

# О наилучшем линейном приближении голоморфных функций

**Ю. А. ФАРКОВ**

*Российский государственный  
геологоразведочный университет,  
Российская академия народного хозяйства  
и государственной службы при Президенте РФ  
e-mail: farkov@list.ru*

УДК 517.538.5+517.551

**Ключевые слова:** поперечники,  $\varepsilon$ -энтропия, линейные аппроксимации, пространства Харди, классы Харди—Соболева, многочлены Фабера, дробные производные, численный анализ.

## Аннотация

Пусть  $\Omega$  — открытое множество на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , и пусть  $E$  — компактное подмножество в  $\Omega$ . Приведён обзор результатов о линейных  $n$ -поперечниках класса  $H^\infty(\Omega)$  в пространстве  $C(E)$  и о наилучших линейных приближениях классов типа Харди—Соболева в  $L^p$ -пространствах. Как известно, частичные суммы ряда Фабера являются классическим средством приближения функции  $f \in H^\infty(\Omega)$  в метрике  $C(E)$ , когда  $E$  — ограниченный континуум с односвязным дополнением и  $\Omega$  — каноническая окрестность этого континуума. Определяются обобщения рядов Фабера для случая, когда  $\Omega$  является многосвязной областью или дизъюнктивным объединением нескольких таких областей, а множество  $E$  разбивается на конечное число континуумов. Приводятся точные значения  $n$ -поперечников и асимптотические формулы для  $\varepsilon$ -энтропии классов голоморфных в трубчатых областях функций, имеющих ограниченные дробные производные. Кроме того, обсуждаются некоторые результаты об аппроксимациях Фабера в связи с их применениями в численном анализе.

## Abstract

*Yu. A. Farkov, On the best linear approximation of holomorphic functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 185—212.*

Let  $\Omega$  be an open subset of the complex plane  $\mathbb{C}$  and let  $E$  be a compact subset of  $\Omega$ . The present survey is concerned with linear  $n$ -widths for the class  $H^\infty(\Omega)$  in the space  $C(E)$  and some problems on the best linear approximation of classes of Hardy—Sobolev-type in  $L^p$ -spaces. It is known that the partial sums of the Faber series give the classical method for approximation of functions  $f \in H^\infty(\Omega)$  in the metric of  $C(E)$  when  $E$  is a bounded continuum with simply connected complement and  $\Omega$  is a canonical neighborhood of  $E$ . Generalizations of the Faber series are defined for the case where  $\Omega$  is a multiply connected domain or a disjoint union of several such domains, while  $E$  can be split into a finite number of continua. The exact values of  $n$ -widths and asymptotic formulas for the  $\varepsilon$ -entropy of classes of holomorphic functions with bounded fractional derivatives in domains of tube type are presented. Also, some results about Faber's approximations in connection with their applications in numerical analysis are mentioned.

## Введение

Пусть  $\Omega$  — открытое множество на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , и пусть  $E$  — компактное подмножество в  $\Omega$ . Пространство  $H^\infty(\Omega)$  состоит из всех функций  $f$ , аналитических в  $\Omega$  и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{H^\infty(\Omega)} := \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}.$$

В настоящей статье дан обзор результатов о наилучших линейных методах приближения класса  $H^\infty(\Omega)$  в пространстве  $C(E)$  и о поперечниках классов типа Харди—Соболева. Хорошо известно, что если  $E$  — ограниченный континуум с односвязным дополнением и  $\Omega$  — односвязная область, ограниченная линией уровня континуума  $E$ , то классическим средством приближения функции  $f \in H^\infty(\Omega)$  в метрике  $C(E)$  являются частичные суммы ряда Фабера для  $f$ . В связи с задачами о линейных  $n$ -поперечниках определяются обобщения рядов Фабера для случая, когда  $\Omega$  является многосвязной областью или дизъюнктивным объединением нескольких таких областей, а множество  $E$  разбивается на конечное число континуумов. Отмечаются некоторые применения многочленов Фабера в численном анализе.

Напомним, что линейный  $n$ -поперечник множества  $A$  нормированного пространства  $X$  определяется равенством

$$\lambda_n(A, X) := \inf_{\Lambda_n} \sup_{f \in A} \|f - \Lambda_n f\|,$$

где нижняя грань берётся по всем линейным ограниченным операторам  $\Lambda_n$  ранга  $n$ , отображающих  $X$  в себя. Для данного подпространства  $L$  в  $X$  *уклоном* множества  $A$  от  $L$  называют величину

$$d(A, L, X) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in L} \|x - y\|,$$

а  $n$ -поперечник по Колмогорову множества  $A$  в  $X$  определяется по формуле

$$d_n(A, X) := \inf_{L_n} d(A, L_n, X),$$

где  $L_n$  — произвольные подпространства из  $X$  размерности  $n$ . Из определений видно, что  $d_n(A, X) \leq \lambda_n(A, X)$ .

Для предкомпактного множества  $A$  через  $N_\varepsilon(A; X)$  обозначают минимальное число точек в  $\varepsilon$ -сети для  $A$  в  $X$ . Величина

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A, X) := \log_2 N_\varepsilon(A, X)$$

называется  $\varepsilon$ -энтропией множества  $A$  относительно  $X$  (см., например, [21]). Анализ оптимальности некоторых вычислительных алгоритмов с использованием методов теории поперечников и  $\varepsilon$ -энтропии проведён в [1, гл. 4, 5] (см. также [3]).

В дальнейшем через  $BH^\infty(\Omega)$  обозначается замкнутый единичный шар пространства  $H^\infty(\Omega)$ , а через  $\text{cap}(E, \Omega)$  ёмкость Грина множества  $E$  относительно  $\Omega$ . Через  $U_R$  обозначается круг радиуса  $R$  с границей  $T_R$ , а через  $U$  —

единичный круг с границей  $T$ . Отметим, что если  $E = \bar{U}$  и  $\Omega = U_R$ , то  $\text{cap}(E, U_R) = 1/\log R$ . Если  $\Omega$  — односвязная область Жордана и  $\omega: \Omega \rightarrow U_R$  — отображение Римана, то

$$d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) = d_n(BH^\infty(U_R), C(\omega(E)))$$

для любого компакта  $E \subset \Omega$ .

Произведение Бляшке порядка  $m$  для круга  $U_R$  имеет вид

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^m \frac{z - z_j}{R - R^{-1}\bar{z}_j z}, \quad z_j \in U_R, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

а множество всех таких произведений порядка  $m \leq n$  обозначается  $\mathcal{B}_n(U_R)$ . Для данного компактного множества  $E$  из  $U_R$  и (нетривиальной) положительной меры  $\mu$  на  $E$  положим

$$\beta_n(U_R, L^q(\mu)) := \inf \{ \|B\|_{L^q(\mu)} : B \in \mathcal{B}_n(U_R) \}.$$

В случае  $q = \infty$  пространство  $L^q(\mu)$  заменяется пространством  $C(E)$ . В [46] доказано, что

$$\lambda_n(BH^\infty(U_R), L^q(\mu)) = d_n(BH^\infty(U_R), L^q(\mu)) = \beta_n(U_R, L^q(\mu))$$

для всех  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $R > 0$ . В случае когда  $R > 1$  и  $E = \bar{U}$ , экстремальным произведением для  $\beta_n(U_R, C(E))$  является  $B(z) = (z/R)^n$ . Поэтому

$$\lambda_n(BH^\infty(U_R), C(\bar{U})) = R^{-n},$$

причём оптимальный метод приближения имеет вид

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \left( 1 - \left( \frac{|z|}{R} \right)^{2(n-k)} \right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k. \quad (1)$$

Этот метод приближения был найден К. Ю. Осипенко [13] при решении задачи оптимального восстановления функции  $f \in BH^\infty(U_R)$  по тейлоровской информации  $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ .

Пусть  $d\sigma(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi$  — нормализованная мера Лебега на единичной окружности  $T$ . Для случая когда мера  $\mu$  радиально-симметрична, т. е.  $d\mu(re^{i\theta}) = dm(r) d\sigma(e^{i\theta})$ , где  $m$  — положительная борелевская мера на  $[0, \rho]$ ,  $0 < \rho < R$ , известно [45] равенство

$$\lambda_n(BH^p(U_R), L^q(\mu)) = R^{-n} \left( \int_0^\rho r^{nq} dm(r) \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty, \quad q < \infty.$$

В частности, для плоской меры Лебега  $d\nu(z) = dx dy/\pi$  имеем формулу

$$\lambda_n(BH^p(U_R), L^q(\nu)) = R^{-n} \left( \frac{qn}{2} + 1 \right)^{-1/q}.$$

Класс Харди—Соболева  $H_R(l, p)$  состоит из всех функций  $f$ , аналитических в  $U_R$  и таких, что  $f^{(l)} \in BH^p(U_R)$ . Поперечники класса  $H_R(l, p)$  в пространствах  $L^p(\sigma)$  и  $L^p(\nu)$  вычислялись В. М. Тихомировым, Л. В. Тайковым, А. Пинкусом и др. Следующая задача остаётся нерешённой.

**Задача.** Пусть  $1 \leq q < p \leq \infty$ ,  $n \geq l$ ,  $R \geq 1$ . Найти значения  $n$ -поперечников  $\lambda_n(H_R(l, p), L^q(\sigma))$  и  $\lambda_n(H_R(l, p), L^q(\nu))$ .

Как отмечалось выше, в случае Фабера в качестве  $E$  берётся континуум  $K$ , не разбивающий плоскость, а  $\Omega$  является канонической окрестностью  $G_R$  континуума  $K$  (граница  $\partial G_R$  совпадает с прообразом окружности  $T_R$  при конформном отображении дополнения  $K$  на дополнение единичного круга  $U$  в расширенной комплексной плоскости). Для  $K = \bar{U}$  и  $K = [-1, 1]$  аппроксимации Фабера совпадают соответственно с аппроксимациями Тейлора и Чебышёва (о свойствах многочленов Фабера см., например, [19]). Для широкого класса континуумов  $K$  (например, в случаях, когда  $K$  — выпуклый компакт или замкнутая область Радона) приближения функций частичными суммами ряда Фабера позволяют доказать порядковые оценки

$$\lambda_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \asymp d_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \asymp R^{-n}.$$

Аналитическое продолжение заданной на  $K$  функции  $f$  в возможно более широкую область  $\Omega$  полезно при решении некоторых задачах численного анализа (см., например, решение задачи Рэлея—Тейлора в [1, гл. 5], а также цитированную в разделе 2 литературу о вычислительных применениях многочленов Фабера).

