Наилучшая аппроксимация множества, элементы которого известны приближённо*

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации РАН им. А. А. Харкевича
e-mail: magaril@mech.math.msu.su

К. Ю. ОСИПЕНКО
МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского,
Институт проблем передачи информации РАН им. А. А. Харкевича
e-mail: kosipenko@yahoo.com

Е. О. СИВКОВА
Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики
e-mail: sivkova_elena@inbox.ru

УДК 517.518.8

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, преобразование Фурье, соболевский класс, экстремальная задача.

Аннотация

В работе решается задача о наилучшем (в точно определённом смысле) приближении с фиксированной точностью периодических функций и функций на прямой соответственно по неточно заданному конечному набору их коэффициентов Фурье и преобразованию Фурье на произвольном множестве конечной меры.

Abstract

G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, E. O. Sivkova, The best approximation of a set whose elements are known approximately, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 127—141.

This paper is concerned with the problem of the best (in a precisely defined sense) approximation with given accuracy of periodic functions and functions on the real line from, respectively, a finite tuple of noisy Fourier coefficients or noisy Fourier transform on an arbitrary set of finite measure.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

Введение

Начнём с общей постановки задачи о наилучшем приближении с фиксированной точностью элементов данного класса при условии, что сами элементы известны приближённо. Пусть X — векторное пространство, W — непустое подмножество (класс) элементов в X. Пусть, далее, Y — нормированное пространство, $I\colon X \to Y$ — линейный оператор, $\delta \geqslant 0$. Элементы из W известны приближённо, а именно для каждого элемента $x \in W$ известен (мы «наблюдаем») элемент $y \in Y$, такой что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$ (если $\delta = 0$, то известен элемент Ix). Таким образом, информация об элементах из W определяется тройкой (Y, I, δ).

Восстановить по данной информации значения некоторого линейного оператора $T\colon X \to Z$ на классе W с фиксированной точностью — это значит предъявить метод восстановления $\varphi\colon Y \to Z$, дающий нужную точность (погрешность) приближения, которая определяется следующим образом:

$$e(\delta, \varphi) = e(T, W, Y, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z.$$

Предположим, что пары (Y, I) можно выбирать из некоторого множества $\mathcal{I}$ и при этом каждой такой паре (Y, I) поставлено в соответствие неотрицательное число $v(Y, I)$, называемое *объёмом используемой информации*. Нас интересует вопрос: какой минимальный объём информации нужен, чтобы по ней можно было восстановить значения оператора T на классе W с погрешностью, не превосходящей заданного числа ε? Точнее, обозначая через $\Phi(Y)$ множество всех отображений из Y в Z, мы хотим для данных $\varepsilon > 0$ и $\delta \geqslant 0$ найти величину

$$V(\varepsilon, \delta) = \inf\bigl\{v(Y, I) \mid \text{найдётся } \bigl(\varphi, (Y, I)\bigr) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I}, \text{ такой что } e(\delta, \varphi) \leqslant \varepsilon\bigr\}$$

и те наборы $\bigl(\hat{\varphi}, (\hat{Y}, \hat{I})\bigr)$, на которых нижняя грань достигается. Такие наборы будем называть *оптимальными*.

Если множество тех $\bigl(\varphi, (Y, I)\bigr) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I}$, для которых $e(\delta, \varphi) \leqslant \varepsilon$, пусто, то полагаем $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$, и это означает, что по данной информации нельзя восстановить элементы из W с заданной точностью.

Данная постановка восходит к понятию ε-энтропии множества, величине, характеризующей наилучшее с точностью до ε приближение множества конечным числом элементов (см., например, [1]). Сама постановка является в определённом смысле обратной к задаче об оптимальном восстановлении функций из данного класса по их неточно заданному спектру. Подобные задачи рассматривались в ряде работ авторов (см. [2—7]).

1. Периодический случай

Пусть n — натуральное число и $W_2^n(\mathbb{T})$ — соболевский класс 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$-я производная абсолютно непрерывна и

$\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1$, где

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Коэффициенты Фурье $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ задаются формулами

$$c_j = c_j\bigl(x(\cdot)\bigr) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}\,dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ставится следующая задача. Пусть для любого конечного набора целых чисел имеется возможность измерить (точно или приближённо) коэффициенты Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ с номерами из данного набора. Мы хотим по этой информации восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k-ю производную ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{T})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех таких наборов тот, который имеет минимальное число элементов.

