Субдифференциалы разности двух выпуклых функций*

Е. С. ПОЛОВИНКИН
Московский физико-технический институт
e-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: многозначное отображение, касательный конус, выпуклая функция, слабо регулярная функция, липшицева функция, эпипроизводные по направлениям, субдифференциалы.

Аннотация

Показано, что для некоторых классов функций все эпипроизводные и субдифференциалы Кларка, Мишеля—Пено и другие совпадают. Получены некоторые правила вычисления эпипроизводных и субдифференциалов для разности двух выпуклых функций. Рассмотрены примеры.

Abstract

E. S. Polovinkin, Subdifferentials for the difference of two convex functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 167—184.

It is shown that for some classes of functions all epiderivatives and subdifferentials of the Clarke, Michel—Penot, and other types coincide. Several rules of calculation of epiderivatives and subdifferentials for the difference of two convex functions are obtained. Some examples are considered.

Введение

При исследовании негладких непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ необходимое условие экстремума принимает вид включения $0 \in \partial_{\mathrm{C}} f(x_0)$, где $\partial_{\mathrm{C}} f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка [6]. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции само является очень не простой задачей. В данной статье получены достаточно простые формулы вычисления различных производных по направлениям, а с ними и субдифференциалов, включая субдифференциал Кларка, для негладких функций, которые представимы в виде разности двух локально липшицевых выпуклых функций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00295).

Отметим, что собственное дифференциальное исчисление для функций, включающих в себя изучаемый нами класс функций, создали В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [1]. Они ввели понятие квазидифференциала функции, представляющего собой пару выпуклых компактов, первый из которых является субдифференциалом (в смысле выпуклого анализа) первой выпуклой функции, а второй — гиподифференциалом второй вогнутой (= минус выпуклой) функции. Подробное изложение квазидифференциального исчисления см. в [1]. Однако нам необходимо вычислить субдифференциал Кларка для разности выпуклых функций.

Заметим также, что ярким представителем изучаемого в этой работе класса функций является класс *слабо выпуклых функций*, т. е. класс функций вида $f(x) = f_1(x) - \alpha\|x\|^2$, у которых вычитаемая функция является второй степенью нормы с коэффициентом $\alpha > 0$. С точки зрения вычисления субдифференциалов таких функций всё просто. Для приведённого класса слабо выпуклых функций вычисление эписубдифференциалов и эпипроизводных по направлениям сводится к вычислению субдифференциала и классической производной по направлениям первой функции (см., например, [7, Дополнение. Слабо и сильно выпуклые функции]).

1. Многозначные отображения

Напомним некоторые определения касательных конусов и производных многозначных отображений, на основе которых удобно будет определять и исследовать различные субдифференциалы невыпуклых функций.

Пусть X, Y — действительные банаховы пространства. Через

$$B_r(x_0) \doteq \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$$

обозначаем открытый шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$ в пространстве X. Для всякого множества $A \subset X$ его замыкание обозначаем через $\bar{A}$. Напомним понятия суммы Минковского двух множеств A, B и умножения множества A на число λ:

$$A + B \doteq \{c \in X \mid c = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}, \quad \lambda A \doteq \{c \in X \mid c = \lambda a,\ a \in A\}.$$

Разностью Минковского двух множеств A, B из X называется множество вида

$$A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in X \mid x + B \subset A\}.$$

Обозначим функцию расстояния от точки $x \in X$ до множества $A \subset X$ через

$$\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(Y)$ ($\mathcal{F}(Y)$) множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из Y. Графиком отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ называется множество

$$\operatorname{graph} F \doteq \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Следуя [9], для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в заданной точке его графика $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ определим производную как отображение $DF(z_0)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, графиком которого является некоторый касательный конус к графику данного отображения в точке (x_0, y_0). Известно несколько видов касательных конусов для невыпуклых множеств. Среди них следует выделить *верхний касательный конус* (называемый также *контингентным конусом*) $T_{\mathrm{U}}(A; a)$ (см. [9]), *нижний касательный конус* $T_{\mathrm{L}}(A; a)$ (см. [3, 7, 8]) и *касательный конус Кларка* $T_{\mathrm{C}}(A; a)$ (см. [11, 12]).

Определение 1. Верхним касательным конусом ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ называется множество вида

$$T_{\mathrm{U}}(A; a) \doteq \Big\{ v \in X \mid \liminf_{\lambda \downarrow 0} \varrho\big(v,\, \lambda^{-1}(A - a)\big) = 0 \Big\}.$$

Определение 2. Нижним касательным конусом ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ называется множество вида

$$T_{\mathrm{L}}(A; a) \doteq \Big\{ v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \varrho\big(v,\, \lambda^{-1}(A - a)\big) = 0 \Big\}.$$

Определение 3. Касательным конусом Кларка ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ называется множество вида

$$T_{\mathrm{C}}(A; a) \doteq \Big\{ v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0,\ x \to a} \varrho\big(v,\, \lambda^{-1}(A - x)\big) = 0 \Big\},$$

где стремление $x \to a$ совершается по множеству A, т. е. $x \in A$.

Также нам потребуются ещё некоторые касательные конусы, определённые, например, в [4, 7].

Определение 4. Асимптотическим нижним касательным конусом ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ назовём множество

$$T_{\mathrm{AL}}(A; a) \doteq T_{\mathrm{L}}(A; a) \overset{*}{-} T_{\mathrm{L}}(A; a).$$

Аналогично через разность Минковского верхнего касательного конуса с самим собой можно определить асимптотический верхний касательный конус и другие касательные конусы (см., например, [7]). Однако в данной работе эти конусы будут совпадать с одним из указанных выше, поэтому мы их не приводим.

