{-1} также является нерасширяющим, но не существует линейного и порядкового изоморфизма между X_0 и X .

Доказательство. Можно предположить, что $X = \mathcal{R}\downarrow$ и $[\mathcal{R} \neq \mathbb{R}^\wedge] = \mathbb{1}$. Нужно применить утверждение 2.2.8, заменив параметры $\mathbb{R}$ и $\mathbb{P}$ на $\mathcal{R}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ соответственно. Тогда существует $\mathbb{R}^\wedge$ -линейное подпространство $\mathcal{X}$ в $\mathcal{R}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ -линейный изоморфизм τ из $\mathcal{X}$ на $\mathcal{R}$. Положим $X_0 := \mathcal{X}\downarrow$, $T := \tau\downarrow$ и $S := \tau^{-1}\downarrow$. Как видно, X_0 и $S = T^{-1}$ удовлетворяют требуемому. $\square$

2.2.10. Пусть γ — произвольный кардинал. Векторную решётку X назовём γ -однородной по Гамелю, если в ней существует локальный базис Гамеля мощности γ , состоящий из строго различных порядковых единиц. Элементы $x, y \in X$ называют строго различными, если $|x - y|$ — порядковая единица в X .

2.2.11. Теорема. Пусть X — расширенное пространство Канторвича. Существуют множество бесконечных кардиналов Γ и разбиение единицы $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma \cup \{0\}}$ в $\mathbb{B}(X)$, такие что решётка X_0 локально одномерна, а X_γ γ -однородна по Гамелю для каждого $\gamma \in \Gamma$.

2.2.12. Локальный базис Гамеля называют также d -базисом. Различные аспекты этого понятия рассматриваются в [29–31]. Теорема 2.2.6 установлена в [47], а теорема 2.2.7 — в [2, 62]. Другое доказательство теоремы 2.2.8 можно найти в [31].

2.3. Нерасширяющие алгебраические операторы

Здесь рассматривается аналог проблемы Викстеда в классе алгебраических операторов.

2.3.1. Пусть $\mathbb{P}[x]$ — кольцо полиномов от переменной x над полем $\mathbb{P}$. Оператор T на векторной решётке X над полем $\mathbb{P}$ называют алгебраическим, если существует ненулевой полином $\varphi \in \mathbb{P}[x]$ (с коэффициентами из $\mathbb{P}$), для которого $\varphi(T) = 0$.

Для алгебраического оператора T существует единственный полином φ_T , такой что $\varphi_T(T) = 0$, старший коэффициент φ_T равен единице и φ_T делит любой полином ψ со свойством $\psi(T) = 0$. Полином φ_T называют минимальным полиномом оператора T . Простые примеры алгебраических полиномов доставляют проектор P (идемпотентный оператор, $P^2 = P$) и нильпотентный оператор S ($S^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$) с минимальными полиномами $\varphi_P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ (если $P \neq 0, I_X$) и $\varphi_S(\lambda) = \lambda^k$, $k \leq m$, соответственно.

Множество всех собственных значений оператора T будем обозначать через $\sigma_p(T)$. Вещественное число λ будет корнем полинома φ_T в том и только в том случае, когда $\lambda \in \sigma_p(T)$. В частности, $\sigma_p(T)$ — конечное множество.

2.3.2. Утверждение. Если $T \in \text{Orth}(X)$ — алгебраический ортоморфизм в векторной решётке X , то

$$\varphi_T(x) = \prod_{\lambda \in \sigma_p(T)} (x - \lambda).$$

2.3.3. Утверждение. Рассмотрим расширенное пространство Канторовича $X = \mathcal{R}\downarrow$, нерасширяющий оператор $T: X \rightarrow X$ и внутреннюю $\mathbb{R}^\wedge$ -линейную функцию $\tau: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Для $\varphi \in \mathbb{R}[x]$, $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, определим $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^\wedge[x]$ формулой

$$\hat{\varphi}(x) = a_0^\wedge + a_1^\wedge x + \dots + a_n^\wedge x^{n^\wedge}.$$

Тогда

$$\hat{\varphi}(\tau)\downarrow = \varphi(\tau\downarrow), \quad \varphi(T)\uparrow = \hat{\varphi}(T\uparrow).$$

Доказательство. Из пунктов 1.2.4 и 1.2.7 следует, что $(\tau^{n^\wedge})\downarrow = (\tau\downarrow)^n$ и $(T^n)\uparrow = (T\uparrow)^{n^\wedge}$. Остаётся применить теорему 1.4.9. $\square$

2.3.4. Линейный оператор T в векторной решётке X называют *диагональным*, если

$$T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m$$

для конечного набора вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и проекционных операторов $P_1, \dots, P_m$ в X , таких что $P_i \circ P_j = 0$ ($i \neq j$). В этом определении можно предполагать, что $P_1 + \dots + P_m = I_X$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различны. Алгебраический оператор T диагонален в том и только в том случае, когда его минимальный полином имеет вид

$$\varphi_T(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_m)$$

с попарно различными $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Назовём оператор T в X *строго диагональным*, если он диагонален и представляется в виде

$$T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m,$$

где $P_1, \dots, P_m$ — попарно дизъюнктные порядковые проекторы. В частности, каждый строго диагональный оператор в X является ортоморфизмом.

2.3.5. Утверждение. Пусть

$$T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m$$

диагональный оператор в векторной решётке X . Тогда T будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда проекционные операторы $P_1, \dots, P_m$ являются нерасширяющими.

Доказательство. Если T — нерасширяющий оператор, то таким же будет и $\varphi(T)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}[x]$. Поэтому необходимость вытекает из представления $P_j = \varphi_j(T)$ ($j := 1, \dots, m$), где $\varphi_j \in \mathbb{R}[x]$ — интерполяционные полиномы, определяемые условиями $\varphi_j(\lambda_k) = \delta_{jk}$, δ_{jk} — символы Кронекера. Достаточность очевидна. $\square$

2.3.6. Теорема. Для расширенного пространства Канторевича равносильны следующие утверждения:

- 1) булева алгебра $\mathbb{P}(X)$ является σ -дистрибутивной;
- 2) нерасширяющий алгебраический оператор в X является порядково ограниченным;
- 3) нерасширяющий алгебраический оператор в X строго диагонален;
- 4) нерасширяющий диагональный оператор в X строго диагонален;
- 5) нерасширяющий нильпотентный оператор в X является порядково ограниченным;
- 6) в X нет нетривиальных нерасширяющих нильпотентных операторов.

Доказательство. Имеются лишь две нетривиальные импликации: (2) $\implies$ (3) и (6) $\implies$ (2).

Докажем импликацию (2) $\implies$ (3). Нужно доказать, что алгебраический ортоморфизм T в X строго диагонален. Пусть $\varphi(T) = 0$, где φ — минимальный полином T , так что

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Так как T допускает единственное распространение до ортоморфизма на X^u , то можем предположить, не ограничивая общности, что $X = X^u = \mathcal{R}\downarrow$ и $\tau = T\uparrow$. Тогда $\llbracket \tau(x) = \lambda_0 x \ (x \in \mathcal{R}) \rrbracket = \mathbb{1}$ для некоторого $\lambda_0 \in \mathcal{R}$. Как видно из утверждения 2.3.3, $\hat{\varphi}(\lambda_0) = 0$, и значит,

$$(\lambda_0 - \lambda_1^\wedge) \cdot \dots \cdot (\lambda_0 - \lambda_m^\wedge) = 0$$

или

$$\lambda_0 \in \{\lambda_1^\wedge, \dots, \lambda_m^\wedge\}$$

внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Положим $P_l := \chi(b_l)$, где $b_l := \llbracket \lambda_0 = \lambda_l^\wedge \rrbracket$, и заметим, что $\{P_1, \dots, P_m\}$ — разбиение единицы в $\mathbb{P}(X)$. Более того, для $x \in X$ можем оценить

$$b_l \leq \llbracket Tx = \tau x = \lambda_0 x \rrbracket \wedge \llbracket \lambda_0 = \lambda_l^\wedge \rrbracket \leq \llbracket Tx = \lambda_l^\wedge x \rrbracket,$$

стало быть, $P_l Tx = P_l(\lambda_l x) = \lambda_l P_l(x)$. Суммируя по $l = 1, \dots, m$, получаем, что

$$Tx = \lambda_1 P_1 x + \dots + \lambda_m P_m x.$$

Докажем импликацию (6) $\implies$ (2). Рассуждая от противного, допустим, что (2) выполняется, и построим ненулевой нерасширяющий нильпотентный оператор в X . Согласно теоремам 2.2.7 и 2.1.6 выполняется $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} \neq \mathbb{R}^\wedge$, следовательно, $\mathcal{R}$ — бесконечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ — базис Гамеля. Выберем бесконечную последовательность

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов из $\mathcal{E}$. Фиксируем $1 < m \in \mathbb{N}$ и определим $\mathbb{R}^\wedge$ -линейную функцию $\tau: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}(\mathbb{R})$, полагая $\tau(e_{km+i}) = e_{km+i-1}$, если $2 \leq i \leq m$, $\tau(e_{km+1}) = 0$ для всех $k := 0, 1, \dots$ и $\tau(e) = 0$, если $e \neq e_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, если $\mathcal{R}_0$ обозначает $\mathbb{R}^\wedge$ -линейное подпространство в $\mathcal{R}$, порождённое последовательностью $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, то $\mathcal{R}_0$ — инвариантное подпространство для τ , причём τ — линейный оператор, определяемый бесконечной блочно-диагональной матрицей $\text{diag}(A, \dots, A, \dots)$, где A — жорданова клетка размерности m с нулевой главной диагональю. Нетрудно убедиться, что τ — разрывная функция и $\tau^m = 0$ по построению. Следовательно, $T := \tau \downarrow$ — нерасширяющий линейный оператор в X и $T^m = 0$ по утверждению 2.3.3, но T не является порядково ограниченным. Противоречие. $\square$

2.3.7. Алгебраические операторы в векторных решётках изучались в [37]. Там же доказаны утверждения 2.3.2 и 2.3.5. Теорема 2.3.6 установлена в [26].

2.4. Инволюции и комплексные структуры

Здесь мы рассматриваем вопрос о существовании комплексных структур и нетривиальных инволюций в вещественных векторных решётках.