Уточним постановку, приведя её в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство 2π-периодических функций, у которых $(n-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а n-я производная принадлежит $L_2(\mathbb{T})$, $W = W_2^n(\mathbb{T})$, $Z = L_2(\mathbb{T})$. Каждому конечному набору α целых чисел поставим в соответствие пару $\bigl(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha\bigr)$, где $N(\alpha)$ — число элементов в наборе, $l_\infty^{N(\alpha)}$ — пространство $\mathbb{C}^{N(\alpha)}$ векторов $y = \bigl(y_1, \ldots, y_{N(\alpha)}\bigr)$ с нормой $\|y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N(\alpha)} |y_i|$ и $I_\alpha\colon X \to l_\infty^{N(\alpha)}$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $x(\cdot)$ её коэффициенты Фурье с номерами из набора α. Итак, в нашем случае $\mathcal{I}$ — это множество пар $\bigl(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha\bigr)$, занумерованное конечными подмножествами целых чисел, а информация $\bigl(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta\bigr)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем коэффициенты Фурье $x(\cdot)$ с номерами из α, а если $\delta > 0$, то мы располагаем $N(\alpha)$ числами, каждое из которых отличается от соответствующего коэффициента Фурье по модулю не более чем на δ. Полагаем $v\bigl(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha\bigr) = N(\alpha)$.

Пусть $0 \leqslant k \leqslant n-1$, D^k — оператор k-го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор) и $\varphi\colon l_\infty^{N(\alpha)} \to L_2(\mathbb{T})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$e(\delta,\varphi) = e\bigl(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi\bigr) = \\ = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^{N(\alpha)} \\ \|I_\alpha x(\cdot)-y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}}\leqslant\delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

В данном случае нас интересует величина

$$V(\varepsilon,\delta) = \\ = \inf\Bigl\{N(\alpha)\ \Big|\ \text{найдётся } \Bigl(\varphi, \bigl(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha\bigr)\Bigr) \in \Phi\bigl(l_\infty^{N(\alpha)}\bigr) \times \mathcal{I},\ \text{такой что } e(\delta,\varphi) \leqslant \varepsilon\Bigr\}.$$

Кроме того, нас интересуют такие $\hat{\alpha}$ и $\hat{\varphi}$, что на наборах $\Big(\hat{\varphi}, \big(l_\infty^{N(\hat{\alpha})}, I_{\hat{\alpha}}\big)\Big)$ достигается нижняя грань. В этом случае мы говорим, что $\hat{\alpha}$ — оптимальный набор, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Положим при $\delta > 0$

$$N_\delta = \max\Big\{N \in \mathbb{Z}_+ \,\Big|\, 2\delta^2 \sum_{j=0}^{N} j^{2n} < 1\Big\}$$

и $N_0 = +\infty$, а также для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$\varepsilon_m = \left(\frac{1}{(m+1)^{2(n-k)}} + 2\delta^2 \sum_{j=0}^{m} j^{2k} \left(1 - \left(\frac{j}{m+1}\right)^{2(n-k)}\right)\right)^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что если $\delta > 0$, то $1 = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_{N_\delta}$.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, k — целое число, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда если $\varepsilon \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$, то $V(\varepsilon,\delta) = 0$. Если $\varepsilon \geqslant 1$ и $k = 0$, то $V(\varepsilon,\delta) = 1$, а оптимальное множество — $\alpha = \{0\}$. Если $\varepsilon_m \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots, N_\delta$, то*

$$V(\varepsilon,\delta) = \begin{cases} 2m+1, & k = 0, \\ 2m, & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Оптимальное множество —

$$\alpha = \begin{cases} \{0, \pm 1, \ldots, \pm m\}, & k = 0, \\ \{\pm 1, \ldots, \pm m\}, & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Оптимальный метод имеет вид

$$\tilde{\varphi}(y)(t) = \sum_{|j| \leqslant m} (ij)^k \left(1 - \left(\frac{j}{m+1}\right)^{2(n-k)}\right) y_j e^{ijt}.$$

Если $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N_\delta}$, то $V(\varepsilon,\delta) = +\infty$.