Напомним основные свойства указанных касательных конусов. Прежде всего отметим, что для выпуклых множеств все приведённые выше касательные конусы совпадают. Для случая невыпуклых множеств получаем следующее утверждение (см. [3, 7]).

Предложение 1. *Конусы $T_{\mathrm{C}}(A; a)$, $T_{\mathrm{AL}}(A; a)$ выпуклы и замкнуты, также справедливы включения*

$$T_{\mathrm{C}}(A; a) \subset T_{\mathrm{AL}}(A; a) \subset T_{\mathrm{L}}(A; a) \subset T_{\mathrm{U}}(A; a),$$

причём включения могут быть строгими.

Каждый касательный конус порождает свою производную многозначного отображения следующим образом (см. [4, 5, 7, 9, 10]).

Определение 5. M-производной, где $\mathrm{M} \in \{\mathrm{U}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{AL}, \ldots\}$, отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в точке замыкания его графика $z_0 \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq X \times Y$ называется отображение $D_{\mathrm{M}}F(z_0)\colon X \to \mathcal{F}(Y)$ вида

$$D_{\mathrm{M}}F(z_0)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u, v) \in T_{\mathrm{M}}(\operatorname{graph} F; z_0)\} \text{ для всех } u \in X.$$

Из предложения 1 легко следует следующее утверждение (см. [3, 7]).

Предложение 2. *Для* M-*производных отображения* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *в точке замыкания его графика* $z_0 \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq X \times Y$ *справедливы включения*

$$D_{\mathrm{C}}F(z_0)(u) \subset D_{\mathrm{AL}}F(z_0)(u) \subset D_{\mathrm{L}}F(z_0)(u) \subset D_{\mathrm{U}}F(z_0)(u),$$

причём включения могут быть строгими.

2. Понятия эпипроизводных и субдифференциалов невыпуклых функций

Для произвольной функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим её *эффективное множества*

$$\operatorname{dom} f \doteq \{x \in X \mid f(x) \neq \pm\infty\}$$

и *надграфик*

$$\operatorname{epi} f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x),\ x \in \operatorname{dom} f\}.$$

Опираясь на приведённое выше определение M-производной для многозначного отображения вида

$$F(x) \doteq \{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid \alpha \geqslant f(x)\},$$

где $x \in \operatorname{dom} f$, в любой точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$ получаем следующие определения эпипроизводных (см. [7]).

Определение 6. Пусть $\mathrm{M} \in \{\mathrm{U}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{AL}, \ldots\}$. Тогда M-*эпипроизводной произвольной функции* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ *в точке* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *по направлению* $u \in X$ *назовём*

$$D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u) \doteq \inf\Big\{\alpha \in \mathbb{R}^1 \;\Big|\; (u, \alpha) \in T_{\mathrm{M}}\Big(\operatorname{epi} f; \big(x_0, f(x_0)\big)\Big)\Big\}.$$

Предложение 3 [5,7]. *Для функции* $f\colon X \to \mathbb{R}^1$, *липшицевой в окрестности точки* x_0, *для любого* $u \in X$ *справедливы формулы*

$$D^+_{\mathrm{U}} f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}\big(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)\big), \tag{1}$$

$$D^+_{\mathrm{L}} f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}\big(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)\big), \tag{2}$$

$$D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda, x\colon \lambda\downarrow 0,\ x\to x_0} \lambda^{-1}\bigl(f(x+\lambda u) - f(x)\bigr), \tag{3}$$

$$D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(D^+_{\mathrm{L}} f(x_0)(u+w) - D^+_{\mathrm{L}} f(x_0)(w)\bigr). \tag{4}$$

Часто формулы (1)—(4) являются определениями соответствующих производных.

Кроме этого, также хорошо известна (см. [13]) ещё одна эпипроизводная П. Мишеля и Ж.-П. Пено.

Определение 7. MP-*эпипроизводной функции* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ *в точке* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *по направлению* $u \in X$ называется

$$D^+_{\mathrm{MP}} f(x_0)(u) \doteq \sup_{w\in X}\Bigl\{\limsup_{\lambda\downarrow 0}\Bigl(\lambda^{-1}\bigl(f(x_0+\lambda(u+w)) - f(x_0+\lambda w)\bigr)\Bigr)\Bigr\}. \tag{5}$$

Из предложения 3 и определения 7 легко получаем следующее утверждение (см. [5, 7]).

Предложение 4. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$+\infty \geqslant D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{\mathrm{MP}} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) \geqslant -\infty,$$

причём неравенства могут быть строгими.

Определение 8 [7]. M-субдифференциалом функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ (для любого $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$) называется следующее множество в сопряжённом с X пространстве X^*:

$$\partial^+_{\mathrm{M}} f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

Из предложения 4 и определения 8 очевидно вытекает следующее утверждение (см. [5, 7]).

Следствие 1. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$\partial^+_{\mathrm{C}} f(x_0) \supset \partial^+_{\mathrm{MP}} f(x_0) \supset \partial^+_{\mathrm{AL}} f(x_0),$$

причём включения могут быть строгими.

Предложение 5 [5]. *Пусть функция* $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ *липшицева в окрестности* $B_r(x_0)$ *с константой Липшица* $l > 0$. *Тогда для любого* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ *функция* $u \to D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u)$ *является положительно однородной, выпуклой, конечной при всех* $u \in X$ *и удовлетворяющей условию Липшица на пространстве* X *с той же константой* $l > 0$.

