

Асимптотические свойства чебышёвских сплайнов с фиксированным числом узлов*

Ю. В. МАЛЫХИН

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: jura05@yandex.ru

УДК 517.518.8

Ключевые слова: чебышёвские сплайны, колмогоровские поперечники.

Аннотация

В. М. Тихомиров выразил колмогоровские поперечники класса $W^r := W_\infty^r[-1, 1]$ в пространстве $C := C[-1, 1]$ через норму специальных сплайнов: $d_N(W^r, C) = \|x_{N-r, r}\|_C$, $N \geq r$; эти сплайны были названы *чебышёвскими сплайнами*. Функция $x_{n, r}$ является совершенным сплайном порядка r с n узлами. Мы изучаем асимптотические свойства чебышёвских сплайнов при $r \rightarrow \infty$ и фиксированном n . Вычислена асимптотика узлов и C -нормы $x_{n, r}$, доказано, что $x_{n, r}/x_{n, r}(1) = T_{n+r} + o(1)$. В качестве следствия получена асимптотика $d_{n+r}(W^r, C)/d_r(W^r, C) \sim A_n r^{-n/2}$ при $r \rightarrow \infty$.

Abstract

Yu. V. Malykhin, Asymptotic properties of Chebyshev splines with fixed number of knots, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 143–166.

V. M. Tikhomirov expressed Kolmogorov widths of the class $W^r := W_\infty^r[-1, 1]$ in the space $C := C[-1, 1]$ as a norm of special splines: $d_N(W^r, C) = \|x_{N-r, r}\|_C$, $N \geq r$; these splines were named *Chebyshev splines*. The function $x_{n, r}$ is a perfect spline of order r with n knots. We study the asymptotic behaviour of Chebyshev splines for $r \rightarrow \infty$ and fixed n . We calculate the asymptotics of knots and the C -norm of $x_{n, r}$ and prove that $x_{n, r}/x_{n, r}(1) = T_{n+r} + o(1)$. As a corollary, we obtain that $d_{n+r}(W^r, C)/d_r(W^r, C) \sim A_n r^{-n/2}$ as $r \rightarrow \infty$.

1. Введение

Обозначения

Пусть T_m — многочлен Чебышёва: $T_m(\cos \theta) = \cos m\theta$, $\mathcal{P}_m$ — пространство вещественных алгебраических многочленов степени не выше m , $E_m(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции f многочленами из $\mathcal{P}_m$ на $[-1, 1]$, $x_+ = \max(x, 0)$, $x_- = \min(x, 0)$.

Через $W^r := W_\infty^r[-1, 1]$ обозначается класс функций $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $f, f', \dots, f^{(r-1)} \in AC[-1, 1]$ и $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ для почти всех $x \in [-1, 1]$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 14-01-00332.

Пусть U — центрально-симметричное множество в линейном нормированном пространстве X . Колмогоровский поперечник порядка N множества U в X определяется следующим образом:

$$d_N(U, X) := \inf_{L_N} \sup_{u \in U} \inf_{l \in L_N} \|u - l\|_X,$$

где L_N — линейные подпространства в X размерности не выше N .

Если не указано иное, $\|\cdot\|$ обозначает норму в пространстве $C := C[-1, 1]$.

Обозначения $A = O(B)$ и $A = o(B)$ стандартны. Запись $A \sim B$ обозначает асимптотическое равенство: $A = B(1 + o(1))$; $A \asymp B$ обозначает порядковое равенство: $A = O(B)$ и $B = O(A)$.

Чебышёвские сплайны

В. М. Тихомиров [3] выразил колмогоровские поперечники класса W^r в метрике C через норму специальных совершенных сплайнов:

$$d_N(W_\infty^r[-1, 1], C[-1, 1]) = \begin{cases} \infty, & N \leq r - 1, \\ \|x_{N-r, r}\|, & N \geq r. \end{cases} \quad (1)$$

(В случае $N \leq r - 1$ поперечник равен бесконечности в силу включения $W^r \supset \mathcal{P}_{r-1}$.) Обозначим $n = N - r$.

Функция $x_{n, r} \in C[-1, 1]$, $n = 0, 1, \dots$, $r = 1, 2, \dots$, характеризуется двумя свойствами:

- 1) функция $x_{n, r}^{(r)}$ по модулю равна единице и меняет знак n раз внутри $[-1, 1]$; другими словами, $x_{n, r}$ есть совершенный сплайн порядка r с n узлами (узлы — это точки перемены знака $x_{n, r}^{(r)}$);
- 2) $x_{n, r}$ имеет $(n + r + 1)$ -чебышёвский альтернанс, т. е. принимает значения $\pm \|x_{n, r}\|$ по очереди в $n + r + 1$ точке.

В. М. Тихомиров доказал, что для всех n и r такой сплайн $x_{n, r}$ существует; он определяется единственным образом с точностью до знака (доказательство единственности $x_{n, r}$, приведённое в [3, 4], содержит пробел; полное доказательство см., например, в [2]). Более того,

- 3) норма $\|x_{n, r}\|$ минимальна среди всех функций, удовлетворяющих условию 1).

Пусть $n = 0$. По свойству 1)

$$x_{0, r} = \pm \frac{t^r}{r!} + P_{r-1}, \quad P_{r-1} \in \mathcal{P}_{r-1},$$

откуда, учитывая минимальность нормы, выводим, что

$$x_{0, r} = \pm \frac{T_r}{r! 2^{r-1}}.$$

Ввиду этого равенства функции $x_{n, r}$ стали называть *чебышёвскими сплайнами*. Приведём ещё несколько фактов о чебышёвских сплайнах, следуя [3, 4].

В дальнейшем нам понадобится ещё одно свойство $x_{n,r}$:

4) в альтернанс $x_{n,r}$ входят точки ± 1 .

График функции $x_{n,1}$ представляет собой ломаную с узлами

$$\left\{ -1 + \frac{2k}{n+1} \right\}_{k=1}^n.$$

В альтернанс $x_{n,1}$ входят узлы, а также концы отрезка $[-1, 1]$. Опишем построение $x_{n,2}$. Положим

$$x(t) = (-1)^k \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k+1}{2} \right)^2 \right), \quad t \in [k, k+1], \quad k = 0, 1, \dots, n$$

(мы «склеили» параболы в количестве $n+1$ штук). Ясно, что $|x^{(2)}| = 1$ и $x^{(2)}$ меняет знак в точках $1, \dots, n$. Продолжим x в области $t < 0$ и $t > n+1$, сохраняя $x^{(2)}$, до пересечения с уровнем $\pm 1/8$ в точках $t = -(\sqrt{2}-1)/2$ и $t = n+1 + (\sqrt{2}-1)/2$ соответственно. Мы получим сплайн на отрезке $[-(\sqrt{2}-1)/2, n+1 + (\sqrt{2}-1)/2]$ с n узлами и $n+3$ точками альтернанса: $1/2, 3/2, \dots, n+1/2$ и концы отрезка. Перенеся x на отрезок $[-1, 1]$, получим $x_{n,2}$.

При фиксированном r имеется асимптотика

$$d_N(W^r, C) \sim \left(\frac{2}{\pi} \right)^r \frac{K_r}{N^r}, \quad N \rightarrow \infty,$$

где K_r — константы Фавара:

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Очевидно, та же асимптотика имеет место и для норм сплайнов $\|x_{n,r}\|$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном r . Это соответствует периодическому случаю, в котором значение поперечника (равное норме специальных периодических совершенных сплайнов, так называемых эйлеровых сплайнов) вычисляется явно:

$$d_{2N-1}(W_{\infty}^r(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})) = d_{2N}(W_{\infty}^r(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})) = \frac{K_r}{N^r}, \quad \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Другими словами, при $N \rightarrow \infty$ и $r = O(1)$ «концевые эффекты» пропадают и рассматриваемая нами задача оказывается эквивалентна периодической. Однако в общем случае, при произвольных N и r , формула (1) не даёт исчерпывающего представления о поведении величины $d_N(W^r, C)$. Рассмотрим, например, следующий вопрос. Известно, что $d_N(W^r, C) = \infty$ при $N < r$ и $d_r(W^r, C) = \|x_{0,r}\| = (r! 2^{r-1})^{-1}$. Что можно сказать о $d_{r+1}(W^r, C)$ при больших r ? В терминах сплайнов, какова асимптотика $\|x_{1,r}\|$ при $r \rightarrow \infty$? Этот вопрос задавался в [3, 4].

В данной работе мы изучаем чебышёвские сплайны при $r \rightarrow \infty$ и фиксированном числе узлов n . Прделанные нами вычисления являются шагом к явным

оценкам величины поперечника (1) при произвольных N и r ; по-видимому, получение хороших оценок в общем случае представляет собой трудоёмкую задачу.

