Rolling simplexes and their commensurability. III (соотношения Капелли и их применения в дифференциальных алгебрах)

О. В. ГЕРАСИМОВА, Ю. П. РАЗМЫСЛОВ, Г. А. ПОГУДИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pogudin.gleb@gmail.com

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, гомоморфизмы Тейлора, соотношения Капелли, первичная алгебра.

Аннотация

Излагается алгебраическая точка зрения на то, что следует считать решением системы алгебраических дифференциальных уравнений. Теорема Капелли о ранге применяется для случая первичных и простых дифференциальных алгебр.

Abstract

O. V. Gerasimova, Yu. P. Razmyslov, G. A. Pogudin, Rolling simplexes and their commensurability. III (Capelli identities and their application to differential algebras), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 7—24.

In the present paper, we describe an algebraic point of view on the notion of the solution of a system of algebraic differential equations. We apply Capelli's rank theorem to prime and simple differential algebras.

Cogito ergo sum.

Мы реалисты, а не мистики.
Нам в мушкетёрах равных нет,
Ведь мы — гвардейцы — в Новой Физике
Настроим старый инструмент.

Из гимна ЛВМ

1. Простые и максимальные идеалы в счётномерных коммутативно-ассоциативных алгебрах над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля k.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 7—24.

Предложение 1.1. *Для любой коммутативно-ассоциативной k-алгебры A при ненулевом k-гомоморфизме $\varphi\colon A \to \bar{k}$ k-подалгебра $\varphi(A)$ в $\bar{k}$ является подполем. В частности, ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ — простой идеал в k-алгебре A.*

Доказательство. Любой ненулевой элемент $\varphi(a)$ в $\bar{k}$ является алгебраическим над k, через $f(t) \in k[t]$ обозначим его минимальный многочлен. Так как в $\bar{k}$ нет делителей нуля, $f(0) \neq 0$. Следовательно, k-подалгебра, порождённая элементом $\varphi(a)$, содержит единицу поля k. Более того, записав многочлен $f(t)$ в виде $f(0) + t \cdot g(t)$, из равенства $f(0) + \varphi(a) \cdot g\big(\varphi(a)\big) = 0$ заключаем, что $-g\big(\varphi(a)\big)/\varphi(0)$ — обратный элемент к $\varphi(a)$, содержащийся в k-подалгебре $k[\varphi(a)]$ поля $\bar{k}$. $\square$

Предложение 1.2. *Любая простая коммутативно-ассоциативная алгебра A над полем k содержит единичный элемент и является полем.*

Доказательство. Так как A — простая k-алгебра, то в ней ненулевое умножение и нет идеалов, кроме нулевого и самой A. Следовательно, для любого ненулевого элемента $a \in A$ идеал

$$A \cdot a \overset{\text{def}}{=} \{d \cdot a \mid d \in A\}$$

или равен нулю, или совпадает с A. Если $A \cdot a = 0$, то одномерное пространство ka является ненулевым идеалом, т. е. $ka = A$. Однако в этом случае $A \cdot A = A \cdot ka = A \cdot a = 0$, т. е. в A нулевое умножение. Таким образом, $A \cdot a = A$ для всякого $a \neq 0$. Поэтому $a \in A \cdot a$ и $e \cdot a = a$ для некоторого элемента $e \in A$. Но тогда для каждого $b \in A = A \cdot a$ имеет место представление $b = c \cdot a$, откуда следует, что $e \cdot b = c \cdot e \cdot a = b$. Значит, e — единичный элемент в A. Более того, $e \in A = A \cdot a$, т. е. $e = d \cdot a$ для некоторого $d \in A$. Значит, любой ненулевой элемент в A имеет обратный. $\square$

Теорема 1.1. *Пусть M — максимальный идеал коммутативно-ассоциативной k-алгебры с единицей A. Пусть также k-размерность A меньше мощности поля k. Тогда фактор-алгебра A/M является полем, в котором любой элемент алгебраичен над k.*

Доказательство. Рассматривая вместо A алгебру A/M, можно считать A полем и M нулевым идеалом. Рассмотрим произвольный $a \in A$. Мощность множества

$$\left\{ \frac{1}{a - \alpha} \;\middle|\; \alpha \in k \right\}$$

превосходит $\dim_k A$. Значит, между элементами этого множества есть линейная зависимость над k:

$$0 = \frac{\beta_1}{a - \alpha_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{a - \alpha_n} = \frac{p(a)}{(a - \alpha_1) \ldots (a - \alpha_n)},$$

где $p(x) \in k[x]$. Таким образом, $p(a) = 0$, т. е. a алгебраичен над k. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$ и A счётномерна над k. Тогда для любого максимального идеала $M \subset A$ поле A/M изоморфно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.*

Следствие 1.2. *Пусть размерность k-алгебры A меньше мощности k. Для любого ненильпотентного элемента $a \in A$ существует k-гомоморфизм $\varphi\colon A \to \bar{k}$, при котором $\varphi(a) \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку k-гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_M} A[a^{-1}]/M \overset{\varepsilon}{\subset} \bar{k},$$

где $A[a^{-1}]$ — локализация алгебры A по ненильпотентному элементу a, M — произвольный максимальный идеал k-алгебры с единицей $A[a^{-1}]$, ε — любое вложение алгебраического расширения $A[a^{-1}]/M$ поля k в $\bar{k}$. Тогда для k-гомоморфизма $\varphi \overset{\text{def}}{=} \varepsilon \circ \varepsilon_M \circ \varepsilon_a$

$$\varphi(a) \cdot \bigl(\varepsilon \circ \varepsilon_M(a^{-1})\bigr) = \varepsilon \circ \varepsilon_M(\varepsilon_a(a) \cdot a^{-1}) = \varepsilon \circ \varepsilon(a/a) = 1.$$

Следовательно, $\varphi(a) \neq 0$. □

Следствие 1.3. *Пересечение всех простых идеалов k-алгебры A, размерность которой строго меньше мощности поля k, совпадает с наибольшим в A идеалом, состоящим из нильпотентных элементов.*

2. Коммутативные алгебры с одним дифференцированием

Определение 2.1. k-линейное отображение D коммутативно-ассоциативной k-алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Алгебра с выделенным дифференцированием называется *дифференциальной*. Результат применения дифференцирования к элементу a мы будем обозначать через a'.