Как обычно, классическую производную функции f в точке x_0 по направлению $u \in X$ определяем из выражения

$$f'(x_0, u) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}\bigl(f(x_0+\lambda u) - f(x_0)\bigr).$$

Для выпуклой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ субдифференциалом (в смысле выпуклого анализа) в точке x_0 называется множество

$$\partial f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid f(x) - f(x_0) \geqslant \langle p, x - x_0\rangle \text{ для всех } x \in X\}.$$

Заметим, что если функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ выпуклая и липшицева, то её надграфик является выпуклым замкнутым множеством, а все приведённые выше касательные к надграфику конусы выпуклы и совпадают между собой. Поэтому субдифференциал Кларка этой функции в точке x_0 совпадает с субдифференциалом этой функции в смысле выпуклого анализа, а её эпипроизводная Кларка $D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(\cdot)$ совпадает с классической производной по направлениям $f'(x_0,\cdot)$ (см., например, [12]).

3. Класс функций, представимых в виде разности двух выпуклых функций

Лемма 1. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ локально липшицева в окрестности точки $x_0 \in \operatorname{dom} f$ и существуют конечные классические производные в этой точке по всем направлениям, т. е.*

$$f'(x_0,u) = D^+_{\mathrm{L}} f(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{U}} f(x_0)(u) \text{ для всех } u \in X.$$

Тогда эпипроизводные $D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u)$ при $\mathrm{M} \in \{\mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ совпадают между собой при каждом $u \in X$ и для них справедлива формула

$$D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0,u+w) - f'(x_0,w)\bigr). \tag{6}$$

Доказательство. Из предложения 3 и условий леммы получаем равенство

$$D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0,u+w) - f'(x_0,w)\bigr) \text{ для всех } u \in X.$$

По свойствам предела имеем

$$\begin{aligned}
&f'(x_0,u+w) - f'(x_0,w) = \\
&\quad= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\bigl(f\bigl(x_0+\lambda(u+w)\bigr) - f(x_0)\bigr) - \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\bigl(f(x_0+\lambda w) - f(x_0)\bigr) = \\
&\quad= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\bigl(f\bigl(x_0+\lambda(u+w)\bigr) - f(x_0+\lambda w)\bigr).
\end{aligned}$$

Вычисляя точную верхнюю грань в последнем равенстве по $w \in X$, по определению MP-эпипроизводной (5) получаем равенство

$$D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{MP}} f(x_0)(u). \qquad \square$$

Теорема 1. *Пусть для функции $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ существуют липшицевы выпуклые функции $f_1, f_2\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, такие что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ при $x \in B_r(x_0)$, причём для некоторого $u \in X$ одна из функций f_k, $k \in \overline{1,2}$, удовлетворяет равенству $f'_k(x_0,u) + f'_k(x_0,-u) = 0$ (например, эта функция дифференцируема в точке x_0 по Гато). Тогда при этом $u \in X$ эпипроизводные $D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u)$ при всех $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ совпадают между собой и справедлива формула*

$$D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u) = f'_1(x_0,u) + f'_2(x_0,-u). \tag{7}$$

Доказательство. Из свойств выпуклых функций следует, что у функций f_1, f_2 существуют конечные классические производные по направлениям и справедливы равенства $f'(x_0,u) = f_1'(x_0,u) - f_2'(x_0,u)$ при всех $u \in X$. По лемме 1 для любого $\mathrm{M} \in \{\mathrm{AL}, \mathrm{MP}\}$ справедлива формула

$$D^+_{\mathrm{M}} f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\big(f_1'(x_0,u+w) - f_2'(x_0,u+w) - f_1'(x_0,w) + f_2'(x_0,w)\big).$$

Ввиду выпуклости и положительной однородности функций $f_k'(x_0,\cdot)$, $k \in \overline{1,2}$, получаем два неравенства

$$f_1'(x_0,u+w) \leqslant f_1'(x_0,u)+f_1'(x_0,w), \quad f_2'(x_0,w) \leqslant f_2'(x_0,u+w)+f_2'(x_0,-u), \tag{8}$$

из которых следует, что

$$D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) \leqslant f_1'(x_0,u) + f_2'(x_0,-u).$$

Чтобы показать, что последнее неравенство является равенством, достаточно, чтобы при некотором w два неравенства (8) превратились в равенства. При выполнении условия $f_1'(x_0,u) + f_1'(x_0,-u) = 0$ для этого нужно взять $w = -u$, а при выполнении условия $f_2'(x_0,u) + f_2'(x_0,-u) = 0$ достаточно взять $w = 0$.

