Кольца Безу конечной размерности Крулля

А. ГАТАЛЕВИЧ
Львовский национальный университет
им. Ивана Франко, Украина
e-mail: gatalevych@ukr.net

УДК 512.552.12

Ключевые слова: кольцо Безу, адекватное кольцо, кольцо элементарных делителей, полунаследственное кольцо, размерность Крулля, стабильный ранг.

Аннотация

Доказано, что если R — коммутативное кольцо Безу стабильного ранга 2 и размерности Крулля 1, то R — кольцо элементарных делителей.

Abstract

A. Gatalevych, Bézout rings with finite Krull dimension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 3—5.

It is proven that if R is a commutative Bézout ring of Krull dimension 1, with stable range 2, then R is an elementary divisor ring.

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Заметим, что размерностью Крулля кольца R является максимальная длина n цепочки

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$$

простых идеалов, кроме R. По соглашению кольцо R имеет размерность Крулля -1 тогда и только тогда, когда оно тривиально (т. е. $1_R = 0_R$) [5]. Под кольцом Безу будем понимать кольцо, в котором все конечно порождённые идеалы являются главными. Матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Матрица A размера $n \times m$ допускает диагональную редукцию, если существуют такие обратимые матрицы $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(R)$, что PAQ является диагональной матрицей. Скажем, что две матрицы A и B над кольцом R эквивалентны, если существуют такие обратимые матрицы P, Q, что $B = PAQ$. Следуя [3], назовём R кольцом элементарных делителей, если каждая матрица над R эквивалентна диагональной матрице (d_{ii}) со свойством, что каждый элемент d_{ii} является делителем $d_{i+1,i+1}$. Кольцо R называется кольцом Эрмита, если каждая матрица размера 1×2 над R допускает диагональную редукцию. Строка $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ над кольцом R называется унимодулярной, если $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$. Если $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ — унимодулярная n-строка над R, то $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ называется редуцированной, если существует такая $(n-1)$-строка $(b_1; b_2; \ldots; b_{n-1})$, что

© 2014 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

$(n-1)$-строка $(a_1+a_nb_1; a_2+a_nb_2; \ldots; a_{n-1}+a_nb_{n-1})$ является унимодулярной. Говорят, что кольцо R имеет стабильный ранг n, если n является таким наименьшим положительным целым, что $(n+1)$-строка является редуцированной. Коммутативное кольцо Безу R с единицей называется адекватным, если оно удовлетворяет следующим условиям: для любых $a, b \in R$, $a \neq 0$, существуют такие $a_i, d \in R$, что

(i) $a = a_i d$,

(ii) $(a_i, b) = (1)$,

(iii) для каждого необратимого делителя d' элемента d имеем $(d', b) \neq (1)$ [2].

В теоремах 1, 2 получены обобщения результатов из [1,7].

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо Безу стабильного ранга 2 и размерности Крулля 1. Тогда R является кольцом элементарных делителей. Фактически оно адекватно.*

Доказательство. Согласно результатам работы [9] мы можем предполагать, что кольцо R является редуцированным. Поскольку кольцо Безу стабильного ранга 2 является кольцом Эрмита, то согласно [4, с. 232] мы должны доказать, что если $a, d \in R$, то существуют элементы $b, c \in R$ с условиями, что $a = bc$ и необратимый делитель элемента c взаимно прост с d. Рассмотрим следующую последовательность элементов из R: $a_1 = a/(a,d)$, $a_2 = a_1/(a_1,d)$, $a_3 = a_2/(a_2,d), \ldots$. Мы утверждаем, что для некоторого целого n выполнено $(a_n, d) = 1$. В противном случае рассмотрим следующую цепочку идеалов кольца R:

$$(a,d) \subseteq (a_1,d) \subseteq (a_2,d) \subseteq \ldots .$$

Их объединение является собственным идеалом в R и поэтому содержится в некотором максимальном идеале M. Поскольку кольцо R редуцированное, согласно [6, 2.1] R_M является областью Безу; более того, оно является областью нормирования. В области нормирования R_M если $(a_i, d) = (a_i)$ для некоторого i, то $(a_{i+1}, d) = R_M$, получаем противоречие. Альтернативой является $(a_i, d) = (d)$ для каждого i, но тогда получаем, что $a \in (d^i)R_M$ для каждого i, т. е. $a \in \bigcap (d^i)R_M$. Но по [6, с. 187] $\bigcap (d^i)R_M \in \operatorname{spec} R_M$, и следовательно, $a = 0$, так как R_M — одномерная область. Это завершает доказательство. □

Теорема 2. *Пусть R — коммутативное полунаследственное кольцо Безу размерности Крулля 2. Тогда R является кольцом элементарных делителей.*

Доказательство. В [7] доказана теорема: пусть R — коммутативное полунаследственное кольцо Безу. Тогда R является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда R/dR является кольцом элементарных делителей для всех неделителей нуля $d \in R$. Пусть элемент d не является делителем нуля в R. Согласно [6] d не содержится ни в каком минимальном простом идеале. Тогда R/dR является коммутативным кольцом Безу стабильного ранга 2 и размерности Крулля 1. Тогда R/dR является кольцом элементарных делителей и по теореме 1 R также является кольцом элементарных делителей. □

Открытый вопрос. По [8] кольцо R является дробно P, при условии что классическое кольцо частных $Q(R/I)$ кольца R/I удовлетворяет P для каждого идеала I кольца R. В [10] доказана теорема 7: дробно-регулярное кольцо Безу стабильного ранга 2 является кольцом элементарных делителей. Автор ставит следующий вопрос. Будет ли каждое коммутативное кольцо Безу стабильного ранга 2 и размерности Крулля 1 дробно-регулярным?

Литература

[1] Brewer J. W., Naude C., Naude G. On Bézout domains, elementary divisor rings, and pole assignability // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12 (24). — P. 2987—3003.

[2] Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 225—236.

[3] Kaplansky I. Elementary divisor rings and modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 66. — P. 464—491.

[4] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan, 1969.

[5] Kaplansky I. Commutative Rings. — Univ. of Chicago Press, 1974.

[6] Maltis E. The minimal spectrum of a reduced ring // Illinois J. Math. — 1983. — Vol. 27, no. 3. — P. 353—391.

[7] Shores T. S. Modules over semihereditary Bézout rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 46. — P. 211—213.

[8] Vamos P. The decomposition of finitely generated modules and fractionally self-injective rings // J. London Math. Soc. — 1977. — Vol. 16. — P. 209—220.

[9] Zabavsky B. V. Diagonalization of matrices over rings of finite stable rank // Visnyk Lviv. Univ. — 2003. — Vol. 61. — P. 206—211.

[10] Zabavsky B. V. Fractionally regular Bézout rings // Mat. Stud. — 2009. — Vol. 32, no. 1. — P. 76—80.