Полилинейными сигнатурными операциями дифференциальной алгебры являются билинейное умножение $*\colon A \otimes_k A \to A$ и линейная унарная операция $D\colon A \to A$.

Определение 2.2. Элемент $a \in A$ называется константой, если $a' = 0$. Легко убедиться, что константы образуют подалгебру. В случае когда A — поле, константы образуют подполе.

Определение 2.3. Гомоморфизмом дифференциальной k-алгебры A_1 относительно k-дифференцирования D_1 в дифференциальную k-алгебру A_2 относительно D_2 называется k-линейное отображение $\varphi\colon A_1 \to A_2$, при котором

$$\varphi(D_1 \times a_1) = D_2 \times \varphi(a_1), \quad \varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \quad (a_1, a_2 \in A_1).$$

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением дифференциальных алгебр над полем действительных и комплексных чисел.

Пример 2.0. $A = k[[t]]$ — алгебра формальных степенных рядов от переменной t относительно стандартного дифференцирования

$$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}.$$

Эта алгебра не содержит делителей нуля, а её поле частных совпадает с $k((t))$, алгеброй формальных рядов Лорана. В алгебрах $k[[t]]$, $k((t))$ нет нетривиальных констант, т. е. если

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(t) = 0,$$

то $f(t) \in k$. В алгебре A все идеалы являются главными (нетривиальные имеют вид $A \cdot t^i$ $(i \in \mathbb{N})$), а так как основное поле k имеет нулевую характеристику $(D \times t^i = i \cdot t^{i-1} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots)$, в A нет нетривиальных дифференциальных идеалов. Таким образом, дифференциальная алгебра $k[[t]]$ является примером простой дифференциальной алгебры с единицей. Особо отметим, что любое дифференцирование алгебры $k[[t]]$ имеет вид

$$f(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \quad (f(t) \in k[[t]]).$$

Предложение 2.1. *Если* $\operatorname{char} k = 0$, *то ряды Лорана* $f_1(t), \ldots, f_n(t) \in k((t))$ *линейно зависимы над* k *тогда и только тогда, когда определитель*

$$|f_1, \ldots, f_n| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Доказательство. Согласно [9, предложение 2.8] элементы дифференциального поля линейно зависимы над полем констант тогда и только тогда, когда соответствующий определитель равен нулю. Так как поле констант рядов Лорана совпадает с основным полем, утверждение предложения следует отсюда напрямую. □

Пример 2.1. Пусть $A = H(D)$ — алгебра всех голоморфных функций от переменной z, определённых в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. Из элементарной теории функций одного комплексного переменного следует, что все такие функции бесконечно дифференцируемы относительно d/dz, непрерывны и в ε-окрестности любой точки $z_0 \in D$ ряд Тейлора любой такой функции сходится к ней самой. В частности, A не содержит делителей нуля и является областью целостности.

Пример 2.2. Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ $(k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C})$ — алгебра многочленов от n переменных. Любое дифференцирование $D\colon A \to A$ однозначно определяется своими значениями на $x_1, \ldots, x_n$. При этом если

$$D \times x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \in A \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пусть φ — произвольный дифференциальный k-гомоморфизм дифференциальной k-алгебры A относительно D в дифференциальную k-алгебру $k[[t]]$ относительно d/dt. Тогда степенные ряды $\varphi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ от переменной t являются формальными решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(\varphi(x_i)\big) = \Big(\varphi(D \times x_i) = \varphi\big(f_i(x_1, \ldots, x_n)\big)\Big) = \\ = f_i\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}$$

Из теоремы Коши—Ковалевской вытекает, что эти степенные ряды сходятся в некоторой окрестности нуля к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

с начальным условием $x_i(0) = \varphi(x_i)|_{t=0}$.

Следствие 2.1. *Пусть A — конечно порождённая коммутативно-ассоциативная алгебра над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, D — произвольное её дифференцирование. Тогда для любого дифференциального k-гомоморфизма*

$$\varphi\colon A \to \mathbb{C}[[t]], \quad \varphi(D \times x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\varphi(a)$$

все степенные ряды $\varphi(a)$ (a пробегает A) сходятся в некоторой окрестности нуля поля $\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ порождающие элементы алгебры A. Дифференцирование $D\colon A \to A$ полностью определяется своими значениями на $a_1, \ldots, a_m$, которые полиномиально выражаются через $a_1, \ldots, a_m$.

Зафиксируем многочлены $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_m]$, для которых

$$D \times a_i = f_i(a_1, \ldots, a_m) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Положим

$$\bar{D} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Эпиморфизм $\bar{\varphi}\colon k[x_1, \ldots, x_m] \to A$, при котором $\bar{\varphi}(x_i) \overset{\text{def}}{=} a_i$, является гомоморфизмом дифференциальной алгебры $k[x_1, \ldots, x_m]$ относительно дифференцирования $\bar{D}$ на дифференциальную k-алгебру A относительно D. Действительно, для любого $g \in K[x_1, \ldots, x_m]$

$$\bar{\varphi}\big(\bar{D}\times g(x_1,\ldots,x_m)\big)=\bar{\varphi}\bigg(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot f_i(x_i,\ldots,x_m)\bigg)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\bigg(\frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{x_1=a_1,\ldots,x_m=a_m}\bigg)\cdot f_i(a_1,\ldots,a_m)=D\times g(a_1,\ldots,a_m)=D\times\bar{\varphi}(g).$$

Следовательно, как было отмечено в примере 2.2, степенные ряды

$$\varphi(\bar{\varphi}(x_i))\quad(i=1,\ldots,m)$$

сходятся в некоторой окрестности нуля. □

Пример 2.3. Пусть $A=C^\infty(a,b)$ — $\mathbb{R}$-алгебра бесконечно дифференцируемых функций от одной действительной переменной t на интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$ относительно естественного дифференцирования $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Очевидно, что в этой алгебре есть делители нуля, но в ней нет нильпотентных элементов. Несмотря на более чем четырёхвековую традицию использования этой алгебры для отыскания решений обыкновенных дифференциальных уравнений, она не является естественным объектом (в отличие от алгебр из примеров 2.0, 2.1) для представления конечно порождённых дифференциальных k-алгебр. Известно огромное количество примеров функций $x(t)\in C^\infty(a,b)$, для которых ряд Тейлора в каждой точке $t_0\in(a,b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε-окрестности t_0. Например, ряд Тейлора функции

$$f(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\sqrt{2^k}}\cos(2^k t)$$

расходится в любой точке $t_0\in(-\infty,\infty)$. Но и здесь теорема Коши—Ковалевской и следствие из неё позволяют нащупать подход.