Покажем, что в этом случае эпипроизводные Кларка и Мишеля—Пено совпадают. По определению эпипроизводной Кларка получаем

$$\begin{aligned} D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) &= \limsup_{\lambda\downarrow 0,\ x\to x_0} \Big(\lambda^{-1}\big(f_1(x+\lambda u) - f_1(x) - f_2(x+\lambda u) + f_2(x)\big)\Big) \leqslant \\ &\leqslant \limsup_{\lambda\downarrow 0,\ x\to x_0} \Big(\lambda^{-1}\big(f_1(x+\lambda u) - f_1(x)\big)\Big) + \limsup_{\lambda\downarrow 0,\ x\to x_0} \Big(\lambda^{-1}\big(f_2(x) - f_2(x+\lambda u)\big)\Big). \end{aligned}$$

По свойству эпипроизводной Кларка для выпуклой липшицевой функции справедливо равенство $D^+_{\mathrm{C}} f_1(x_0)(u) = f_1'(x_0,u)$. Аналогично, делая замену $y = x + \lambda u$, получаем

$$\begin{aligned} &\limsup_{\lambda\downarrow 0,\ x\to x_0} \lambda^{-1}\big(f_2(x) - f_2(x+\lambda u)\big) = \\ &\quad = \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\|x-x_0\|<\delta} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \lambda^{-1}\big(f_2(x) - f_2(x+\lambda u)\big) = \\ &\quad = \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\|y-x_0\|<\delta(1+\|u\|)} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \lambda^{-1}\big(f_2(y-\lambda u) - f_2(y)\big) = \\ &\quad = D^+_{\mathrm{C}} f_2(x_0)(-u) = f_2'(x_0,-u). \end{aligned}$$

В результате получили неравенство

$$D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) \leqslant f_1'(x_0,u) + f_2'(x_0,-u) = D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u),$$

которое вместе с обратным неравенством, справедливым всегда (см. предложение 4), даёт требуемое равенство. □

Приведём ещё один критерий совпадения всех эпипроизводных у функции, представимой в виде разности двух выпуклых функций.

Напомним, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ называется *положительно однородной*, если для любого $x \in X$ и любого числа $\lambda \geqslant 0$ справедливо равенство $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Очевидно, что такая функция имеет классическую производную по направлениям в точке нуль и справедливо равенство

$$f'(0,u) = f(u) \text{ для всех } u \in X. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть задана положительно однородная липшицева (быть может, невыпуклая) функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$. Тогда при всех $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ эпипроизводные $D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u)$ равны между собой, при этом справедлива формула*

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f(u+w) - f(w)\bigr) \text{ для всех } u \in X. \tag{10}$$

Доказательство. По определению производной Кларка из положительной однородности f и равенств (3), (9) и (6) выводим, что

$$\begin{aligned} D^+_{\mathrm{C}} f(0)(u) &= \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\lambda\in(0,\delta)}\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\lambda^{-1}\bigl(f(x+\lambda u) - f(x)\bigr) = \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\lambda\in(0,\delta)}\sup_{\|w\|\leqslant\delta/\lambda}\bigl(f(u+w) - f(w)\bigr) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{w\in X}\bigl(f(u+w) - f(w)\bigr) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(0,u+w) - f'(0,w)\bigr) = D^+_{\mathrm{AL}} f(0)(u). \end{aligned}$$

Так как справедливо и противоположное неравенство (см. предложение 4), получаем равенство (10). □

Следствие 2. *Пусть заданы две выпуклые ограниченные функции $f_k\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, $k \in \overline{1,2}$. Определим функцию $f(x) \doteq f_1(x) - f_2(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ и функции $g_k(x) \doteq f_k(x_0) + f'_k(x_0, x - x_0)$ и $g(x) \doteq g_1(x) - g_2(x)$ при $x \in X$. Тогда справедливо равенство всех M-эпипроизводных функции g в точке x_0 при $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$, причём*

$$D^+_{\mathrm{M}} g(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\,(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)) \text{ для всех } u \in X.$$

Доказательство очевидно ввиду теоремы 2, положительной однородности функции

$$h(x) \doteq g(x_0 + x) - f_1(x_0) + f_2(x_0)$$

и равенства

$$g'(x_0, u) = f'(x_0, u) = h(u)$$

при любом $u \in X$. □

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ формулы (6) и (10) можно упростить, что позволит нам решать различные примеры нахождения эпипроизводных разности выпуклых функций.

Напомним, что для всякой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющей условию Липшица, по теореме Радемахера (см. [2, гл. XI, § 4]) существует измеримое всюду плотное множество $B_f \subset \mathbb{R}^n$, на котором функция f дифференцируема.

Кроме того, как следствие из теоремы Ф. Кларка о представлении субдифференциала Кларка в виде выпуклой оболочки предельных точек градиентов (см. [12, теорема 2.5.1, следствие]) справедливо равенство

$$D^+_{\mathrm{C}} f(x)(u) = \limsup_{y\to x,\ y\in B_f} \langle f'(y), u\rangle \text{ для всех } x, u \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Опираясь на это равенство, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — положительно однородная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Пусть $B_f \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое всюду плотное множество, на котором функция f дифференцируема. Тогда для любого индекса $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ справедлива формула*

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = \sup_{z\in B_f} \langle f'(z), u\rangle \textit{ для всех } u \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Доказательство. Ввиду положительной однородности функции f для любого $y \in B_f$ и любого $\lambda > 0$ имеем, что $\lambda y \in B_f$, так как справедливо равенство $f'(y) = f'(\lambda y)$. Значит, $\overline{B_f \cap \partial B_1(0)} = \partial B_1(0)$, откуда ввиду теоремы 2 и равенств (11) и (10) получаем, что

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = D^+_{\mathrm{C}} f(0)(u) = \limsup_{y\to 0,\ y\in B_f} \left\langle f'\left(\frac{y}{\|y\|}\right), u\right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{z\in\partial B_1(0)\cap B_f} \langle f'(z), u\rangle = \sup_{z\in B_f} \langle f'(z), u\rangle.$$