Задача о вычислении асимптотики  $\varepsilon$ -энтропии класса  $BH^\infty(\Omega)$  в метрике  $C(E)$  поставлена А. Н. Колмогоровым. Условия, при которых имеет место асимптотическая формула

$$H_\varepsilon(BH^\infty(\Omega), C(E)) \sim \frac{\text{cap}(E, \Omega)}{\log_2 e} \left( \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2)$$

изучали К. И. Бабенко, А. Г. Витушкин, В. Д. Ерохин, В. М. Тихомиров, Г. Видом и др. (комментарии и библиографические ссылки даны в [21]). Известно, в частности, что формула (2) является следствием равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [d_n(BH^\infty(\Omega), C(E))]^{1/n} = \exp \left( -\frac{1}{\text{cap}(E, \Omega)} \right). \quad (3)$$

В случае когда  $\Omega$  — многосвязная область либо конечное дизъюнктное объединение таких областей, справедливо неравенство

$$d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \geq c_1 \exp \left( -\frac{n}{\text{cap}(E, \Omega)} \right). \quad (4)$$

В общем случае равенство (3) доказывается с помощью приближений функций  $f$  из класса  $BH^\infty(\Omega)$  рациональными функциями с нулями и полюсами, равномерно распределёнными относительно некоторых мер, определяемых

по  $E$  и  $\Omega$ . Многомерные обобщения формул (2) и (3) найдены В. П. Захарютой [63, 64].

Для некоторых пар  $(E, \Omega)$  известны оптимальные линейные методы приближения, позволяющие доказать формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(E))]^{1/n} = \exp\left(-\frac{1}{\text{cap}(E, \Omega)}\right), \quad (5)$$

а в случае достаточно гладких границ  $\partial\Omega$ ,  $\partial E$  эти же методы дают оценку

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \leq c_2 \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(E, \Omega)}\right). \quad (6)$$

Из (4) и (6) следуют порядковые оценки

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \asymp d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \asymp \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(E, \Omega)}\right).$$

Для колмогоровских  $n$ -поперечников неравенства вида (6) изучались Т. Гане-лиусом [49].

В разделах 1 и 2 изложены результаты об аппроксимациях Фабера и Ерохина в односвязных и многосвязных областях, отмечаются некоторые применения многочленов Фабера в численном анализе. В разделе 3 рассмотрен случай, когда  $\Omega$  — дизъюнктное объединение конечного числа односвязных или многосвязных областей, а  $E$  — объединение конечного числа попарно непересекающихся ограниченных континуумов. В этом случае формула (5) и оценка (6) доказываются с помощью разложений функций  $f \in BH^\infty(\Omega)$  в ряды, определённые в [26] и обобщающие ряды Лорана, Якоби, Фабера, Ерохина и Уолша. Более того, если границы  $\partial\Omega$  и  $\partial E$  состоят из аналитических жордановых кривых, то методом из [26] доказывается формула

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), L^q(E)) \asymp n^{-1/q} \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(E, \Omega)}\right).$$

В разделе 4 обсуждаются многомерные аналоги некоторых результатов К. И. Бабенко, В. М. Тихомирова, Л. В. Тайкова и А. Пинкуса об аппроксимациях аналитических функций с ограниченными производными. Точные значения  $n$  и асимптотическая формула для  $\varepsilon$ -энтропии классов Харди—Соболева, определяемых с помощью радиальной производной функций, голоморфных в шаре из  $\mathbb{C}^d$ , были получены в [29, 44] (см. также [33, 40, 55]). В дополнение к этим результатам в разделе 4 приведены значения поперечников и асимптотические формулы для  $\varepsilon$ -энтропии классов голоморфных в трубчатых областях функций, имеющих ограниченные дробные (в смысле Римана—Лиувилля) производные. Отметим, что подобные результаты для весовых классов Бергмана и некоторых других классов аналитических функций типа Харди—Соболева известны только для одномерного случая (см. [4]).

## 1. Аппроксимации в односвязных областях

Пусть  $K$  — компактное множество в  $\mathbb{C}$ , содержащее более одной точки и имеющее односвязное дополнение в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Обозначим через  $\Phi$  конформное отображение  $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$  на  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{U}$ , нормированное условием  $\lim_{z \rightarrow \infty} (\Phi(z)/z) > 0$ , и пусть  $\Psi$  — отображение, обратное к  $\Phi$ . Для  $R > 1$  внутренность кривой  $\Gamma_R := \{z: |\Phi(z)| = R\}$  обозначается через  $G_R$ . Отметим, что  $\text{cap}(K, G_R) = \log_2 e / \log_2 R$ . Классическим средством приближения функции  $f \in H^\infty(G_R)$  в метрике  $C(K)$  являются частичные суммы ряда Фабера:

$$f(z) \approx F_n f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Phi_k(z), \quad z \in K, \quad (7)$$

Напомним, что  $n$ -й многочлен Фабера  $\Phi_n(z)$  совпадает с полиномиальной частью лорановского разложения  $n$ -й степени  $[\Phi(z)]^n$  в окрестности точки  $\infty$ , а коэффициенты в (7) вычисляются по формуле

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_r} f[\Psi(t)] t^{-n-1} dt, \quad 1 < r < R. \quad (8)$$

Пусть  $\Gamma$  — спрямляемая жорданова кривая. Кривую  $\Gamma$  называют *кривой ограниченного вращения*, если угловой коэффициент касательной этой кривой как функция длины дуги имеет ограниченную вариацию. Например, если кривая  $\Gamma$  состоит из конечного числа выпуклых дуг, то она является кривой ограниченного вращения. Класс всех кривых ограниченного вращения обозначается через  $\text{BR}$  (от английского «bounded rotation»). Если  $\partial K \in \text{BR}$ , то система многочленов Фабера  $\{\Phi_n(z)\}$  ограничена на  $K$ :

$$\gamma(K) := \sup_n \|\Phi_n(z)\|_{C(K)} < \infty.$$

Известно, что  $\gamma(K) \leq 2$  для любого выпуклого континуума  $K$  (см., например, [19, с. 224]).

Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  множество полиномов степени не выше  $n-1$ . Из неравенства Бернштейна

$$\|P_n\|_{C(\bar{G}_R)} \leq R^n \|P_n\|_{C(K)} \quad (P_n \in \mathcal{P}_{n+1}, \quad R > 1)$$

по теореме о поперечнике вписанного шара выводим, что

$$d_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \geq \frac{1}{R^n}.$$

Отсюда и из формул (7), (8) при условии  $\partial K \in \text{BR}$  получаем неравенства

$$\frac{1}{R^n} \leq \lambda_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \leq \sup\{\|f - F_n f\|_{C(K)} : f \in BH^\infty(G_R)\} \leq \frac{\gamma(K)}{R^n(R-1)}.$$

Пусть

$$A(\bar{G}_R) := \{f : f \text{ аналитическая в } G_R \text{ и непрерывная в } \bar{G}_R\}.$$

Отметим, что для интеграла

$$J(R) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{|Re^{i\tau} - 1|}.$$

имеет место оценка

$$J(R) < 2 \ln \left( \frac{R+1}{R-1} \right).$$

В случае когда  $\partial K$  — выпуклая жорданова кривая, справедливы следующие утверждения:

а) если  $f \in H^\infty(G_R)$ , то

$$\|f - F_n f\|_{C(K)} \leq J(R) R^{-n} \|f\|_{H^\infty(G_R)}; \quad (9)$$

б) если  $f \in A(\bar{G}_R)$ , то

$$\|f - F_n f\|_{C(K)} \leq J(R) R^{-n} d(f, \mathcal{P}_n, C(\bar{G}_R)). \quad (10)$$

Из неравенства (9) следует, что

$$\lambda_n(BH^\infty(G_R), C(K)) \leq J(R) R^{-n}.$$

Область  $G$  называется *областью Радона*, если её граница является кривой ограниченного вращения без точек заострения, т. е.  $\partial G$  почти всюду имеет касательную, угол наклона которой к вещественной оси имеет ограниченную вариацию как функция длины дуги, причём скачки этой функции по модулю меньше  $\pi$ . Оценки (9), (10) и их обобщения на случай, когда  $K$  является замкнутой областью Радона, доказаны в [45]. (об оценках многочленов Фабера при различных условиях на границу континуума  $K$  и о полиномиальных аппроксимациях аналитических функций в замкнутых односвязных областях см., например, [2, 5, 34, 37, 42, 47, 48, 53]).

В связи с неравенством (10) отметим, что в ряде случаев частичные суммы ряда Фабера вычисляются намного проще, чем соответствующие полиномы наилучшего приближения (см., например, [1, с. 253; 45, теорема 5.2; 51, § 18.2]). На основе фаберовских разложений и аппроксимаций типа Паде и Каратеодори—Фейера построены эффективные численные алгоритмы для вычисления значений аналитических функций (например, функций Бесселя), для решения некоторых задач линейной алгебры и для решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений (см. [20, 30, 31, 35, 36, 38, 39, 50, 54, 56, 62, 65]).

Наряду со многими преимуществами полиномиальные разложения, сходящиеся на  $K$ , слишком чувствительны по отношению к расположению особых точек: как только некоторая линия уровня  $\Gamma_R$  содержит хотя бы одну особенность функции  $f$ , ряд Фабера этой функции расходится в любой точке  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}_R$ . Другое обстоятельство связано со скоростью сходимости этих рядов на  $K$ : порядок их сходимости в равномерной метрике на  $K$  определяется местонахождением ближайшей к  $K$  особенности и почти не реагирует на

расположение области аналитичности  $f$  в остальной части комплексной плоскости (подробнее об этом явлении можно прочитать, например, в [22, с. 470]). Таким образом, если  $\Omega$  — произвольная односвязная область, содержащая  $K$ , то оптимальный (в смысле линейных и колмогоровских  $n$ -поперечников) базис для приближения функций из  $A_\infty(\Omega)$  в метрике  $C(K)$  заведомо не будет полиномиальным. Такой базис был построен В. Д. Ерохиным [8] как естественное обобщение базиса Фабера.

Пусть  $\Omega$  — односвязная область и  $K$  — невырожденный континуум, такой что область  $\Omega \setminus K$  двусвязна. Обозначим через  $H$  конформное отображение области  $D := \Omega \setminus K$  на кольцо  $\{w: 1 < |w| < R\}$  ( $R$  — конформный модуль области  $D$ ).

**Лемма Ерохина.** Если занумеровать в произвольном порядке пару граничных континуумов  $S_1$  и  $S_2$  двусвязной области  $D$ , то конформное отображение

$$H: D \rightarrow \{w: 1 < |w| < R\}$$

можно представить в виде суперпозиции  $H = F_2 \circ F_1$ , где  $F_1$  — конформное отображение односвязной области с границей  $S_1$  и  $F_2$  — конформное отображение односвязной области с границей  $S_2^{(1)} = F_1(S_2)$  (при этом отображения  $F_1$  и  $F_2$  единственны с точностью до дробно-линейных подстановок).