Предложение 2.2. *Пусть в каждой точке $t_0\in(a,b)$ ряд Тейлора функции $x(t)\in C^\infty(a,b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε-окрестности t_0. Тогда дифференциальная $\mathbb{R}$-подалгебра, порождённая $x(t)$, изоморфна свободной дифференциальной алгебре ранга 1, т. е. функции $x(t),x'(t),\ldots,x^{(i)}(t)$ алгебраически независимы над $\mathbb{R}$.*

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

Предложение 2.3. *Рассмотрим конечно порождённую дифференциальную подалгебру $A\subset C^\infty(a,b)$. Найдётся интервал $(a_1,b_1)\subset(a,b)$, такой что для любого интервала $(a_2,b_2)\subset(a_1,b_1)$ подалгебра $A|_{(a_2,b_2)}$ изоморфна $A|_{(a_1,b_1)}$. Более того, алгебра $A|_{(a_1,b_1)}$ является областью целостности.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует цепочка интервалов

$$(a,b)\supset(a_1,b_1)\supset(a_2,b_2)\supset\ldots,$$

такая что отображение сужения $A|_{(a_i,b_i}\to A|_{(a_{i+1},b_{i+1})}$ имеет нетривиальное ядро для всех i. Пусть A порождается элементами $a_1,\ldots,a_n$. Через $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ будем обозначать свободную дифференциальную алгебру от n образующих (см.

[1, с. 9]). Каждому ограничению $A|_{(a_i,b_i)}$ соответствует идеал I_i — ядро эпиморфизма $f_i\colon \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\} \to A|_{(a_i,b_i)}$, где $f_i(x_j) = a_j$. Заметим, что идеалы I_i образуют возрастающую цепь $I_1 \subset I_2 \subset I_2 \subset \ldots$. Однако, так как алгебра $C^\infty(a,b)$ не содержит нильпотентов, все I_i радикальны, что невозможно по теореме Ритта—Роденбуша ([1, теорема 7.1]).

Для доказательства второго утверждения предположим, что нашлись ненулевые $f,g \in A|_{(a_1,b_1)}$, такие что $fg = 0$. Существует интервал $(a_2,b_2) \subset (a_1,b_1)$, такой что $f(x) \neq 0$ во всех $x \in (a_2,b_2)$. Тогда g лежит в ядре гомоморфизма сужения $A|_{(a_1,b_1)} \to A|_{(a_2,b_2)}$, что противоречит выбору (a_1,b_1). □

3. Техника гомоморфизмов Тейлора

В этом разделе все рассматриваемые дифференциальные k-алгебры являются счётномерными и $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. Обозначим через $\operatorname{Spec}_k A$ спектр простых идеалов k-алгебры A. Согласно результатам раздела 1 для любого идеала $M \in \operatorname{Spec}_k A$ фактор-алгебра A/M является полем, изоморфным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $\psi\colon A \to \mathbb{C}$ — произвольный k-гомоморфизм k-алгебры A в $\mathbb{C}$. Для любого элемента $a \in A$ определим степенной ряд $\tilde\psi(a) \in \mathbb{C}[[t]]$ по формуле

$$\tilde\psi(a) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \psi(D^i \times a)\frac{t^i}{i!},$$

где D — k-дифференцирование A. Из этого определения немедленно следует, что

$$\tilde\psi(a_1 * a_2) = \tilde\psi(a_1) * \tilde\psi(a_2), \quad \tilde\psi(D \times a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tilde\psi(a)$$

для любых элементов a_1, a_2, a алгебры A, т. е. k-линейное отображение $\tilde\psi\colon A \to \mathbb{C}[[t]]$ является k-гомоморфизмом дифференциальной k-алгебры A относительно k-дифференцирования D в дифференциальную $\mathbb{C}$-алгебру степенных рядов $\mathbb{C}[[t]]$ относительно k-дифференцирования d/dt. Этот дифференциальный k-гомоморфизм мы будем называть гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi\colon A \to \mathbb{C}$.

Замечание. Очевидно, что любой дифференциальный k-гомоморфизм $\varphi\colon A \to \mathbb{C}[[t]]$ является гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi = \varepsilon \circ \varphi$, где ε — канонический $\mathbb{C}$-гомоморфизм $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}$, при котором $\varepsilon\big(f(t)\big) \overset{\text{def}}{=} f(0)$. Действительно, если

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!},$$

то

$$\tilde\psi(a) = \sum_{i=0}^{\infty}(\varepsilon \circ \varphi)(D^i \times a)\frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{dt}^i}\varphi(a)\right)\frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\frac{t^i}{i!} = \varphi(a).$$

Аналитический спектр

Для любого $M \in \operatorname{Spec}_k A$ обозначим через ψ_M k-гомоморфизм k-алгебры A на фактор-алгебру A/M, которая изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Тогда с точностью до комплексного сопряжения можно считать, что ψ_M — это k-гомоморфизмом k-алгебры A в поле $\mathbb{C}$. Обозначим через $\overline{\operatorname{Spec}}_k A$ подмножество в $\operatorname{Spec}_k A$, составленное из тех простых идеалов M, для которых при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M\colon A \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_M(A)$ состоит из рядов, сходящихся в некоторой ε-окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Оказывается, что k-гомоморфизмов $\psi_M \to \mathbb{C}$ ($M \in \overline{\operatorname{Spec}}_k A$) достаточно много.