При $r \rightarrow \infty$ и фиксированном n асимптотические обозначения нужно понимать следующим образом. Равенство $A_{n,r} = O(1)$ означает, что для всякого n найдется $C = C(n)$, такое что $|A_{n,r}| \leq C$; равенство $A_{n,r} = o(1)$ означает, что для всякого n имеем $\lim_{r \rightarrow \infty} A_{n,r} = 0$. То же относится и к соотношениям $A_{n,r} \asymp B_{n,r}$, $A_{n,r} \sim B_{n,r}$.

Основной результат

Для формулировки теоремы нам потребуется следующее определение. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ — система функций в $L(a, b)$ (интервал (a, b) может быть конечным или бесконечным). Набор точек $\{x_i\}_{i=1}^K$, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_K < b$, называется *каноническим набором* для $\{\psi_j\}$, если выполняются соотношения (в которых полагаем $x_0 := a$, $x_{K+1} := b$)

$$\sum_{k=0}^K (-1)^k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Равенство (2) эквивалентно тому, что функция σ , равная по модулю единице и меняющая знак в точках x_i , ортогональна системе $\{\psi_j\}$.

В силу единственности сплайн $x_{n,r}$ симметричен относительно нуля: $x_{n,r}(-t) = \pm x_{n,r}(t)$; легко понять, что знак равен $(-1)^{n+r}$. Следовательно, узлы $x_{n,r}$ также симметричны относительно нуля. При чётном $n = 2n'$ имеем n' положительных узлов $\{\tau_j\}_{j=1}^{n'}$ и n' отрицательных $\{-\tau_j\}_{j=1}^{n'}$; при нечётном $n = 2n' + 1$ имеем n' положительных узлов, n' отрицательных и узел $\tau = 0$.

Теорема. Пусть $n \geq 1$ фиксировано, $n' := \lfloor n/2 \rfloor$.

1. Положительные узлы сплайнов $x_{n,r}$ удовлетворяют асимптотике при $r \rightarrow \infty$:

$$\tau_k \sim \frac{\varkappa_k}{\sqrt{r}}, \quad k = 1, \dots, n',$$

где числа $0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{n'} < \infty$ образуют канонический набор для системы $\{x^{2q} e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1} \subset L(0, \infty)$ при чётном n и $\{x^{2q+1} e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1} \subset L(0, \infty)$ при нечётном $n \geq 3$.

2. Имеет место асимптотика при $r \rightarrow \infty$:

$$\|x_{n,r}\| \sim \frac{A_n}{r! 2^{r-1} r^{n/2}},$$

где числа $A_n > 0$ определяются следующим образом:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad A_n = (-1)^{n'-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n'} (-1)^{k-1} \varkappa_k^{n-1} e^{-\varkappa_k^2}, \quad n \geq 2.$$

3. Нормированный сплайн $x_{n,r}$ близок к многочлену Чебышёва:

$$\left\| \frac{x_{n,r}}{x_{n,r}(1)} - T_{n+r} \right\| = O(r^{-1/6}).$$

Следствие. При $r \rightarrow \infty$ и фиксированном n имеем

$$\frac{d_{n+r}(W^r, C)}{d_r(W^r, C)} \sim A_n r^{-n/2}.$$

Существование упомянутого в теореме канонического набора следует из теоремы Хобби—Райса [6], а единственность — из чебышёвости соответствующих систем функций; подробнее эти вопросы обсуждаются в разделе 3.

Отметим, что порядок (но не асимптотику!) узлов $\tau_k \asymp r^{-1/2}$ и нормы $\|x_{n,r}\| \asymp (r! 2^r r^{n/2})^{-1}$ можно получить эмпирически из следующих соображений. Примем естественную гипотезу о том, что $x_{n,r} \approx A_{n,r} T_{n+r}$ с некоторым множителем $A_{n,r} > 0$. Можно ожидать, что точки перемены знака $x_{n,r}^{(r)}$ ведут себя так же, как точки перемены знака $T_{n+r}^{(r)}$; в силу (18) нули $T_{n+r}^{(r)}$ убывают со скоростью $r^{-1/2}$. Порядок множителя $A_{n,r}$ таков, что функция $A_{n,r} T_{n+r}^{(r)}(t)$ в масштабе $t = x/\sqrt{r}$ остаётся ограниченной и не стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Примеры

Приведём уравнения на $\varkappa$ и численные значения $\varkappa_k$, A_n для нескольких n :

$$n = 2: \quad \int_0^{\varkappa_1} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad \varkappa_1 \approx 0,477, \quad A_2 \approx 0,429;$$

$$n = 3: \quad \varkappa_1 = \sqrt{\ln 2} \approx 0,833, \quad A_2 = \frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}} \approx 0,391;$$

$$n = 4: \quad \begin{cases} \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \\ \varkappa_1 e^{-\varkappa_1^2} = \varkappa_2 e^{-\varkappa_2^2}, \end{cases} \quad \varkappa_1 \approx 0,36, \quad \varkappa_2 \approx 1,13, \quad A_3 \approx 0,407;$$

$$n = 5: \quad \begin{cases} e^{-\varkappa_1^2} - e^{-\varkappa_2^2} = \frac{1}{2}, \\ \varkappa_1^2 e^{-\varkappa_1^2} = \varkappa_2^2 e^{-\varkappa_2^2}, \end{cases} \quad \varkappa_1 \approx 0,532, \quad \varkappa_2 \approx 1,56, \quad A_3 \approx 0,518.$$

1.1. Схема доказательства

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы.

Выберем знак $x_{n,r}$ так, чтобы $x_{n,r}^{(r)}(+0) = 1$. Выпишем функцию, r -я производная которой равна по модулю $r!$ и меняет знак в n симметричных относительно нуля узлах:

$$\begin{aligned}\varphi_{n,r,\{\tau_j\}}(t) &= t^r + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k (t - \tau_k)_+^r, \quad t \geq 0, \\ \varphi_{n,r,\{\tau_j\}}(-t) &= (-1)^{n+r} \varphi_{n,r,\{\tau\}}(t).\end{aligned}$$

Согласно сказанному выше сплайн $x_{n,r}$ является решением следующей экстремальной задачи:

$$r! \|x_{n,r}\| = \min_{\{\tau_j\}, P_{r-1} \in \mathcal{P}_{r-1}} \|\varphi_{n,r,\{\tau_j\}} - P_{r-1}\|.$$

Через $\varphi_{n,r}$ мы обозначим функцию $\varphi_{n,r,\{\tau_j\}}$, соответствующую оптимальным узлам; таким образом, $r! x_{n,r} = \varphi_{n,r} - \hat{P}_{r-1}$,

$$r! \|x_{n,r}\| = E_{r-1}(\varphi_{n,r}) = E_{n+r-1}(\varphi_{n,r}). \quad (3)$$

Последнее равенство имеет место ввиду $(n+r+1)$ -альтернанса функции $x_{n,r}$.

Для оценки наилучшего приближения снизу будет использоваться следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f \in C[-1, 1]$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $E_{m-1}(f) \geq |\Lambda_m(f)|$, где

$$\Lambda_m(f) := \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} f(1) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k f\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) + (-1)^m \frac{1}{2} f(-1) \right).$$

Доказательство. Подберём число L и многочлен

$$P_{m-1}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

так, чтобы

$$f\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) - P_{m-1}\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) = (-1)^k L, \quad k = 0, \dots, m.$$

Решая систему линейных уравнений относительно L и a_k (для этого потребуются вычислить определители Вандермонда для наборов точек вида $\{\cos(\pi k/m)\}$, $0 \leq k \leq m$, $k \neq k_0$), находим $L = \Lambda_m(f)$. Так как разность $f - P_{m-1}$ имеет валле-пуссеновский альтернанс длины $m+1$, получаем, что $E_{m-1}(f) \geq |L|$.

Есть и другой способ: достаточно показать, что $|\Lambda_m(f)| \leq \|f\|$ (это очевидно) и что $\Lambda_m|_{\mathcal{P}_{m-1}} \equiv 0$ (поскольку $\Lambda_m(T_k) = 0$, $k < m$); см. также раздел 4. $\square$

Лемма мотивирована следующими соображениями. Предположим, требуется оценить снизу $E_{m-1}(f)$. Разность $f - \hat{P}_{m-1}(f)$ функции и её многочлена наилучшего приближения имеет $(m+1)$ -альтернанс; если мы знаем, что альтернанс состоит из точек $t_0 < \dots < t_m$, то достаточно найти такие L и P_{m-1} , что $f(t_k) - P_{m-1}(t_k) = (-1)^k L$; поскольку L и P_{m-1} определяются однозначно, то мы и получим $P_{m-1} = \hat{P}_{m-1}(f)$, $|L| = \|f - \hat{P}_{m-1}(f)\| = E_{m-1}(f)$. Если же точки альтернанса неизвестны, но близки к $\{t_j\}$, то можно ожидать, что оценка $E_{m-1}(f) \geq |L|$, верная в общем случае, будет достаточно точна. Применительно

к сплайнам $x_{n,r}$ мы предполагаем, что альтернанс $r! x_{n,r} = \varphi_{n,r} - \hat{P}_{n+r-1}$ близок к альтернансу соответствующего многочлена Чебышёва T_m , $m = n + r$, берём точки $t_k = \cos(\pi(m - k)/m)$ и оцениваем $E_{m-1}(\varphi_{n,r}) \geq |L|$, $L = \Lambda_m(\varphi_{n,r})$. Как мы увидим, эта оценка асимптотически точна.