Эта лемма и её обобщения (см. [9, 11, 41, 52]) применялись при решении некоторых задач конформных и квазиконформных отображений и при исследовании проблем теории однолистных функций.

В случае  $S_1 = \partial\Omega$ ,  $S_2 = \partial K$  выберем  $F_2$  так, чтобы  $F_2(\infty) = \infty$ , и положим  $F = F_1$ ,  $\Phi = F_2$ . Тогда

$$H(z) = \Phi[F(z)], \quad z \in D. \quad (11)$$

Обозначив  $\chi = H^{-1}$ ,  $\lambda = F^{-1}$ ,  $\psi = \Phi^{-1}$ , получим

$$\chi(w) = \lambda[\psi(w)], \quad 1 < |w| < R. \quad (12)$$

Пусть  $H(\Omega)$  — пространство функций, аналитических в  $\Omega$ , с топологией равномерной сходимости внутри (на произвольных компактах) области  $\Omega$ . Для  $1 < \rho < R$  положим  $C_\rho := \{z: |H(z)| = \rho\}$  и  $\Omega_\rho := \text{int } C_\rho$ . Как показано в [11], формулы

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{\tau - w} d\tau, \quad w \in U_\rho, \quad (13)$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)} F'(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad (14)$$

устанавливают линейный топологический изоморфизм пространств  $H(U_R)$  и  $H(\Omega)$ . В фаберовском случае, когда  $\partial\Omega$  совпадает с линией уровня  $\Gamma_R$  континуума  $K$ , отображение  $H$  конформно продолжается на всю область  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ , можно принять  $F(z) \equiv z$ , и формула (14) задаёт классический оператор Фабера.

Для каждого целого неотрицательного  $n$  обозначим через  $e_n(z)$  функцию, получаемую по формуле (14) при  $\varphi(w) = w^n$ . Затем возьмём произвольную функцию  $f \in H(\Omega)$ , найдём для неё по формуле (13) изоморфный образ  $\varphi \in H(U_R)$  и разложим его в ряд Тейлора. Выполняя по формуле (14) обратное преобразование, придём к разложению

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(z), \quad z \in \Omega, \quad (15)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{\varphi(w)}{w^{k+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{f[\chi(w)]}{w^{k+1}} dw. \quad (16)$$

Разложение (16) сходится равномерно и абсолютно на любом компакте, расположенном в  $\Omega$ . Таким образом, система  $\{e_n(z)\}$  является базисом пространства  $H(\Omega)$ .

Метод аппроксимации

$$f(z) \approx \mathcal{E}_n f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k(z), \quad z \in K,$$

приводит (см. [11]) к соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(K))]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [d_n(BH^\infty(\Omega), C(K))]^{1/n} = \frac{1}{R} \quad (17)$$

и асимптотической формуле

$$H_\varepsilon(BH^\infty(\Omega), C(K)) = \frac{(\log_2(1/\varepsilon))^2}{\log_2 R} + O\left(\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \log_2 \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \quad (18)$$

(ср. с (2) и (3)). Учитывая (1), для аппроксимации на компакте  $K$  произвольной функции  $f$  из  $BH^\infty(\Omega)$  можно предложить модифицированный метод Ерохина:

$$f(z) \approx \mathcal{E}_n^* f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} (1 - R^{-2(n-k)}) a_k e_k(z), \quad z \in K.$$

Из определений видно, что

$$e_n(z) = \Phi_n[F(z)], \quad z \in \Omega, \quad (19)$$

где  $\{\Phi_n(t)\}$  — система многочленов Фабера для континуума  $K^{(1)} = F(K)$  (при условии  $\partial\Omega = \Gamma_R$  имеем, что  $e_n(z) \equiv \Phi_n(z)$ ). Отсюда и из неравенства Бернштейна по теореме о поперечниках шара следует, что

$$d_n(BH^\infty(\Omega), C(K)) \geq \frac{1}{R^n}. \quad (20)$$

С помощью (16), (19) и известных оценок многочленов Фабера (см., например, [19, с. 233]) получаем, что для данной пары  $(K, \Omega)$  выполнены неравенства

$$\frac{1}{R^n} \leq \lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(K)) \leq \sup\{\|f - \mathcal{E}_n f\|_{C(K)} : f \in BH^\infty(\Omega)\} \leq \frac{c_3 n^\beta}{R^n},$$

где  $c_3 > 0$  и  $0 < \beta < 1/2$ . Кроме того, если  $\partial K \in \text{BR}$ , то

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(K)) \asymp d_n(BH^\infty(\Omega), C(K)) \asymp R^{-n}.$$

Соотношения (17) и асимптотическая формула (18) выводятся так же (см. [11]) с помощью базисной системы  $\{f_n\}$ , определяемой по формуле

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{[H(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho,$$

и отвечающей случаю  $S_1 = \partial K$ ,  $S_2 = \partial\Omega$ . В этом случае можно выбрать  $F_1$  так, чтобы  $F_1(\infty) = \infty$ , и положить  $P = F_1$ ,  $Q = F_2$ ,  $\sigma = P^{-1}$ ,  $\varkappa = Q^{-1}$ . Тогда аналогично (11) и (12) имеем

$$H(z) = Q[P(z)], \quad z \in D,$$

и

$$\chi(w) = \sigma[\varkappa(w)], \quad 1 < |w| < R.$$

При этом формулы

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]\varkappa'(\tau)}{\varkappa(\tau) - \varkappa(w)} d\tau, \quad w \in U_\rho,$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho,$$

где  $1 < \rho < R$ , задают изоморфизм пространств  $H(U_R)$  и  $H(\Omega)$ .

Базис в  $H(\Omega)$  называют *продолжаемым вовнутрь*, если он является базисом также хотя бы в одном из пространств  $H(\Omega_0)$ , где  $\Omega_0 \subset \Omega$ , или  $H(\bar{\Omega}_0)$ , где  $\bar{\Omega}_0$  — замкнутая подобласть в  $\Omega$  (пространство  $H(\bar{\Omega}_0)$  рассматривается с двойственной индуктивной топологией). Очевидно, базисные системы  $\{e_n\}$  и  $\{f_n\}$  являются продолжаемыми вовнутрь базисами. Это свойство базисов Ерохина послужило источником теории продолжаемых базисов (подробности и библиографию см. в [6, 64]).

Обозначим  $\mathcal{G} := \bar{\mathbb{C}} \setminus K$ ,  $\mathcal{G}_\rho := \text{ext } C_\rho$  и  $H_0(\mathcal{G}) := \{f \in H(\mathcal{G}) : f(\infty) = \infty\}$ . Для каждого натурального  $n$  положим

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{1}{[H(\zeta)]^n} \frac{d\zeta}{z - \zeta}, \quad z \in \mathcal{G}_\rho,$$

и

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{1}{[H(\zeta)]^n} \frac{P'(\zeta)}{P(z) - P(\zeta)} d\zeta, \quad z \in \mathcal{G}_\rho,$$

где  $1 < \rho < R$ . Системы функций  $\{g_n(z)\}$  и  $\{h_n(z)\}$  являются базисами пространства  $H_0(\mathcal{G})$ , так как каждая из следующих двух пар формул

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]}{z - \zeta} d\zeta, \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]\psi'(\tau)}{\psi(w) - \psi(\tau)} d\tau$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi[H(\zeta)]P'(\zeta)}{P(z) - P(\zeta)} d\zeta, \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{w - \tau} d\tau,$$

где  $z \in \mathcal{G}_\rho$ ,  $|w| > \rho$ ,  $1 < \rho < R$ , устанавливает изоморфизм пространств  $H_0(\mathcal{G})$  и  $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{U})$ . В случае когда отображение  $H$  аналитически продолжается на  $K$ , функции  $g_n(z)$  и  $h_n(z)$  превращаются в рациональные функции Фабера (см. [19, с. 309]).

Возвращаясь к фаберовскому случаю ( $\Omega = G_R$ ), определим *оператор Фабера—Теплица*:

$$\mathcal{T}_g: \varphi \mapsto f, \quad f(z) = \mathcal{T}_g \varphi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{g(\zeta)\varphi[\Phi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_\rho, \quad 1 < \rho \leq R, \quad (21)$$

где  $\varphi$  — аналитическая в круге  $U_\rho$  функция, такая что суперпозиция  $\varphi \circ \Phi$  суммируема на  $\Gamma_\rho$ , а весовая функция  $g$  является аналитической и отличной от нуля в области  $\mathcal{G}$ . Классический оператор Фабера соответствует случаю  $g \equiv 1$ , а если  $g = \Phi'$ , то оператор  $\mathcal{T}_g$  переводит степенной базис  $\{w^n\}$  в систему многочленов Фабера второго рода для континуума  $K$  (в случае  $K = [-1, 1]$  получаются классические многочлены Чебышёва второго рода). Оператор  $\mathcal{T}_g$  отображает пространство  $\mathcal{P}_n$  на себя. Кроме того, если  $\varphi$  — рациональная функция, то  $\mathcal{T}_g \varphi$  тоже рациональная функция (это свойство используется при определении упомянутых выше фаберовских аппроксимаций типа Паде и Каратеодори—Фейера). Если  $K = \bar{G}$ , где  $\bar{G}$  — замкнутая область Жордана со спрямляемой границей  $\Gamma$ , то отображение  $\Phi$  непрерывно продолжается на  $\Gamma$ , и в этом случае (при надлежащем выборе  $g$ ) в формуле (21) можно заменить  $\Gamma_\rho$  на  $\Gamma$  и  $G_\rho$  на  $G$ . Более того, с помощью оператора  $\mathcal{T}_g$  определяются изоморфные отображения различных пространств функций, аналитических в единичном круге  $U$ , на соответствующие пространства функций, аналитических в области  $G$  (см., например, [19, с. 209]). Эти свойства позволяют распространить ряд результатов о полиномиальных и рациональных аппроксимациях функций, аналитических в круге, на функции, аналитические в областях Радона и в некоторых других односвязных областях [7, 14, 15].

Операторы Фабера—Ерохина с весовыми функциями и асимптотические свойства соответствующих базисных систем изучались в [23, 25]. С помощью

этих свойств установлен порядок убывания линейных и колмогоровских  $n$ -поперечников классов функций (см. [27]), производные порядка  $l$  которых в области  $\Omega$  принадлежат единичным шарам пространств Смирнова или Бергмана (см. также [12]).