2.4.1. Линейный оператор T в векторной решётке X называют *инволютивным* или *инволюцией*, если $T \circ T = I_X$ (или, что равносильно, $T^{-1} = T$), и *комплексной структурой*, если $T \circ T = -I_X$ (или, что равносильно, $T^{-1} = -T$). Оператор $P - P^\perp$, где P — проектор на X и $P^\perp = I_X - P$, является инволюцией. Инволюцию называют *тривиальной*, если она имеет вид $P - P^\perp$, причём P — порядковый проектор.

2.4.2. Утверждение. В вещественном пространстве Канторовича не существует нерасширяющих порядково ограниченных комплексных структур и нетривиальных нерасширяющих порядково ограниченных инволюций.

Доказательство. Если T — нерасширяющий порядково ограниченный оператор в X , то $Tx = ax$ ($x \in X$) для некоторого $a \in X^\mathfrak{u}$. Если T — инволюция, то $a^2 = \mathbb{1}$, поэтому $a = P\mathbb{1} - P^\perp\mathbb{1}$ для некоторого порядкового проектора P в X , стало быть, $T = P - P^\perp$. Если же T — комплексная структура X , то соответствующее уравнение $a^2 = -\mathbb{1}$ не имеет решений. $\square$

2.4.3. Теорема. Пусть $\mathbb{R}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{F}$ и $B \subset \mathbb{R}$ — не более чем счётное множество. Тогда существует разрывная $\mathbb{F}$ -линейная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f \circ f = f$ и $f(x) = x$ для всех $x \in B$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ — базис Гамеля $\mathbb{R}$ над $\mathbb{F}$. Каждый $x \in B$ имеет представление $x = \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e(x)e$, где $\lambda_e(x) \in \mathbb{F}$ для всех $e \in \mathcal{E}$. Положим $\mathcal{E}(x) := \{e \in \mathcal{E} : \lambda_e(x) \neq 0\}$ и $\mathcal{E}_0 = \bigcup_{x \in B} \mathcal{E}(x)$. По предположениям $\mathcal{E}_0$ не более чем счётно, стало быть, $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$ континуально. Поэтому имеет место разложение $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — непересекающиеся множества одной и той же

(континуальной) мощности. Подберём какую-нибудь биекцию g_0 из $\mathcal{E}_1$ на $\mathcal{E}_2$ и определим функцию $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ формулой

$$g(h) = \begin{cases} g_0(h), & h \in \mathcal{E}_1, \\ g_0^{-1}(h), & h \in \mathcal{E}_2, \\ h, & h \in \mathcal{E}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Легко проверить, что $\mathbb{F}$ -линейное продолжение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функции g будет искомой инволюцией. $\square$

2.4.4. Теорема. Если $\mathbb{R}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{F}$, то существует разрывная $\mathbb{F}$ -линейная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f \circ f = -\text{id}$.

Доказательство. Теорема доказывается так же, как теорема 2.4.3, с той лишь разницей, что $\mathcal{E}_0 = \emptyset$ и

$$g(h) = \begin{cases} -g_0(h), & h \in \mathcal{E}_1, \\ g_0^{-1}(h), & h \in \mathcal{E}_2. \end{cases} \quad \square$$

Булевозначная интерпретация теорем 2.4.3 и 2.4.4 приводит к следующему результату.

2.4.5. Теорема. Пусть X — расширенное пространства Канторвича, не являющееся локально одномерным. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого не более чем счётного множества $B \subset X$ существует нерасширяющая инволюция T в X , такая что $T(x) = x$ для всех $x \in B$;
- 2) существует нерасширяющая комплексная структура на X .

Доказательство. Учитывая теорему Гордона, можем предположить, что $X = \mathcal{R} \downarrow$. Возьмём инъекцию $\nu: \mathbb{N} \rightarrow X$, для которой $B = \text{Im}(\nu)$. Внутренняя функция $\nu \uparrow: \mathbb{N}^\wedge \rightarrow X$ может не быть инъективной, но $B \uparrow$ будет не более чем счётным внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, так как $B \uparrow = \text{Im}(\nu \uparrow)$. По теореме 2.4.3 существует $\mathbb{R}^\wedge$ -линейная функция $\tau: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, такая что $\llbracket \tau \circ \tau = I_{\mathcal{R}} \rrbracket = \mathbb{1}$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \llbracket (\forall x \in B \uparrow) \tau(x) = x \rrbracket = \llbracket (\forall n \in \mathbb{N}^\wedge) \tau(\nu \uparrow(n)) = \nu \uparrow(n) \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \llbracket \tau(\nu \uparrow(n^\wedge)) = \nu \uparrow(n^\wedge) \rrbracket = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \llbracket \tau(\nu(n)) = \nu(n) \rrbracket = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \llbracket \tau \downarrow(\nu(n)) = \nu(n) \rrbracket. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оператор $T := \tau \downarrow$ удовлетворяет требуемым в (1) условиям: $T \circ T = I_X$ по пункту 1.2.4 и $T(\nu(n)) = \nu(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Второе утверждение доказывается аналогично с привлечением теоремы 2.4.4. $\square$

2.4.6. Следствие. Для расширенного пространства Канторвича X равносильны следующие утверждения:

- 1) X локально одномерно;
- 2) не существует нетривиальных нерасширяющих инволюций в X ;
- 3) не существует нерасширяющей комплексной структуры на X .

2.4.7. Следствие. *Всякое расширенное пространство Канторевича, не являющееся локально одномерным, допускает структуру комплексного векторного пространства, в котором комплексное умножение сохраняет полосы.*

Доказательство. Комплексная структура T в X позволяет определить в X комплексное умножение. Полагаем $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta T(x)$ для всех $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ и $x \in X$. Если T является нерасширяющим, то отображение $x \mapsto zx$ ($x \in X$) сохраняет полосы для любого $z \in \mathbb{C}$. $\square$

2.4.8. Основные результаты этого раздела получены в [53]. В связи со следствием 2.4.7 нужно упомянуть проблему существования банаховых пространств без комплексной структуры [40, 44, 45, 70].

3. Операторы, сохраняющие дизъюнктность

3.1. Характеризация и представление

Покажем на двух примерах, что некоторые свойства операторов, сохраняющих дизъюнктность, можно получить путём интерпретации в подходящей булевозначной модели аналогичных свойств функционалов.

3.1.1. Теорема. *Пусть X и Y — векторные решётки, причём Y — решётка с проекциями. Порядково ограниченный оператор $T: X \rightarrow Y$ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, когда $\ker(bT)$ — порядковый идеал в X для любого порядкового проектора $b \in \mathbb{P}(Y)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности допустим, что $\ker(bT)$ — порядковый идеал в X для любого $b \in \mathbb{P}(Y)$. По теореме Гордона можем считать, что $y \subset \mathcal{R}\downarrow$. Пусть $|y| \leq |x|$ и $b := \llbracket Tx = 0 \rrbracket$. Тогда $bTx = 0$ по (G) и $bTy = 0$ по условию. Вновь привлекая (G), получаем, что $b \leq \llbracket Ty = 0 \rrbracket$. Тем самым $\llbracket Tx = 0 \rrbracket \leq \llbracket Ty = 0 \rrbracket$, или, эквивалентно, $\llbracket Tx = 0 \rrbracket \implies \llbracket Ty = 0 \rrbracket = \mathbb{1}$. Положим $\tau := T\uparrow$ и убедимся, что $\ker(\tau)$ — порядковый идеал в $X^\wedge$ внутри модели:

$$\begin{aligned} \llbracket \ker(\tau) \text{ — порядковый идеал внутри } X^\wedge \rrbracket &= \\ &= \llbracket (\forall x, y \in X^\wedge) (\tau(x) = 0 \wedge |y| \leq |x| \rightarrow \tau(y) = 0) \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{x, y \in X} \llbracket (\tau(x^\wedge) = 0) \wedge \llbracket |y^\wedge| \leq |x^\wedge| \rrbracket \implies \llbracket \tau(y^\wedge) = 0 \rrbracket \rrbracket = \\ &= \bigwedge \{ \llbracket T(x) = 0 \rrbracket \implies \llbracket T(y) = 0 \rrbracket : x, y \in X, |y| \leq |x| \} = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ тем, что функционал τ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, когда $\ker(\tau)$ — порядковый идеал в $X^\wedge$, используя утверждение 5) следствия 1.4.4, приходим к заключению, что оператор T сохраняет дизъюнктность. $\square$

3.1.2. Рассуждая аналогично, можно показать, что если Y — решётка с проекциями и оператор $T \in L^\sim(X, Y)$ сохраняет дизъюнктность, то существует порядковый проектор $\pi \in \mathbb{P}(Y)$, такой что $T^+ = \pi|T|$ и $T^- = \pi^\perp|T|$. В частности, $T = (\pi - \pi^\perp)|T|$ и $|T| = (\pi - \pi^\perp)T$. Для доказательства нужно лишь заметить, что функционал $\tau := T\uparrow$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда либо τ , либо $-\tau$ является решёточным гомоморфизмом. Отсюда без труда выводится, что оператор $T \in L^\sim(X, Y)$ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, когда $(Tx)^+ \perp (Ty)^-$ для любых $x, y \in X_+$. Действительно, для $x, y \in X_+$ выполняется $(Tx)^+ = (Tx) \vee 0 \leq T^+x = \pi|T|x$ и аналогично $(Ty)^- \leq \pi^\perp|T|y$. Тем самым $(Tx)^+ \wedge (Ty)^- = 0$.