Перечислим некоторые базовые свойства функционалов Λ_m :

- $|\Lambda_m(f)| \leq \|f\|$;
- $\Lambda_m(P) = 0$ для $P \in \mathcal{P}_{m-1}$;
- $\Lambda_m(f) = 0$ тогда и только тогда, когда f интерполируется многочленом из $\mathcal{P}_{m-1}$ в точках $\{\cos(\pi k/m)\}_{k=0}^m$;
- $\Lambda_m(f(t)) = (-1)^m \Lambda_m(f(-t))$.

Дальнейший план доказательства таков: сначала мы изучим поведение функционалов Λ_m для функций $(t - \tau)_+^r$, входящих в $\varphi_{n,r}$. Потом получим оценки снизу на $E_{r-1}(\varphi_{n,r})$ через Λ_m и выведем из них асимптотику узлов и нижнюю оценку нормы $x_{n,r}$. Далее получим оценку сверху нормы и, наконец, сравним нормированный сплайн $x_{n,r}$ с многочленом Чебышёва.

Автор благодарит В. М. Тихомирова за внимание к работе, а также К. С. Рютина за многочисленные полезные обсуждения.

2. Вычисление $\Lambda_m((t - \tau)_+^{m-p})$

Мы получим асимптотическую формулу для величины $\Lambda_m(f)$, где $f(t) = (t - \tau)_+^{m-p}$:

$$\Lambda_m((t - \tau)_+^{m-p}) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} (1 - \tau)^{m-p} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left(\cos \frac{\pi k}{m} - \tau \right)_+^{m-p} \right), \quad |\tau| \leq 1.$$

Параметры m , p , τ будут удовлетворять условиям $m \rightarrow \infty$, $p \geq 0$, $p = O(1)$, $\tau \in [-1, 1]$.

Отметим, что функция $\Lambda_m((t - \tau)_+^{m-p})$ представляет собой совершенный сплайн; при $p = 0$ он пропорционален сплайну Лабутена, обладающему интересными экстремальными свойствами (см., например, [7, 9]). При $p = 1$ мы получаем не просто совершенный сплайн, но и В-сплайн (см., например, [9, лекция 1]). Это объясняет, откуда в лемме 2 возникает гауссова функция (для В-сплайнов на равномерной сетке асимптотическая гауссовость хорошо известна).

Напомним определение многочленов Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Лемма 2. При $m \rightarrow \infty$ и фиксированном $p \geq 1$ имеют место асимптотические равенства

$$\Lambda_m((t-\tau)_+^m) = 2^{-m} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau\sqrt{m}}^{\infty} e^{-x^2} dx + o(1) \right\}, \quad \tau \in [-1, 1],$$

$$\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p}) = 2^{-m} m^{-p/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{p-1}(\tau\sqrt{m}) e^{-m\tau^2} + o(1) \right\}, \quad \tau \in [-1, 1].$$

Величины $o(1)$ стремятся к нулю равномерно по $\tau \in [-1, 1]$.

Доказательство. Сначала проведём вычисления для $\tau = 0$. Поскольку $T_m(\cos(\pi k/m)) = (-1)^k$, то $\Lambda_m(T_m) = 1$, откуда ввиду $\Lambda_m|_{\mathcal{P}_{m-1}} = 0$ получаем

$$\Lambda_m(t^m) = \Lambda_m(2^{1-m} T_m) = 2^{1-m}.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda_m((t-\tau)_+^m) + \Lambda_m((t-\tau)_-^m) = \Lambda_m((t-\tau)^m) = 2^{1-m}.$$

По свойству $\Lambda_m(f(-t)) = (-1)^m \Lambda_m(f(t))$ получим

$$\Lambda_m((t+\tau)_+^m) = 2^{1-m} - \Lambda_m((t-\tau)_+^m). \quad (4)$$

В частности, $\Lambda_m(t_+^m) = 2^{-m}$. При $p \geq 1$ рассуждения аналогичны,

$$\Lambda_m((t+\tau)_+^{m-p}) = (-1)^{p-1} \Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p}),$$

следовательно, в частности, $\Lambda_m(t_+^{m-p}) = 0$ при чётном $p \geq 2$.

Итак, мы вычислили $\Lambda_m(t_+^{m-p})$ для чётных p . Рассмотрим теперь случай нечётного $p = 2p' + 1$. Докажем, что

$$\Lambda_m(t_+^{m-p}) = (-1)^{p'} m^{-1} 2^{-m+p-1} \Delta_{\pi/m}^{m-p} F\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi p}{2m}\right), \quad (5)$$

где $F(x) = \operatorname{tg} x$ при чётном m , $F(x) = 1/\cos x$ при нечётном m . Через Δ_h^l обозначена конечная разность

$$\Delta_h^l F(x) := \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} F(x + (l-k)h).$$

Пусть $m = 2m'$. Обозначим $\zeta = \exp(i\pi/m)$. Выпишем $\Lambda_m(t_+^{m-p})$, пользуясь определением, после чего преобразуем сумму:

$$\begin{aligned} 2m \Lambda_m(t_+^{m-p}) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{m'-1} (-1)^k \left(\cos \frac{\pi k}{m} \right)^{m-p} \\ &= \sum_{k=-m'}^{m'-1} (-1)^k \left(\cos \frac{\pi k}{m} \right)^{m-p} = \sum_{k=-m'}^{m'-1} (-1)^k \left(\frac{\zeta^k + \zeta^{-k}}{2} \right)^{m-p}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{1+m-p} m \Lambda_m(t_+^{m-p}) &= \sum_{k=-m'}^{m'-1} (-1)^k (\zeta^k + \zeta^{-k})^{m-p} \\
 &= \sum_{k=-m'}^{m'-1} (-1)^k \sum_{l=0}^{m-p} \binom{m-p}{l} \zeta^{kl} \zeta^{-k(m-p-l)} = \\
 &= \sum_{l=0}^{m-p} \binom{m-p}{l} \sum_{k=-m'}^{m'-1} (-1)^k \zeta^{k(2l+p-m)}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\zeta^m = -1$, имеем $\zeta^{-mk} = (-1)^k$, поэтому внутренняя сумма в полученном выражении равна

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-m'}^{m'-1} \zeta^{k(2l+p)} &= \frac{1}{\zeta^{2l+p} - 1} \cdot (\zeta^{m'(2l+p)} - \zeta^{-m'(2l+p)}) = \\
 &= \frac{\zeta^{l+p/2}}{\zeta^{l+p/2} - \zeta^{-l-p/2}} \cdot \left(2i \sin \frac{\pi}{m} m' (2l+p) \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{2i} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} \left(l + \frac{p}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \left(l + \frac{p}{2} \right) \right) \cdot 2i(-1)^{l+p'}.
 \end{aligned}$$

Поскольку исходное выражение было вещественным, мы можем суммировать только вещественные части сумм, равные

$$(-1)^{l+p'} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} \left(l + \frac{p}{2} \right).$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 2^{1+m-p} m \Lambda_m(t_+^{m-p}) &= \sum_{l=0}^{m-p} \binom{m-p}{l} (-1)^{l+p'} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} \left(l + \frac{p}{2} \right) = \\
 &= (-1)^{p'} \sum_{l=0}^{m-p} \binom{m-p}{l} (-1)^l \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} \left(l + \frac{p}{2} \right) = \\
 &= (-1)^{p'} \sum_{l=0}^{m-p} \binom{m-p}{l} (-1)^l \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} (m-p-2l) = \\
 &= (-1)^{p'} \Delta_{h=\pi/m}^{m-p} \operatorname{tg} t|_{t=-\pi/2+\pi p/(2m)}.
 \end{aligned}$$

Случай нечётного m разбирается аналогично.

Выражение для $\Lambda_m(t_+^{m-p})$ через конечную разность не проще, чем изначальное определение. Однако следующее наблюдение позволяет получить простое выражение для асимптотики $\Lambda_m(t_+^{m-p})$ при $m \rightarrow \infty$ и $p = O(1)$.