## 2. Аппроксимации в многосвязных областях

Пусть континуум  $K$  имеет  $N$  областей смежности  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N$  и многосвязная область  $\Omega$  содержит  $K$ , причём  $\partial\Omega \subset \bigcup_{\nu=1}^N \mathcal{G}_\nu$  и  $\partial\Omega \cap \mathcal{G}_\nu \neq \emptyset$  для  $\nu \in \{1, \dots, N\}$ . Если каждое из множеств  $\mathcal{C}_\nu := \partial\Omega \cap \mathcal{G}_\nu$  связно, то  $\Omega$  называется *элементарной окрестностью*  $K$ . Имеет место (см. [10]) следующий аналог теоремы о монодромии.

*Если  $\Omega$  — элементарная окрестность  $K$ , то всякая непрерывно продолжимая по  $\Omega$  функция  $f$ , регулярная в окрестности каждой точки области  $\Omega$  и допускающая выделение однозначной ветви на  $K$ , однозначна в  $\Omega$ .*

Будем предполагать, что  $\Omega$  — элементарная окрестность  $K$ . Тогда класс  $BH^\infty(\Omega)$  может быть определён как множество однозначных на  $K$  функций  $f$ , аналитических в окрестности каждой точки  $z \in K$  и аналитически продолжимых вдоль любого пути, проходящего в  $\Omega$ , так что аналитические продолжения этих функций имеют модуль не больше 1 в любой точке  $z \in \Omega$ .

По каждой двусвязной области  $\mathcal{D}_\nu := \Omega \cap \mathcal{G}_\nu$ ,  $\nu \in \{1, \dots, N\}$ , определяют, как указано выше, четыре семейства базисных функций. Из этих семейств (на самом деле для каждого  $\nu$  выбирается по одному семейству с учётом того, принадлежит или нет точка  $\infty$  области  $\mathcal{G}_\nu$ ) составляется двойная последовательность  $\{e_{\nu k}\}$ , такая что

- 1) все функции  $e_{\nu k}$  аналитичны и однозначны в области  $\Omega$ ;
- 2) всякая функция  $f$ , регулярная в  $\Omega$ , имеет разложение

$$f(z) = a_{00} + \sum_{\nu=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k} e_{\nu k}(z), \quad z \in \Omega, \quad (22)$$

равномерно и абсолютно сходящееся внутри  $\Omega$ ;

- 3) разложение (22) для каждой функции  $f \in H(\Omega)$  единственно.

Для вывода (22) область  $\Omega$  записывается в виде пересечения  $N$  односвязных областей, а функция  $f$  (после применения интегральной формулы Коши) разлагается на сумму  $N$  функций  $f_\nu$ , каждая из которых аналитична в соответствующей односвязной области. Записывая каждую  $f_\nu$  в виде указанных выше рядов, получаем (22). Метод аппроксимации, ставящий в соответствие произвольной функции  $f$  из  $BH^\infty(\Omega)$  частичные суммы ряда (37), позволяет конструктивно доказать для рассматриваемого случая асимптотическую формулу (2) (см. [8]), однако обладает тем недостатком, что коэффициенты  $a_{\nu k}$

вычисляются не по функции  $f$ , а по её составляющим  $f_\nu$ . Этот недостаток преодолевается в [10] с помощью понятия канонической окрестности.

Область  $\Omega$  называется *канонической окрестностью*  $K$ , если все  $C_\nu$  — замкнутые аналитические кривые Жордана (в расширенной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ ) или точки, причём существуют такие точки  $z_\nu \in \mathcal{G}_\nu$ ,  $\nu \in \{1, \dots, N\}$ , что при конформных отображениях  $\Phi_\nu: \mathcal{G}_\nu \rightarrow \{w: |w| > 1\}$ ,  $\Phi_\nu(z_\nu) = \infty$ , кривые  $C_\nu$  переходят в некоторые окружности  $T_{R_\nu}$  (если  $C_\nu$  — точка, то полагаем  $R_\nu = +\infty$ ). Произвольную элементарную окрестность континуума  $K$  можно конформно и однолистно преобразовать в каноническую окрестность некоторого континуума  $K_0$ , получающегося из  $K$  при том же самом преобразовании (для данной элементарной окрестности такое отображение единственно с точностью до дробно-линейной подстановки).

Предположим, что  $\Omega$  — каноническая окрестность  $K$  с определяющими точками  $z_\nu$  и модулями  $R_\nu$  ( $1 < R_\nu \leq +\infty$ ). Для  $1 < R'_\nu < R_\nu$  положим

$$C'_\nu := \{|\Phi_\nu(z)| = R'_\nu: z \in \mathcal{G}_\nu\}, \quad \nu \in \{1, \dots, N\}.$$

Через  $\Omega_\nu$  обозначим область с границей  $C_\nu$ , содержащую  $\Omega$ , и через  $\Omega'_\nu$  — под-область  $\Omega_\nu$ , ограниченную  $C'_\nu$ .

Базисную систему  $\{f_{\nu k}\}$  определим при условии  $\infty \in K$  (общий случай легко сводится к этому). Для всякой функции  $f \in H(\Omega)$  по формуле Коши имеем

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{\nu=1}^N f_\nu(z), \quad (23)$$

где  $f_\nu$  регулярна в  $\Omega_\nu$  и  $f_\nu(\infty) = 0$ . Разлагая функцию  $f_\nu \circ \Phi_\nu^{-1}$  в ряд Лорана и выполняя замену переменного, получим

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{\nu k} [\Phi_\nu(\zeta)]^k, \quad \zeta \in \mathcal{D}_\nu, \quad (24)$$

где

$$c_{\nu k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{R'_\nu}} \frac{f[\Phi_\nu^{-1}(w)]}{w^{k+1}} dw, \quad 1 < R'_\nu < R_\nu \quad (25)$$

(поскольку окрестность выбрана канонической, под знаком интеграла стоит  $f$ , а не  $f_\nu$ ). Замечая, что при  $k \leq 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'_\nu} \frac{[\Phi_\nu(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{для } z \in \Omega'_\nu,$$

из (24) получаем, что

$$f_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\nu k} f_{\nu k}(z), \quad z \in \Omega_\nu,$$

где  $f_{\nu k}$  — рациональные функции, представляющие главные части  $[\Phi_\nu(\zeta)]^k$  в окрестности точки  $z_\nu$ :

$$f_{\nu k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{[\Phi_\nu(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{\nu k}^{(j)}}{(z - z_\nu)^j}. \quad (26)$$

Учитывая (23), для произвольной  $f \in H(\Omega)$  имеем разложение

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{\nu=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} c_{\nu k} f_{\nu k}(z), \quad (27)$$

равномерно сходящееся внутри  $\Omega$ . Таким образом, заданные формулой (26) функции  $f_{\nu k}$ ,  $1 \leq \nu \leq N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , образуют базис пространства  $H(\Omega)$ .

Приближая каждую функцию  $f$  из  $BH^\infty(\Omega)$  частичными суммами ряда (27), В. Д. Ерохин [10] доказывает для линейных  $n$ -поперечников равенство (5) при  $E = K$  сначала для произвольной канонической окрестности  $\Omega$  континуума  $K$ , а затем (привлекая методы теории униформизации) и для более широкого класса окрестностей. При некоторых дополнительных ограничениях (достаточно предположить, например, что базисные функции  $f_{\nu k}$  равномерно ограничены на  $K$ ) этим методом можно доказать и неравенство (6). В заключение раздела отметим, что аппроксимации типа Фабера, определяемые с помощью функции Грина в многосвязных областях, построены в недавней работе [57] (ср. с [60]).

### 3. Аппроксимации

#### в окрестности нескольких континуумов

Пусть на плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  даны ограниченные, попарно непересекающиеся континуумы  $K_1, \dots, K_q$  с жордановыми границами  $\Gamma_l = \partial K_l$  ( $l = 1, \dots, q$ ) и односвязные, попарно непересекающиеся области  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  с жордановыми границами  $C_j = \partial \Omega_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ), причём выполнены следующие условия:

- 1) каждый из континуумов  $\{K_l\}$  содержится в некоторой из областей  $\{\Omega_j\}$ ;
- 2) в каждой из областей  $\{\Omega_j\}$  содержится по крайней мере один из континуумов  $\{K_l\}$ .

Положим

$$K = \bigcup_{l=1}^q K_l, \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^s \Omega_j, \quad D = \Omega \setminus K, \quad \mathcal{G} = \bar{\mathbb{C}} \setminus K,$$

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^q \Gamma_l, \quad C = \bigcup_{j=1}^s C_j$$

и будем считать, что  $\infty \notin \Omega$ . В этом разделе под областью будем понимать не только открытое связное множество на комплексной плоскости, но и конечное объединение таких множеств.

Дж. Уолшем [59] доказано существование конформного отображения  $w = H(z)$  области  $D$  на область  $\Delta$ , взаимно-однозначного и непрерывного в замкнутых областях  $\bar{D}$  и  $\bar{\Delta}$ , где область  $\Delta$  определяется условиями

$$\Delta = \{w: 1 < |T(w)| < e^\alpha\}, \quad T(w) = \frac{A(w - a_1)^{m_1} \cdots (w - a_q)^{m_q}}{(w - b_1)^{n_1} \cdots (w - b_s)^{n_s}}, \quad (28)$$

$$\sum_{l=1}^q m_l = \sum_{j=1}^s n_j = 1, \quad \alpha, m_l, n_j > 0.$$

При этом линия  $\Lambda = \{w: |T(w)| = 1\}$  состоит из  $q$  попарно непересекающихся жордановых кривых  $\Lambda_l$  (образов  $\Gamma_l$ ), которые отделяют  $a_l$  от  $\Delta$ , линия  $L = \{w: |T(w)| = e^\alpha\}$  состоит из  $s$  попарно непересекающихся жордановых кривых  $L_j$  (образов  $C_j$ ), которые отделяют  $b_j$  от  $\Delta$ . Функция  $T(w)$  записана в виде (28) в предположении, что все числа  $a_l$  и  $b_j$  конечны. Если некоторые из этих чисел совпадают с  $w = \infty$ , то соответствующие множители в (28) следует опустить. В частности, если  $b_1 = \dots = b_s = \infty$ , то  $T(w) = A(w - a_1)^{m_1} \cdots (w - a_q)^{m_q}$ . Положим

$$\mathcal{M} = \{w: |T(w)| < e^\alpha\}, \quad \mathcal{N} = \{w: |T(w)| > 1\},$$

$$\mathcal{M}_\rho = \{w: |T(w)| < \rho\}, \quad L_\rho = \{w: |T(w)| = \rho\},$$

где  $1 < \rho < e^\alpha$ . Отметим, что  $\alpha = 1/\text{cap}(K, \Omega)$ .