Доказательство. Пусть α — набор целых чисел, $\delta \geqslant 0$ и $\varphi\colon l_\infty^{N(\alpha)} \to L_2(\mathbb{T})$.

1. Оценим снизу величину $e\big(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi\big)$. Сначала покажем, что она не меньше значения задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \to \max, \quad \|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leqslant \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1, \tag{1}$$

т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима, и мы имеем

$$2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} + \|-x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{\substack{\|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}}\leqslant\delta,\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\leqslant 1}} \|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{\substack{\|I_\alpha x(\cdot)-y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}}\leqslant\delta,\\ y\in l_\infty^{N(\alpha)},\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\leqslant 1}} \big\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi\big(y(\cdot)\big)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), получаем требуемое.

2. Теперь оценим снизу значение задачи (1). По равенству Парсеваля квадрат её значения равен значению задачи

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2k}|c_j|^2 \to \max, \quad |c_j|\leqslant\delta, \ \ j\in\alpha, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n}|c_j|^2\leqslant 1. \tag{2}$$

Далее считаем, что $k\geqslant 1$ (случай $k=0$ рассматривается аналогично и проще). Для каждого $s\in\mathbb{N}$ обозначим $\Delta_s=\{\pm1,\dots,\pm s\}$ и положим

$$\hat{s}=\max\{s\in\mathbb{N} \mid \operatorname{card}(\alpha\cap\Delta_s)=2s\},$$

считая, что $\hat{s}=0$, если множество в фигурных скобках пусто. Далее, пусть

$$p_0=\max\Big\{p \ \Big|\ 2\delta^2\sum_{j=0}^{p} j^{2n}<1,\ 0\leqslant p\leqslant\hat{s}\Big\}.$$

Рассмотрим последовательность c_j, $j\in\mathbb{Z}$, определённую следующим образом: если $p_0<\hat{s}$, то $c_j=\delta$ при $|j|\leqslant p_0$,

$$c_{p_0+1}=c_{-(p_0+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0+1)^{-n}\sqrt{1-2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}}$$

и $c_j=0$ для остальных j. Если же $p_0=\hat{s}$, то ясно, что либо p_0+1, либо $-(p_0+1)$ не принадлежит α. Пусть m — то из этих чисел, которое не принадлежит α. Положим

$$c_m=(p_0+1)^{-n}\sqrt{1-2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}},$$

$c_j=\delta$ при $|j|\leqslant p_0$ и $c_j=0$ для остальных j. Определённая последовательность является допустимой в задаче (2). Действительно, если $p_0<\hat{s}$, то $|c_j|\leqslant\delta$, когда $|j|=p_0+1$, так как иначе

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0+1)^{-n}\sqrt{1-2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}}>\delta \iff 2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0+1} j^{2n}<1,$$

что противоречит определению p_0. Кроме того, очевидно, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n}|c_j|^2=1$. Это равенство выполняется и когда $p_0=\hat{s}$.

Следовательно, значение задачи (2) не меньше, чем значение максимизируемого функционала на этой последовательности, т. е. не меньше величины

$$2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0} j^{2k} + (p_0+1)^{-2(n-k)}\left(1 - 2\delta^2\sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}\right) = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и из предыдущего пункта вытекает, что

$$e(\delta,\varphi) = e\big(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi\big) \geqslant \varepsilon_{p_0}. \tag{3}$$

3. Покажем, что эта оценка достигается для метода

$$\tilde\varphi(y)(t) = \sum_{|j|\leqslant p_0} (ij)^k\omega_j y_j e^{ijt},$$

где

$$\omega_j = 1 - \left(\frac{j}{p_0+1}\right)^{2(n-k)}, \quad |j| \leqslant p_0.$$

Квадрат погрешности этого метода равен по определению значению экстремальной задачи

$$\sum_{|j|\leqslant p_0} j^{2k}|c_j - \omega_j y_j|^2 + \sum_{|j|>p_0} j^{2k}|c_j|^2 \to \max,\ \ |c_j - y_j| \leqslant \delta_j,\ \ j\in\alpha,\ \ \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2n}|c_j|^2 \leqslant 1. \tag{4}$$