Теорема 3.1. *Пусть A — конечно порождённая дифференциальная k-алгебра относительно дифференцирования D. Тогда для любого ненильпотентного элемента $a \in A$ существует $M \in \overline{\operatorname{Spec}}_k A$, такой что $\psi_M(a) \neq 0$.*

Доказательство. Локализация $A[a^{-1}]$ k-алгебры A по ненильпотентному элементу a имеет единичный элемент a/a и является конечно порождённой относительно D дифференциальной k-алгеброй. Пусть I — произвольный максимальный дифференциальный идеал. Тогда фактор-алгебра $B \overset{\text{def}}{=} A/I$ является простой дифференциальной k-алгеброй с единицей, в которой элемент $a + I$ обратим. Из теоремы Ю. П. Размыслова (см. [4]) следует, что B — область целостности и в B существует такой элемент b, что локализация $B[b^{-1}]$ имеет конечное число образующих как коммутативно—ассоциативная (не дифференциальная) k-алгебра. Согласно следствию из теоремы Коши—Ковалевской для любого идеала $N \in \operatorname{Spec}_k B[b^{-1}]$ при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_N\colon B[b^{-1}] \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_N(B[b^{-1}])$ состоит из степенных рядов, сходящихся в некоторой ε-окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Следовательно, ядро M k-гомоморфизма

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_I} A[a^{-1}]/I = B \xrightarrow{\varepsilon_b} B[b^{-1}] \xrightarrow{\psi_N} \mathbb{C}.$$

является простым идеалом из $\overline{\operatorname{Spec}}_k A$ ($\tilde{\psi}_M = \tilde{\psi}_N \circ \varepsilon_b \circ \varepsilon_I \circ \varepsilon_a$), для которого $\psi_M(a)$ — обратимый элемент в $\mathbb{C}$, т. е. $\psi_M(a) \neq 0$. □

Лемма о нильпотентном элементе

Обозначим через $W(a_1, \ldots, a_n)$ бесконечную матрицу, у которой в i-й строке j-го столбца ($i = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, n$) стоит элемент $D^i \times a_j$.

Лемма 3.1. *Если самый верхний минор n-го порядка $|a_1, \ldots, a_n|$ матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ является нильпотентным элементом в k-алгебре A, то и все остальные миноры n-го порядка матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ нильпотентны.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм дифференциальных алгебр $\psi\colon A \to \mathbb{C}[[t]]$. Так как в $\mathbb{C}[[t]]$ нет нильпотентов, верхний $(n \times n)$-минор матрицы $W\bigl(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\bigr)$ равен нулю. Согласно предложению 2.1 ряды $\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$ линейно зависимы над k, т. е. любой $(n \times n)$-минор матрицы $W\bigl(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\bigr)$ равен нулю. Таким образом, все $(n \times n)$-миноры

$W(a_1, \ldots, a_n)$ лежат в ядре любого гомоморфизма в $\mathbb{C}[[t]]$. Такое возможно только для нильпотентных элементов. Действительно, для ненильпотентного элемента a следствие 1.3 гарантирует наличие гомоморфизма k-алгебр $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$, при котором $\varphi(a) \neq 0$. Теперь достаточно рассмотреть соответствующий гомоморфизм Тейлора $\tilde{\varphi}$. □

Замечание. При $n = 1$ из леммы 3.1 вытекает, что над полями нулевой характеристики нильпотентные элементы при дифференцировании переходят в нильпотентные. Комбинаторное доказательство этого факта приведено в [1, лемма 1.7].

4. Соотношения Капелли и теорема о ранге

Определение 4.1. k-алгебра A сигнатуры Ω называется *первичной*, если равенство $(J_1, J_2) = 0$ влечёт $J_1 = 0$ или $J_2 = 0$, и *полупервичной*, если из равенства $(J, J) = 0$ следует, что $J = 0$ для любых идеалов J, J_1, J_2 алгебры A.

Это определение можно проинтерпретировать следующим образом. Алгебра A первична, если для любых $a, b, a_i \in A$, где $i \in (1, n)$, существует полилинейный по a, b полином $p(a, b, a_i)$, такой что

$$p(a, b, a_i) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot a \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_j \cdot b \cdot a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0.$$

Алгебра A полупервична, если для любого $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ существует моном, в котором a встречается n раз:

$$\ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \neq 0.$$

Следуя [3, § 3], введём понятие центроида Мартиндейла. Пусть A — первичная k-алгебра сигнатуры Ω и $D = D(A)$ — связанная с ней ассоциативная подалгебра в $\operatorname{End}_k A$. Пусть P — инъективная оболочка D-модуля A. Обозначим через $E = \operatorname{End}_D P$ алгебру всех эндоморфизмов D-модуля P, а через $Q = EA$ — D-подмодуль в P. Известно, что в таком случае ограничение ρ действия алгебры E на D-модуль Q коммутативно. Значит, алгебра $C = E/\operatorname{Ker}\rho$ коммутативна, её мы и называем *центроидом Мартиндейла*. Мы можем продолжить все операции Ω по C-линейности с алгебры A на Q и наделить Q структурой C-алгебры. Тогда C-алгебру Q сигнатуры Ω назовём *центральным замыканием* алгебры A.

Предложение 4.1 [3, 3.2]. *Если A — первичная k-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C(A)$ является полем, $Q(A)$ — первичной K-алгеброй и C-алгебра Q характеризуется тремя свойствами*:

1) $Q = CA$;
2) *произвольный ненулевой D-подмодуль в Q имеет ненулевое пересечение с A*;

3) *любой частичный D-эндоморфизм $\varkappa$ ненулевого идеала J алгебры A в A однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на J совпадает с $\varkappa$.*

Для формулировки теоремы о ранге нам понадобятся следующие определения.

Определение 4.2. Пусть A обозначает k-алгебру сигнатуры Ω, а F — абсолютно свободную k-алгебру той же сигнатуры со свободными образующими x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots$). Любой полином $d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ из алгебры F, полилинейный и кососимметричный относительно $x_1, \dots, x_k$, мы называем полиномом Капелли порядка k. Пусть V — произвольное k-подпространство в A. Будем говорить, что на V выполняются все тождества Капелли порядка k, если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов $v_1, \dots, v_k \in V$, $a_1, \dots, a_l \in A$ в алгебре A выполняется равенство

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

Определение 4.3. Рангом k-линейного подпространства V относительно алгебры A назовём наименьшее число k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. Будем обозначать это число через $\mathrm{rank}(A, V)$.