3.1.3. Теорема. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторовича. Для любой пары сохраняющих дизъюнктность операторов $T_1, T_2 \in L^\sim(X, Y)$ существуют порядковый проектор $\pi \in \mathbb{P}(Y)$, решёточный гомоморфизм $T \in \text{Hom}(X, Y)$ и ортоморфизмы $S_1, S_2 \in \text{Orth}(Y)$, такие что совместна система условий

$$|S_1| + |S_2| = \pi, \quad \pi T_1 = S_1 T, \quad \pi T_2 = S_2 T, \\ \text{Im}(\pi^\perp T_1)^{\perp\perp} = \text{Im}(\pi^\perp T_2)^{\perp\perp} = \pi(Y), \quad \pi^\perp T_1 \perp \pi^\perp T_2.$$

Доказательство. Как и выше, будем считать, что $Y = \mathcal{R}\downarrow$. Положим $\tau_1 := T_1\uparrow$ и $\tau_2 := T_2\uparrow$. Требуемый результат является булевозначной интерпретацией следующего факта: если сохраняющие дизъюнктность функционалы τ_1 и τ_2 непропорциональны, то они дизъюнкты и отличны от нуля. Положим $b := \llbracket \tau_1 \text{ и } \tau_2 \text{ пропорциональны} \rrbracket$ и $\pi := \chi(b_0)$. Тогда существуют решёточный гомоморфизм $\tau: X^\wedge \rightarrow \mathcal{R}$ и числа $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{R}$, такие что $\tau_i = \sigma_i \tau$. Если функция $\bar{\sigma}_i$ определена формулой $\bar{\sigma}_i(\lambda) := \sigma_i \lambda$ ($\lambda \in \mathcal{R}$), то $S_1 := \sigma_1\downarrow$, $S_2 := \sigma_2\downarrow$ и $T := \tau\downarrow$ удовлетворяют требуемым условиям в первой строке. Кроме того,

$$b^* = \llbracket \tau_1 \neq 0 \rrbracket \wedge \llbracket \tau_1 \neq 0 \rrbracket \wedge \llbracket |\tau_1| \wedge |\tau_2| = 0 \rrbracket$$

и $\pi^\perp = \chi(b^*)$, поэтому выполнены также условия из второй строки. $\square$

3.1.4. Следствие. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторовича. Сумма $T_1 + T_2$ двух сохраняющих дизъюнктность операторов $T_1, T_2: X \rightarrow Y$ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, когда существуют попарно дизъюнкты порядковые проекторы $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{P}(Y)$, ортоморфизмы $S_1, S_2 \in \text{Orth}(Y)$ и решёточный гомоморфизм $T \in \text{Hom}(X, Y)$, такие что совместна система условий

$$\pi + \pi_1 + \pi_2 = I_Y, \quad |S_1| + |S_2| = \pi, \\ T(X)^{\perp\perp} = \pi(Y), \quad \pi_1 T_2 = \pi_2 T_1 = 0, \quad \pi T_1 = S_1 T, \quad \pi T_2 = S_2 T.$$

В частности, в этом случае $T_1 = \pi_1 T_1 + S_1 T$ и $T_2 = \pi_2 T_2 + S_2 T$.

3.1.5. Следствие. Сумма $T_1 + T_2$ двух сохраняющих дизъюнктность операторов $T_1, T_2: X \rightarrow Y$ сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, когда $T_1(x_1) \perp T_2(x_2)$ для любой пары дизъюнкты элементов $x_1, x_2 \in X$.

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 3.1.4. Для доказательства достаточности нужно лишь заметить, что если совместна указанная система условий, то $T_k x_1 \perp T_l x_2$ ($k, l := 1, 2$), и поэтому $(T_1 + T_2)(x_1) \perp (T_1 + T_2)(x_2)$ для всех дизъюнктивных $x_1, x_2 \in X$. $\square$

3.1.6. Вопросы аналитического представления операторов, сохраняющих дизъюнктивность, рассматриваются в [18, 48, 52]. Обзор недавних результатов по теории сохраняющих дизъюнктивность операторов дан в [36]. В частности, в этом обзоре рассматривается понятие сохраняющего дизъюнктивность множества операторов. Следствие 3.1.5 можно переформулировать так: $T_1 + T_2$ сохраняет дизъюнктивность в том и только в том случае, когда $\{T_1, T_2\}$ — сохраняющее дизъюнктивность множество.

3.2. Полидизъюнктивные операторы

Здесь даётся описание порядкового идеала в решётке порядково ограниченных операторов, порождённого решёточными гомоморфизмами посредством булевозначной интерпретации соответствующего «скалярного» результата.

3.2.1. Пусть X и Y — векторные решётки, n — положительное целое число. Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют n -дизъюнктивным, если для любого набора из $n + 1$ попарно дизъюнктивных элементов $x_0, \dots, x_n \in X$ инфимум множества $\{|Tx_k|: k := 0, 1, \dots, n\}$ равен нулю; символически:

$$(\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in X) \ x_k \perp x_l \ (k \neq l) \implies |Tx_0| \wedge \dots \wedge |Tx_n| = 0.$$

Скажем, что оператор *полидизъюнктивен*, если он n -дизъюнктивен для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Как видно, 1-дизъюнктивный оператор — это то же самое, что и оператор, сохраняющий дизъюнктивность.

3.2.2. Следующие простые свойства n -дизъюнктивных операторов доказываются непосредственно.

1. Пусть Y — пространство Канторовича. Оператор $T \in L^{\sim}(X, Y)$ будет n -дизъюнктивным тогда и только тогда, когда n -дизъюнктивен его модуль $|T|$.
2. Пусть $T_1, \dots, T_n$ — порядково ограниченные операторы из X в Y , сохраняющие дизъюнктивность. Тогда оператор $T := T_1 + \dots + T_n$ будет n -дизъюнктивным.

3.2.3. Утверждение. Порядково ограниченный функционал на векторной решётке будет n -дизъюнктивным в том и только в том случае, если он представим в виде дизъюнктивной суммы n порядково ограниченных функционалов, сохраняющих дизъюнктивность. Такое представление единственно с точностью до перестановки.

Доказательство. Пусть f — положительный n -дизъюнктивный функционал на векторной решётке $C(Q)$. Тогда соответствующая мера Радона μ есть сумма n дираковских мер, т. е. μ сосредоточена в n точках. В самом деле, если в носителе μ имеется $n + 1$ точка, например $q_0, q_1, \dots, q_n \in Q$, то можно подобрать

попарно непересекающиеся компактные окрестности $U_0, U_1, \dots, U_n$ этих точек, а затем найти попарно непересекающиеся открытые множества $V_k \subset Q$, такие что $\mu(U_k) > 0$ и $U_k \subset V_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Пользуясь теоремой Титце—Урысона, можно построить непрерывную функцию x_k на Q , равную нулю на $Q \setminus V_k$ и единице на U_k . Тогда $x_0 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$, но все $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ отличны от нуля, так как $f(x_k) \geq \mu(U_k) > 0$ для всех $k := 0, 1, \dots, n$. Полученное противоречие показывает, что носитель μ содержит не более n точек. Общий случай сводится к рассмотренному с помощью теоремы Крейнов—Какутани. $\square$

3.2.4. Теорема. *Порядково ограниченный оператор из векторной решётки в пространство Канторовича n -дизъюнктен для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда он представим в виде дизъюнктивной суммы n порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность.*

Доказательство. Пусть оператор $T \in L^\sim(X, Y)$ является n -дизъюнктным и $\tau := T \upharpoonright \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Непосредственным вычислением булевых оценок доказывается, что $\tau: X^\wedge \rightarrow \mathcal{R}$ — порядково непрерывный n -дизъюнктивный функционал внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Согласно принципу переноса к τ можем применить утверждение 3.2.3. Привлекая также принцип максимума, можно подобрать $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, такие что

$$\begin{aligned} & \llbracket \tau_1, \dots, \tau_n \text{ — попарно дизъюнктивные функционалы,} \\ & \text{сохраняющие дизъюнктность, и } \tau = \tau_1 + \dots + \tau_n \rrbracket = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что линейные операторы $T_1 := \tau_1 \downarrow, \dots, T_n := \tau_n \downarrow$ из X в Y порядково ограничены, попарно дизъюнкты и сохраняют дизъюнктность. $\square$

3.2.5. Можно также показать, что представление порядково ограниченных n -дизъюнктивных операторов из теоремы 3.1.4 единственно с точностью до перемешиваний: если $T = T_1 + \dots + T_n = S_1 + \dots + S_m$ для двух попарно дизъюнктивных наборов $\{T_1, \dots, T_n\}$ и $\{S_1, \dots, S_m\}$ сохраняющих дизъюнктность операторов, то для любого $j = 1, \dots, m$ можно подобрать набор попарно дизъюнктивных проекторов $\pi_{1j}, \dots, \pi_{nj} \in \mathbb{P}(Y)$ так, чтобы $S_j = \pi_{1j}T_1 + \dots + \pi_{nj}T_n$ для всех $j := 1, \dots, m$.

3.2.6. Следствие. *Положительный оператор из векторной решётки в пространство Канторовича n -дизъюнктен в том и только в том случае, если он представим в виде суммы n решёточных гомоморфизмов.*

3.2.7. Следствие. *Множество всех полидизъюнктивных операторов из векторной решётки в пространство Канторовича совпадает с порядковым идеалом в векторной решётке ограниченных операторов, порождённым решёточными гомоморфизмами.*

3.2.8. Полидизъюнктивные операторы введены и изучены в [35]. В частности, в этой работе дано стандартное доказательство теоремы 3.2.4. Алгебраический подход предложен в [52].

3.3. Разности решёточных гомоморфизмов

В этом разделе в терминах ядра даётся характеристика порядково ограниченных операторов, представимых в виде разности решёточных гомоморфизмов. Мотивирующим примером служит классическая теорема Стоуна о строении замкнутых векторных подрешёток в пространстве $C(Q, \mathbb{R})$.

3.3.1. Теорема Стоуна. *Каждая замкнутая векторная подрешётка в $C(Q, \mathbb{R})$ представляет собой пересечение ядер разностей решёточных гомоморфизмов на $C(Q, \mathbb{R})$.*

3.3.2. В связи с теоремой Стоуна введём следующее определение. Пусть X и Y — векторные решётки. Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ назовём *двухточечным соотношением* на векторной решётке X , если он представим в виде разности $T := T_1 - T_2$ решёточных гомоморфизмов $T_1, T_2: X \rightarrow Y$. Двухточечное соотношение назовём *скалярным*, если $Y = \mathbb{R}$. Для любого $b \in \mathbb{B} := \mathbb{P}(Y)$ оператор $bT := b \circ T$ будем называть *слоем* оператора T .