Базисные системы в  $H(\Omega)$  определяются с помощью специальных изоморфных отображений пространства  $H(\mathcal{M})$  на  $H(\Omega)$ . При этом канонический базис пространства  $H(\mathcal{M})$  имеет вид

$$T_0(w) = 1, \quad T_n(w) = A^n \frac{(w - \alpha_1)(w - \alpha_2) \cdots (w - \alpha_n)}{(w - \beta_1)(w - \beta_2) \cdots (w - \beta_n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

где числа  $\alpha_n \in \{a_1, \dots, a_q\}$ ,  $\beta_n \in \{b_1, \dots, b_s\}$  выбраны так, чтобы на любом замкнутом ограниченном множестве  $\mathcal{F}$ , не содержащем точек  $a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_s$ , выполнялись неравенства

$$0 < M_1 < \left| \frac{A^n}{[T(w)]^n} \frac{(w - \alpha_1)(w - \alpha_2) \cdots (w - \alpha_n)}{(w - \beta_1)(w - \beta_2) \cdots (w - \beta_n)} \right| < M_2 < +\infty$$

с константами  $M_1$  и  $M_2$ , зависящими только от  $\mathcal{F}$ .

По заданным точкам  $a_1, \dots, a_q$  и положительным числам  $m_1, \dots, m_q$ ,  $\sum_{l=1}^q m_l = 1$ , последовательность  $\{\alpha_n\}$  в (29) определяется следующим образом.

Шаг 1. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  находятся целые неотрицательные числа  $N_{n1}, \dots, N_{nq}$ , такие что

$$\sum_{l=1}^q N_{nl} = n, \quad N_{nl} \leq N_{n+1,l} \leq N_{nl} + 1, \quad |N_{nl} - nm_l| \leq [\log_2 q] + 1, \quad l \in \{1, \dots, q\},$$

где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ . Для этого в случае  $q = 2$  применяют формулы  $N_{n1} = [nm_1]$ ,  $N_{n2} = n - [nm_1]$ . Для  $q = 3$  и  $q = 4$  сначала полагают

$m'_1 = m_1 + m_2$ ,  $N'_{n1} = [nm'_1]$ ,  $N'_{n2} = n - [nm'_1]$ , а затем (аналогично случаю  $q = 2$ ) находят  $N_{n1}$  и  $N_{n2}$ , такие что

$$\left| N_{n1} - N'_{n1} \frac{m_1}{m'_1} \right| \leq 1, \quad \left| N_{n2} - N'_{n1} \frac{m_2}{m'_1} \right| \leq 1, \quad N'_{n1} = N_{n1} + N_{n2}.$$

При  $q = 3$  последовательность  $\{N_{n3}\}$  определяется по формуле  $N_{n3} = n - N'_{n1}$ , а при  $q = 4$  полагают  $m'_2 = m_3 + m_4$  и последовательности  $\{N_{n3}\}$  и  $\{N_{n4}\}$  выбирают так, чтобы

$$\left| N_{n3} - N'_{n2} \frac{m_3}{m'_2} \right| \leq 1, \quad \left| N_{n4} - N'_{n2} \frac{m_4}{m'_2} \right| \leq 1, \quad N'_{n2} = N_{n3} + N_{n4}.$$

Далее этот процесс продолжается рекурсивно.

Шаг 2. По найденным на шаге 1 последовательностям  $\{N_{n1}\}, \dots, \{N_{nq}\}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  значения  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  определяются так, чтобы среди них число  $a_l$  встретилось ровно  $N_{nl}$  раз.

В результате для каждого компактного множества  $\mathcal{F}$ , не содержащего  $a_1, \dots, a_q$ , выполнено неравенство

$$\sup_{z \in \mathcal{F}} \left| \sum_{l=1}^q \log |z - a_l|^{N_{nl}} - n \sum_{l=1}^q \log |z - a_l|^{m_l} \right| < \infty,$$

и для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) = \prod_{l=1}^q (z - a_l)^{N_{nl}}.$$

Последовательность  $\{\beta_n\}$  в (29) по заданным точкам  $b_1, \dots, b_s$  и положительным числам  $n_1, \dots, n_s$ ,  $\sum_{j=1}^s n_j = 1$ , определяется аналогично.

Как доказано в [58], каждая функция  $\varphi$  из  $H(\mathcal{M})$  единственным образом представима равномерно сходящимся внутри  $\mathcal{M}$  рядом

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(w), \quad w \in \mathcal{M}, \quad (30)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \varphi(\alpha_1), \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau)}{T_n(\tau)} \frac{\alpha_{n+1} - \beta_n}{(\tau - \alpha_{n+1})(\tau - \beta_n)} d\tau, \quad 1 < \rho < e^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Частная сумма

$$S_n(w) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(w)$$

ряда (30) является рациональной функцией порядка  $n$ , интерполирующей  $\varphi$  в точках  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ . По формуле Эрмита

$$\varphi(w) - S_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{T_n(w)}{T_n(\tau)} \frac{(w - \alpha_{n+1})}{(\tau - \alpha_{n+1})} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - w)} d\tau, \quad w \in \mathcal{M}_\rho, \quad 1 < \rho < e^\alpha.$$

Если числа  $m_1, \dots, m_q$  рациональные и  $b_1 = \dots = b_s = \infty$ , то линии  $L_\rho$  являются лемнискатами, а ряды (30) в этом случае совпадают с классическими рядами Якоби. Напомним, что сумма первых  $n$  членов ряда Якоби функции  $\varphi \in H(\mathcal{M})$  определяется как полином степени  $qn - 1$ , интерполирующий функцию  $\varphi$  в точках  $a_1, a_2, \dots, a_q$ , причём каждая точка имеет кратность  $n$  (см. [38, с. 76]). В случае когда лемниската ограничивает континуум, не разбивающий плоскость, базисы Якоби и Фабера совпадают (см. [19, с. 58]).

В [26] доказано следующее обобщение сформулированной выше леммы Ерохина.

**Теорема.** Функция  $w = H(z)$  представима двумя способами в виде суперпозиции двух функций

$$H(z) = Q[P(z)] = \Phi[F(z)], \quad z \in D, \quad (31)$$

со следующими свойствами:

- 1) функция  $t = P(z)$  ( $t = F(z)$ ) однолистка в области  $\mathcal{G}$  (соответственно  $\Omega$ ) и отображает эту область на некоторую область  $\mathcal{G}^{(1)}$  (соответственно  $\Omega^{(2)}$ ) при условии  $P(\infty) = \infty$ , причём контур  $\Gamma = \partial\mathcal{G}$  (соответственно  $C = \partial\Omega$ ) переходит в контур  $\Gamma^{(1)} = \partial\mathcal{G}^{(1)}$  (соответственно  $C^{(2)} = \partial\Omega^{(2)}$ );
- 2) функция  $w = \Phi(t)$  ( $w = Q(t)$ ) отображает однолистно область  $\mathcal{G}^{(2)} = \bigcap_{l=1}^q \mathcal{G}_l^{(2)}$ , где  $\mathcal{G}^{(2)} = \text{ext } \Gamma_l^{(2)}$ ,  $\Gamma_l^{(2)} = F(\Gamma_l)$ ,  $l = 1, \dots, q$  (соответственно область  $\Omega^{(1)} = \bigcup_{j=1}^s \Omega_j^{(1)}$ , где  $\Omega^{(1)} = \text{int } C_j^{(1)}$ ,  $C_j^{(1)} = P(C_j)$ ,  $j = 1, \dots, s$ ) на область  $\mathcal{N}$  (соответственно  $\mathcal{M}$ ) при условии  $\Phi(\infty) = \infty$ , причём контур  $C^{(2)}$  (соответственно  $\Gamma^{(1)}$ ) переходит в контур  $L$  (соответственно  $\Lambda$ ).

Обозначив обратные функции через  $\chi = H^{-1}$ ,  $\sigma = P^{-1}$ ,  $\varkappa = Q^{-1}$ ,  $\lambda = F^{-1}$ ,  $\psi = \Phi^{-1}$ , из (31) получим

$$\chi(w) = \sigma[\varkappa(w)] = \lambda[\psi(w)], \quad w \in \Delta. \quad (32)$$

Пусть  $C_\rho$  — прообраз контура  $L_\rho$  при отображении  $w = H(z)$ . Имеем, что  $C_\rho = \bigcup_{j=1}^p C_{j\rho}$ , где  $s \leq p \leq q$  и кривые  $C_{j\rho}$  ( $j = 1, \dots, p$ ) жордановы. Положим

$$\Omega_\rho = \bigcup_{j=1}^p \Omega_{j\rho}, \quad \mathcal{G}_\rho = \bigcap_{j=1}^p \mathcal{G}_{j\rho}, \quad \text{где } \Omega_{j\rho} = \text{int } C_{j\rho}, \quad \mathcal{G}_{j\rho} = \text{ext } C_{j\rho}.$$

Существует  $\rho_0 > 1$ , такое что при всех  $\rho_0 < \rho < e^\alpha$  кривые  $C_{j\rho}$  ( $j = 1, \dots, p$ ) попарно не пересекаются и  $p = s$ . Весовые функции  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  будем предполагать аналитическими

и отличными от нуля в областях  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^{(2)}$  соответственно. В частности, можно принять  $g_1(z) = P'(z)$ ,  $g_2(t) = \Phi'(t)$ .