Оценим сверху её значение. Положим

$$\lambda = (p_0+1)^{-2(n-k)}, \quad \lambda_j = j^{2k}\omega_j, \quad |j| \leqslant p_0.$$

Если $0 < |j| \leqslant p_0$, то по неравенству Коши—Буняковского, используя легко проверяемое равенство

$$j^{2k}\left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1-\omega_j)^2}{j^{2n}\lambda}\right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} j^{2k}|c_j - \omega_j y_j|^2 &= j^{2k}|\omega_j(c_j - y_j) + c_j(1-\omega_j)|^2 \leqslant \\ &\leqslant j^{2k}\left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1-\omega_j)^2}{j^{2n}\lambda}\right)\big(|c_j - y_j|^2\lambda_j + |c_j|^2\lambda j^{2n}\big) = |c_j - y_j|^2\lambda_j + |c_j|^2\lambda j^{2n}. \end{aligned}$$

Если $|j| > p_0$, то, очевидно, $j^{2k} \leqslant \lambda j^{2n}$. Из полученных соотношений следует, что максимизируемый функционал в (4) оценивается сверху величиной

$$\sum_{|j|\leqslant p_0} |c_j - y_j|^2\lambda_j + \lambda\sum_{|j|>p_0} j^{2n}|c_j|^2 \leqslant \delta^2\sum_{|j|\leqslant p_0}\lambda_j + \lambda = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и из (3) вытекает, что

$$e(\delta,\tilde\varphi) = \varepsilon_{p_0}. \tag{5}$$

4. Пусть $\varepsilon_m \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$ для некоторого $m \geqslant 1$. Тогда для набора $\alpha = \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ из (5) следует, что

$$e(0, \tilde{\varphi}) = \varepsilon_m \leqslant \varepsilon.$$

Предположим, что существуют α и метод φ, такие что $N(\alpha) < 2m$ и $e(0, \varphi) \leqslant \varepsilon$. Тогда $\hat{s} \leqslant m$ и $p_0 \leqslant m - 1$. Следовательно, с учётом (3) получаем, что

$$\varepsilon < \varepsilon_{m-1} \leqslant \varepsilon_{p_0} \leqslant e(0, \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = 2m$. Случай $\varepsilon \geqslant 1$ рассматривается аналогично.

Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N_\delta}$. Так как $p_0 \leqslant N_\delta$ для всех α, для любого метода

$$e(\delta, \varphi) \geqslant \varepsilon_{p_0} \geqslant \varepsilon_{N_\delta} > \varepsilon.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$. □

2. Непериодический случай

Здесь мы рассматриваем функции на прямой. Пусть $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна и $\left\|x^{(n)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1$. Ставится следующая задача. Пусть для любого измеримого подмножества $\mathbb{R}$ конечной лебеговой меры имеется возможность измерить (точно или приближённо) преобразование Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ на этом множестве. По этой информации мы хотим восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k-ю производную $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех этих множеств то, которое имеет минимальную меру.

Уточним постановку, приведя её в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство функций на $\mathbb{R}$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна, а n-я производная принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, $W = W_2^n(\mathbb{R})$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, и пусть $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье. Каждому множеству $A \subset \mathbb{R}$ конечной лебеговой меры поставим в соответствие пару $(L_2(A), I_A)$, где $I_A\colon X \to L_2(A)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $x(\cdot)$ функцию $Fx(\cdot)|_A$ — сужение $Fx(\cdot)$ на A. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathcal{I}$ — это множество пар $(L_2(A), I_A)$, занумерованное подмножествами A конечной меры, а информация $(L_2(A), I_A, \delta)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем преобразование Фурье $x(\cdot)$ на A, а если $\delta > 0$, то мы знаем лишь функцию $y(\cdot) \in L_2(A)$, такую что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta$. Полагаем $v(L_2(A), I_A) = \operatorname{mes} A$.