3.3.3. Легко убедиться, что ядро двухточечного соотношения является подрешёткой X , так как оно определяется уравнением $T_1 x = T_2 x$, где T_1 и T_2 — решёточные гомоморфизмы. Основным результатом раздела состоит в том, что верно и обратное. Для решения возникающей скалярной задачи используется одна из формул субдифференциального исчисления (см. [23]). Приведём формулировку этого вспомогательного факта, в котором *положительным разложением* функционала f называем представление $f = f_1 + \dots + f_N$, где $f_1, \dots, f_N$ — положительные функционалы.

3.3.4. Теорема о декомпозиции. *Предположим, что $H_1, \dots, H_N$ — конусы в векторной решётке X , а f и g — положительные функционалы на X . Тогда неравенство*

$$f(h_1 \vee \dots \vee h_N) \geq g(h_1 \vee \dots \vee h_N)$$

выполняется для всех $h_k \in H_k$ ($k := 1, \dots, N$) в том и только в том случае, когда для любого положительного разложения $g = g_1 + \dots + g_N$ существует положительное разложение $f = f_1 + \dots + f_N$, такое что

$$f_k(h_k) \geq g_k(h_k) \quad (h_k \in H_k, \quad k := 1, \dots, N).$$

3.3.5. Утверждение. *Порядково ограниченный функционал на векторной решётке является двухточечным соотношением в том и только в том случае, когда его ядро служит векторной подрешёткой объёмлющей решётки.*

Доказательство. Пусть l — ненулевой порядково ограниченный функционал на векторной решётке X . Обозначим $f := l^+$, $g := l^-$ и $H := \ker(l)$. Покажем, что g — решёточный гомоморфизм, что равносильно соотношению $[0, g] = [0, 1]g$ (см. [52, теорема 3.3.4 (1)]). Возьмём $0 \leq g_1 \leq g$ и положим $g_2 := g - g_1$, причём достаточно рассмотреть случай $g_1 \neq 0$ и $g_1 \neq g$. По условию для всех $h_1, h_2 \in \ker(l)$ выполняется $f(h_1 \vee h_2) \geq g(h_1 \vee h_2)$. По теореме о декомпозиции существует положительное разложение $f = f_1 + f_2$, такое что $f_1(h) - g_1(h) = 0$

и $f_2(h) - g_2(h) = 0$ для всех $h \in H$. Так как $H = \ker(f - g)$, то можно подобрать вещественные числа α и β так, чтобы $f_1 - g_1 = \alpha(f - g)$ и $f_2 - g_2 = \beta(f - g)$. Как видно, $\alpha + \beta = 1$, поскольку $l \neq 0$. Поэтому одно из чисел α и β строго положительное. Если $\alpha > 0$, то из-за дизъюнктивности f и g получаем, что $g_1 = \alpha g \in [0, 1]g$. Если же $\beta > 0$, то по аналогичной причине $g_2 = \beta g$, поэтому $g_1 = (1 - \beta)g \in [0, 1]g$. $\square$

3.3.6. Теорема. *Порядково ограниченный оператор, действующий из векторной решётки в пространство Канторовича, является двухточечным соотношением в том и только в том случае, когда ядро каждого его слоя служит векторной подрешёткой области определения этого оператора.*

Доказательство. Нужно лишь показать достаточность. Пусть $T \in L^\sim(X, Y)$ и $\ker(bT) := (bT)^{-1}(0)$ — векторная подрешётка в X для каждого $b \in \mathbb{P}(Y)$. Как и выше, используем булевозначную «скаляризацию», полагая $Y = \mathcal{R}\downarrow$.

Обозначим $\tau := T\uparrow$ и заметим, что доказательство справедливости соотношений $T^+\uparrow = \tau^+$ и $T^-\uparrow = \tau^-$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ сводится к несложным вычислениям булевых оценок. Более того, $\llbracket \ker(\tau) \rrbracket$ — векторная подрешётка в $X^\wedge$ = $\mathbb{1}$. В самом деле, если для $x, y \in X$ обозначить

$$b := \llbracket Tx = 0^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket Ty = 0^\wedge \rrbracket,$$

то $x, y \in \ker(bT)$, поэтому по условию имеем $bT(x \vee y) = 0$, откуда следует, что $b \leq \llbracket T(x \vee y) = 0^\wedge \rrbracket$. Заменив T на τ , получим

$$\llbracket \tau(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge \tau(y^\wedge) = 0^\wedge \rrbracket \leq \llbracket \tau(x \vee y)^\wedge = 0^\wedge \rrbracket.$$

Следующие выкладки завершают доказательство:

$$\begin{aligned} \llbracket \ker(\tau) \rrbracket \text{ является векторной подрешёткой в } X^\wedge &= \\ &= \llbracket (\forall x, y \in X^\wedge)(\tau(x) = 0^\wedge \wedge \tau(y) = 0^\wedge \rightarrow \tau(x \vee y) = 0^\wedge) \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{x, y \in X} \llbracket \tau(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge \tau(y^\wedge) = 0^\wedge \rightarrow \tau((x \vee y)^\wedge) = 0^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}. \end{aligned} \quad \square$$

3.3.7. Теорема 3.3.6 установлена в [27]. В теории мажорируемых операторов известна классическая теорема Мейера (см. [52, 3.3.1 (5); 42; 63]), утверждающая, что каждый сохраняющий дизъюнктивность порядково ограниченный оператор является двухточечным соотношением. Этот факт легко вытекает из теоремы 3.3.6, так как очевидно, что $\ker(bT)$ — векторная подрешётка, если T сохраняет дизъюнктивность.

3.4. Суммы решёточных гомоморфизмов

В этом разделе в терминах ядер слоёв даётся характеристика порядково ограниченных операторов, модули которых представимы в виде суммы двух решёточных гомоморфизмов. Тем самым устанавливается связь между 2-дизъюнктивными операторами и пространствами Гротендика. Основной результат — теорема 3.4.4 — получен в [28].

3.4.1. Подпространство H векторной решётки называют *пространством Гротендика* или, короче, *G-пространством*, если H удовлетворяет условию

$$(\forall x, y \in H) (x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0 \in H).$$

3.4.2. Указанное в пункте 3.4.1 условие появилось следующим образом. В 1955 г. А. Гротендик выделил подпространства, удовлетворяющие этому условию, в пространстве $C(Q, \mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на компакте Q , задавая такие подпространства (см. [46]) как совокупности функций f , удовлетворяющих некоторому семейству A соотношений, имеющих для $\alpha \in A$ следующий вид:

$$f(q_\alpha^1) = \lambda_\alpha f(q_\alpha^2) \quad (q_\alpha^1, q_\alpha^2 \in Q, \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A).$$

Выделенные А. Гротендиком пространства дали примеры L^1 -предсопряжённых банаховых пространств, не являющихся AM -пространствами. В 1969 г. Й. Линденштраусс и Д. Вулперт охарактеризовали указанные подпространства с помощью условия (1) и ввели термин «G-пространство» (см. [55]). Родственные свойства пространств Гротендика представлены также в [54, 67].

3.4.3. Теорема. Ядро порядково ограниченного функционала служит подпространством Гротендика в том и только в том случае, когда модуль этого функционала представим в виде суммы двух решёточных гомоморфизмов.

Доказательство. Доказательство этого результата, основанное на теореме декомпозиции 3.3.4, можно найти в [28]. $\square$

3.4.4. Теорема. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторовича. Модуль порядково ограниченного оператора $T: X \rightarrow Y$ представим в виде суммы двух решёточных гомоморфизмов в том и только в том случае, когда для $b \in \mathbb{B} := \mathbb{P}(Y)$ ядро слоя bT оператора T представляет собой подпространство Гротендика векторной решётки X .

Доказательство. Доказательство следует схеме раздела 3.3. Сначала «скаляризуем» задачу: полагаем $Y = \mathcal{R}\downarrow$ и $\tau := T\uparrow$ и дальше работаем с функционалом τ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Сразу же отметим одну полезную выкладку:

$$\begin{aligned} \llbracket \ker(l) \text{ — подпространство Гротендика в } X^\wedge \rrbracket &= \\ &= \llbracket (\forall x, y \in X^\wedge) (\tau(x) = 0^\wedge \wedge \tau(y) = 0^\wedge \rightarrow \tau(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0^\wedge) \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{x, y \in X} \llbracket [\tau(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge \tau(y^\wedge) = 0^\wedge \rightarrow \tau((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge] \rrbracket. \quad (*) \end{aligned}$$

Достаточность. Возьмём $x, y \in X$ и положим

$$b := \llbracket Tx = 0^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket Ty = 0^\wedge \rrbracket.$$

По теореме Гордона $x, y \in \ker(bT)$. По условию ядро слоя является подпространством Гротендика, поэтому $bT(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0$. Вновь привлекая теорему Гордона, получаем, что

$$\llbracket Tx = 0^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket Ty = 0^\wedge \rrbracket = b \leq \llbracket T(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0^\wedge \rrbracket.$$

Теперь из (*) вытекает, что $\llbracket \ker(l) \rrbracket$ — подпространство Гротендика в $X^\wedge$ $= \mathbb{1}$. Согласно принципу переноса можно применить теорему 3.4.3 к τ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, следовательно, $|\tau| = \tau_1 + \tau_2$, где τ_1 и τ_2 — решёточные гомоморфизмы внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Легко понять, что операторы $T_1 := \tau_1 \downarrow$ и $T_2 := \tau_2 \downarrow$ из X в $\mathcal{R} \downarrow$ являются решёточными гомоморфизмами и $|T| = T_1 + T_2$.

Необходимость. Предположим, что $|T| = T_1 + T_2$ для решёточных гомоморфизмов $T_1, T_2: X \rightarrow Y$, и обозначим $\tau := T \uparrow$, $\tau_1 := T_1 \uparrow$ и $\tau_2 := T_2 \uparrow$. Легко проверить, что внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется $\tau, \tau_1, \tau_2: X^\wedge \rightarrow \mathcal{R}$ и $|\tau| = \tau_1 + \tau_2$, причём τ_1 и τ_2 — решёточные гомоморфизмы. По теореме 3.4.3 согласно принципу переноса имеем $\llbracket \ker(l) \rrbracket$ — подпространство Гротендика в $X^\wedge$ $= \mathbb{1}$. Воспользовавшись соотношением (*), отсюда выводим, что

$$\llbracket \tau(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge \tau(y^\wedge) = 0^\wedge \rrbracket \leq \llbracket \tau((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge \rrbracket.$$

Если теперь $b \in \mathbb{B}$ и $bTx = bTy = 0$, то

$$\llbracket l((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge \rrbracket \geq b,$$

откуда по теореме Гордона получаем, что $bT(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0$. $\square$

4. Порядково непрерывные операторы

4.1. Операторы Магарам

Рассмотрим важный класс порядково ограниченных операторов, допускающих булевозначное представление, т. е. описание в виде интерпретации понятия порядково непрерывного функционала в булевозначной модели.