Для доказательства обратного неравенства обозначим $\alpha \doteq \sup\limits_{z\in B_f} \langle f'(z), u\rangle$. Очевидно, что $\alpha \leqslant L\|u\|$ (где L — константа Липшица функции f) и по определению точной верхней грани существует последовательность $\{x_k\} \subset \partial B_1(0) \cap B_f$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f'(x_k), u\rangle = \alpha$. Тогда для последовательности $y_k \doteq x_k/k$, сходящейся к нулю, имеем $\lim\limits_{y_k\to 0} \langle f'(y_k), u\rangle = \alpha$, т. е.

$$D^+_{\mathrm{C}} f(0)(u) = \limsup_{y\to 0,\ y\in B_f} \langle f'(y), u\rangle \geqslant \alpha. \qquad \square$$

4. Слабо регулярные функции

Продолжим исследования эпипроизводных по направлениям и субдифференциалов функций, заданных на банаховом пространстве X. Для произвольной непрерывной функции $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, имеющей конечные производные по направлениям в точке $x_0 \in X$, определим функции g и φ по формулам

$$g(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) \doteq f(x) - g(x), \tag{13}$$

т. е. функция f в окрестности $B_r(x_0)$ точки x_0 представлена в виде суммы её квазилинейной части g и остатка φ. Очевидно, что функции g и φ в точке x_0

имеют классические производные по направлениям, причём

$$g'(x_0, u) = f'(x_0, u), \quad \varphi'(x_0, u) = 0 \text{ для всех } u \in X.$$

Тогда по предложению 4, лемме 1 и теореме 2 для любого $u \in X$ справедливы неравенства

$$D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{AL}} g(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{C}} g(x_0)(u) \geqslant f'(x_0, u),$$
$$D^+_{\mathrm{MP}} \varphi(x_0)(u) = 0,$$

которые, в частности, влекут неравенство $0 \leqslant D^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)(u)$ при всех $u \in X$, что равносильно включению $0 \in \partial^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)$.

Определение 9. Пусть X — банахово пространство. Непрерывная функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ называется *слабо регулярной в точке* $x_0 \in X$, если она в точке x_0 имеет конечные производные по всем направлениям, соответствующая функция φ из (13) липшицева в некоторой окрестности точки x_0 и справедливо равенство $\partial^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0) = \{0\}$, т. е. $D^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)(u) = 0$ при всех $u \in X$.

Приведём примеры классов слабо регулярных функций.

Всякая положительно однородная липшицева функция является слабо регулярной в точке $0 \in X$, так как у неё $\varphi(u) = 0$.

Функция, имеющая конечные производные по всем направлениям в точке x_0, у которой соответствующая функция φ из (13) выпукла и ограниченна в некоторой окрестности точки x_0, является слабо регулярной.

Выпуклая функция f слабо регулярна в точке x_0, если справедливы равенства

$$f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0$$

при всех $u \in X$, так как в этом случае имеем оценки

$$0 \leqslant D^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)(u) \leqslant D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}(-g)(x_0)(u) =$$
$$= f'(x_0, u) + g'(x_0, -u) = f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0.$$

В частности, всякая выпуклая функция f, дифференцируемая по Гато в точке x_0, является слабо регулярной в этой точке.

В то же время невыпуклая дифференцируемая функция может не быть слабо регулярной. Например, функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ вида $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ дифференцируема, но не является слабо регулярной в нуле. Здесь $f'(0, u) = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ и $D^+_{\mathrm{C}} \varphi(0)(u) = |u|$ при всех $u \in \mathbb{R}^1$.

Чтобы невыпуклая функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ была слабо регулярной в точке x_0, достаточно, чтобы она была строго дифференцируемой в точке $x_0 \in X$. Покажем это. Из строгой дифференцируемости функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ в точке x_0 следует, что f липшицева в некоторой окрестности точки x_0 и существует $\zeta \in X^*$, такая что $D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) = \langle \zeta, u \rangle$ для всех $u \in X$ (см. [12, предложение 2.2.1]). Из последнего равенства следует, что соответствующая функция φ из (13) липшицева в некоторой окрестности точки x_0 (как разность липшицевых функций) и $D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(u) = 0$ для всех $u \in X$. В самом деле, так как f строго дифференцируема, то в силу следствия 1 к предложению 2.3.3 из [12] справедливо равенство

$$D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{C}}f(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}(-g)(x_0)(u) = \langle\zeta, u\rangle + \langle-\zeta, u\rangle = 0.$$

Далее в примере 3 мы покажем, что не всякая липшицева функция, регулярная по Кларку в заданной точке, является слабо регулярной в этой точке.

Обобщением теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ представима в виде разности двух выпуклых слабо регулярных в точке x_0 функций f_1 и f_2, т. е. $f = f_1 - f_2$. Тогда равны все эпипроизводные, т. е. для любого $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$*

$$D^+_{\mathrm{M}}f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)\bigr) \text{ для всех } u \in X,$$

что равносильно равенству всех субдифференциалов

$$\partial^+_{\mathrm{C}}f(x_0) = \ldots = \partial^+_{\mathrm{AL}}f(x_0).$$

Доказательство. Для каждой функции f_k определим функции g_k и φ_k по формулам (13). Определим также функции $g \doteq g_1 - g_2$ и $\varphi \doteq \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда справедливо равенство $f = g + \varphi$, причём $f'(x_0, u) = g'(x_0, u)$ и $\varphi'(x_0, u) = 0$ при любом $u \in X$. По следствию 2 при любом $u \in X$ справедливы выражения

$$D^+_{\mathrm{AL}}g(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{AL}}f(x_0)(u), \quad D^+_{\mathrm{AL}}\varphi(x_0)(u) = 0 \leqslant D^+_{C}\varphi(x_0)(u).$$