Утверждение. Пусть функции G, H разлагаются в ряды

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k x^{2k-1}, \quad |x| < 1, \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k x^{2k-1}, \quad |x| < 1,$$

причём $G_k, H_k > 0$. Тогда при всех $l \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$ и $h > 0$, при которых $x, x + (2l - 1)h \in (-1, 1)$, величины $\Delta_h^{2l-1}G(x)$ и $\Delta_h^{2l-1}H(x)$ положительны и выполнено неравенство

$$\frac{\Delta_h^{2l-1}G(x)}{\Delta_h^{2l-1}H(x)} \leq \max_{k \geq l} \frac{G_k}{H_k}. \quad (6)$$

Следовательно, если $G_k \sim H_k$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\Delta_h^{2l-1}G(x) \sim \Delta_h^{2l-1}H(x) \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Точнее, при указанных условиях на x и h отношение левой и правой частей (7) равномерно по x, h стремится к единице при $l \rightarrow \infty$.

Аналогичное утверждение верно для рядов вида $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k x^{2k}$ и величин Δ_h^{2l} .

Для доказательства неравенства (6) достаточно применить формулу

$$\Delta_h^l F(x) := \int_0^h \cdots \int_0^h F^{(l)}(x + u_1 + \dots + u_l) du_1 du_2 \dots du_l$$

к функциям G и H , разложить $G^{(2l-1)}$ в ряд с неотрицательными слагаемыми

$$G^{(2l-1)}(x) = \sum_{k=l}^{\infty} G_k (2k-1) \dots (2k-2l+1) x^{2k-2l}$$

и сравнить это разложение с аналогичным разложением для $H^{(2l-1)}$.

Асимптотика коэффициентов функции tg хорошо известна [10, 13]:

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} 2^{2k} (2^{2k} - 1) x^{2k-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

где B_{2k} — числа Бернулли,

$$|B_{2k}| = (-1)^{k-1} B_{2k} \sim 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k} \sim 2 \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}.$$

Отсюда нетрудно вывести, что функция

$$G(x) := \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

«эквивалентна» (в том смысле, что $G_k \sim H_k$) функции

$$H(x) := \frac{4}{\pi} \frac{x}{1-x^2}.$$

В случае нечётного m уже функция

$$G(x) = \frac{1}{\cos(\pi x/2)}$$

«эквивалентна» дроби

$$H(x) = \frac{4}{\pi}(1-x^2)^{-1}.$$

Это следует из известного разложения [11, 12]

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} x^{2k}, \quad |E_{2k}| = (-1)^k E_{2k} \sim 8\sqrt{\frac{k}{\pi}} \left(\frac{4k}{\pi e}\right)^{2k}.$$

Числа E_{2k} называются числами Эйлера; они целые при всех k .

Из «эквивалентности»

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

и

$$H(x) := \frac{4}{\pi} \frac{x}{1-x^2}$$

получаем при чётном m

$$\Delta_{\pi/m}^{m-p} \operatorname{tg} x \Big|_{x=-\pi/2+\pi p/(2m)} \sim \frac{4}{\pi} \Delta_{2/m}^{m-p} \frac{x}{1-x^2} \Big|_{x=-1+p/m}.$$

Функцию $x/(1-x^2)$ можно заменить на $1/(1-x)$, поскольку $2x/(1-x^2) = 1/(1-x) - 1/(1+x)$ и всё симметрично относительно нуля. При нечётном m функция $1/\cos(\pi x/2)$ заменяется на $(4/\pi)(1-x^2)^{-1}$, а функцию $1/(1-x^2)$ можно заменить на $1/(1-x)$. В общем случае получаем

$$\Delta_{\pi/m}^{m-p} F\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi p}{2m}\right) \sim \frac{4}{\pi} \Delta_{2/m}^{m-p} \frac{1}{1-x} \Big|_{x=-1+p/m}, \quad (8)$$

где, как и в (5), $F(x) = \operatorname{tg} x$ при чётном m , $F(x) = 1/\cos x$ при нечётном m .

Конечную разность функции $1/(1-x)$ легко вычислить по индукции:

$$\Delta_h^l \frac{1}{1-x} = \frac{l! h^l}{(1-x)(1-x-h)\dots(1-x-lh)}.$$

Подставляя l , h и x и проводя простые преобразования, получаем, что

$$\Delta_{2/m}^{m-p} \frac{1}{1-x} \Big|_{x=-1+p/m} = \frac{2^{2m-2p'}}{\binom{2m-2p'}{m-p'}} \frac{2^{-p'-1} m(p-2)!!}{(m-p')(m-p'-1)\dots(m-2p')} \quad (9)$$

(полагаем $x!! = 1$ для $x \leq 0$).

Воспользовавшись соотношением $\binom{2k}{k} \sim 2^{2k}/\sqrt{\pi k}$ ($k \rightarrow \infty$) и равенствами (9), (8), (5), получаем асимптотику при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном $p = 2p' + 1$:

$$\Lambda_m(t_+^{m-p}) \sim (-1)^{p'} \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2^{-m+p'} m^{-p/2} (p-2)!!. \quad (10)$$

Нам также потребуется оценка сверху на $\Lambda(t_+^{m-p})$ для произвольного нечётного $p < m/2$. Конечную разность в (9) легко оценить сверху как

$O(m^{1/2-p'}(p-2)!!)$, откуда аналогично асимптотике (нужно воспользоваться (6)) получается оценка

$$\Lambda_m(t_+^{m-p}) = O(2^{-m+p}m^{-p/2}(p-2)!!). \quad (11)$$

Перейдём к вычислению $h(\tau) := \Lambda_m((t-\tau)_+^m)$. Очевидно, что

$$h^{(p)}(\tau) = (-1)^p m(m-1)\dots(m-p+1)\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p}).$$

Следовательно, $h^{(p)}(0) = 0$ для чётных $p \geq 2$. Выпишем разложение Тейлора для h , разбив сумму на две части (параметры M и N определим позже):

$$\begin{aligned} h(\tau) &= S_1 + S_2 + R, \\ S_1 &= h(0) + \sum_{q=1}^{M-1} h^{(2q+1)}(0) \frac{\tau^{2q+1}}{(2q+1)!}, \quad S_2 = \sum_{q=M}^{N-1} h^{(2q+1)}(0) \frac{\tau^{2q+1}}{(2q+1)!}, \\ R &= h^{(2N+1)}(\xi) \frac{\tau^{2N+1}}{(2N+1)!}. \end{aligned}$$

Подставим $\tau = \varkappa/\sqrt{m}$. Пусть число A фиксировано и $|\varkappa| \leq A$. Тогда при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном M имеем

$$\begin{aligned} 2^m S_1 &= 1 - 2^m \sum_{q=1}^{M-1} m(m-1)\dots(m-2q)\Lambda_m(t_+^{m-2q-1}) \frac{\varkappa^{2q+1}m^{-q-1/2}}{(2q+1)!} = \\ &= 1 - 2^m \sum_{q=1}^{M-1} m^{q+1/2}(-1)^q \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2^{-m+q} m^{-q-1/2} (2q-1)!! \frac{\varkappa^{2q+1}}{(2q+1)!} (1+o(1)) = \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{q=1}^{M-1} (-1)^{q-1} 2^q (2q-1)!! \frac{\varkappa^{2q+1}}{(2q+1)!} + o(1) = \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{q=1}^{M-1} (-1)^{q-1} \frac{\varkappa^{2q+1}}{(2q+1)q!} + o(1). \end{aligned}$$

Полученная сумма совпадает с начальным отрезком разложения Тейлора функции

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varkappa}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{|\varkappa| \leq A} \left| 2^m S_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varkappa}^{\infty} e^{-u^2} du \right| < \varepsilon$$

при достаточно большом $M = M(\varepsilon, A)$.

Оценим теперь сумму

$$2^m S_2 = 2^m \sum_{q=M}^{N-1} h^{(2q+1)}(0) \frac{(\kappa/\sqrt{m})^{2q+1}}{(2q+1)!}.$$

Пользуясь (11), получаем

$$\begin{aligned} |2^m S_2| &\leq \sum_{q=M}^{N-1} 2^m m^{q+1/2} |\Lambda_m(t_+^{m-2q-1})| \frac{A^{2q+1}}{(2q+1)!} \leq \\ &\leq c \sum_{q=M}^{N-1} 2^{2q} (2q-1)!! \frac{A^{2q+1}}{(2q+1)!} = c \sum_{q=M}^{N-1} 2^q \frac{A^{2q+1}}{(2q+1)q!}. \end{aligned}$$

Ясно, что эта величина меньше ε при достаточно большом $M = M(\varepsilon, A)$ и произвольном $N > M$.

Оценим остаточный член, воспользовавшись при $\tau \geq 0$ тривиальным неравенством $|\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p})| \leq \|(t-\tau)_+^{m-p}\| \leq 1$:

$$2^m |R| \leq 2^m m^{2N+1} |\Lambda_m((t-\xi)_+^{m-2N-1})| \frac{(\kappa/\sqrt{m})^{2N+1}}{(2N+1)!} \leq 2^m m^{N+1/2} \frac{A^{2N+1}}{(2N+1)!}.$$

При $N = \lfloor m/5 \rfloor$ эта величина стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Случай $\tau < 0$ сводится к рассмотренному в силу (4).