4.1.1. Всюду в этом разделе X — векторная решётка и Y — пространство Канторовича. Говорят, что линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называется обладает *оператором Магарам* (или *сохраняет порядковые отрезки*), если $T[0, x] = [0, Tx]$ для любого $0 \leq x \in X$, т. е. для любых $0 \leq x \in X$ и $0 \leq y \leq Tx$ существует $0 \leq u \in X$, такой что $Tu = y$ и $0 \leq u \leq x$. *Оператором Магарам* называют порядково ограниченный порядково непрерывный оператор, модуль которого обладает свойством Магарам.

Скажем, что линейный оператор $S: X \rightarrow Y$ *абсолютно непрерывен* относительно T , и запишем $S \preceq T$, если $|S|x \in \{|T|x\}^{\perp\perp}$ для всех $x \in X_+$. Легко убедиться, что если $S \in \{T\}^{\perp\perp}$, то $S \preceq T$, но обратное может не выполняться.

4.1.2. Нулевой идеал $\mathcal{N}_T$ оператора $T: X \rightarrow Y$ определяется равенством $\mathcal{N}_T := \{x \in X: |T|(|x|) = 0\}$. Заметим, что $\mathcal{N}_T$ и в самом деле является порядковым идеалом в X . Дизъюнктное дополнение к $\mathcal{N}_T$ называют *носителем* (а также *полосой существенной положительности*) T и обозначают через $\mathcal{C}_T$, т. е. $\mathcal{C}_T := \mathcal{N}_T^\perp$. Оператор T называют *строго положительным*, если $0 < x \in X$ влечёт $0 < |T|(x)$. Как видно, $|T|$ строго положителен на полосе $\mathcal{C}_T$. Иногда удобно использовать обозначения $X_T := \mathcal{C}_T$ и $Y_T := (\text{Im } T)^{\perp\perp}$.

4.1.3. Примерами оператора Магарам служат операторы условного математического ожидания и бохнеровского интегрирования. Возьмём вероятностное пространство (Q, Σ, μ) и рассмотрим некоторую σ -подалгебру Σ_0 σ -алгебры Σ и ограничение μ_0 меры μ на Σ_0 . Оператор условного математического ожидания $\mathcal{E}(\cdot, \Sigma_0)$ является оператором Магарам из $L^1(Q, \Sigma, \mu)$ на $L^1(Q, \Sigma_0, \mu_0)$. Ограничение $\mathcal{E}(\cdot, \Sigma_0)$ на $L^p(Q, \Sigma, \mu)$ также будет оператором Магарам из $L^p(Q, \Sigma, \mu)$ в $L^p(Q, \Sigma_0, \mu_0)$.

Пусть Y — банахова решётка. Рассмотрим $X := L^1(Q, \Sigma, \mu, Y)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру Y -значных функций, и пусть $T: X \rightarrow Y$ обозначает интеграл Бохнера: $Tf := \int_Q f d\mu$. Если банахова решётка Y имеет порядково непрерывную норму (в этом случае Y порядково полна), то X — пространство Канторевича (относительно естественного порядка

$$f \geq 0 \iff f(t) \geq 0$$

для почти всех $t \in Q$), а T будет оператором Магарам. Другие примеры можно найти в [52].

4.1.4. Говорят, что положительный оператор $T: X \rightarrow Y$ обладает *свойством Леви*, если для любой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset X_+$ из порядковой ограниченности сети (Tx_α) в Y следует существование $\sup x_\alpha$ в X .

Для порядково ограниченного порядково непрерывного оператора T из X в Y обозначим через $\mathcal{D}_m(T)$ наибольший порядковый идеал в универсальном пополнении X^u , на который распространяется T по порядковой непрерывности. Для положительного порядково непрерывного оператора T выполняется $X = \mathcal{D}_m(T)$ в том и только в том случае, когда T обладает свойством Леви.

Следующий результат описывает свойство оператора Магарам, обеспечивающее его квалифицированное вложение в подходящую булевозначную модель.

4.1.5. Теорема. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторевича, T — оператор Магарам из X в Y . Тогда существуют порядково замкнутая подалгебра $\mathcal{B}$ булевой алгебры $\mathbb{P}(X_T)$ и булев изоморфизм h из $\mathbb{P}(Y_T)$ на $\mathcal{B}$, такие что $\pi S = Sh(\pi)$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(Y)$, если только $S: X \rightarrow Y$ — порядково ограниченный оператор, абсолютно непрерывный относительно T .

Булева алгебра проекторов $\mathcal{B}$ из теоремы 4.1.5 и соответствующая булева алгебра полос допускают простое описание. Для $L \in \mathbb{B}(Y_T)$ обозначим через $h(L)$ полосу в $\mathbb{B}(X_T)$, соответствующую проектору $h([K])$.

4.1.6. Утверждение. Для полосы $K \in \mathbb{B}(X_T)$ равносильны следующие условия:

- 1) если $Tu = Tv$ и $u \in K$, то $v \in K$, каковы бы ни были $u, v \in X_+$;
- 2) из $T(K'_+) \subset T(K_+)^{\perp\perp}$ вытекает $K' \subset K$ для любой полосы $K' \in \mathbb{B}(X_T)$;
- 3) $K = h(L)$ для некоторого $L \in \mathbb{B}(Y)$.

Полосу $K \in \mathbb{B}(X_T)$ (а также соответствующий порядковый проектор $[K] \in \mathbb{P}(X_T)$) назовём *T-насыщенной*, если она удовлетворяет одному (а тогда и каждому) из условий 1)–3) утверждения 4.1.6.

Из теоремы 4.1.5 с привлечением спектральной теоремы Фрейденшталя легко выводится следующий результат.

4.1.7. Утверждение. Если X и Y — пространства Канторевича, T — оператор Магарам из X в Y , то на X существует структура f -модуля над f -алгеброй $\mathcal{Z}(Y)$, такая что порядково ограниченный оператор $S: X \rightarrow Y$ абсолютно непрерывен относительно T в том и только в том случае, когда S является $\mathcal{Z}(Y)$ -линейным.

Теперь сформулируем основной результат настоящего раздела.

4.1.8. Теорема. Пусть X — векторная решётка, $Y := \mathcal{R}\downarrow$ и $T: X \rightarrow Y$ — строго положительный оператор Магарам, причём $Y = Y_T$. Тогда существуют $\mathcal{X}, \tau \in \mathbb{V}(\mathbb{B})$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\mathbb{V}(\mathbb{B}) \models \langle \mathcal{X} \text{ — пространство Канторевича, а } \tau: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R} \text{ — строго положительный порядково непрерывный функционал со свойством Леви} \rangle$;
- 2) $\mathcal{X}\downarrow$ — пространство Канторевича, являющееся одновременно унитарным f -модулем над f -алгеброй $\mathcal{R}\downarrow$;
- 3) $\tau\downarrow: \mathcal{X}\downarrow \rightarrow \mathcal{R}\downarrow$ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви, а также $\mathcal{R}\downarrow$ -модульный гомоморфизм;
- 4) существует решёточный гомоморфизм φ из X в $\mathcal{X}\downarrow$, такой что $\varphi(X)$ — порядково плотная подрешётка в $\mathcal{X}\downarrow$ и $T = \tau\downarrow \circ \varphi$.

4.1.9. Операторы Магарам возникли в работах Д. Магарам [59–61]. Теорема 4.1.8 получена в [16]. Дальнейшие ссылки и результаты об операторах Магарам можно найти в [52].

4.2. Представление порядково непрерывных операторов

Теорема 4.1.8 позволяет утверждать, что каждый факт о линейных порядково непрерывных функционалах в пространствах Канторевича имеет параллельный вариант для операторов Магарам, который может быть установлен с помощью этой теоремы. В частности, имеет место операторный вариант следующего факта.

4.2.1. Теорема. Пусть X — векторная решётка и $X_n^\sim$ разделяет точки X . Тогда существуют фундаменты L и X' в X^u и линейный функционал $\tau: L \rightarrow \mathbb{R}$, такие что справедливы следующие утверждения:

- 1) $X' = \{x' \in X^u: xx' \in L \text{ для всех } x \in X\}$;
- 2) τ — строго положительный o -непрерывный функционал со свойством Леви;

- 3) для любого $\sigma \in X_n^\sim$ существует единственный элемент $x' \in X'$, для которого имеет место представление $\sigma(x) = \tau(x \cdot x')$ для всех $x \in X$;
- 4) отображение $\sigma \mapsto x'$ — решёточный изоморфизм из $X_n^\sim$ на X' .

4.2.2. Распространение этого «скалярного» результата на общие операторы осуществляется с помощью булевозначного перевода, требующего некоторой подготовительной работы. Пусть X и Y — f -модули над f -алгеброй A . Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют A -линейным, если $T(ax) = aTx$ для всех $x \in X$ и $a \in A$. Обозначим через $L^A(X, Y)$ множество всех порядково ограниченных A -линейных операторов из X в Y и положим $L_n^A(X, Y) := L^A(X, Y) \cap L_n^\sim(X, Y)$.

Скажем, что множество $\mathcal{T} \subset L^\sim(X, Y)$ *разделяет точки* X , если для любого ненулевого $x \in X$ существует $T \in \mathcal{T}$, такой что $Tx \neq 0$. Если Y — пространство Канторовича, $\mathcal{T}$ — подрешётка в $L^\sim(X, Y)$, сказанное эквивалентно тому, что для любого $x \in X_+$ существует положительный оператор $T \in \mathcal{T}$, для которого $Tx \neq 0$.