По свойствам производной Кларка для функции $\varphi = \varphi_1 + (-\varphi_2)$ ввиду слабой регулярности функций f_1 и f_2 получаем

$$\begin{aligned} D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(u) \leqslant D^+_{\mathrm{C}}\varphi_1(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}(-\varphi_2)(x_0)(u) = \\ = D^+_{\mathrm{C}}\varphi_1(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}\varphi_2(x_0)(-u) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $D^+_{C}\varphi(x_0)(u) = 0$ при всех $u \in X$. Отсюда ввиду свойства производной Кларка для суммы функций получаем

$$\begin{aligned} D^+_{\mathrm{C}}f(x_0)(u) \leqslant D^+_{\mathrm{C}}g(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(u) = \\ = D^+_{\mathrm{AL}}g(x_0)(u) + 0 = D^+_{\mathrm{AL}}f(x_0)(u) \leqslant D^+_{\mathrm{C}}f(x_0)(u), \end{aligned}$$

что вместе с леммой 1, применённой к функции f, завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что теорема 4 является следствием следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ слабо регулярна в точке x_0. Тогда равны все эпипроизводные, т. е. для любого $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$*

$$D^+_{\mathrm{M}}f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)\bigr) \text{ для всех } u \in X,$$

что равносильно равенству всех субдифференциалов

$$\partial^+_{\mathrm{C}}f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{MP}}f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{AL}}f(x_0).$$

Доказательство. Пусть для функции $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ по определению 9 заданы функции g и φ по формулам (13). По предложению 2.2.4 из [12] функция φ строго дифференцируема в точке x_0. Поэтому по следствию 1 к предложению 2.3.3 из [12] справедливо равенство

$$D^+_{\mathrm{C}}f(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{C}}g(x_0)(u) + D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{C}}g(x_0)(u) \text{ для всех } u \in X.$$

По теореме 2 справедливо равенство

$$D^+_{\mathrm{C}}g(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{AL}}g(x_0)(u).$$

В свою очередь, так как $g'(x_0, u) = f'(x_0, u)$, то

$$D^+_{\mathrm{M}}g(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{M}}f(x_0)(u)$$

при любом $\mathrm{M} \in \{\mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$, откуда в итоге следует необходимое равенство. □

5. Примеры вычисления субдифференциалов

Пример 1. Пусть задана функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ вида

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2},$$

где числа a, b такие, что $0 < a \leqslant 1$, $b \geqslant 1$, $a \neq b$. Нужно найти эпипроизводные по направлениям и субдифференциалы функции f в точке 0.

Эта функция положительно однородна и не выпукла. Для вычисления эпипроизводных по направлениям воспользуемся формулой (12), для чего вычислим

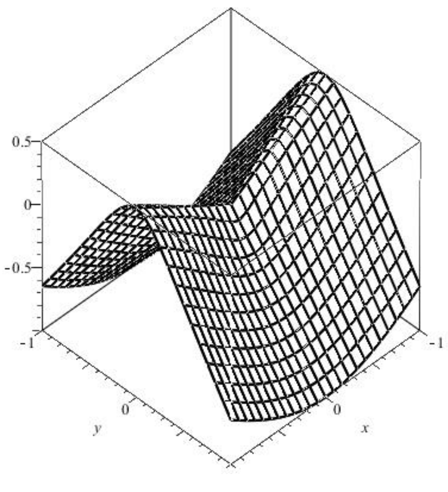

Рис. 1. График функции $f(x)$ в примере 1

градиент $f'(x)$ функции f в произвольной точке $x \neq 0$. Получаем, что $f'(x) = \big(f'_1(x), f'_2(x)\big)$, где

$$f'_1(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{a^2 x_1}{\sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2}},$$
$$f'_2(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{b^2 x_2}{\sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2}}.$$

Ввиду положительной однородности функций $f'_k(x_1, x_2)$ из формулы (12) получаем, что

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = \sup_{z \in \mathbb{R}^1_+} (\varphi_1(z)|u_1| + \varphi_2(z)|u_2|),$$

где $\varphi_k(z) \doteq |f'_k(1, \sqrt{z})|$ и $z \doteq (x_2/x_1)^2$. Для вычисления точной верхней грани найдём экстремальные точки функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Равенство

$$\varphi'_1(z) = -\frac{1}{(\sqrt{1+z})^3} + \frac{a^2 b^2}{(\sqrt{a^2 + b^2 z})^3} = 0$$

справедливо в единственной точке

$$z_0 = \frac{(ab)^{4/3} - a^2}{b^2 - (ab)^{4/3}}.$$

Аналогично получаем, что равенство $\varphi'_2(z) = 0$ справедливо в той же точке z_0. В итоге получаем, что

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = \varphi_1(z_0)|u_1| + \varphi_2(z_0)|u_2|,$$

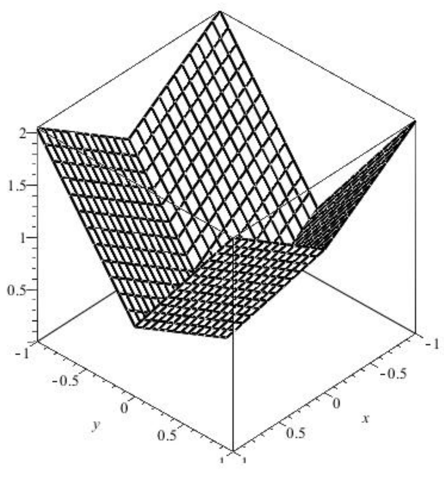

Рис. 2. График производной $D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u)$ в примере 1

т. е.