Как в случае  $q = s = 1$ , доказывается, что каждая из двух пар формул

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\phi_1[H(\zeta)]g_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad (33)$$

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{g_1[\chi(\tau)]} \frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau) - \kappa(w)} d\tau, \quad z \in \mathcal{M}_\rho, \quad (34)$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\phi_2[H(\zeta)]g_2[F(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad (35)$$

$$\varphi_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{f[\chi(\tau)]}{g_2[\psi(\tau)]} \frac{d\tau}{\tau - w}, \quad z \in \mathcal{M}_\rho, \quad (36)$$

где  $\rho_0 < \rho < e^\alpha$ , устанавливает линейный топологический изоморфизм пространств  $H(\Omega)$  и  $H(\mathcal{M})$ . Следовательно, системы функций

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{T_n[H(\zeta)]g_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (37)$$

и

$$e_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{T_n[H(\zeta)]g_2[F(\zeta)]}{F(\zeta) - F(z)} d\zeta, \quad z \in \Omega_\rho, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

являются базисными в пространстве  $H(\Omega)$ , причём коэффициенты  $\{c_n^{(1)}\}$  и  $\{c_n^{(2)}\}$  в разложениях

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} f_n(z) \quad \text{и} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} e_n(z), \quad z \in \Omega, \quad (39)$$

произвольной функции  $f$  из  $H(\Omega)$  определяются по формулам

$$c_0^{(\nu)} = \varphi_\nu(\alpha_1), \quad c_n^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi_\nu(\tau)}{T_n(\tau)} \frac{\alpha_{n+1} - \beta_n}{(\tau - \alpha_{n+1})(\tau - \beta_n)} d\tau, \quad \nu = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — функции, соответствующие  $f$  при линейном топологическом изоморфизме пространств  $H(\Omega)$  и  $H(\mathcal{M})$ , задаваемом соответственно формулами (33), (34) и (35), (36). С помощью интегральной формулы Коши разложения вида (39) могут быть получены и для случая, когда континуумы  $K_1, \dots, K_q$  и области  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  многосвязны. Кроме того, если  $g_1(z) \equiv 1$ ,  $g_2(t) \equiv 1$ ,  $b_1 = \dots = b_s = \infty$ , а отображение  $w = H(z)$  аналитически и однолистно продолжается на всю область  $\mathcal{G}$  при условии  $H(\infty) = \infty$ , то функции (37) и (38)

совпадают с обобщёнными многочленами Фабера для континуумов  $K_1, \dots, K_q$ , введёнными Дж. Уолшем [60].

Для рассматриваемой пары  $(K, \Omega)$  доказывается формула (5) и (при условии равномерной ограниченности функций  $f_n$  или  $e_n$  на  $K$ ) неравенство (6). Аналогично (19) в случае  $g_2(t) \equiv 1$  имеем

$$e_n(z) = \Phi_n[F(z)], \quad z \in \Omega, \quad (40)$$

где  $\{\Phi_n(t)\}$  — система многочленов Фабера—Уолша для компакта  $K^{(1)} = F(K)$ . Поэтому для справедливости неравенства (6) достаточно предположить, что система многочленов  $\{\Phi_n(t)\}$  является ограниченной на  $K^{(1)}$ .

Если границы  $\partial K$  и  $\partial \Omega$  являются достаточно гладкими, то справедливы соотношения

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega); C(K)) \asymp d_n(BH^\infty(\Omega); C(K)) \asymp \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(K, \Omega)}\right) \quad (41)$$

и

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega); L^p(K)) \asymp d_n(BH^\infty(\Omega); L^p(K)) \asymp n^{-1/p} \exp\left(-\frac{n}{\text{cap}(K, \Omega)}\right), \quad (42)$$

где  $1 \leq p < \infty$ . Покажем, например, как получаются соотношения (41). Из формулы (40) и инвариантности класса  $BH^\infty(\Omega)$  относительно конформных отображений следует, что достаточно ограничиться случаем, когда

$$\partial \Omega = \Gamma_R := \{z: G(z) = \log R\}, \quad R > 1,$$

где  $G(z)$  — функция Грина для области  $\mathcal{G} = \bar{\mathbb{C}} \setminus K$  с полюсом в бесконечности. В этом случае  $F(z) \equiv z$ , и согласно (39), (40) оптимальный линейный метод аппроксимации функций  $f$  из  $BH^\infty(\Omega)$  на  $K$  имеет вид

$$f(z) \approx F_n f(z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Phi_k(z), \quad z \in K,$$

где  $\Phi_k(z)$  — многочлены Фабера—Уолша для  $K$  и коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{T_{n+1}(\tau)} d\tau, \quad 1 < \rho < R. \quad (43)$$

Контур  $\partial K$  выбирается таким, что

$$0 < M_3 < |\Phi'(z)| < M_4 < +\infty, \quad z \in \partial K. \quad (44)$$

По определению системы  $\{T_n(w)\}$

$$|T_n(w)| \asymp |T(w)|^n, \quad w \in \mathcal{N}.$$

Следовательно, полагая  $\tau = \Phi(\zeta)$  в (43), для любой функции  $f \in BH^\infty(\Omega)$  имеем  $|c_k| \leq M_5 R^{-k}$ . Отсюда аналогично (9) получаются неравенства

$$\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(K)) \leq \sup\{\|f - F_n f\|_{C(K)} : f \in BH^\infty(\Omega)\} \leq M_6 R^{-n}.$$

Оценки снизу в (41) и (42) следуют из того, что при некоторых условиях на  $K$  для любого полинома  $P_n$  степени не выше  $n$  справедливы неравенства

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_R)} \leq M_7 R^n \|P_n\|_{C(K)} \quad \text{и} \quad \|P_n\|_{L^p(\partial K)} \leq M_8 n^{1/p} \|P_n\|_{L^p(K)}, \quad (45)$$

где константы  $M_7$  и  $M_8$  не зависят от  $n$  и  $P_n$  (см., например, [18, 61]). В частности, неравенства (45) имеют место, если контур  $\partial K$  состоит из аналитических кривых Жордана. Именно с выполнением условия (44) и неравенств (45) связаны ограничения на границу компакта  $K$ .

В заключение раздела отметим, что в то время как многомерные аналоги формулы (3) доказаны при довольно общих условиях (см. [63]), соответствующие аналоги неравенства (6) и соотношений (41), (42) установлены только в простейших случаях (см. [24, 28, 32]).

#### 4. Поперечники классов голоморфных функций в симметричных областях трубчатого типа

В этом разделе, кроме линейных и колмогоровских поперечников, встретятся гильбертовские и бернштейновские  $n$ -поперечники. Напомним, что гильбертовский  $n$ -поперечник подмножества  $A$  нормированного пространства  $X$  определяется равенством

$$d^n(A, X) := \inf \sup_{x \in A \cap L_{-n}} \|x\|,$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам  $L_{-n}$  коразмерности  $n$ . Бернштейновский  $n$ -поперечник множества  $A$  в  $X$  определяется по формуле

$$b_n(A, X) := \sup_{L_{n+1}} \sup \{r \mid rB(L_{n+1}) \subset A\},$$

где  $B(L_{n+1})$  — единичный шар подпространства  $L_{n+1}$ .

Для классов аналитических в круге функций с ограниченными дробными (в смысле Римана—Лиувилля) производными порядка  $\alpha > 0$  оптимальные линейные методы аппроксимации порождаются обобщённым ядром Бабенко, определяемым по формуле

$$K_{n,\alpha}(\rho, t) := \beta_{n,\alpha}^{-1} + 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_{j,\alpha}^{-1} \rho^{j-n} \cos(j-n)t, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\beta_{0,\alpha} := \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2}, \quad \beta_{j,\alpha} := \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j)}.$$

Ядро  $K_{n,\alpha}(\rho, t)$  неотрицательное и выражается через ядро Пуассона

$$\mathcal{P}(\rho, t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

по формуле

$$K_{n,\alpha}(\rho, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{n-1} \mathcal{P}(\rho\tau, t) d\tau.$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}_j z^j, \quad z \in U_R, \quad (46)$$

тейлоровское разложение функции  $f$ , аналитической в круге  $U_R$ . Операторы  $\mathcal{D}^\alpha$  и  $G_n^\alpha$  определим формулами

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j,\alpha} \hat{f}_j z^j$$

и

$$(G_n^\alpha f)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{\beta_{j,\alpha}}{\beta_{2n-j,\alpha}} \left( \frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \right) \hat{f}_j z^j.$$

Положим

$$B_\alpha(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j,\alpha}^{-1} z^j, \quad z \in U.$$

Из свойств свёртки Адамара (см., например, [17, с. 166]) следует, что для  $0 < \rho < R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} (\mathcal{D}^\alpha f)(\zeta) B_\alpha\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in U_\rho,$$

и значит,

$$\hat{f}_j = \frac{\beta_{j,\alpha}^{-1}}{2\pi i} \int_{T_\rho} (\mathcal{D}^\alpha f)(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta. \quad (47)$$

Напомним, что классы Харди для круга  $U_R$  обозначаются через  $H^p(U_R)$ .

**Предложение 4.1.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $R > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > [\alpha]$ . Для любой аналитической в круге  $U_R$  функции  $f$  верна формула

$$\begin{aligned} f(re^{i\varphi}) - (G_n^\alpha f)(re^{i\varphi}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \exp(in(\varphi - \theta)) K_{n,\alpha} \left( \frac{r}{\rho}, \varphi - \theta \right) (\mathcal{D}^\alpha f)(\rho e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq r \leq \rho < R$ . В случае  $\mathcal{D}^\alpha f \in H^1(U_R)$  формула (48) справедлива и для  $\rho = R$ .

**Доказательство.** Пусть  $0 < \rho < R$  и  $z = re^{i\varphi}$ , где  $r < \rho$ . Пользуясь (47), имеем

$$\begin{aligned} f(z) - (G_n^\alpha f)(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{2n-j, \alpha}^{-1} \left( \frac{|z|}{R} \right)^{2(n-j)} \frac{z^j}{2\pi i} \int_{T_\rho} (D^\alpha f)(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta + \\ &+ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{z^j \beta_{j, \alpha}^{-1}}{2\pi i} \int_{T_\rho} (D^\alpha f)(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} (D^\alpha f)(\zeta) \left( \frac{z}{\zeta} \right)^n \times \\ &\times \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{2n-j, \alpha}^{-1} \left( \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^{n-j} + \beta_{n, \alpha}^{-1} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_{j, \alpha}^{-1} \left( \frac{z}{\zeta} \right)^{j-n} + \sum_{j=2n+1}^{\infty} \beta_{j, \alpha}^{-1} \left( \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^{j-n} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Полагая  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  и учитывая равенство

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{2n-j, \alpha}^{-1} \left( \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^{n-j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \beta_{j, \alpha}^{-1} \left( \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^{j-n},$$

получаем формулу (48). Если  $D^\alpha f \in H^1(U_R)$ , то для почти всех  $\theta \in [-\pi, \pi]$  существует предел

$$(D^\alpha f)(Re^{i\theta}) := \lim_{\rho \rightarrow R-0} (D^\alpha f)(\rho e^{i\theta})$$

и

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\pi}^{\pi} (D^\alpha f)(\rho e^{i\theta}) (\rho e^{i\theta})^{-j} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} (D^\alpha f)(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta})^{-j} d\theta \right| \leq \\ &\leq |R^{-j} - \rho^{-j}| \int_{-\pi}^{\pi} |(D^\alpha f)(\rho e^{i\theta})| d\theta + R^{-j} \int_{-\pi}^{\pi} |(D^\alpha f)(\rho e^{i\theta}) - (D^\alpha f)(Re^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $\rho \rightarrow R$ . Поэтому в (47) (а значит, и в (48)) можно принять  $\rho = R$ .  $\square$

**Предложение 4.2.** Пусть  $\alpha \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > [\alpha]$ . Тогда

$$\Phi_{n, \alpha}(t) := \beta_{n, \alpha} + 2 \sum_{k=1}^n \beta_{n-k, \alpha} \cos kt \geq 0 \quad (49)$$

для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Действительно, так как последовательность  $\{\beta_{n-k, \alpha}\}_{k=0}^n$  при  $\alpha \geq 1$  выпукла вниз, неравенство (49) проверяется двойным преобразованием Абеля.