4.2.3. Возьмём вещественную векторную решётку $\mathcal{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Пусть элемент $\mathcal{X}^\sim \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ изображает векторную решётку порядково ограниченных функционалов на $\mathcal{X}$, а $\mathcal{X}_n^\sim \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — подрешётку в $\mathcal{X}^\sim$, состоящую из порядково непрерывных функционалов. Точнее, соотношения $\llbracket \sigma \in \mathcal{X}^\sim \rrbracket = \mathbb{1}$ и $\llbracket \sigma \in \mathcal{X}_n^\sim \rrbracket = \mathbb{1}$ означают соответственно, что

$$\llbracket \sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R} \text{ — порядково ограниченный функционал} \rrbracket = \mathbb{1}$$

и

$$\llbracket \sigma \in \mathcal{X}^\sim \text{ и } \sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R} \text{ порядково непрерывен} \rrbracket = \mathbb{1}.$$

Обозначим $X := \mathcal{X} \downarrow$ и $A := \mathcal{R} \downarrow$.

4.2.4. Теорема. Отображение, ставящее в соответствие произвольному элементу $\sigma \in \mathcal{X}^\sim \downarrow$ его спуск $S := \sigma \downarrow$, представляет собой решёточный изоморфизм из $\mathcal{X}^\sim \downarrow$ и $\mathcal{X}_n^\sim \downarrow$ на $L^A(X, \mathcal{R} \downarrow)$ и $L_n^A(X, \mathcal{R} \downarrow)$ соответственно. Более того, $\llbracket \mathcal{X}^\sim \text{ разделяет точки } \mathcal{X} \rrbracket = \mathbb{1}$ ($\llbracket \mathcal{X}_n^\sim \text{ разделяет точки } \mathcal{X} \rrbracket = \mathbb{1}$) лишь в том случае, когда $L^A(X, \mathcal{R} \downarrow)$ (соответственно $L_n^A(X, \mathcal{R} \downarrow)$) разделяет точки X .

4.2.5. В соответствии с теоремой Гордона можно взять $Y^u = \mathcal{R} \downarrow$ и отождествить A^u с Y^u . По теореме 1.3.7 существует вещественное пространство Канторовича $\mathcal{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B} = \mathbb{P}(Y)$, такое что $\mathcal{X} \downarrow$ — f -модуль над A^u , и существует изоморфизм f -модулей $h: X \rightarrow \mathcal{X} \downarrow$, для которого $\mathcal{X} \downarrow = \text{mix}(h(X))$. По теореме 4.2.4 $\mathcal{X}_n^\sim$ разделяет точки $\mathcal{X}$. Принцип переноса позволяет утверждать, что теорема 4.2.1 имеет место внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, стало быть, существуют фундамент $\mathcal{L}$ в $\mathcal{X}^u$ и строго положительный линейный функционал $\tau: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ со свойством Леви, такие что порядковый идеал $\mathcal{X}' = \{x' \in \mathcal{X}^u: x' \mathcal{X} \subset \mathcal{L}\}$ решёточно изоморфен $\mathcal{X}_n^\sim$; более того, изоморфизм осуществляется постановкой в соответствие элементу $x' \in \mathcal{X}'$ функционала $\sigma_{x'} \in \mathcal{X}_n^\sim$ по формуле $\sigma_{x'}(x) = \tau(xx')$ ($x \in \mathcal{X}$).

4.2.6. Обозначим $\hat{X} := \mathcal{X} \downarrow$, $\hat{L} := \mathcal{L} \downarrow$, $\hat{T} := \tau \downarrow$ и $\hat{X}' := \mathcal{X}' \downarrow$. По теореме 1.3.7 мы можем отождествить расширенные пространства Канторовича X^u , $\hat{X}^u$ и $\mathcal{X}^u \downarrow$, а также X с латерально плотной подрешёткой в $\hat{X}$. Тогда $\hat{L}$ — фундамент в $\hat{X}^u$ и f -модуль над A^u , тогда как $T: \hat{L} \rightarrow Y^u$ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви. Так как умножение в X^u совпадает со спуском внутреннего умножения в $\mathcal{X}^u$, то имеет место представление $\hat{X}' = \{x' \in X^u: x' \hat{X} \subset \hat{L}\}$. Более того, $\hat{X}'$ и $L_n^A(\hat{X}, Y^u)$ изоморфны как f -модули, причём изоморфизм осуществляется постановкой в соответствие элементу $x' \in \hat{X}'$ оператора $\hat{S}_{x'} \in L_n^A(\hat{X}, Y^u)$, определяемого формулой $\hat{S}_{x'}(x) = \hat{T}(xx')$ ($x \in \hat{X}$). Полагаем

$$L := \{x \in \hat{L}: \hat{T}x \in Y\}, \quad T := \hat{T}|_L, \quad X' := \{x' \in \hat{X}': x'X \subset L\}.$$

Ясно, что если $x' \in X'$, то $S_{x'} := \hat{S}_{x'}|_X$ содержится в $L_n^A(X, Y)$. Наоборот, произвольный оператор $S \in L_n^A(X, Y)$ допускает представление $Sx = \hat{T}(xx')$ ($x \in X$) для некоторого $x' \in X'$, стало быть, $\hat{T}(xx') \in Y$ для всех $x \in X$, а потому $x' \in X'$, $xx' \in L$ для всех $x \in X$. Следовательно, $Sx = T(xx')$ ($x \in X$) согласно нашим обозначениям.

4.2.7. Теорема. Пусть X — f -модуль над $A := \mathcal{Z}(Y)$, где Y — пространство Канторовича и $L_n^A(X, Y)$ разделяет точки X . Тогда существуют фундамент L в X^u и строго положительный оператор Магарам $T: L \rightarrow Y$, такие что фундамент

$$X' = \{x' \in X': (\forall x \in X) xx' \in L\} \subset X^u$$

решёточно изоморфен решётке $L_n^A(X, Y)$. Изоморфизм устанавливается путём постановки в соответствие элементу $x' \in X'$ оператора $S_{x'} \in L_n^A(X, Y)$ по формуле

$$S_{x'}(x) = T(xx') \quad (x \in X).$$

Если существует строго положительный $T_0 \in L_n^A(X, Y)$, то можно выбрать L и T так, чтобы $X \subset L$ и $T|_X = T_0$.

4.2.8. Теорема Хана о разложении. Для любого оператора Магарам $S: X \rightarrow Y$ существует порядковый проектор $\pi \in \mathbb{P}(X)$, такой что $S^+ = S \circ \pi$ и $S^- = -S \circ \pi^\perp$. В частности, $|S| = S \circ (\pi - \pi^\perp)$.

4.2.9. Теорема Накано. Пусть $T_1, T_2: X \rightarrow Y$ — порядково ограниченные операторы, причём $T := |T_1| + |T_2|$ — оператор Магарам. Тогда T_1 и T_2 дизъюнктивны в том и только в том случае, когда дизъюнктивны их носители; символически: $T_1 \perp T_2 \iff C_{T_1} \perp C_{T_2}$.

4.2.10. Теорема Радона—Никодима. Пусть X и Y — пространства Канторовича и $T: X \rightarrow Y$ — положительный оператор Магарам. Положительный оператор $S: X \rightarrow Y$ входит в полосу $\{T\}^{\perp\perp}$ в том и только в том случае, когда существует $0 \leq \rho \in \text{Orth}^\infty(X)$, такой что $Sx = T(\rho x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(\rho)$.

4.2.11. Теорема 4.2.1 доказана в [8, теорема 2.1]. Она фактически содержится также в [7, теорема IX.3.1] и [52, теорема 3.4.8]. Теорема 4.2.7 получена

в [15] (см. также [52]). Теоремы 4.2.8—4.2.10, полученные впервые в [56], можно без труда вывести из теоремы 4.2.7 или же доказать по излагаемой схеме «булевозначной скаляризации».

4.3. Операторы типа условного математического ожидания

В этом разделе мы приводим булевозначную интерпретацию условного математического ожидания и некоторых связанных с ним результатов.

4.3.1. Рассмотрим расширенное пространство Канторовича Z с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Пусть $\Phi: L^1(\Phi) \rightarrow Y$ — оператор Магарам со свойством Леви. Будем писать $L^0(\Phi) := Z$, если $L^1(\Phi)$ — фундамент в Z . В этом случае порядковый идеал в Z , порождённый единицей $\mathbb{1}$, обозначим через $L^\infty(\Phi)$. Рассмотрим порядковый идеал $X \subset Z$. Будем предполагать, что $L^\infty(\Phi) \subset X \subset L^1(\Phi)$. Ассоциированное пространство X' определяется как множество таких $x' \in L^0(\Phi)$, что $xx' \in L^1(\Phi)$ для всех $x \in X$. Как видно, X' — порядковый идеал в Z .

Если (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство и $\mathcal{X}_0$ — замкнутая по норме векторная подрешётка в $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, содержащая 1_Ω , то существует единственная σ -подалгебра Σ_0 алгебры Σ , такая что $\mathcal{X}_0 = L^1(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)$, где $\mu_0 = \mu|_{\mathcal{X}_0}$ (см., например, [43, лемма 1]). Интерпретируя этот факт и свойства условного математического ожидания внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, приходим к следующему результату.

4.3.2. Теорема. Пусть $\Phi: L^1(\Phi) \rightarrow Y$ — строго положительный оператор Магарам, причём $Y = Y_\Phi$, и Z_0 — порядково замкнутая векторная подрешётка в $L^0(\Phi)$. Если $\mathbb{1} \in X_0 := L^1(\Phi) \cap Z_0$ и ограничение $\Phi_0 := \Phi|_{X_0}$ обладает свойством Магарам, то $X_0 = L^1(\Phi_0)$ и существует оператор $E(\cdot|Z_0)$ из $L^1(\Phi)$ на $L^1(\Phi_0)$, такой что выполняются следующие условия:

- 1) $E(\cdot|Z_0)$ — порядково непрерывный линейный положительный оператор;
- 2) $E(\cdot|Z_0)$ коммутирует со всеми насыщенными проекторами, т. е.

$$E(h(\pi)x|Z_0) = h(\pi)E(x|Z_0)$$

для всех $\pi \in \mathbb{P}_\Phi(X)$ и $x \in L^1(\Phi)$;

- 3) $\Phi(xy) = \Phi(yE(x|Z_0))$ для всех $x \in L^1(\Phi)$ и $y \in L^\infty(\Phi_0)$;
- 4) $\Phi_0(|E(x|Z_0)|) \leq \Phi(|x|)$ для всех $x \in L^1(\Phi)$;
- 5) $E(\cdot|Z_0)$ является усредняющим, т. е.

$$E(vE(x|Z_0)|Z_0) = E(v|Z_0)E(x|Z_0)$$

для всех $x \in L^1(\Phi)$ и $v \in L^\infty(\Phi)$.