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = c|u_1| + d|u_2|,$$

где

$$c = \frac{(b^{2/3} - a^{4/3})^{3/2}}{(b^2 - a^2)^{1/2}}, \quad d = \frac{(b^{4/3} - a^{2/3})^{3/2}}{(b^2 - a^2)^{1/2}}.$$

Отсюда по определению субдифференциалов получаем, что M-субдифференциал нашей функции в нуле является четырёхугольником вида

$$\partial^+_{\mathrm{M}} f(0) = \mathrm{co}\{(c,d); (-c,d); (c,-d); (-c,-d)\}$$

для любого $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$.

Пример 2. Пусть задана функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ вида

$$f(x_1, x_2) = 6 \cdot \max\{|x_1|; |x_2|\} - 5 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Нужно найти эпипроизводные и субдифференциалы функции f в точке 0.

Эта функция также положительно однородна и не выпукла. Для вычисления эпипроизводных по направлениям воспользуемся формулой (12). Для этого вычислим градиент функции f в точках, где он существует, т. е. при $x \doteq (x_1, x_2) \neq 0$, $|x_1| \neq |x_2|$.

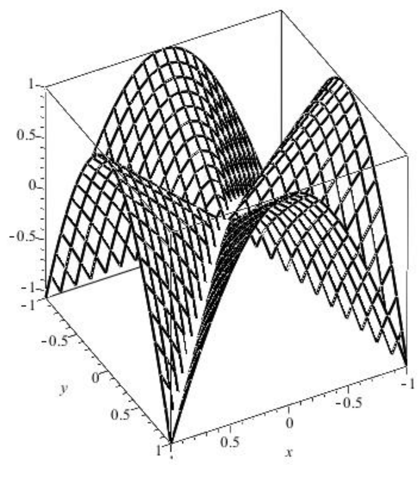

Рис. 3. График функции $f(x)$ в примере 2

Получаем

$$f'(x_1,x_2) = \left(6\ \mathrm{sign}\{x_1\} - \frac{5x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}; \frac{-5x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \quad \text{при} \quad |x_1| > |x_2|,$$

$$f'(x_1,x_2) = \left(\frac{-5x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}; 6\ \mathrm{sign}\{x_2\} - \frac{5x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \quad \text{при} \quad |x_1| < |x_2|.$$

Обозначим $z \doteq |x_2|/|x_1|$. По (12) ввиду чётности функции f при каждом фиксированном $u \neq 0$ получаем, что

$$D_{\mathrm{M}}^{+} f(0)(u) = \max\left(\sup_{0<z<1} h_1(z); \sup_{1<z<+\infty} h_2(z)\right), \tag{14}$$

где

$$h_1(z) \doteq \left(6 - \frac{5}{\sqrt{1+z^2}}\right)|u_1| + \frac{5z}{\sqrt{1+z^2}}|u_2| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

$$h_2(z) \doteq \frac{5}{\sqrt{1+z^2}}|u_1| + \left(6 - \frac{5z}{\sqrt{1+z^2}}\right)|u_2| \quad \text{при} \quad z \geqslant 1.$$

Очевидной проверкой убеждаемся, что $h_1'(z) > 0$ и $h_2'(z) < 0$ при всех допустимых z, откуда получаем, что

$$\sup_{0<z<1} h_1(z) = h_1(1) = \left(6 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)|u_1| + \frac{5}{\sqrt{2}}|u_2|,$$

$$\sup_{z>1} h_2(z) = h_2(1) = \frac{5}{\sqrt{2}}|u_1| + \left(6 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)|u_2|.$$

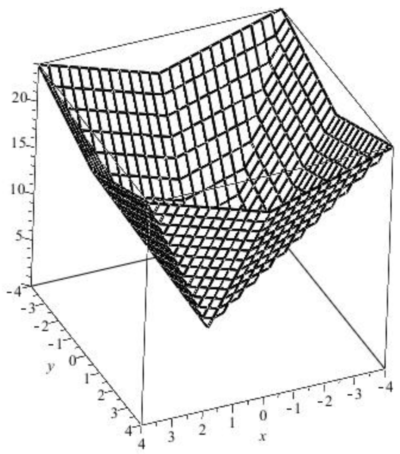

Рис. 4. График производной $D_{\mathrm{M}}^{+} f(0)(u)$ в примере 2

Определим числа

$$a \doteq 6 - \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad b \doteq \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Так как $h_1(1) \geqslant h_2(1)$ тогда и только тогда, когда $|u_1| \leqslant |u_2|$, то из последних формул по (14) получаем, что

$$D^+_{\mathrm{M}} f(0)(u) = a \cdot \min(|u_1|; |u_2|) + b \cdot \max(|u_1|; |u_2|).$$

Отсюда по определению субдифференциалов получаем, что субдифференциал нашей функции в нуле при любом $\mathrm{M} \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$ является восьмиугольником вида

$$\partial^+_{\mathrm{M}} f(0) = \mathrm{co}\{(a,b),(a,-b),(-a,b),(-a,-b),(b,a),(b,-a),(-b,a),(-b,-a)\}.$$

Рассмотрим пример, построенный Г. М. Ивановым, который показывает, что уже в случае двумерного пространства $X = \mathbb{R}^2$ существуют выпуклые ограниченные функции, не являющиеся слабо регулярными в некоторых точках.