Пусть, как и раньше, D^k — оператор k-го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор), A — множество конечной меры и $\varphi\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$e(\delta,\varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = \\ = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(A) \\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

и

$$V(\varepsilon,\delta) = \\ = \inf\bigl\{\operatorname{mes} A \mid \text{найдётся } \bigl(\varphi,(L_2(A),I_A)\bigr) \in \Phi\bigl(L_2(A)\bigr)\times\mathcal{I},\ \text{такой что } e(\delta,\varphi)\leqslant\varepsilon\bigr\}.$$

Если для $\hat{A}$ и $\hat{\varphi}$ на наборе $\bigl(\hat{\varphi},(L_2(\hat{A}),I_{\hat{A}})\bigr)$ достигается минимум, то мы говорим, что $\hat{A}$ — оптимальное множество, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, k — целое число, $0\leqslant k\leqslant n-1$ и $\varepsilon>0$. Тогда*

$$V(\varepsilon,0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}.$$

Оптимальное множество — отрезок $\hat{A}=[-\sigma_\varepsilon,\sigma_\varepsilon]$, где $2\sigma_\varepsilon = V(\varepsilon,0)$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(Fx(\cdot)|_{\hat{A}})(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\hat{A}} (i\xi)^k Fx(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Пусть $\delta>0$. Если

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)},$$

то $V(\varepsilon,\delta)=+\infty$, а если

$$\varepsilon \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)},$$

то $V(\varepsilon,\delta) = 2\sigma_\varepsilon$, где σ_ε — единственный корень уравнения

$$\frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi}\sigma^{2k} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}} = \varepsilon^2$$

(чтобы включить случай $k=0$, считаем здесь, что $0^0=1$ и что $\infty^0=1$ в оптимальном методе ниже). Оптимальное множество — отрезок $\hat{A}=[-\sigma_\varepsilon,\sigma_\varepsilon]$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}\bigl(y(\cdot)\bigr)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\hat{A}} (i\xi)^k \left(1 + \frac{n}{n-k}\left(\frac{n}{k}\right)^{k/(n-k)}\left(\frac{\xi}{\sigma_\varepsilon}\right)^{2n}\right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Отметим, что по точной информации ($\delta=0$) о преобразовании Фурье можно восстановить элементы класса $W_2^n(\mathbb{R})$ с любой точностью, и наилучший метод восстановления k-й производной ($0\leqslant k\leqslant n-1$) «естественный»: надо взять k-ю производную (если $k\geqslant 1$) от обратного преобразования Фурье на отрезке $[-\sigma_\varepsilon,\sigma_\varepsilon]$.

Если же $\delta > 0$, то функции и их k-е производные можно восстановить с данной точностью уже не для всех ε, а для тех ε, для которых это возможно, оптимальный метод использует информацию только на отрезке $[-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и при этом её предварительно «сглаживает».

Доказательство. Пусть A — множество конечной меры в $\mathbb{R}$, $\delta \geqslant 0$ и $\varphi\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R})$.

1. Покажем сначала, что величина $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi)$ не меньше значения задачи

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \quad \big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \tag{6}$$

(где $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta$ при $\delta = 0$ означает, что $Fx(\cdot)|_A = 0$). Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (6) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем

$$\begin{aligned}
2\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leqslant \big\|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} + \big\|-x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \\
&\leqslant 2 \sup_{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta,\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1} \big\|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \\ y(\cdot) \in L_2(A),\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1}} \big\|x^{(k)}(\cdot) - \varphi\big(y(\cdot)\big)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (6), получаем требуемое.

2. Положим

$$\hat{a} = \sup\{a \geqslant 0 \mid \operatorname{mes}\{A \cap [-a, a]\} = 2a\}$$

и покажем, что если $\hat{a} = 0$, то значение задачи (6) равно бесконечности. Действительно, в образах Фурье квадрат значения этой задачи, согласно теореме Планшереля, равен значению задачи

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \tag{7}$$

$$\int_A |Fx(\xi)|^2(\xi) \, d\xi \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant 1. \tag{8}$$

Так как $\hat{a} = 0$, то $\operatorname{mes}\{M_\sigma \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\} < 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, и значит, мера множества $\Omega_\varepsilon = \{(\mathbb{R} \setminus M_\sigma) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ положительна. Пусть функция $x_\varepsilon(\cdot)$ такова, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\Big(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} \, d\tau\Big)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (7), и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2k}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\tau^{2n}\,d\tau}=\frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\xi^{-2(n-k)}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\tau^{2n}\,d\tau}\geqslant\varepsilon^{-2(n-k)}.$$

Следовательно, ввиду произвольности ε значение максимизируемого функционала в (7) может быть сделано сколь угодно большим.