4.3.3. Оператор $E(\cdot|Z_0)$, определённый в теореме 4.3.2, назовём *оператором условного математического ожидания относительно Z_0* . Возьмём $w \in X'$ и заметим, что $E(wx|Z_0) \in L^1(\Phi_0)$ корректно определён для всех $x \in X$. Если сверх того $E(wx|Z_0) \in X$ для любого $x \in X$, то можно определить линейный оператор $T: X \rightarrow X$, полагая $Tx = E(wx|Z_0)$ ($x \in X$). Как видно, T порядково ограниченный и порядково непрерывный. Более того, для любого $x \in X_+$

справедливо

$$T^+x = E(w^+x|Z_0), \quad T^-x = E(w^-x|Z_0), \quad |T|x = E(|w|x|Z_0).$$

В частности, T положителен в том и только в том случае, когда положителен элемент $w \in X'$. Полагая $x := wx$ и $y := \mathbb{1}$ в теореме 4.3.2, получаем

$$\Phi(wx) = \Phi(wx\mathbb{1}) = \Phi(E(wx|Z_0)) = \Phi(Tx)$$

для всех $x \in X$. Отсюда ввиду строгой положительности Φ вытекает, в частности, что $w \in X'$ однозначно определяется оператором T .

Будем говорить, что оператор T удовлетворяет *усредняющему тождеству*, если $T(y \cdot Tx) = Ty \cdot Tx$ для всех $x \in X$ и $y \in L^\infty(\Phi)$. Сформулируем два известных результата. Через $\mathcal{E}(\cdot|\Sigma_0)$ обозначаем оператор условного математического ожидания относительно σ -алгебры Σ_0 .

4.3.4. Теорема. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство и $\mathcal{X}$ — идеал $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, содержащий $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для линейного оператора T на $\mathcal{X}$ равносильны следующие утверждения:

- 1) T порядково непрерывен, удовлетворяет усредняющему тождеству и оставляет инвариантным подпространство $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$;
- 2) существуют $w \in \mathcal{X}'$ и σ -подалгебра Σ_0 в Σ , такие что $Tx = \mathcal{E}(wx|\Sigma_0)$ для всех $x \in \mathcal{X}$.

4.3.5. Теорема. Для подпространства $\mathcal{X}$ пространства $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ следующие утверждения равносильны:

- 1) $\mathcal{X}$ — образ положительного сжимающего проектора в $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$;
- 2) $\mathcal{X}$ — замкнутая векторная подрешётка в $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$;
- 3) существует решётчатая изометрия из некоторого $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ на $\mathcal{X}$.

Булевозначная интерпретация теорем 4.3.4 и 4.3.5 приводит к следующим результатам.

4.3.6. Теорема. Пусть $\Phi: L^1(\Phi) \rightarrow Y$ — строго положительный оператор Магарам и X — фундамент в $L^1(\Phi)$, содержащий $L^\infty(\Phi)$. Для линейного оператора T на X равносильны следующие утверждения:

- 1) T порядково непрерывен, удовлетворяет усредняющему тождеству, оставляет инвариантным подпространство $L^\infty(\Phi)$ и коммутирует со всеми Φ -насыщенными проекторами;
- 2) существует $w \in X'$ и порядково замкнутая подрешётка Z_0 в $L^0(\Phi)$, содержащая слабую порядковую единицу $\mathbb{1}$ решётки $L^1(\Phi)$, такие что ограничение Φ на $L^1(\Phi) \cap Z_0$ обладает свойством Магарам и $Tx = \mathcal{E}(wx|Z_0)$ для всех $x \in X$.

4.3.7. Теорема. Для подпространства X_0 пространства $L^1(\Phi)$ равносильны следующие утверждения:

- 1) X — образ положительного Φ -сжимающего проектора;

- 2) X — замкнутая векторная подрешётка в $L^1(\Phi)$, инвариантная для всех Φ -сжимающих проекторов;
- 3) существуют оператор Магарам $\Psi: L^1(\Psi) \rightarrow Y$ и решёточный изоморфизм h из $L^1(\Psi)$ на X , такие что $\Phi(|Tx|) = \Psi(|x|)$ для всех $x \in L^1(\Psi)$.

4.3.8. Теоремы 4.3.4 и 4.3.5 приведены в [41, предложение 3.1] и [43, лемма 1] соответственно. Теоремы 4.3.6 и 4.3.7 ранее не публиковались.

4.4. Магарамово расширение

Здесь мы покажем, что линейный положительный функционал допускает расширение до оператора Магарам. Соответствующий скалярный результат — достаточно простой и хорошо известный факт.

4.4.1. Утверждение. Предположим, что X — векторная решётка над плотным подполем $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ и $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — строго положительный $\mathbb{F}$ -линейный функционал. Тогда существуют пространство Канторовича X^φ , содержащее X в качестве подрешётки, и строго положительный порядково непрерывный линейный функционал $\bar{\varphi}: X^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством Леви, расширяющий φ . Более того, для любого $x \in X^\varphi$ существует последовательность (x_n) в X , такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(|x - x_n|) = 0$.

Доказательство. Пусть X^φ — пополнение метрического пространства (X, d) , где $d(x, y) := \varphi(|x - y|)$ ($x, y \in X$), а $\bar{\varphi}$ — продолжение φ на X^φ по непрерывности. Тогда X^φ — банахова решётка с аддитивной нормой $\|\cdot\|^\varphi := \bar{\varphi}(|\cdot|)$, содержащая X в качестве плотной по норме $\mathbb{F}$ -линейной подрешётки, а $\bar{\varphi}$ — строго положительный порядково непрерывный линейный функционал на X^φ со свойством Леви. $\square$

4.4.2. Обозначим $L^1(\varphi) := X^\varphi$, и пусть $\bar{X}$ — порядковый идеал в $L^1(\varphi)$, порождённый X . Тогда $(L^1(\varphi), \|\cdot\|^\varphi)$ — AL -пространство и $\bar{X}$ — пространство Канторовича. Более того, решётка X плотна по норме в $L^1(\varphi)$, а потому и в $\bar{X}$.

Для непустого множества U в решётке L обозначим через $U^\uparrow$ ($U^\downarrow$) множество элементов $x \in L$, представимых в виде $x = \sup(A)$ (соответственно $x = \inf(A)$), где A — направленное вверх (соответственно вниз) множество в U . Кроме того, положим $U^{\uparrow\downarrow} := (U^\uparrow)^\downarrow$ и т. д. Если в этих обозначениях A счётно, то пишем $U^\uparrow$, $U^\downarrow$ и $U^{\uparrow\downarrow}$ вместо $U^{\uparrow\uparrow}$, $U^{\downarrow\downarrow}$ и $U^{\uparrow\downarrow}$. Напомним, что для порядкового пополнения X^δ векторной решётки X выполняется $X^\delta = X^\uparrow = X^\downarrow$.

4.4.3. Утверждение. Справедливы равенства $\bar{X} = X^{\uparrow\downarrow} = X^{\downarrow\uparrow}$ и $L^1(\varphi) = X^{\uparrow\downarrow} = X^{\downarrow\uparrow}$, где операции $(\cdot)^{\uparrow\downarrow}$ и $(\cdot)^{\downarrow\uparrow}$ берутся в $\bar{X}$ и $L^1(\varphi)$ соответственно.

Булевозначная интерпретация предложений 4.4.1 и 4.4.3 приводит к следующему результату.

4.4.4. Теорема. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторовича и T — строго положительный линейный оператор из X в Y . Тогда

существуют пространство Канторовича $\bar{X}$ и строго положительный оператор Магарам $\bar{T}: \bar{X} \rightarrow Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) существуют решёточный гомоморфизм $\iota: X \rightarrow \bar{X}$ и гомоморфизм f -алгебр $\theta: \mathcal{Z}(Y) \rightarrow \mathcal{Z}(\bar{X})$, такие что

$$\alpha T x = \bar{T}(\theta(\alpha)\iota(x)) \quad (x \in X, \alpha \in \mathcal{Z}(Y));$$

- 2) $\iota(X)$ является мажорирующей подрешёткой в $\bar{X}$ и $\theta(\mathcal{Z}(Y))$ — порядково замкнутая подрешётка и подкольцо в $\mathcal{Z}(\bar{X})$;
- 3) имеет место представление $\bar{X} = (X \odot \mathcal{Z}(Y))^{\uparrow\uparrow}$, где $X \odot \mathcal{Z}(Y)$ — подпространство в $\bar{X}$, состоящее из всех конечных сумм $\sum_{k=1}^n \theta(\alpha_k)\iota(x_k)$, где $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{Z}(Y)$.

4.4.5. Пару $(\bar{X}, \bar{T})$ (или, короче, $\bar{T}$) называют *магарамовым расширением* оператора T , если она удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 4.4.4. Пару $(\bar{X}, \iota)$ называют *областью определения магарамова расширения* оператора T . Два магарамовых расширения T_1 и T_2 оператора T с областями определения (X_1, ι_1) и (X_2, ι_2) именуют *изоморфными*, если существует решёточный изоморфизм h из X_1 на X_2 , такой что $T_1 = T_2 \circ h$ и $\iota_2 = h \circ \iota_1$. Можно показать, что магарамово расширение единственно с точностью до изоморфизма.