Пример 3. На полосе

$$P \doteq \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leqslant 1\}$$

определим функцию $f\colon P \to \mathbb{R}^1$ вида

$$f(x_1, x_2) \doteq \max\left\{|x_1| - \sqrt{1 - x_2^2}; 0\right\},$$

которая очевидно выпукла как максимум двух выпуклых функций.

Пусть $x_0 \doteq (1,0)$. Рассмотрим функцию $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^1$, определённую по формуле (13), т. е.

$$\varphi(x) \doteq f(x) - f(x_0) - f'(x_0, x - x_0).$$

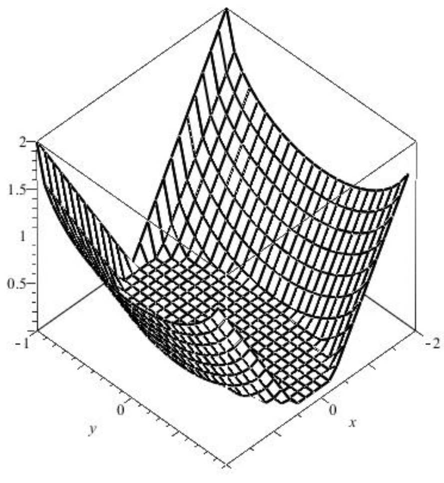

Рис. 5. График функции $f(x)$ в примере 3

Пусть $v \doteq (1,0)$. По построению $\varphi'(x_0, v) = 0$, т. е. $D^+_{\mathrm{MP}}\varphi(x_0)(v) = 0$. Покажем, что эпипроизводная Кларка данной функции φ в точке x_0 по направлению v не равна нулю. Отсюда будет следовать, что рассматриваемая функция f не является слабо регулярной в данной точке x_0. Вычисляя эпипроизводную Кларка, получаем

$$D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(v) = \limsup_{y \to x_0,\ t \to 0} \left(\frac{\varphi(y+tv) - \varphi(y)}{t} \right) =$$
$$= \limsup_{y \to x_0,\ t \to 0} \left(\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} - \frac{f'(x_0, y+tv-x_0) - f'(x_0, y-x_0)}{t} \right). \quad (15)$$

Заметим, что $f(x) = 0$ при любом $x \in B_1(0)$. Поэтому $f'(x_0, u - x_0) = 0$ для всех u, таких что $\langle x_0, u - x_0 \rangle < 0$. Определим последовательность точек $\{y_k\}$ вида

$$y_k \doteq \left(1 - \frac{1}{2k^2}, \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^2} \right).$$

Очевидно, что $\|y_k\| = 1$ и $\|y_k - x_0\| = 1/k$ при любых $k \in \mathbb{N}$. Также очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t_k \doteq 1/(4k^2)$ справедливо неравенство $\langle x_0, y_k + t_k v - x_0 \rangle < 0$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем равенства

$$f'(x_0, y_k + t_k v - x_0) = 0, \quad f'(x_0, y_k - x_0) = 0, \quad \frac{f(y_k + t_k v) - f(y_k)}{t_k} = 1.$$

Отсюда и из формулы (15) получаем неравенство

$$D^+_{\mathrm{C}}\varphi(x_0)(v) \geqslant \lim_{k \to \infty} \frac{\varphi(y_k + t_k v) - \varphi(y_k)}{t_k} = 1 > D^+_{\mathrm{MP}}\varphi(x_0)(v) = 0.$$

Это и доказывает, что функция f не является слабо регулярной в точке $x_0 = (1,0)$.

Легко проверить, что эта функция f не является слабо регулярной в любой точке единичной окружности $\partial B_1(0)$, если исключить точки $(0,1)$ и $(0,-1)$.

Замечание 1. Пример 3 показывает, что условие слабой регулярности в теореме 4 существенно. Чтобы в этом убедиться, достаточно по построенной в примере 3 функции f рассмотреть выпуклые функции $f_1 \doteq f$ и $f_2(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0)$. Тогда для функции $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$, являющейся разностью двух выпуклых функций, одна из которых не является слабо регулярной, её эпипроизводная (субдифференциал) Кларка в точке x_0 не совпадает с эпипроизводной (субдифференциалом) Мишеля—Пено в этой точке.

Литература

[1] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.

[2] Макаров Б. М., Подкорытов А. Н. Лекции по вещественному анализу. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

[3] Половинкин Е. С. Теория многозначных отображений. — М.: Изд-во МФТИ, 1983.

[4] Половинкин Е. С. О необходимых условиях оптимальности решений дифференциальных включений на отрезке // Современная математика в физико-технических задачах. — М.: Изд-во МФТИ, 1986. — С. 87—94.

[5] Половинкин Е. С. О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 141—154.

[6] Половинкин Е. С. Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. МИАН. — 2013. — Т. 283. — С. 121—141.

[7] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2007.

[8] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.

[9] Aubin J.-P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Advances in Mathematics. Supplementary Studies. — Academic Press, 1981. — P. 160—232.

[10] Aubin J.-P., Frankovska H. Set-Valued Analysis. — Basel: Birkhäuser, 1990.

[11] Clarke F. H. Generalized gradients and applications // J. Trans. Am. Math. Soc. — 1975. — Vol. 205. — P. 247—262.

[12] Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis. — New York: Wiley—Interscience, 1983.

[13] Michel P., Penot J.-P. Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et nonlipschitziennes // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. — 1984. — Vol. 298. — P. 269—272.