3. Пусть $\delta=0$. Покажем, что

$$e(0,\varphi)=e(D^k,W_2^n(\mathbb{R}),L_2(A),I_A,0,\varphi)\geqslant\sigma^{-(n-k)},\tag{9}$$

где $2\sigma=\operatorname{mes}A$.

Так как $\delta=0$, то первое ограничение в задаче (7) означает, что $Fx(\xi)=0$ для почти всех $\xi\in A$, и тогда сама задача (7) переписывается в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1.\tag{10}$$

Оценим снизу её значение. Если $\hat a=0$, то, как показано в пункте 2, это значение равно $+\infty$. Тогда согласно пункту 1 $e(0,\varphi)=+\infty$, и (9) выполняется очевидным образом. Пусть $\hat a>0$. Для любого натурального m множество $[-\hat a-1/m,\hat a+1/m]\setminus[-\hat a,\hat a]$ содержит подмножество положительной меры E_m, не принадлежащее A (иначе это противоречило бы определению $\hat a$). Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{mes}E_m}}\left(\hat a+\frac{1}{m}\right)^{-n}, & \xi\in E_m,\\ 0, & \xi\notin E_m.\end{cases}$$

Простая проверка показывает, что эти функции допустимы в задаче (10). Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi\geqslant \\ \geqslant\frac{1}{\operatorname{mes}E_m}\left(\hat a+\frac{1}{m}\right)^{-2n}\hat a^{2k}\operatorname{mes}E_m\to\hat a^{-2(n-k)}\geqslant\sigma^{-2(n-k)},$$

так как, очевидно, $\hat a\leqslant\sigma$, и значит, значение задачи (10) не меньше $\sigma^{-2(n-k)}$. Тогда ввиду доказанного в пункте 1 и того, что значение задачи (10) равно квадрату значения задачи (6), получаем, что $e(0,\varphi)\geqslant\sigma^{-(n-k)}$, а это и есть (9).

4. Покажем, что в неравенстве (9) достигается равенство, когда $A=[-\sigma,\sigma]$, а метод тот же, что в формулировке теоремы, но с σ вместо σ_ε. Обозначим этот метод $\tilde\varphi$. Действительно, для любого $x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R})$ имеем по теореме Планшереля

$$\left\|x^{(k)}(\cdot)-\tilde\varphi\big(Fx(\cdot)|_{[-\sigma,\sigma]}\big)(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]} \xi^{-2(n-k)} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^{-2(n-k)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \sigma^{-2(n-k)},$$

т. е.

$$e\big(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2([-\sigma,\sigma]), I_{[-\sigma,\sigma]}, 0, \tilde{\varphi}\big) \leqslant \sigma^{-(n-k)},$$

и значит, неравенство (9) точное.

5. Теперь мы можем доказать, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}$ для любого $\varepsilon > 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ положим $\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{-1/(n-k)}$. Согласно пункту 4 для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon/2, \sigma_\varepsilon/2]$ и соответствующего метода $\tilde{\varphi}$ справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, 0, \tilde{\varphi}) \leqslant \varepsilon,$$

и значит, $V(\varepsilon, 0) \leqslant \varepsilon^{-1/(n-k)}$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существуют множество A, $\operatorname{mes} A = 2\sigma$, и метод φ, такие что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leqslant \varepsilon$. Тогда с учётом (9) имеем

$$\varepsilon = \sigma_\varepsilon^{-(n-k)} < \sigma^{-(n-k)} \leqslant e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}$.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме, следует из приведённых рассуждений.