Теорема 4.1 (теорема о ранге). *Пусть V — k-подпространство в первичной k-алгебре A сигнатуры Ω. Если $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $Q(A)$ алгебры A*

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \mathrm{rank}(A, V) - 1.$$

k-алгебра A полилинейной сигнатуры Ω, среди операций которой есть не только унарные, называется *простой*, если она первична и в ней нет нетривиальных идеалов. В этом случае $D(A)$-модуль A неприводим и для любого ненулевого элемента c из центроида Мартиндейла $C(A)$ ненулевой подмодуль $c \cdot A$ в $Q(A)$ также неприводим над $D(A)$ и по свойству 2) предложения 4.1 должен иметь ненулевое пересечение с A. Следовательно, $c \cdot A$ совпадает с A и $c\colon A \to A$ — это эндоморфизм неприводимого $D(A)$-модуля A. По лемме Шура все такие эндоморфизмы в $\mathrm{End}_K A$ образуют тело, а так как в Ω есть неунарные операции, то это тело должно быть коммутативным. Это поле эндоморфизмов $D(A)$-модуля A принято называть центроидом K-алгебры A. Мы будем обозначать его через C_A.

Следствие 4.1. *Пусть V — k-подпространство в простой k-алгебре A, в сигнатуре Ω которой есть не только унарные операции. Если $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$, то размерность пространства $C_A \cdot V$ над центроидом C_A k-алгебры A равна* $\mathrm{rank}(A, V) - 1$.

Разумеется все эти утверждения, определения, понятия допускают истолкование применительно к коммутативно-ассоциативным дифференциальным k-алгебрам, сигнатура которых состоит из одной билинейной операции (умножения $*$) и одной унарной операции (дифференцирования $'$).

Для любого k-подпространства V дифференциальной k-алгебры A рассмотрим матрицу $M(A, V)$, столбцы которой пронумерованы элементами $v \in V$, а в i-й строке этого столбца стоит $v^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$. Тогда неравенство $\operatorname{rank}(A, V) < \infty$ означает, что все миноры порядка $1 + m = \operatorname{rank}(A, V)$ этой матрицы равны нулю, а какой-то минор m-го порядка нулю не равен. Более того, если $v_1, \dots, v_m \in V$ — это номера столбцов этого не равного нулю минора, то $v_1, \dots, v_m$ можно выбрать в качестве базиса C_A-подпространства $C_A \cdot V$ в $Q(A)$. Остаётся разобраться с понятиями первичности и полупервичности применительно к дифференциальным k-алгебрам. Первичность означает, что для любых двух ненулевых элементов a, b алгебры A найдутся такие натуральные числа i, j, что $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ (см. примеры в разделе 2).

Лемма 4.1. *Дифференциальная алгебра A является первичной тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in A$ найдётся такое n, что $a^{(n)}b \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть A первична, а числа i и j таковы, что $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$, причём среди возможных пар (i, j) выберем пару с наименьшей суммой, а среди таких пар выберем пару с наименьшим j. Пусть $j > 0$. Тогда $a^{(i)}b^{(j-1)} = 0$, т. е.

$$\left(a^{(i)}b^{(j-1)}\right)' = a_{(i+1)}b^{(j-1)} + a^{(i)}b^{(j)} = 0.$$

Значит, $a_{(i+1)}b^{(j-1)} = -a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$, что противоречит минимальности j. Таким образом, $j = 0$, что и требовалось. □

Из указанного выше предложения немедленно следует теорема 4.2.

Теорема 4.2. *Если дифференциальная k-алгебра A является областью целостности и Q_A — её классическое тело частных, то центроид Мартиндейла $C(A)$ дифференциальной алгебры A совпадает с подполем констант поля Q_A, т. е. $C(A)$. Более того, центральное замыкание $Q(A)$ совпадает с $C(A) \cdot A$.*

Последние результаты Г. Погудина (см. [2] или дополнение A) показывают, что первичные дифференциальные коммутативно-ассоциативные k-алгебры не обязаны быть областями целостности. В частности, дифференциальная алгебра над полем рациональных чисел, заданная одним дифференциальным образующим x и одним дифференциальным соотношением $x^2 = 0$, является первичной, но все её элементы нильпотентны. Так что теорема о ранге сохраняет свою актуальность и для класса дифференциальных алгебр.

Что же касается простых дифференциальных алгебр, то здесь дело обстоит совершенно идеально. Из результатов Ю. П. Размыслова (см. [3, 4]) вытекает следующая теорема.

Теорема 4.3. *Любая простая дифференциальная коммутативно-ассоциативная k-алгебра A $(\operatorname{char} k \neq 2)$ содержит единицу. Более того, если $\operatorname{char} k = 0$, то алгебра A — это область целостности.*

5. Свойства определителя Капелли—Вронского

Пусть $F_n = k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — свободная дифференциальная k-алгебра со свободными дифференциальными образующими $x_1, \ldots, x_n$. Как коммутативно-ассоциативная k-алгебра F_n порождена счётным числом алгебраически независимых переменных $x_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ x_i^{(0)} \overset{\text{def}}{=} x_i)$, на которых сигнатурное дифференцирование $'\colon F_n \to F_n$ действует естественным образом: $\bigl(x_i^{(j)}\bigr)' \overset{\text{def}}{=} x_i^{(j+1)}$.

Как и в разделе 4, обозначим через $W(x_1, \ldots, x_n)$ бесконечную матрицу с n столбцами и счётным числом строк, у которой на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит $x_i^{(j)}$. Верхний минор n-го порядка этой матрицы обозначим через $|x_1, \ldots, x_n|$, будем называть его определителем Капелли—Вронского для элементов $x_1, \ldots, x_n \in F_n$.