Итак, $2^m h(\tau) \sim 2^m S_1$ и мы нашли асимптотику $\Lambda_m((t-\tau)_+^m)$ в области $\tau = O(1/\sqrt{m})$. Точно так же находится асимптотика для $\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p})$.

Чтобы охватить весь отрезок $\tau \in [-1, 1]$, воспользуемся соображениями монотонности. Для этого докажем, что функция $g(\tau) = \Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p})$ имеет не более $p-1$ нуля в интервале $\tau \in (-1, 1)$ при $p \geq 1$. Предположим, что g имеет не менее p нулей. Заметим, что $g(1) = g'(1) = \dots = g^{(m-p-1)}(1) = 0$, откуда, в силу $g(-\tau) = \pm g(\tau)$, имеем $g(-1) = g'(-1) = \dots = g^{(m-p-1)}(-1) = 0$. По теореме Ролля функция $g'(\tau)$ имеет на $(-1, 1)$ не менее $p+1$ нуля. Продолжая рассуждения, получим, что $g^{(m-p-1)}$ имеет на $(-1, 1)$ не менее $m-1$ нулей. Но это невозможно, поскольку $g^{(m-p-1)}$ представляет собой кусочно-линейную функцию с производной $\pm(m-p)!$, узлами в $\{\cos(\pi k/m)\}_{k=1}^{m-1}$, обращающуюся в нуль в ± 1 .

Многочлен $H_{p-1}(x)$ имеет $p-1$ нуль на прямой, все эти нули лежат в некотором отрезке $[-A(p), A(p)]$. Следовательно, все нули $\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p})$ при больших m находятся рядом с нулями H_{p-1} и лежат на отрезке $|\tau| \leq 2A(p)/\sqrt{m}$. Поэтому функция $\Lambda_m((t-\tau)_+^{m-p})$ монотонна при $\tau\sqrt{m} > 2A(p+1)$ (в том числе при $p=0$). Поскольку она равна нулю при $\tau=1$ и $H_{p-1}(\kappa)e^{-\kappa^2}$ (при $p=0$ соответствующий интеграл) стремится к нулю при $\kappa \rightarrow +\infty$, то и $|2^m m^{p/2} \Lambda_m((t-\kappa/\sqrt{m})_+^{m-p})| < \varepsilon$ при $\kappa > A(p, \varepsilon)$ и больших m . Асимптотика получена для положительных τ . При $\tau < 0$ и $p \geq 1$ дословно проходят предыдущие рассуждения; для $\tau < 0$ и $p=0$ достаточно использовать (4). Лемма полностью доказана. $\square$

3. Асимптотика узлов и оценка нормы $x_{n,r}$ снизу

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы. Оно проводится индукцией по количеству узлов. База индукции — случай $n = 0$ — тривиальна. При индуктивном переходе будем использовать, что $r! \|x_{n-1,r}\| = O(2^{-r}r^{-(n-1)/2})$. В силу неравенства $\|x_{n,r}\| \leq \|x_{n-1,r}\|$ (которое следует, например, из (1)), та же оценка справедлива для $x_{n,r}$.

Как обычно, $n' := \lfloor n/2 \rfloor$. Напомним, что $r! \|x_{n,r}\| = E_{r-1}(\varphi_{n,r})$, где

$$\begin{aligned}\varphi_{n,r}(t) &= t^r + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k (t - \tau_k)_+^r, \quad t \geq 0, \\ \varphi_{n,r}(-t) &= (-1)^{n+r} \varphi_{n,r}(t).\end{aligned}$$

По лемме 1 для любого $m \geq r$ справедлива оценка

$$E_{r-1}(\varphi_{n,r}) \geq E_{m-1}(\varphi_{n,r}) \geq |\Lambda_m(\varphi_{n,r})|.$$

Применим эту оценку для $m = n + r - 2, n + r - 4, \dots, n + r - 2n'$. Обозначим для краткости

$$\varkappa_j = \tau_j \sqrt{r}, \quad H_{-1}(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Возьмём $q \in \{1, \dots, n'\}$. Тогда для $m = n + r - 2q$ имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+r-2q}(\varphi_{n,r}) &= 2 \left\{ \Lambda_{n+r-2q}(t_+^r) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k \Lambda_{n+r-2q}((t - \tau_k)_+^r) \right\} = \\ &= 2^{1-(n+r-2q)} (n + r - 2q)^{-(n-2q)/2} \times \\ &\times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ H_{n-2q-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-2q-1}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k^2} + o(1) \right\}.\end{aligned}$$

Пусть $\bar{\varkappa} = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_{n'})$. Обозначим

$$F_q(\bar{\varkappa}) := H_{n-2q-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-2q-1}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k^2}.$$

Мы установили, что

$$\Lambda_{n+r-2q}(\varphi_{n,r}) \asymp 2^{-r} r^{-(n-2q)/2} (F_q(\bar{\varkappa}) + o(1)).$$

Вектор $\bar{\varkappa}$ зависит от m . Из оценки

$$|\Lambda_{n+r-2q}(\varphi_{n,r})| \leq r! \|x_{n,r}\| = O(2^{-r} r^{-(n-1)/2})$$

следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_q(\bar{\varkappa}(m)) = 0.$$

Предположим, что $\bar{\kappa}(m) \rightarrow \bar{\kappa}(\infty)$ (в $\bar{\kappa}(\infty)$ допускаются бесконечные значения). Тогда вектор $\bar{\kappa}(\infty)$ удовлетворяет системе уравнений $\{F_q(\bar{\kappa}) = 0, q = 1, \dots, n'\}$. Мы покажем, что у этой системы есть единственное решение $\bar{\kappa}^*$, причём все компоненты вектора $\bar{\kappa}^*$ конечны. Отсюда будет следовать, что $\bar{\kappa}(m) \rightarrow \bar{\kappa}^*$ при $m \rightarrow \infty$, что и даст нужную нам асимптотику узлов.

Запишем систему $\{F_q(\bar{\kappa}) = 0, q = 1, \dots, n'\}$ в более удобном виде. При чётном n получаем систему

$$H_{2q-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{2q-1}(\kappa_k) e^{-\kappa_k^2} = 0, \quad q = 0, \dots, n' - 1, \quad (12)$$

при нечётном n — систему

$$H_{2q}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{2q}(\kappa_k) e^{-\kappa_k^2} = 0, \quad q = 0, \dots, n' - 1. \quad (13)$$

При этом по построению $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_{n'} \leq \infty$.

Покажем, что система уравнений (12) эквивалентна тому, что точки $\{\kappa_k\}_{k=1}^{n'}$ являются каноническим набором для системы функций $\{x^{2q}e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$ на $(0, +\infty)$ (мы допускаем некоторую вольность, позволяя точкам канонического набора совпадать между собой или с концами интервала). Обозначим через σ функцию, равную по модулю единице, меняющую знак в $\{\kappa_k\}_{k=1}^{n'}$, для которой $\sigma(0) = 1$. Пусть $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $F' = f$. Тогда (полагаем $\kappa_0 := 0, \kappa_{n'+1} := +\infty$)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \sigma(x) dx &= \sum_{k=0}^{n'} (-1)^k \int_{\kappa_k}^{\kappa_{k+1}} f(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n'} (-1)^k (F(\kappa_{k+1}) - F(\kappa_k)) = - \left(F(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k F(\kappa_k) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

По линейности система (12) означает равенство нулю суммы (14) для всех $F \in \text{span}\{H_{2q-1}(x)e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$. Следовательно, интеграл в (14) равен нулю для всех $f = F'$; множество производных функций из указанного пространства есть $\text{span}\{x^{2q}e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$.

Случай нечётного n разбирается аналогично, система (13) эквивалентна тому, что точки κ_k образуют канонический набор для системы функций $\{x^{2q+1}e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$.

Заметим, что системы $\{x^{2q}e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$ и $\{x^{2q+1}e^{-x^2}\}_{q=0}^{n'-1}$ являются чебышёвскими на $(0, +\infty)$. Из этого следует, что неравенства $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_{n'} \leq \infty$ обязаны быть строгими, иначе для соответствующей чебышёвской системы мы получим канонический набор из меньшего количества точек, чем размерность этой системы. Это невозможно, поскольку тогда можно построить полином, меняющий знак именно в этих точках; для него равенство (2)

не выполняется. Единственность канонического набора следует из чебышёвости системы аналогичным образом (дело в том, что разность двух функций σ , равных единице в нуле и меняющих знак n' раз, будет менять знак меньшее количество раз).

Существование канонических наборов — решений систем (12), (13) — уже, фактически, доказано (всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность векторов $\tilde{x}(m)$). Отметим, что имеется общая теорема Хобби—Райса [6] (короткое доказательство привёл А. Пинкус [8]) о существовании канонического набора для произвольной системы функций в $L[a, b]$ на конечном отрезке. Наш случай может быть сведён к отрезку заменой $z = x/(x+1)$.

Итак, асимптотика узлов (первое утверждение теоремы) получена.