Пусть  $D$  — неприводимая ограниченная симметричная область трубчатого типа, реализованная как единичный шар относительно спектральной нормы в комплексификации  $V^\mathbb{C}$  простой евклидовой жордановой алгебры  $V$  (см., например, [43]). Граница Шилова  $\Sigma$  для  $D$  состоит из всех обратимых элементов  $z \in V^\mathbb{C}$ , таких что  $z^{-1} = \bar{z}$ . Положим

$$G(\Sigma) := \{g \in \text{GL}(V^\mathbb{C}) : g\Sigma = \Sigma\},$$

и пусть  $U$  — связная компонента единичного элемента из  $G(\Sigma)$ . Через  $L^p(\Sigma)$  обозначаются пространства Лебега относительно  $U$ -инвариантной меры  $\sigma$  на  $\Sigma$ , нормированной условием  $\sigma(\Sigma) = 1$ . Пусть  $r = \text{rank } V$ . *Партицией* порядка  $r$  называют мультииндекс  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ , у которого  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ , при этом  $|m| := m_1 + \dots + m_r$ .

Пусть  $\mathcal{P}(V^\mathbb{C})$  — множество всех полиномов на  $V^\mathbb{C}$  и  $\mathcal{P}^k(V^\mathbb{C})$  — подпространство однородных полиномов степени  $k$ . *Естественное представление*  $\tau$  группы  $\text{GL}(V^\mathbb{C})$  на  $\mathcal{P}(V^\mathbb{C})$  определяется равенством

$$(\tau(g)p)(x) = p(g^{-1}x), \quad x \in V^\mathbb{C},$$

где  $g \in \text{GL}(V^\mathbb{C})$ ,  $p \in \mathcal{P}(V^\mathbb{C})$ . Для данной партии  $m$  обозначим через  $\mathcal{P}_m(V^\mathbb{C})$  подпространство в  $\mathcal{P}(V^\mathbb{C})$ , генерируемое полиномами  $\tau(g)\Delta_m$ ,  $g \in \text{GL}(V^\mathbb{C})$ , где  $\Delta_m$  — степенная функция порядка  $m$ .

Базис в  $\mathcal{P}_m(V^\mathbb{C})$ , ортонормированный относительно скалярного произведения в  $L^2(\Sigma)$ , обозначим через  $\{\varphi_1^m, \dots, \varphi_{d_m}^m\}$  (так что  $d_m := \dim \mathcal{P}_m(V^\mathbb{C})$ ). Имеют место ортогональные разложения

$$\mathcal{P}(V^\mathbb{C}) = \bigoplus_m \mathcal{P}_m(V^\mathbb{C}) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^k(V^\mathbb{C}) = \bigoplus_{|m|=k} \mathcal{P}_m(V^\mathbb{C}).$$

Все полиномы  $\{\varphi_j^m\}$  ( $m$  — произвольная партиция,  $1 \leq j \leq d_m$ ) занумеруем таким образом, что  $\deg \varphi_i \leq \deg \varphi_{i+1}$  для  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Для данного  $n \in \mathbb{N}$  положим  $n' := \min\{i: \deg \varphi_i = \deg \varphi_n\}$  и  $\tilde{n} := \deg \varphi_n$ .

Пусть  $D_R := \{Rz: z \in D\}$ ,  $R \geq 1$ , и

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z), \quad z \in D_R, \quad (50)$$

однородное полиномиальное разложение функции  $f$ , голоморфной в области  $D_R$ . Для произвольного  $\alpha > 0$  положим

$$(\mathcal{R}^\alpha f)(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j,\alpha} F_j(z),$$

где  $\beta_{0,\alpha} := \Gamma(1 + \alpha)/2$ ,  $\beta_{j,\alpha} := \Gamma(j + \alpha)/\Gamma(j)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).

Через  $[\alpha]$  обозначим целую часть  $\alpha$ . Отметим, что если  $D$  — единичный круг в  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha \geq 1$  и  $f(0) = \dots = f^{[\alpha]-1}(0) = 0$ , то  $(\mathcal{R}^\alpha f)(z) = z^\alpha f^{(\alpha)}(z)$ , где  $f^{(\alpha)}$  — производная Римана—Лиувилля порядка  $\alpha$  с начальной нулевой точкой. Если же  $D$  — единичный шар в  $\mathbb{C}^d$  и  $F_0 = 0$ , то значение  $\mathcal{R}^\alpha f$  при  $\alpha = 1$  совпадает с радиальной производной функции  $f$  (см. [16]).

Для  $1 \leq p < \infty$  пространства Харди  $H^p(D_R)$  (пространства Бергмана  $A^p(D_R)$ ) состоят из голоморфных в  $D_R$  функций  $f$ , имеющих конечные нормы

$$\|f\|_{H^p(D_R)} := \sup_{0 < r < R} \left( \int_{S^d} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}$$

(соответственно

$$\|f\|_{A^p(D_R)} := \left( \int_{D_R} |f(z)|^p d\nu(z) \right)^{1/p},$$

где  $\nu$  — мера Лебега на  $D_R$ ,  $\nu(D) = 1$ ). В случае  $p = \infty$

$$\|f\|_{H^\infty(D_R)} = \|f\|_{A^\infty(D_R)} := \sup\{|f(z)| : z \in D_R\}.$$

Для фиксированных  $\alpha > 0$ ,  $R \geq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  положим

$$\begin{aligned} W^\alpha H^p(D_R) &:= \{f : \mathcal{R}^\alpha f \in H^p(D_R), \|\mathcal{R}^\alpha f\|_{H^p(D_R)} \leq 1\}, \\ W^\alpha A^p(D_R) &:= \{f : \mathcal{R}^\alpha f \in A^p(D_R), \|\mathcal{R}^\alpha f\|_{A^p(D_R)} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Определим подпространства

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &:= \text{span}\{\varphi_i : \deg \varphi_i \leq n\}, \quad \Pi_n := \text{span}\{\varphi_i : i = 0, 1, \dots, n\}, \\ \pi_n &:= \text{span}\{\varphi_i : i = 0, 1, \dots, n' - 1\}. \end{aligned}$$

Через  $P_n^\alpha$  обозначим оператор, ставящий в соответствие функции  $f$  с однородным разложением (50) полином

$$(P_n^\alpha f)(z) := \sum_{j=0}^{\tilde{n}-1} \left( 1 - \frac{\beta_{j,\alpha}}{\beta_{2\tilde{n}-j,\alpha}} \left( \frac{1}{R} \right)^{2(\tilde{n}-j)} \right) F_j(z).$$

Для  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$\begin{aligned} X_p^n(D) &:= \{f \in H^p(D) : F_j = 0, j = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1\}, \\ Y_p^n(D) &:= \{f \in A^p(D) : F_j = 0, j = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1\}, \end{aligned}$$

где  $F_j$  берутся из однородного разложения (50) функции  $f$ .

Хорошо известно, что для любой функции  $f \in H^p(D)$  существует функция  $f^* \in L^p(\Sigma)$ , такая что  $f^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$  для почти всех  $\zeta \in \Sigma$  и  $\|f\|_{H^p(D)} = \|f^*\|_{L^p(\Sigma)}$ . Будем рассматривать  $X_p^n(D)$  и  $Y_p^n(D)$  как подпространства в  $L^p(\Sigma)$  и  $L^p(D)$  соответственно.

**Теорема 4.1.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $R \geq 1$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$d_n(W^\alpha H^p(D_R), L^p(\Sigma)) = \beta_{\tilde{n},\alpha}^{-1} R^{-\tilde{n}}$$

и такие же равенства верны для  $d^n$ ,  $\lambda_n$ ,  $b_n$ . Более того,

- а)  $\pi_n$  — оптимальное подпространство для  $d_n$ ;
- б)  $X_p^n(D)$  — оптимальное подпространство для  $d^n$ ;
- в)  $P_n^\alpha$  — оптимальный оператор для  $\lambda_n$ ;
- г)  $\Pi_n$  — оптимальное подпространство для  $b_n$ .

**Теорема 4.2.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $R \geq 1$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$d_n(W^\alpha A^p(D_R), L^p(D)) = \beta_{\tilde{n},\alpha}^{-1} R^{-\tilde{n}-2d/p}$$

и такие же равенства верны для  $d^n$ ,  $\lambda_n$ ,  $b_n$ . Более того,

- а)  $\pi_n$  — оптимальное подпространство для  $d_n$ ;
- б)  $Y_p^n(D)$  — оптимальное подпространство для  $d^n$ ;
- в)  $P_n^\alpha$  — оптимальный оператор для  $\lambda_n$ ;
- г)  $\Pi_n$  — оптимальное подпространство для  $b_n$ .

Доказательства этих двух теорем проводятся по аналогии с рассмотренным в [40, 44] случаем целого  $\alpha$ . При этом для вывода оценок поперечников снизу используются неравенства типа Бернштейна и Бернштейна—Уолша

$$\|\mathcal{R}^\alpha P_n\|_{H^p(D_R)} \leq \beta_{n,\alpha} \|P_n\|_{H^p(D_R)}, \quad \|\mathcal{R}^\alpha P_n\|_{A^p(D_R)} \leq \beta_{n,\alpha} \|P_n\|_{A^p(D_R)}$$

и

$$\|P_n(R \cdot)\|_{L^p(\Sigma)} \leq R^n \|P_n\|_{L^p(\Sigma)}, \quad \|P_n(R \cdot)\|_{L^p(D)} \leq R^{n+2d/p} \|P_n\|_{L^p(D)},$$

справедливые для  $P_n \in \mathcal{P}_n$ ,  $R \geq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha \geq 1$ . Для оценок сверху существенна неотрицательность обобщённого ядра Бабенко (предложение 4.2).

**Теорема 4.3.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $R > 1$ ,  $\alpha \geq 1$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(W^\alpha H^p(D_R), L^p(\Sigma)) &= \\ &= \frac{2}{(d+1)!(\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1} - \frac{2\alpha}{d! (\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d \log \log \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d\right), \end{aligned}$$

и такая же формула верна для  $\mathcal{H}_\varepsilon(W^\alpha A^p(D_R), L^p(D))$ .