Зададим дифференциальную k-алгебру $\bar{F}_n$ (теми же самыми) дифференциальными образующими $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ и одним определяющим дифференциальным соотношением $|\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n| = 0$. Ядром канонического дифференциального k-гомоморфизма $\varepsilon\colon F_n \to \bar{F}_n$, при котором $\varepsilon(x_i) \overset{\text{def}}{=} \bar{x}_i$, является дифференциальный k-идеал в F_n, порождённый определителем $|x_1, \ldots, x_n|$. По лемме 3.1 следует, что тогда все миноры n-го порядка матрицы $W(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ будут нильпотентными. Так как в фактор-алгебре $\bar{F}_n / \operatorname{Rad} \bar{F}_n$ k-алгебры $\bar{F}_n$ по её ниль-радикалу $\operatorname{Rad} \bar{F}_n$ отсутствуют нильпотентные элементы, в k-подпространстве

$$V(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)/\mathrm{Rad}F_n \overset{\text{def}}{=} (k\bar{x}_1 + \ldots + k\bar{x}_n)/\operatorname{Rad} F$$

выполняются все соотношения Капелли порядка n.

Предложение 5.1. *Обозначим через m_j^i алгебраическое дополнение для элемента $x_i^{(j)}$ в квадратной матрице*

$$\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \ldots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & & & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Тогда

1) *имеем*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(s)} m_t^i = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t, \\ |x_1, \ldots, x_n|, & \text{если } s = t, \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_s^{(i)} m_i^t = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t, \\ |x_1, \ldots, x_n|, & \text{если } s = t; \end{cases}$$

2) *многочлен $m_s^i \cdot m_i^j - m_s^j \cdot m_t^i$ в алгебре многочленов $k[x_i^{(j)}|_{i=1,\ldots,n, j=0,\ldots,n-1}]$ делится на многочлен $|x_1, \ldots, x_n|$.*

Доказательство. Утверждение 1) — это азы линейной алгебры.

Хорошо известно (см. [6, с. 176, теорема 1]), что многочлен $|x_1,\ldots,x_n|$ неприводим. Тогда фактор-алгебра $k[x_i^{(j)}|_{i=1,\ldots,n,j=0,\ldots,n-1}]/|x_1,\ldots,x_n|$ не содержит делителей нуля. В её поле частных строки матрицы Вронского для $x_1,\ldots,x_n$ линейно зависимы, а значит, образ $m_s^i\cdot m_i^j - m_s^j\cdot m_t^i$ в $k[x_i^{(j)}|_{i=1,\ldots,n,j=0,\ldots,n-1}]/|x_1,\ldots,x_n|$ равен нулю, что и требовалось доказать. □

Следствие 5.1. *Положим*

$$r_i(x_1,\ldots,x_n)\stackrel{\mathrm{def}}{=} m_{n-1}^i (i=1,\ldots,n).$$

Тогда в фактор-алгебре $\bar F_n$ *имеют место следующие равенства*:

1) $r_1(\bar x_1,\ldots,\bar x_n)\cdot\bar x_1 + r_2(\bar x_1,\ldots,\bar x_n)\cdot\bar x_2+\ldots+r_n(\bar x_1,\ldots,\bar x_n)\cdot\bar x_n=0$,
2) $\bar r_i\cdot\bar r_j' - \bar r_i'\cdot\bar r_j=0$.

Более того, в дифференциальной алгебре $\bar F_n/\operatorname{Rad}\bar F_n$ ранг Капелли k-подпространства $(k\bar r_1+\ldots+k\bar r_n)$ не превосходит 1.

Определение 5.1. Элементы $\bar r_1(\bar x_1,\ldots,\bar x_n),\ldots,\bar r_n(\bar x_1,\ldots,\bar x_n)$ дифференциальной k-алгебры $\bar F_n$ будем называть *проинтегралами*, имея в виду, что в локализации $\bar F_n[\bar r_j^{-1}]$ элементы $\bar r_i/\bar r_j$ являются константами. Действительно, из свойства 2) следствия 5.1 вытекает, что $(\bar r_i/\bar r_j)'=0$ в $\bar F_n$.

Локализация $\bar F_n[r_j^{-1}]$, $j=1,\ldots,n$, допускает прозрачное описание.

5.1. Алгебра Н. Никчёмного

Обозначим через R_n дифференциальную k-алгебру, заданную дифференциальными образующими $v_1,\ldots,v_n$, $u_0,u_1,\ldots,u_{n-2}$, определяющими соотношениями

$$v_i^{(n-1)} - u_{n-2}v_i^{(n-2)} - u_{n-3}v_i^{(n-3)} - \ldots - u_1v_i^{(1)} - u_0v_i = 0.$$

Очевидно, что R_n как коммутативно-ассоциативная k-алгебра порождается алгебраически независимыми элементами

$$v_i^{(0)}\stackrel{\mathrm{def}}{=} v_i,\ v_i^{(1)},\ \ldots,\ v_i^{(n-2)}\quad (i=1,\ldots,n),$$
$$u_j^{(0)}\stackrel{\mathrm{def}}{=} u_j,\ u_j^{(1)},\ldots\quad (j=0,1,\ldots,n),$$

на которых сигнатурное дифференцирование $'$ действует естественным образом:

$$(u_j^{(k)})'\stackrel{\mathrm{def}}{=} u_j^{(k+1)}\quad (j=0,1,\ldots,n-2,\ k=0,1,2,\ldots),$$
$$(v_i^{(n-2)})'\stackrel{\mathrm{def}}{=} u_{n-2}v_i^{(n-2)} + u_{n-3}v_i^{(n-3)}+\ldots+u_1v_i^{(1)}+u_0v_i\quad (i=1,\ldots,n),$$
$$(v_i^{(k)})'\stackrel{\mathrm{def}}{=} v_i^{(k+1)}\quad (k=0,1,2,\ldots,n-3).$$