Выпишем теперь оценку нормы $x_{n,r}$ снизу, пользуясь найденной асимптотикой узлов $\tau_k \sim \varkappa_k/\sqrt{r}$:

$$\begin{aligned} r! \|x_{n,r}\| &\geq E_{r-1}(\varphi_{n,r}) \geq E_{n+r-1}(\varphi_{n,r}) \geq |\Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r})|, \\ \Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r}) &= 2 \left\{ \Lambda_{n+r}(t_+^r) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k \Lambda_{n+r}((t - \tau_k)_+^r) \right\} = \\ &= 2^{1-(n+r)} (n+r)^{-n/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ H_{n-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-1}(\tau_k \sqrt{r}) e^{-r\tau_k^2} + o(1) \right\} \sim \\ &\sim 2^{1-(n+r)} r^{-n/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ H_{n-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-1}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Мы докажем, что выражение

$$H_{n-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-1}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k^2} \quad (15)$$

не равно нулю и найдём его знак при $n \geq 2$ (в случае $n = 1$ дальнейшее очевидно). Возьмём многочлен $Q \in \mathcal{P}_n$ (чётный при чётном n и нечётный при нечётном n), который меняет знак в точках $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{n'}$, причём $Q(+0) > 0$ и, следовательно, $\text{sign } Q(+\infty) = (-1)^{n'}$. Тогда

$$\int_0^\infty Q(x) \sigma(x) e^{-x^2} dx > 0,$$

где функция σ определена так же, как в (14). Подставим в (14) функцию $F(x) = H_{n-1}(x) e^{-x^2}$, получим, что сумма (15) равна

$$- \int_0^\infty f(x) \sigma(x) dx$$

для $f = F'$. Поскольку $H_{n-1}(x) = (2x)^{n-1} + P$, где $P \in \mathcal{P}_{n-3}$, $P(-t) = (-1)^{n-1}P(t)$, то $f(x) = (-2x)^n + P'(x)e^{-x^2}$. Поскольку $f(x) < 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то $f(x) = (-1)^{n'+1}(cQ + \tilde{P})e^{-x^2}$, где $c > 0$, $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{n-2}$ и $\tilde{P}(-t) = (-1)^n \tilde{P}(t)$. Тогда ввиду каноничности $\{\varkappa_k\}$

$$\operatorname{sign} \int_0^\infty f(x)\sigma(x)dx = \operatorname{sign} \int_0^\infty (-1)^{n'+1}cQ(x)\sigma(x)e^{-x^2}dx = (-1)^{n'+1}.$$

В итоге знак суммы (15) есть $(-1)^{n'}$.

В силу (12), (13) и равенства $H_{n-1}(x) = (2x)^{n-1} + P$

$$\begin{aligned} H_{n-1}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k H_{n-1}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k^2} &= \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k (2\varkappa_k)^{n-1} e^{-\varkappa_k^2} = -2^n \sum_{k=1}^{n'} (-1)^{k-1} \varkappa_k^{n-1} e^{-\varkappa_k^2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем нижнюю оценку

$$\begin{aligned} r! \|x_{n,r}\| &\geq |\Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r})| \sim 2^{1-r} r^{-n/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \sum_{k=1}^{n'} (-1)^{k-1} \varkappa_k^{n-1} e^{-\varkappa_k^2} \right| = \\ &= 2^{1-r} r^{-n/2} (-1)^{n'-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n'} (-1)^{k-1} \varkappa_k^{n-1} e^{-\varkappa_k^2} = A_n 2^{1-r} r^{-n/2}. \end{aligned}$$

4. Оценка нормы $x_{n,r}$ сверху

Вернёмся к ключевой для нас лемме 1. Равенство

$$f\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) - P_{m-1}\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) = (-1)^k L$$

можно переписать в виде

$$f = LT_m + P_{m-1} \quad \text{на сетке} \quad \left\{ \cos \frac{\pi k}{m} \right\}_{k=0}^m.$$

Формулу для L можно получить, не решая системы линейных уравнений. Для этого введём на $C[-1, 1]$ скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_m := \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} f(1)g(1) + \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) g\left(\cos \frac{\pi k}{m}\right) + \frac{1}{2} f(-1)g(-1) \right\}.$$

Заметим, что система многочленов $\{T_k\}_{k=0}^m$ ортогональна относительно этого скалярного произведения:

$$\begin{aligned}\langle T_0, T_0 \rangle_m &= \langle T_m, T_m \rangle_m = 1, & \langle T_k, T_k \rangle &= \frac{1}{2}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \\ \langle T_i, T_j \rangle_m &= 0, & 0 \leq i < j \leq m.\end{aligned}$$

Эти равенства нетрудно проверить, учитывая, что

$$T_j \left(\cos \frac{\pi k}{m} \right) = \cos \frac{\pi j k}{m}.$$

Следовательно, любую функцию можно разложить по системе $\{T_k\}_{k=0}^m$:

$$f = \sum_{k=0}^m b_k T_k \quad \text{на сетке} \quad \left\{ \cos \frac{\pi k}{m} \right\}_{k=0}^m, \quad b_k = \begin{cases} 2\langle f, T_k \rangle_m, & 1 \leq k \leq m-1, \\ \langle f, T_k \rangle_m, & k=0, k=m. \end{cases}$$

При этом получается, что $L = b_m = \langle f, T_m \rangle_m = \Lambda_m(f)$. Более того, другие коэффициенты также можно выразить через Λ_m . Пусть $1 \leq p \leq m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle f, T_{m-p} \rangle_m &= \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} f(1) + \sum_{k=1}^{m-1} f \left(\cos \frac{\pi k}{m} \right) \cos \frac{\pi k(m-p)}{m} + \frac{1}{2} f(-1)(-1)^{m-p} \right\} = \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} f(1) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k f \left(\cos \frac{\pi k}{m} \right) \cos \frac{\pi k p}{m} + (-1)^m \frac{1}{2} f(-1)(-1)^p \right\} = \\ &= \langle f T_p, T_m \rangle_m,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$b_{m-p} = 2\langle f, T_{m-p} \rangle = 2\Lambda_m(f T_p). \quad (16)$$

Перейдём непосредственно к оценке $\|x_{n,r}\|$ сверху. Возьмём функцию $f = \varphi_{n,r}$ и рассмотрим её разложение по системе $\{T_k\}_{k=0}^{n+r}$. Обозначив для краткости $L = \Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r})$, получим, что

$$\begin{aligned}\varphi_{n,r} &= L T_{n+r} + P_{n+r-1} \quad \text{на сетке} \quad \left\{ \cos \frac{\pi k}{n+r} \right\}_{k=0}^{n+r}, \\ P_{n+r-1} &= 2 \sum_{p=1}^{n+r-1} \Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r} T_p) T_{n+r-p} + \Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r} T_{n+r}).\end{aligned}$$

Тем самым многочлен $L T_{n+r} + P_{n+r-1}$ интерполирует $\varphi_{n,r}$ на указанной сетке. Отсюда мы выведем, что

$$\|\varphi_{n,r} - L T_{n+r} - P_{n+r-1}\| = O(2^{-r} r^{-n/2-1}). \quad (17)$$

Следовательно, в силу (3)

$$\|x_{n,r}\| = E_{r-1}(\varphi_{n,r}) = E_{n+r-1}(\varphi_{n,r}) \leq |L| + O(2^{-r} r^{-n/2-1}).$$

Асимптотику величины $L = \Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r})$, являющейся оценкой снизу на $r!$ $\|x_{n,r}\|$, мы уже вычислили в предыдущем разделе: $|L| \sim A_n 2^{1-r} r^{-n/2}$. Следовательно,

для завершения доказательства второго утверждения теоремы достаточно установить (17). Нам потребуется некоторая предварительная работа.

Оценим начальные коэффициенты в разложении P_{n+r-1} по $\{T_k\}$. Ясно, что

$$(t - \tau)_+^r T_p(t) = \sum_{k=0}^p g_{p,k}(\tau)(t - \tau)_+^{r+k},$$

где $g_{p,k}$ — некоторые многочлены. Следовательно, по лемме 2

$$\Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r} T_p) = O(2^{-r} r^{-(n-p)/2})$$

при $p = O(1)$.