4.4.6. Пусть X — векторная решётка, Y — пространство Канторовича, $T: X \rightarrow Y$ — строго положительный линейный оператор и $(\bar{X}, \bar{T})$ — магарамово расширение T . Рассмотрим максимальное расширение $\bar{X}^u$ пространства $\bar{X}$ с фиксированной структурой f -алгебры. Пусть $L_1(\Phi)$ — наибольший порядковый идеал в $\bar{X}^u$, на который распространится $\bar{T}$ по o -непрерывности. Подробнее:

$$L^1(T) := \{x \in \bar{X}^u: \bar{T}([0, |x|] \cap \bar{X}) \text{ порядково ограниченный в } Y\},$$

$$\hat{T}x := \sup\{\bar{T}u: u \in \bar{X}, 0 \leq u \leq x\} \quad (x \in L^1(T)_+),$$

$$\hat{T}x = \hat{T}x^+ - \hat{T}x^- \quad (x \in L^1(T)).$$

Введём Y -значную норму $\|\cdot\|$ на $L^1(T)$ формулой $\|u\| := \hat{T}(|u|)$. В терминологии решёточно нормированных пространство $(L^1(T), \|\cdot\|)$ — *решётка Банаха—Канторовича* (см. [52, гл. 2]). В частности, $\|au\| = |a|\|u\|$ ($a \in \mathcal{Z}(Y)$, $u \in L^1(T)$).

4.4.7. Теорема. Для каждого оператора $S \in \{T\}^{\perp\perp}$ существует единственный элемент $z = z_T \in \bar{X}^u$, обеспечивающий справедливость представления

$$Sx = \hat{T}(z \cdot \iota(x)) \quad (x \in X).$$

Соответствие $T \mapsto z_T$ устанавливает решёточный изоморфизм между полосой $\{T\}^{\perp\perp}$ и фундаментом в $\bar{X}^u$, определяемым формулой

$$\{z \in \bar{X}^u: z \cdot \iota(X) \subset L_1(T)\}.$$

Доказательство. Этот результат — вариант теоремы Радона—Никодима для положительных операторов — может быть доказан по общей схеме. $\square$

4.4.8. Конструкция магарамова расширения положительного оператора, восходящая к работам Д. Магарам [59–61], была введена в [3, 4] тремя разными способами. Один из них, основанный на вложении $x \mapsto \bar{x}$ векторной решётки X в $L^{\sim}(L^{\sim}(X, Y), Y)$, определяемом формулой $\bar{x}(T) := Tx$ ($T \in L^{\sim}(X, Y)$), независимо реализован в [57] для множества порядково ограниченных операторов. Описание дальнейших свойств этой конструкции можно найти в [52].

Литература

- [1] Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктность // ДАН СССР. — 1979. — Т. 248, № 5. — С. 1033–1036.
- [2] Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр. — Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1981. — С. 3–34.
- [3] Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г. Лебегово расширение положительного оператора // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 3. — С. 521–524.
- [4] Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г. Порядково непрерывное расширение положительного оператора // Сиб. матем. журн. — 1988. — Т. 29, № 5. — С. 24–55.
- [5] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978.
- [6] Владимиров Д. А. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969.
- [7] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: ГИФМЛ, 1961.
- [8] Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах // Матем. сб. — 1971. — Т. 84 (126), № 3. — С. 331–352.
- [9] Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K -пространства // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 4. — С. 773–775.
- [10] Гордон Е. И. K -пространства в булевозначных моделях теории множеств // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 4. — С. 777–780.
- [11] Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K -пространствах // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 5. — С. 55–65.
- [12] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
- [13] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
- [14] Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.
- [15] Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265, № 6. — С. 1312–1316.
- [16] Кусраев А. Г. Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 1. — С. 69–79.
- [17] Кусраев А. Г. Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике. — М., 1986. — С. 99.
- [18] Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. — М.: Наука, 2003.

- [19] Кусраев А. Г. О нерасширяющих операторах // Владикавк. матем. журн. — 2004. — Т. 6, № 3. — С. 47—58.
- [20] Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной f -алгебре // Сиб. матем. журн. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 97—107.
- [21] Кусраев А. Г. Анализ, алгебра и логика в теории операторов // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование / Отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. — Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. — Р. 171—204.
- [22] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. — Новосибирск: Наука, 1990.
- [23] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. — Новосибирск: Наука, 1992.
- [24] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.
- [25] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. — М.: Наука, 2005.
- [26] Кусраева З. А. Нерасширяющие алгебраические операторы // Владикавк. матем. журн. — 2013. — Т. 15, № 3. — С. 54—57.
- [27] Кутателадзе С. С. О разностях решёточных гомоморфизмов // Сиб. матем. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 393—396.
- [28] Кутателадзе С. С. О подпространствах Гротендика // Сиб. матем. журн. — 2005. — Т. 46, № 3. — С. 620—624.
- [29] Abramovich Y. A., Kitover A. K. d -independence and d -bases in vector lattices // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1999. — Vol. 44. — P. 667—682.
- [30] Abramovich Y. A., Kitover A. K. Inverses of Disjointness Preserving Operators. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 679).
- [31] Abramovich Y. A., Kitover A. K. d -independence and d -bases // Positivity. — 2003. — Vol. 7, no. 1. — P. 95—97.
- [32] Aczél J., Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
- [33] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators. — New York: Academic Press, 1985.
- [34] Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory. — New York: Clarendon Press, 1985.
- [35] Bernau S. J., Huijsmans C. B., de Pagter B. Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 115, no. 1. — P. 151—156.
- [36] Boulabiar K. Recent trends on order bounded disjointness preserving operators // Irish Math. Soc. Bull. — 2008. — Vol. 62. — P. 43—69.
- [37] Boulabiar K., Buskes G., Sirotkin G. Algebraic order bounded disjointness preserving operators and strongly diagonal operators // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2006. — Vol. 54. — P. 9—31.
- [38] Bourgain J. Real isomorphic complex Banach spaces need not be complex isomorphic // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 96. — P. 221—226.
- [39] Cooper J. L. B. Coordinated linear spaces // Proc. London Math. Soc. — 1953. — Vol. 3. — P. 305—327.

- [40] Dieudonné J. Complex structures on real Banach spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1952. — Vol. 3. — P. 162–164.
- [41] Dodds P. G., Huijsmans C. B., de Pagter B. Characterizations of conditional expectation-type operators // *Pacific J. Math.* — 1990. — Vol. 141, no. 1. — P. 55–77.
- [42] Duhoux M., Meyer M. A new proof of the lattice structure of orthomorphisms // *J. London Math. Soc.* — 1982. — Vol. 25, no. 2. — P. 375–378.
- [43] Duoglas R. Contractive projections on L_1 space // *Pacific J. Math.* — 1965. — Vol. 15, no. 2. — P. 443–462.
- [44] Gowers W. T., Maurey B. The unconditional basic sequence problem // *J. Amer. Math. Soc.* — 1993. — Vol. 6. — P. 851–874.
- [45] Gowers W. T., Maurey B. Banach spaces with small spaces of operators // *Math. Ann.* — 1997. — Vol. 307. — P. 543–568.
- [46] Grothendieck A. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // *Can. J. Math.* — 1955. — Vol. 4. — P. 552–561.
- [47] Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // *Sib. Adv. Math.* — 1995. — Vol. 5, no. 2. — P. 99–121.
- [48] Gutman A. E. Disjointness preserving operators // *Vector Lattices and Integral Operators* / S. S. Kutateladze, ed. — Dordrecht: Kluwer, 1996. — P. 361–454.
- [49] Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. The Wickstead Problem: Preprint. — Vladikavkaz, 2007. — (IAMI VSC RAS; No. 3).
- [50] Huijsmans C. B., Wickstead A. W. The inverse of band preserving and disjointness preserving operators // *Indag. Math.* — 1992. — Vol. 3, no. 2. — P. 179–183.
- [51] Kuczma M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. — Basel: Birkhäuser, 2009.
- [52] Kusraev A. G. Dominated Operators. — Dordrecht: Kluwer, 2000.
- [53] Kusraeva Z. A. Involutions and complex structures on real vector lattices. — To appear.
- [54] Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces. — Berlin: Springer, 1974.
- [55] Lindenstrauss J., Wulbert D. E. On the classification of the Banach spaces whose duals are L^1 -spaces // *J. Funct. Anal.* — 1969. — Vol. 4. — P. 332–349.
- [56] Luxemburg W. A. J., Schep A. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // *Indag. Math.* — 1978. — Vol. 40. — P. 357–375.
- [57] Luxemburg W. A. J., de Pagter B. Maharam extension of positive operators and f -algebras // *Positivity*. — 2002. — Vol. 6, no. 2. — P. 147–190.
- [58] Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1. — Amsterdam: North-Holland, 1971.
- [59] Maharam D. The representation of abstract integrals // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1953. — Vol. 75, no. 1. — P. 154–184.
- [60] Maharam D. On kernel representation of linear operators // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1955. — Vol. 79, no. 1. — P. 229–255.
- [61] Maharam D. On positive operators // *Conf. Modern Analysis and Probability*. — Providence: Amer. Math. Soc., 1984. — (Contemp. Math.; Vol. 26). — P. 263–277.
- [62] McPolin P. T. N., Wickstead A. W. The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1985. — Vol. 97, no. 3. — P. 481–487.

- [63] Meyer M. Le stabilisateur d'un espace vectoriel réticulé // C. R. Acad. Sci. Ser. A. — 1976. — Vol. 283. — P. 249–250.
- [64] Meyer-Nieberg P. Banach Lattices. — Berlin: Springer, 1991.
- [65] Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators. — Berlin: Springer, 1974.
- [66] Schwarz H.-V. Banach Lattices and Operators. — Leipzig: Teubner, 1984.
- [67] Semadeni Zb. Banach Spaces of Continuous Functions. — Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.
- [68] Sikorski R. Boolean Algebras. — Berlin: Springer, 1964.
- [69] Solovay R., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. — 1972. — Vol. 94, no. 2. — P. 201–245.
- [70] Szarek S. A superreexive Banach space which does not admit complex structure // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 97. — P. 437–444.
- [71] Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics. — Tokyo: Iwanami; Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
- [72] Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symb. Logic. — 1979. — Vol. 44, no. 3. — P. 417–440.
- [73] Takeuti G. Boolean-valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Symp. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977). — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 753). — P. 714–731.
- [74] Takeuti G., Zaring W. M. Axiomatic Set Theory. — New York: Springer, 1973.
- [75] Wickstead A. W. Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math. — 1977. — Vol. 35, no. 3. — P. 225–238.
- [76] Zaanen A. C. Riesz Spaces. 2. — Amsterdam: North-Holland, 1983.