Несложно доказать по индукции, что при $j>n-2$ j-я строка матрицы $W_n(v_1,\ldots,v_n)$ выражается в виде линейной комбинации предыдущих с коэффициентами из дифференциальной k-подалгебры, порождённой в R_n элементами $u_0, u_1, \ldots, u_{n-2}$. Поэтому все миноры n-го порядка этой матрицы равны нулю и в k-пространстве $k \cdot v_1 + k \cdot v_2 + \ldots + k \cdot v_n$ выполняются все соотношения Капелли порядка n. Так как коммутативно-ассоциативная k-алгебра R_n является областью целостности, то из результатов раздела 3 в поле частных Q_{R_n} должны найтись (не все нулевые) константы $q_1, \ldots, q_n$, для которых $q_1 \cdot v_1 + \ldots + q_n \cdot v_n = 0$. Но все миноры $(n-1)$-го порядка подматрицы $W_n(v_1, \ldots, v_n)$, состоящей из строк $0, 1, \ldots, n-2$, отличны от нуля. Поэтому по следствию 5.1 в качестве $q_1, \ldots, q_n$ можно взять $r_1(v_1, \ldots, v_n)/r_j(v_1, \ldots, v_n), \ldots, r_n(v_1, \ldots, v_n)/r_j(v_1, \ldots, v_n)$. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Для любого $j = 1, \ldots, n$ локализации $\bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{-1}]$, $R_n[r_j(v_1, \ldots, v_n)^{-1}]$ k-алгебр $\bar{F}_n$, R_n дифференциально изоморфны.*

Доказательство. Построим взаимообратные отображения между этими алгебрами

$$\varepsilon_1 \colon \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{-1}] \to R_n[r_j(v_1, \ldots, v_n)^{-1}],$$
$$\varepsilon_2 \colon R_n[r_j(v_1, \ldots, v_n)^{-1}] \to \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{-1}],$$

задав их формулами $\varepsilon_1(\bar{x}_i) = v_i$ и

$$\varepsilon_2(v_i) = \bar{x}_i, \quad \varepsilon_2(u_i) = -m_j^i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)/r_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Корректность ε_1 вытекает из того, что единственное соотношение алгебры F_n выполнено в R_n. Корректность ε_2 вытекает из первого утверждения следствия 5.1. □

Предложение 5.2. *Пусть*

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t) \in C^\infty(a, b), \quad |y_1(t), \ldots, y_n(t)| = 0.$$

Тогда в любом подынтервале $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ существует интервал (a_2, b_2), на котором эти функции линейно зависимы.

Доказательство. Применим предложение 2.3 к дифференциальной алгебре A, порождённой $y_1, \ldots, y_n$, и интервалу (a_1, b_1). Полученный интервал назовём (a_2, b_2). К полю частных области целостности $A|_{(a_2,b_2)}$ применима лемма о линейной зависимости над полем констант [9, предложение 2.8], из которой и вытекает требуемое. □

Дополнение А. Пример первичной дифференциальной ниль-алгебры (см. [2])

Введём свободную дифференциальную алгебру от одной образующей. Будем обозначать образующую через x, а её i-ю производную — через x_i. Тогда свободной дифференциальной алгеброй от x будем называть $k_+\{x\} = k_+[x, x_1, x_2, \ldots]$, т. е. свободную коммутативную алгебру от x и её производных. Плюс в нижнем индексе означает, что берутся мономы только положительной степени. В частности, эта алгебра не содержит единицы.

Для изучения идеала $[x^m]$ рассмотрим векторное пространство V_m с $m-1$ парой счётных серий базисных векторов ξ_i^k и η_i^k ($k = 0, \ldots, m-2$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Внешнюю алгебру этого пространства будем обозначать через $\Lambda(V_m)$, а её чётную и нечётную компоненты — через $\Lambda_0(V_m)$ и $\Lambda_1(V_m)$ соответственно. Отметим, что мы не предполагаем наличия в $\Lambda(V_m)$ единицы. Введём на $\Lambda(V_m)$ дифференцирование, которое на образующих будет действовать увеличением на единицу нижнего индекса, т. е. $(\xi_i^k)' = \xi_{i+1}^k$ и $(\eta_i^k)' = \eta_{i+1}^k$. Заметим, что $\Lambda_0(V_m)$ является дифференциальной подалгеброй.

Вернёмся к нашему основному объекту — фактору свободной дифференциальной алгебры $k_+\{x\}$ по дифференциальному идеалу $[x^m]$. Обозначим его через D_m, образ x при факторизации — через $\bar{x}$. Построим гомоморфизм дифференциальных алгебр $\varphi_m\colon D_m \to \Lambda_0(V_m)$, положив $\varphi_m(\bar{x}) = \sum\limits_{k=0}^{m-2} \xi_0^k \wedge \eta_0^k$.

Лемма 1. *Гомоморфизм φ_m инъективен.*

Доказательство. Сначала проверим, что φ_m — гомоморфизм. Для этого достаточно убедиться в том, что $\big(\varphi_m(\bar{x})\big)^m = 0$. Действительно, в $\varphi_m(\bar{x})$ входят $2(m-1)$ антикоммутирующих переменных, а степень всех мономов в $(\varphi_m(\bar{x}))^m$ равна $2m$. Ввиду кососимметричности получаем нуль.

Напомним (следуя [8]), что моном в $k_+\{x\}$ называется α_m-мономом, если сумма степеней соседних производных меньше m. Мы будем пользоваться следующим фактом (см. [8, теорема 1.1]).

Факт. Множество образов α_m-мономов является базисом $k_+\{x\}/[x^m]$ как векторного пространства (в [8] этот факт сформулирован и доказан для $k\{x\}/[x^m]$).

Таким образом, достаточно проверить, что ни одна нетривиальная линейная комбинация α_m-мономов не лежит в ядре φ_m. Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию α_m-мономов. Введём на мономах следующий порядок: сравниваем по очереди все производные начиная с младших. Если на очередном шаге мы получили неравенство, то бóльшим будет моном, у которого эта очередная производная старше. Рассмотрим наибольший относительно этого порядка моном в линейной комбинации, и пусть он имеет вид $M = \bar{x}_{k_n} \ldots \bar{x}_{k_0}$, где $k_n \geqslant \ldots \geqslant k_0$. Заметим, что α_m-свойство можно переформулировать следующим образом: для любых i и i', таких что $i - i' = m-1$, выполняется неравенство $k_i - k_{i'} > 1$. Отсюда, в частности, следует неравенство

$$k_i \geqslant 2\left[\frac{i}{m-1}\right].$$

Тогда укажем в $\varphi_m(M)$ моном, который не появится ни из какого другого монома исходной линейной комбинации. Из сомножителя, соответствующего $\bar{x}_{k_j}$, мы возьмём в этот моном произведение $\xi_{k_j-q}^r \wedge \eta_q^r$, где q и r — неполное частное и остаток от деления j на $m-1$ соответственно. По доказанному неравенству относительно k_i это выражение корректно определено. Кроме того, из переформулированного α_m-свойства вытекает следующая цепочка неравенств для любого j:

$$k_j - q < k_{j+m-1} - q - 1 < k_{j+2m-2} - q - 2 < \ldots . \qquad (1)$$

Из этих неравенств, в свою очередь, следует, что все образующие, входящие в этот антикоммутативный моном, различны, а значит, сам моном не равен нулю.