Найдём асимптотику $T_m^{(m-p)}$ при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном p . Можно показать, что коэффициенты при старших мономах у многочлена $2^{1-m} T_m$ устроены следующим образом: $2^{1-m} T_m(t) = t^m - a_{1,m} t^{m-2} + a_{2,m} t^{m-4} - \dots$, причём $a_{p,m} = a_p m^p + O(m^{p-1})$, $a_p \neq 0$ при каждом p . Продифференцировав и подставив $t = x/\sqrt{m}$, находим

$$2^{1-m} T_m^{(m-p)} \left(\frac{x}{\sqrt{m}} \right) = m! m^{-p/2} V_{p,m}(x),$$

$$V_{p,m} \in \mathcal{P}_p, \quad V_{p,m} \rightarrow V_p \neq 0 \text{ в пространстве } \mathcal{P}_p \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Из известных формул для T_m можно получить явный вид многочленов V_p (впрочем, нам он не понадобится):

$$V_p(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \frac{(-1)^s}{s! 2^{2s}} \cdot \frac{x^{p-2s}}{(p-2s)!}.$$

Аналогичное представление имеет место для многочленов

$$\omega_{m+2}(t) = t \prod_{k=0}^m \left(t - \cos \frac{\pi k}{m} \right).$$

Именно,

$$\omega_m^{(m-p)} \left(\frac{x}{\sqrt{m}} \right) = m! m^{-p/2} W_{p,m}(x), \quad W_{p,m} \rightarrow W_p \text{ в } \mathcal{P}_p \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Поскольку $a_p \neq 0$, то коэффициенты при x^{p-2s} у многочленов V_p и аналогично W_p не равны нулю. В частности, $W_p \in \mathcal{P}_p \setminus \mathcal{P}_{p-1}$. Нам также понадобится тот факт, что при всех p нули многочленов W_p невырождены, т. е. имеют кратность 1. Докажем это. Заметим, что $W_{p,m}$ имеет p (вещественных) нулей, поскольку ω_m имеет m нулей. Следовательно, W_p также имеет p нулей. Предположим, что при некотором p_0 один из нулей W_{p_0} кратный: $W_{p_0}(x_0) = 0$, $W'_{p_0}(x_0) = 0$. Поскольку каждый второй коэффициент у W_{p_0} ненулевой, то $x_0 \neq 0$. По построению $W'_p = W_{p-1}$. Поскольку при переходе от W_{p_0+1} к производной кратность всех нулей уменьшается на единицу и добавляются новые не кратные нули, то x_0 является нулём кратности 3 для W_{p_0+1} , кратности 4 для

W_{p_0+2} и т. д. Значит, при больших p этот нуль имеет кратность $p - p_0 + 2 > p/2$, что невозможно, поскольку $-x_0$ имеет ту же самую кратность по соображениям чётности.

Перейдём к доказательству неравенства (17). Воспользуемся стандартным методом оценки погрешности интерполяции. Обозначим $R = \varphi_{n,r} - LT_{n+r} - P_{n+r-1}$ и рассмотрим многочлен

$$\omega(t) := \omega_{n+r+2}(t) = t \prod_{k=0}^{n+r} \left(t - \cos \frac{\pi k}{n+r} \right).$$

Ясно, что R обращается в ноль в точках $\cos((\pi k)/(n+r))$. Если $n+r$ чётно, то функции $\varphi_{n,r}$, T_{n+r} , P_{n+r-1} , R , ω чётны и нуль $t = 0$ является двойным нулём для R и ω ; если же $n+r$ нечётно, то указанные функции нечётны и $t = 0$ также является нулём R и ω . Оценим $R(t_0)$ в некоторой точке $t_0 \notin \{0, \cos((\pi k)/(n+r))\}$. Положим $K = R(t_0)/\omega(t_0)$ и $S = R - K\omega$.

Функция S имеет на $[-1, 1]$ не менее $n+r+4$ нулей за счёт $n+r+2$ нулей ω и $\pm t_0$. По теореме Ролля $S^{(r-1)}$ имеет не менее $n+5$ нулей. Удобно вычислять $S^{(r-1)}(t)/r!$, при $t = x/\sqrt{r}$:

$$\varphi_{n,r}^{(r-1)}(t) = r! M_{n,r}(t), \quad \frac{\varphi_{n,r}^{(r-1)}(x/\sqrt{r})}{r!} = r^{-1/2} \tilde{M}_{n,r}(x),$$

где функции $M_{n,r}(t)$ и $\tilde{M}_{n,r}(x) = r^{1/2} M_{n,r}(x/\sqrt{r})$ являются кусочно-линейными с производной ± 1 , причём $M_{n,r}(0) = \tilde{M}_{n,r}(0) = 0$. Пользуясь (18), получаем, что

$$\frac{T_{n+r}^{(r-1)}(x/\sqrt{r})}{r!} = 2^{n+r-1} \frac{(n+r)!}{r!} (n+r)^{-(n+1)/2} \cdot V_{n+1,n+r}(x).$$

Умножая на коэффициент $L = O(2^{-r} r^{-n/2})$, получаем

$$\frac{LT_{n+r}^{(r-1)}(x/\sqrt{r})}{r!} = O(r^{-n/2} r^n r^{-(n+1)/2}) \cdot V_{n+1,n+r}(x) = O(r^{-1/2}) V_{n+1,n+r}(x).$$

Аналогично оцениваются слагаемые, входящие в P_{n+r-1} (заметим, что нам достаточно брать $p \leq n+1$):

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{n+r}(\varphi_{n,r} T_p) \frac{T_{n+r-p}^{(r-1)}(x/\sqrt{r})}{r!} &= \\ &= O(2^{-r} r^{-(n-p)/2}) 2^{n+r-1} \frac{(n+r-p)!}{r!} (n+r-p)^{-(n+1-p)/2} V_{n+1-p,n+r}(x) = \\ &= O(r^{-(n-p)/2} r^{n-p} r^{-(n+1-p)/2}) \cdot V_{n+1-p,n+r}(x) = O(r^{-1/2}) \cdot V_{n+1-p,n+r}. \end{aligned}$$

Наконец, последнее слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{(r-1)}(x/\sqrt{r})}{r!} &= \frac{(n+r+2)!}{r!} (n+r+2)^{-(n+3)/2} W_{n+3,n+r}(x) = \\ &= r^{n+2} r^{-(n+3)/2} (1+o(1)) \cdot W_{n+3,n+r}(x) = r^{n/2+1/2} (1+o(1)) W_{n+3,n+r}(x). \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в уравнение $S^{(r-1)} = 0$, получаем

$$r^{-1/2} \tilde{M}_{n,r}(x) - \sum_{p=0}^{n+1} O(r^{-1/2}) V_{n+1-p,n+r}(x) - K r^{n/2+1/2} (1+o(1)) W_{n+3,n+r}(x) = 0.$$

Разделим равенство на $r^{-1/2}(1+o(1))$, обозначим $\tilde{K} = K r^{n/2+1}$, получим

$$(1+o(1)) \tilde{M}_{n,r}(x) - \sum_{p=0}^{n+1} O(1) V_{n+1-p,n+r}(x) - \tilde{K} W_{n+3,n+r}(x) = 0. \quad (19)$$

Покажем, что если $\tilde{K}$ и r велики, то полученное уравнение имеет не более $n+3$ решений (что противоречит тому, что $S^{(r-1)}$ имеет не менее $n+5$ нулей). Действительно, $V_{n+1-p,n+r} \rightarrow V_{n+1-p}$, $W_{n+3,n+r} \rightarrow W_{n+3}$ при $r \rightarrow \infty$, а функция $\tilde{M}_{n,r}$ 1-липшицева: $|\tilde{M}_{n,r}(x_1) - \tilde{M}_{n,r}(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, причём $\tilde{M}_{n,r}(0) = 0$. Поэтому, скажем, при $|\tilde{K}| \geq 1$ решений (19) вне достаточно большого отрезка $[-x_0, x_0]$ нет. Поскольку на $[-x_0, x_0]$ функции $\tilde{M}_{n,r}$, $V_{n+1-p,n+r}$ и их производные являются равномерно ограниченными, то при больших $\tilde{K}$ и r решения (19) будут близки к нулям W_{n+3} , и в силу невырожденности этих нулей решений будет не более $n+3$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{K} = O(1)$ при больших r .

Итак, $\tilde{K} = O(1)$, $K = O(r^{-n/2-1})$. Вспомним, что $R(t_0) = K\omega(t_0)$. Нетрудно проверить, что $\omega(t) = 2^{1-n-r} t(t^2 - 1) U_{n+r-1}(t)$, где U_m — многочлен Чебышёва второго рода. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \omega(\cos \theta) &= 2^{1-n-r} \cos \theta (-\sin^2 \theta) U_{n+r-1}(\cos \theta) = \\ &= -2^{1-n-r} \cos \theta \sin^2 \theta \frac{\sin(n+r)\theta}{\sin \theta} = -2^{-n-r} \sin 2\theta \sin(n+r)\theta, \end{aligned}$$

поэтому $\|\omega\| \leq 2^{-n-r}$, $R(t_0) = O(2^{-r} r^{-n/2-1})$, что и требовалось доказать.