6. Пусть $\delta > 0$. Далее считаем, что $k \geqslant 1$ (случай $k = 0$ рассматривается аналогично, но технически значительно проще). Обозначим

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(2(n-k))} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-1/(2n)}$$

и покажем, что для любых метода φ и множества A, $\operatorname{mes} A = 2\sigma$, справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \geqslant \begin{cases} \sqrt{\frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma^{2k} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}, & \sigma \leqslant \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)}, & \sigma \geqslant \hat{\sigma}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что функция справа переменной σ, определённая на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$, монотонно убывает на этом полуинтервале и в точке $\hat{\sigma}$ её минимальное значение равно $(\delta^2/2\pi)^{(n-k)/(2n)}$. Ни для каких A и φ погрешность не может быть меньше этой величины.

Оценим снизу значение задачи (7). Если $\hat{a} = 0$, то согласно пункту 2 оно равно $+\infty$, а тогда из пункта 1 следует, что

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = +\infty,$$

и (11) выполняется тривиальным образом.

Пусть $\hat{a} > 0$. Рассмотрим случай, когда $\sigma < \hat{\sigma}$. Для каждого натурального m обозначим

$$C_m = 1 - \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{1/(2(n-k))}\hat{a} + \frac{1}{2m}\right)^{2n}.$$

Поскольку $\hat{a} \leqslant \sigma < \hat{\sigma}$, то $C_m > 0$ для достаточно больших m. Так как $\gamma = (k/n)^{1/(2(n-k))} < 1$, то отрезок $\Delta_m = [\gamma\hat{a} - 1/(2m), \gamma\hat{a} + 1/(2m)]$ принадлежит отрезку $[-\hat{a}, \hat{a}]$ для достаточно больших m. Наконец, пусть E_m — множество, определённое в пункте 3. Для указанных m рассмотрим семейство функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{mes} E_m}}\left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-n}\sqrt{C_m}, & \xi \in E_m, \\ \sqrt{m}\,\delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0 & \xi \notin E_m \cup \Delta_m. \end{cases}$$

Несложная проверка показывает, что $x_m(\cdot)$ — допустимые функции в задаче (7). Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_m} \xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi + {} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_m} \xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-2n} C_m\,\hat{a}^{2k} + {} + \frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)}\hat{a}^{2k} \to \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)}\frac{\delta^2}{2\pi}\hat{a}^{2k} + \frac{1}{\hat{a}^{2(n-k)}}. \tag{12}$$

Выражение справа как функция $\hat{a}$ монотонно убывает на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$, и так как $\hat{a} \leqslant \sigma < \hat{\sigma}$, то значение задачи (7) не меньше выражения справа под корнем в (11). По пункту 1 это доказывает оценку (11) при $\sigma < \hat{\sigma}$.

Пусть $\sigma \geqslant \hat{\sigma}$. Если $\hat{a} < \hat{\sigma}$, то те же рассуждения, что и выше, приводят к формуле (12). Минимальное значение выражения справа в (12) равно $\left(\delta^2/(2\pi)\right)^{(n-k)/n}$. Это доказывает (11) в рассматриваемом случае.

Пусть $\hat{a} \geqslant \hat{\sigma}$. Так как $\gamma_1 = \left(\delta^2/(2\pi)\right)^{-1/(2n)} < \hat{\sigma}$, то для достаточно больших m отрезок $\Delta_m = [\gamma_1 - 1/m, \gamma_1]$ принадлежит полуинтервалу $(0, \hat{\sigma}]$. Для таких m рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m}\,\delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0, & \xi \notin \Delta_m. \end{cases}$$

Снова простая проверка показывает, что это допустимые функции в задаче (7) и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \frac{\delta^2}{2\pi}\left(\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-1/(2n)} - \frac{1}{m}\right)^{2k} \to \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/n},$$

т. е. оценка (11) доказана.

Докажем теперь, что эта оценка достигается на множестве $A = [-\sigma, \sigma]$ и методе из формулировки теоремы с σ вместо σ_ε. Обозначим этот метод $\tilde\varphi$. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, $y(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma])$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$. Положим $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat\sigma)$ и обозначим

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)}\sigma_0^{2k}, \quad \lambda_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}} = \left(1 + \frac{n}{n-k}\left(\frac{n}{k}\right)^{k/(n-k)}\left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1} \tag{13}$$

и $-\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n} \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$.