Докажем, что этот антикоммутативный моном мог появиться только из рассматриваемого α_m-монома. Пусть он появился из ещё какого-то α_m-монома M' и младшая производная в M' имеет порядок k. Так как наш моном был наибольшим относительно введённого порядка, то $k \leqslant k_0$. С другой стороны, производная порядка k должна дать в антикоммутативный моном произведение вида $\xi_a^c \wedge \eta_b^c$, но наименьшее возможное значение $a+c$, достигаемое согласно (1) при $a = k_0$ и $c = 0$, равно k_0, т. е. $k = k_0$, причём в антикоммутативный моном младшие производные дают одинаковый вклад. Повторяя аналогичные рассуждения для оставшихся производных, получаем $M = M'$, что и требовалось.

Таким образом, инъективность φ_m доказана. □

Лемма 2. *Пусть P — первичная дифференциальная алгебра, $Q \subset P$ — её дифференциальная подалгебра. Тогда Q тоже первична.*

Доказательство. Действительно, пусть в Q есть такие идеалы A и B, что $AB = 0$. Породим ими идеалы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ в P. Эти идеалы можно порождать уже не в сигнатуре дифференциальной алгебры, а как идеалы в смысле коммутативной алгебры. Но тогда, очевидно, $\bar{A}\bar{B}$ тоже равно нулю. □

Теорема 1. *Алгебра D_2 первична.*

Доказательство. Ввиду леммы 2 осталось показать, что $\Lambda_0(V_2)$ первична. Пусть есть такие идеалы A и B, что $AB = 0$, и в них лежат элементы $a \in A$ и $b \in B$. Тогда их можно домножить на такие мономы, чтобы a и b стали мономами. Теперь продифференцируем a столько раз, сколько потребуется, чтобы появилось слагаемое, в котором все производные имеют порядок, больший порядка любой производной в b. Произведение b и этой производной a будет отлично от нуля. □

Дополнение B. Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица

Пусть R — дифференциальное кольцо. Через $R[\partial]$ будем обозначать кольцо дифференциальных операторов над R.

Лемма 3. *Пусть R — простое дифференциальное кольцо. Существуют такие $x_1, \ldots, x_m \in R$, что $R = Rx_1 + \ldots + Rx_m$.*

Доказательство. Покажем, что для всякого ненулевого $a \in R$ верно $R[\partial]a = R$. Так как умножение в R ненулевое, существуют такие $b, c \in R$, что $bc = 0$. Так как R простое, найдётся $D \in R_{id}[\partial]$, такой что $Da = c$. Тогда $bD \in R[\partial]$ и $(bD)a \neq 0$. Стало быть, $R[\partial]a \neq 0$. Это идеал, и ввиду простоты R требуемое равенство $R[\partial]a = R$ верно.

Рассмотрим произвольный $a \in R$. Существует $D \in R[\partial]$, такой что $Da = a$. Пусть $D = a_0 + a_1\partial + \ldots + a_n\partial^n$. Рассмотрим набор из $a, a_0, \ldots, a_n$ и их производных вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно. Покажем, что этот набор порождает R как идеал в коммутативном кольце. Рассмотрим произвольный $b \in R$. Существует $D_b \in R[\partial]$, такой что $D_b a = b$. Пусть максимальная степень вхождения оператора дифференцирования ∂ в D_b равна N. Тогда перепишем равенство $D_b a = b$ в виде $D_b D^{N+1} a = b$. Левая часть равенства представляет собой сумму произведений, степень которых относительно $a, a_0, \ldots, a_n$ и их производных равна $2 + N$. Вес каждого такого произведения (суммарное количество применённых операторов дифференцирования) не больше $n(N+1) + N$. По принципу Дирихле в каждом из таких произведений одна из производных будет иметь порядок не больше n, т. е. каждое из произведений лежит в $Ra^{(k)}$ или $Ra_i^{(k)}$, где $k \leqslant n$. $\square$

Лемма 4. *Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица.*

Доказательство. Рассмотрим $x = (x_1, \ldots, x_m)$ из предыдущей леммы. Существует матрица $A \in \mathrm{Mat}_m(R)$, такая что $Ax^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}}$. Это равенство переписывается в виде $(A - E)x^{\mathrm{T}} = 0$. Домножив на матрицу из алгебраических дополнений, получаем, что $\det(A - E)x_i = 0$ для всех i. Так как x_i являются образующими модуля R, отсюда следует, что $\det(A - E) = 0$. Если раскрыть это равенство, то получится выражение для единицы через элементы матрицы A, что и требовалось. $\square$

Литература

[1] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебр. — М.: ИЛ, 1959.

[2] Погудин Г. А. Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2014. — № 1. — С. 50—53.

[3] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[4] Размыслов Ю. П. О конечно порождённых простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному лиеву тождеству степени 5 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 3. — С. 37—41.

[5] Размыслов Ю. П. Разъяснение к «Rolling simplexes and their commensurability» (уравнения поля по Тихо Браге) // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 193—215.

[6] Bocher M. Introduction to Higher Algebra. — Courier Corp., 1957.

[7] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — New York: Academic Press, 1973.

[8] Levi H. On the structure of differential polynomials and their theory of ideals // Trans. Amer. Math. Soc. — 1942. — Vol. 51. — P. 532—568.

[9] Magid A. R. Lectures on Differential Galois Theory. — Amer. Math. Soc., 1994. — (Univ. Lect. Ser.; Vol. 7).

[10] Zobnin A. I. One-element differential standard bases with respect to inverse lexicographical orderings // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 163, no. 5. — P. 523—533.