5. Сравнение $x_{n,r}$ с T_{n+r}

Нам осталось доказать последнее утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{x}_{n,r} := \frac{x_{n,r}}{x_{n,r}(1)}.$$

Покажем, что имеют место оценки

$$1 - O\left(\frac{1}{r}\right) = |\Lambda_{n+r}(\tilde{x}_{n,r})| \leq \|\tilde{x}_{n,r}\| = 1, \quad E_{n+r}(\tilde{x}_{n,r}) = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (20)$$

Равенство $\|\tilde{x}_{n,r}\| = 1$ следует из того, что в альтернанс $x_{n,r}$ входят точки ± 1 (см. «Введение»). Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем

разделе:

$$\begin{aligned} r! \|x_{n,r}\| &\geq |L|, \quad L := \Lambda_{n+r}(r! x_{n,r}), \quad |L| \asymp 2^{-r} r^{-n/2}, \\ r! \|x_{n,r}\| &= E_{n+r-1}(\varphi_{n,r}), \quad \|\varphi_{n,r} - LT_{n+r} - P_{n+r-1}\| = O\left(\frac{|L|}{r}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|r! x_{n,r}\| = |L| + O(|L|/r)$, поэтому $|\Lambda_{n+r}(\tilde{x}_{n,r})| \geq 1 - O(1/r)$. Поскольку $r! x_{n,r} - \varphi_{n,r} \in \mathcal{P}_{r-1}$, то $E_{n+r}(r! x_{n,r}) = O(|L|/r)$, $E_{n+r}(\tilde{x}_{n,r}) = O(1/r)$.

Мы установили (20). Выведем отсюда, что $\|\tilde{x}_{n,r} - T_{n+r}\| = O(r^{-1/6})$. Поскольку мы не будем использовать информацию о производных $\tilde{x}_{n,r}$, удобно будет сделать тригонометрическую подстановку $t = \cos \theta$. Вместо алгебраических многочленов мы будем иметь дело с тригонометрическими полиномами; через $\mathcal{T}_N$ обозначается пространство тригонометрических полиномов порядка не выше N . Норма $\|\cdot\|$ далее будет обозначать C -норму на $[-\pi, \pi]$. Нам потребуется следующее неравенство. Пусть $T \in \mathcal{T}_N$, $T(\theta) = \|T\| \cos \xi$, $\xi \in [0, \pi/2]$. Тогда

$$\begin{aligned} T(\theta \pm \delta) &\leq \|T\| \cos(\xi - N\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\xi}{N}, \\ T(\theta \pm \delta) &\geq \|T\| \cos(\xi + N\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\pi - \xi}{N}. \end{aligned} \tag{21}$$

Следуя [5, гл. 5, Е.13], где $\xi = 0$, будем называть (21) неравенством Рисса. В сформулированном нами виде это неравенство содержится в [1, леммы 3.5.1, 3.2.1]. Отметим, что сходные неравенства возникали в работах С. Н. Бернштейна, С. Б. Стечкина и других.

Итак, пусть

$$X(\theta) := \tilde{x}_{n,r}(\cos \theta).$$

Положим $\theta_k = \pi k/(n+r)$, $k = 0, \dots, n+r$. Ясно, что X имеет $(n+r+1)$ -альтернанс на отрезке $[0, \pi]$; обозначим точки альтернанса через $0 = \hat{\theta}_0 < \hat{\theta}_1 < \dots < \hat{\theta}_{n+r} = \pi$. По построению $X(\hat{\theta}_k) = (-1)^k$. Докажем, что

$$\max_{0 \leq k \leq n+r} |\hat{\theta}_k - \theta_k| = O(r^{-7/6}). \tag{22}$$

Согласно (20) найдется $u \in \mathcal{T}_{n+r}$, такой что $\|X - u\| = O(1/r)$. Отсюда следует, что $\|u\| = 1 + O(1/r)$. В точках альтернанса имеем

$$(-1)^k u(\hat{\theta}_k) = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) = \|u\| \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \|u\| \cos \xi_k, \quad \xi_k = O(r^{-1/2}).$$

Применим неравенство Рисса к полиному $(-1)^k u$, точке $\theta = \hat{\theta}_k$, $\xi = |\xi_k|$:

$$(-1)^k u(\hat{\theta}_k + (n+r)\delta) \geq \|u\| \cos(|\xi_k| + (n+r)\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\pi - |\xi_k|}{n+r}.$$

Поэтому если $\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \delta$, то в силу

$$(-1)^k u(\hat{\theta}_{k+1}) = -\|u\| \cos \xi_{k+1} = \|u\| \cos(\pi + \xi_{k+1})$$

имеем $(n+r)\delta \geq \pi - |\xi_k| - |\xi_{k+1}|$, откуда получаем, что

$$|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k| \geq \frac{\pi}{n+r} - O(r^{-3/2}), \quad k = 0, \dots, n+r-1.$$

Предположим, что $|\hat{\theta}_k - \theta_k| > Ar^{-7/6}$ для достаточно большого A . Если $\hat{\theta}_k < \theta_k$, то возьмём минимальное k_0 , при котором $\theta_k - \hat{\theta}_k > Ar^{-7/6}$ и далее будем рассматривать $\hat{\theta}_l$ для $l \leq k_0$. Если же $\hat{\theta}_k > \theta_k$, то, наоборот, возьмём максимальное k_0 , при котором $\hat{\theta}_k - \theta_k > Ar^{-7/6}$, и будем рассматривать $\hat{\theta}_l$ для $l \geq k_0$; все дальнейшие рассуждения будут аналогичны.

Итак, пусть $\theta_{k_0} - \hat{\theta}_{k_0} > Ar^{-7/6}$ и $\theta_l - \hat{\theta}_l \leq Ar^{-7/6}$ при $0 \leq l < k_0$. Заметим, что

$$(\theta_{l-1} - \hat{\theta}_{l-1}) - (\theta_l - \hat{\theta}_l) = \hat{\theta}_l - \hat{\theta}_{l-1} - \frac{\pi}{n+r} \geq -O(r^{-3/2}),$$

откуда следует, что $\theta_l - \hat{\theta}_l > A/2r^{-7/6}$ при $0 \leq k_0 - l = O(Ar^{1/3})$. Покажем, что для этих l имеет место неравенство

$$|X(\theta_{l-1})| \leq 1 - cA^2r^{-1/3}.$$

Действительно, из неравенства Рисса и оценки

$$\hat{\theta}_l - \theta_{l-1} = (\theta_l - \theta_{l-1}) - (\theta_l - \hat{\theta}_l) < \frac{\pi}{n+r} - \frac{A}{2}r^{-7/6}$$

вытекает, что

$$(-1)^{l-1}u(\theta_{l-1}) \leq \|u\| \cos\left(\frac{A}{2}r^{-1/6} + O(r^{-1/2})\right) \leq 1 - cA^2r^{-1/3} + O(1/r).$$

Оценку с обратным знаком получить ещё проще, нужно сравнить значение u в точках $t = \theta_{l-1}$ и $t = \hat{\theta}_{l-1}$. Далее используем, что $\|X - u\| = O(1/r)$.

Оценим теперь $\Lambda_{n+r}(\tilde{x}_{n,r})$:

$$(n+r)\Lambda_{n+r}(\tilde{x}_{n,r}) = \frac{1}{2}X(0) + \sum_{l=1}^{n+r-1} (-1)^l X(\theta_l) + \frac{(-1)^{n+r}}{2}X(\pi).$$

Каждое из слагаемых по модулю не превосходит единицы. При этом слагаемые $(-1)^{l-1}X(\theta_{l-1})$, соответствующие $l \leq k_0$, $k_0 - l = O(Ar^{1/3})$, по модулю не более $1 - cA^2r^{-1/3}$. Следовательно, вся сумма не превосходит по модулю

$$n+r - c_1Ar^{1/3}A^2r^{-1/3} = n+r - c_1A^3,$$

что меньше $(n+r)(1 - O(1/r))$ для достаточно большого A . Полученное противоречие с (20) доказывает (22). Из неравенства Рисса теперь легко выводится нужная оценка $\|X(\theta) - \cos(n+r)\theta\| = O(r^{-1/6})$.

Литература

- [1] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987.

- [2] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1986.
- [3] Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Матем. сб. — 1969. — Т. 80 (122), № 2 (10). — С. 290—304.
- [4] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
- [5] Borwein P. B., Erdélyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. — Berlin: Springer, 1995. — (Grad. Texts Math.).
- [6] Hobby C. R., Rice J. R. A moment problem in L_1 approximation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 16, no. 4. — P. 665—670.
- [7] Karlin S. Some variational problems on certain Sobolev spaces and perfect splines // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 79, no. 1. — P. 124—128.
- [8] Pinkus A. A simple proof of the Hobby—Rice theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 60. — P. 82—84.
- [9] Schoenberg I. J. Cardinal Spline Interpolation. — Philadelphia: SIAM, 1973.
- [10] Weisstein E. W. Bernoulli Number. — <http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html>.
- [11] Weisstein E. W. Euler Number. — <http://mathworld.wolfram.com/EulerNumber.html>.
- [12] Weisstein E. W. Secant. — <http://mathworld.wolfram.com/Secant.html>.
- [13] Weisstein E. W. Tangent. — <http://mathworld.wolfram.com/Tangent.html>.