По теореме Планшереля, учитывая (13), получаем, что

$$\big\|x^{(k)}(\cdot) - \tilde\varphi\big(y(\cdot)\big)(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n}}\chi_{\sigma_0}(\xi)y(\xi)\right|^2 d\xi, \tag{14}$$

где $\chi_{\sigma_0}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-\sigma_0, \sigma_0]$.

Пусть $\xi \in [-\sigma_0, \sigma_0]$. При таких ξ для выражения под знаком интеграла в правой части (14) после несложных преобразований с использованием неравенства Коши—Буняковского и того, что многочлен $\xi \mapsto -\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}$ неотрицателен на $\mathbb{R}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\left|(i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n}}y(\xi)\right|^2 = \\
&= \xi^{2k}\left|\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n}}\sqrt{\lambda_1}\big(Fx(\xi) - y(\xi)\big) + \frac{\sqrt{\lambda_2}\xi^n}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n}}\sqrt{\lambda_2}\xi^n Fx(\xi)\right|^2 \leqslant \\
&\leqslant \xi^{2k}\left(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n})^2} + \frac{\lambda_2\xi^{2n}}{(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n})^2}\right)(\lambda_1|Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2) = \\
&= \frac{\xi^{2k}}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2n}}(\lambda_1|Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2) \leqslant \\
&\leqslant \lambda_1|Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[-\sigma_0, \sigma_0]$, получаем, что интеграл справа в (14) на этом отрезке оценивается величиной

$$\lambda_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\leqslant\sigma_0}|Fx(\xi) - y(\xi)|^2\,d\xi + \lambda_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\leqslant\sigma_0}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

Если $|\xi| > \sigma_0$, имеем следующую оценку для выражения справа в (14):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\sigma_0}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\sigma_0}\xi^{2n}\xi^{-2(n-k)}|Fx(\xi)|^2\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_0^{-2(n-k)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\sigma_0}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi = \lambda_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\sigma_0}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

Складывая эти неравенства, учитывая выбор $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ и выражения для λ_1 и λ_2, получаем, что

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)-\tilde{\varphi}\big(y(\cdot)\big)(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\lambda_1\delta^2}{2\pi}+\lambda_2 = \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)}\frac{\delta^2}{2\pi}\sigma_0^{2k}+\frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}.$$

Если $\sigma_0 = \hat{\sigma}$, то выражение справа принимает нужное значение. Этим доказана точность неравенства (11).

7. Докажем вторую часть теоремы, когда $\delta>0$. Пусть $\varepsilon<\big(\delta^2/(2\pi)\big)^{(n-k)/(2n)}$. Надо показать, что не существует таких множества A конечной меры и метода φ, что

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Действительно, если такие A и φ нашлись, то по (11) имеем, что

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)} \leqslant e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leqslant \varepsilon,$$

и полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon,\delta) = +\infty$.

Рассмотрим $\varepsilon \geqslant (\delta^2/2\pi)^{(n-k)/(2n)}$ и σ_ε из формулировки теоремы. Согласно предыдущему пункту для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и метода $\hat{\varphi}$ из формулировки теоремы справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, \delta, \hat{\varphi}) \leqslant \varepsilon,$$

и значит, $V(\varepsilon,\delta) \leqslant 2\sigma_\varepsilon$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существуют множество A, $\operatorname{mes} A = 2\sigma$, и φ, такие что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leqslant \varepsilon$. Тогда если через $f(\cdot)$ обозначить функцию от σ в правой части выражения (11) (она строго монотонно убывает на $(0,\hat{\sigma}]$), то согласно определению σ_ε и оценке (11) имеем

$$\varepsilon = f(\sigma_\varepsilon) < f(\sigma) \leqslant e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме, следует из приведённых рассуждений. □

Литература

[1] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах // УМН. — 1959. — Т. 14, № 2. — С. 3—86.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближённой информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. — 2003. — Т. 37. — С. 51—64.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 10. — С. 67—82.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О восстановлении операторов свёрточного типа по неточной информации // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 269. — С. 181—192.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44. — С. 76—79.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 59—67.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по её неточно заданному спектру // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 119—130.