Доказательство теоремы 4.3 аналогично доказательству формулы (2) статьи [29] и основано на приведённых выше результатах о поперечниках классов  $W^\alpha H^p(D_R)$  и  $W^\alpha A^p(D_R)$ .

## Литература

- [1] Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
- [2] Белый В. И. Современные методы геометрической теории функции комплексного переменного в задачах аппроксимации // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, № 3. — С. 3—40.
- [3] Белых В. Н. Оценки колмогоровской  $\varepsilon$ -энтропии компактных множеств бесконечно дифференцируемых непериодических функций (к проблеме Бабенко) // Докл. РАН. — 2013. — Т. 452, № 1. — С. 7—11.
- [4] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 3—22.
- [5] Додунова Л. К., Савихин С. А. Полнота подсистемы многочленов Фабера // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2012. — № 9. — С. 3—7.
- [6] Драгилев М. М. Об общих базисах пространств  $A(G)$  и  $\bar{A}(\bar{G})$  // Сиб. матем. журн. — 1999. — Т. 40, № 1. — С. 69—74.

- [7] Дынькин Е. М. Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова // Спектральная теория функций и операторов. II. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 155. — С. 41—76.
- [8] Ерохин В. Д. Об асимптотике  $\varepsilon$ -энтропии аналитических функций // ДАН СССР. — 1958. — Т. 120, № 5. — С. 949—952.
- [9] Ерохин В. Д. Некоторые новые теоремы об аналитическом отображении многосвязных областей // Успехи матем. наук. — 1960. — Т. 15, № 4. — С. 203—204.
- [10] Ерохин В. Д. Оценки  $\varepsilon$ -энтропии и линейных поперечников некоторых классов аналитических функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного / Под ред. А. И. Маркушевича. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 159—167.
- [11] Ерохин В. Д. О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитически продолжимых с данного континуума в данную область // Успехи матем. наук. — 1968. — Т. 23, № 1. — С. 91—132.
- [12] Коновалов В. Н. К задаче о поперечниках классов аналитических функций // Укр. матем. журн. — 1978. — Т. 30, № 5. — С. 668—670.
- [13] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Матем. заметки. — 1972. — Т. 12, № 4. — С. 465—476.
- [14] Пекарский А. А. Рациональные приближения функций с производными из пространства В. И. Смирнова // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 2. — С. 165—190.
- [15] Пеллер В. В. Рациональная аппроксимация в  $L_p$  и преобразования Фабера // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1987. — Т. 157. — С. 70—75.
- [16] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из  $\mathbb{C}^n$ . — М.: Мир, 1984.
- [17] Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1964.
- [18] Суетин П. К. Порядковое сравнение различных норм многочленов в комплексной области // Матем. зап. Уральск. ун-та. — 1966. — Т. 5, № 4. — С. 91—100.
- [19] Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984.
- [20] Суетин С. П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, № 1. — С. 45—142.
- [21] Тихомиров В. М. Теория приближений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. исслед. — 1987. — Т. 14. — С. 103—260.
- [22] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости. — М.: Мир, 1980.
- [23] Фарков Ю. А. Асимптотические свойства обобщённых базисных функций Фабера—Ерохина // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 4. — С. 173—189.
- [24] Фарков Ю. А. Базисные функции Фабера—Ерохина многих переменных и оценки  $\varepsilon$ -энтропии // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1982. — № 3. — С. 81—88.
- [25] Фарков Ю. А. Операторы Фабера—Ерохина и изоморфизмы некоторых пространств аналитических функций // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1982. — № 7. — С. 81—83.
- [26] Фарков Ю. А. Базисные функции Фабера—Ерохина в окрестности нескольких континуумов // Матем. заметки. — 1984. — Т. 36, № 6. — С. 883—892.
- [27] Фарков Ю. А. О поперечниках классов аналитических функций с ограниченными производными // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1988. — № 4. — С. 84—86.

- [28] Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из  $\mathbb{C}^n$  // Успехи матем. наук. — 1990. — Т. 45, № 5. — С. 197—198.
- [29] Фарков Ю. А. Об  $\varepsilon$ -энтропии классов голоморфных функций // Матем. заметки. — 2000. — Т. 68, № 2. — С. 286—293.
- [30] Фаркова Н. А. Применение многочленов Фабера к решению систем линейных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1988. — Т. 28, № 11. — С. 1634—1648.
- [31] Фаркова Н. А. Применение многочленов Фабера к вычислению собственных значений // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1992. — № 9. — С. 65—72.
- [32] Цвиль М. М. О сходимости шаровых средних двойных рядов Фурье—Фабера // Изв. высш. учебн. завед. Северо-кавказский рег. Естеств. науки. — 2005. — Т. 11. — С. 63—69.
- [33] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. — 1985. — Т. 23. — С. 3—124.
- [34] Andrievskii V., Blatt H.-P. On the distribution of zeros of Faber polynomials // Comput. Methods Funct. Theory. — 2011. — Vol. 11. — P. 263—282.
- [35] Borisov A. G., Shabanov S. V. Wave packet propagation by the Faber polynomial approximation in electrodynamics of passive media // J. Comput. Phys. — 2006. — Vol. 216. — P. 391—402.
- [36] Bouali A. Faber polynomials, Cayley—Hamilton equation and Newton symmetric functions // Bull. Sci. Math. — 2006. — Vol. 130. — P. 49—70.
- [37] Bruij I., Schmieder G. Best approximation and saturation on domains bounded by curves of bounded rotation // J. Approx. Theory. — 1999. — Vol. 100. — P. 157—182.
- [38] Carney A., Etropolski A., Pitman S. Powers of the eta-function and Hecke operators // Internat. J. Number Theory. — 2012. — Vol. 8. — P. 599—611.
- [39] Devys O. Faber polynomials and spectrum localisation // Comput. Methods Funct. Theory. — 2013. — Vol. 13. — P. 107—131.
- [40] Ding H., Gross K. I., Richards D. S. P. The  $N$ -widths of spaces of holomorphic functions on bounded symmetric domains of tube type. I // J. Approx. Theory. — 2000. — Vol. 104. — P. 121—141.
- [41] Duren P. L. Distortion in certain conformal mappings of an annulus // Michigan Math. J. — 1963. — Vol. 10, no. 4. — P. 431—441.
- [42] Dyn'kin E. M. The rate of polynomial approximation in the complex domain // Complex Analysis and Spectral Theory. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 864). — P. 90—142.
- [43] Faraut J., Koranyi A. Analysis on Symmetric Cones. — New York: Oxford Univ. Press, 1994.
- [44] Farkov Yu. A. The  $N$ -widths of Hardy—Sobolev spaces of several complex variables // J. Approx. Theory. — 1993. — Vol. 75. — P. 183—197.
- [45] Farkov Yu. A.  $n$ -widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity. — 1996. — Vol. 12. — P. 58—79.
- [46] Fisher S. D., Micchelli C. A. The  $n$ -width of sets of analytic functions // Duke Math. J. — 1980. — Vol. 47. — P. 789—801.
- [47] Frerick L., Müller J. Polynomial approximation on compact sets bounded by Dini-smooth arcs // Comput. Methods Funct. Theory. — 2003. — Vol. 3. — P. 273—284.

- [48] Gaier D. On the decrease of Faber polynomials in domains with piecewise analytic boundary // *Analysis*. — 2001. — Vol. 21. — P. 219–229.
- [49] Ganelius T. H. Rational approximation in the complex plane and on the line // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* — 1976. — Vol. 2. — P. 129–145.
- [50] Garaus I. The numerical solution for system of singular integro-differential equations by Faber—Laurent polynomials // *Numerical Analysis and Its Applications: Third Int. Conf., NAA 2004, Rousse, Bulgaria, June 29—July 3, 2004, Revised Selected Papers* / Zh. Li, L. Vulkov, J. Wąsniewski, eds. — Berlin: Springer, 2005. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 3401). — P. 219–223.
- [51] Henrici P. *Applied and Computation Complex Analysis*. Vol. 3. — New York: Wiley, 1986.
- [52] Hübner O. Die Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen // *Math. Z.* — 1967. — Bd. 99. — S. 193–206.
- [53] Jafarov S. Z. The inverse theorem of approximation theory in Smirnov—Orlicz classes // *Math. Inequal. Appl.* — 2012. — Vol. 15, no. 4. — P. 835–844.
- [54] Novati P. Solving linear initial value problems by Faber polynomials // *Numerical Linear Algebra Appl.* — 2003. — Vol. 10. — P. 247–270.
- [55] Osipenko K. Y. Exact  $n$ -widths of Hardy—Sobolev classes // *Constr. Approx.* — 1997. — Vol. 13, no. 1. — P. 17–27.
- [56] Starke G., Varga R. S. A hybrid Arnoldi—Faber iterative method for nonsymmetric systems of linear equations // *Numer. Math.* — 1993. — Vol. 64. — P. 231–240.
- [57] Totik V. Chebyshev polynomials on a system of curves // *J. Anal. Math.* — 2012. — Vol. 118, no. 1. — P. 317–338.
- [58] Walsh J. L. Sur l'approximation par fonctions rationnelles et par fonctions holomorphes bornées // *Ann. Mat.* — 1955. — Vol. 39, no. 4. — P. 267–277.
- [59] Walsh J. L. On the conformal mapping of multiply connected regions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1956. — Vol. 82, no. 1. — P. 128–146.
- [60] Walsh J. L. A generalization of Faber's polynomials // *Math. Ann.* — 1958. — Vol. 136, no. 1. — P. 23–33.
- [61] Walsh J. L., Sewell W. E. Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials // *Duke Math. J.* — 1940. — Vol. 6, no. 3. — P. 658–705.
- [62] Wójcik P., Sheshko M. A., Sheshko S. M. Application of Faber polynomials to the approximate solution of singular integral equations with the Cauchy kernel // *Differ. Equations*. — 2013. — Vol. 49, no. 2. — P. 198–209.
- [63] Zaharyuta V. P. Kolmogorov problem on widths asymptotics and pluripotential theory // *Functional Analysis and Complex Analysis: Functional Analysis and Complex Analysis, September 17–21, 2007, Sabanci University, İstanbul, Turkey* / A. Aytuna, ed. — Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math.; Vol. 481). — P. 171–196.
- [64] Zakharyuta V. On asymptotics of entropy of a class of analytic functions // *Funct. Approx. Comment. Math.* — 2011. — Vol. 44, no. 2. — P. 307–315.
- [65] Zhang J. Symbolic and numerical computation on Bessel functions of complex argument and large magnitude // *J. Comput. Appl. Math.* — 1996. — Vol. 75. — P. 99–118.