Локальная конечность алгебр

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.552.12+512.554.36

Ключевые слова: локально конечный в смысле Ширшова радикал, алгебраическая над идеалом алгебра.

Аннотация

Работа представляет собой серию комментариев к теореме К. А. Жевлакова и И. П. Шестакова о существовании локального конечного в смысле Ширшова над идеалом основного кольца радикала на классе алгебраических над этим идеалом алгебр, принадлежащих некоторому достаточно хорошему однородному многообразию. Детально показано, каким образом данная теорема включает в себя теоремы Б. И. Плоткина и Е. Н. Кузьмина о существовании локально конечного радикала на классах алгебраических алгебр Ли и Мальцева, и приведено её обобщение на локально конечные расширения идеально алгебраических алгебр Ли и альтернативных алгебр.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Local finiteness of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 25—75.

The paper represents a series of comments to the K. A. Zhevlakov and I. P. Shestakov theorem on the existence of a locally finite in the sense of Shirshov over an ideal of the ground ring radical on the class of algebras that are algebraic over this ideal and belong to some sufficiently good homogeneous variety. It is shown in detail how the given theorem includes Plotkin's and Kuz'min's theorems on the existence of a locally finite radical on the classes of algebraic Lie and Mal'tsev algebras. There is adduced its generalization to locally finite extensions of ideally algebraic Lie and alternative algebras.

1. Введение

Две основные цели настоящей работы — демонстрация выводимости результатов Б. И. Плоткина [16] и Е. Н. Кузьмина [11] о существовании локально конечного радикала на классах алгебраических алгебр Ли и Мальцева в их исходных формулировках из теоремы 4 работы К. А. Жевлакова и И. П. Шестакова [7] и установление существования локально конечного радикала на некоторых классах алгебр в качестве следствия из его существования на классе идеально алгебраических алгебр.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 25—75.

1.1. Предварительные сведения

На протяжении всей статьи F — произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Предполагается, что все рассматриваемые модули над кольцом F являются левыми и унитарными. Под алгеброй над кольцом F понимается левый унитарный F-модуль с операцией умножения, перестановочной с умножением на элементы кольца F, а под классом алгебр над кольцом F — множество алгебр над F, которое содержит в обязательном порядке нулевую алгебру и все изоморфные копии каждой из входящих в него алгебр. Для любых алгебры R над кольцом F и её подмножества A подалгебра и идеал алгебры R, порождённые элементами множества A, будут обозначаться через $\langle A\rangle$ и $(A)_R$ соответственно. Алгебра умножений алгебры R, определяемая как подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, которую порождают операторы левого и правого умножения l_x и r_x на элементы $x \in R$, где $l_x\colon y \mapsto xy$ и $r_x\colon y \mapsto yx$ для всех $y \in R$, будет традиционно обозначаться $M(R)$.

Напомним, что алгебры над кольцом F, которые являются конечно порождёнными F-модулями, называются *конечными над кольцом* F. В частности, конечные алгебры над полем есть не что иное, как конечномерные алгебры над ним. Конечная алгебра R над кольцом F называется *конечной в смысле Ширшова над идеалом* I этого кольца, если её фактор-алгебра R/IR по идеалу IR, порождённому элементами hr, $h \in I$, $r \in R$,

$$IR = \{h_1r_1 + \ldots + h_kr_k \mid k \geqslant 1,\ h_1,\ldots,h_k \in I,\ r_1,\ldots,r_k \in R\},$$

нильпотентна, и *конечной над идеалом* I, если данная фактор-алгебра разрешима. Понятно, что условие конечности алгебры над кольцом F равносильно условиям конечности и конечности в смысле Ширшова над его несобственным идеалом $I = F$. В свою очередь, условие конечности (конечности в смысле Ширшова) над нулевым идеалом $I = \{0\}$ кольца F эквивалентно двум условиям: конечности над кольцом F и разрешимости (нильпотентности).

Обозначим через $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ подклассы универсального класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F, которые составляют конечные алгебры над кольцом F, нильпотентные алгебры, разрешимые алгебры, конечные в смысле Ширшова и конечные над идеалом I кольца F алгебры соответственно. При этом в силу сказанного ранее

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}_F = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_F, \quad \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}_{\{0\}},$$
$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{\{0\}}.$$

Для каждого класса $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}\mathfrak{F}_I, \mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, мы определим также класс локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$ как класс алгебр над кольцом F, конечно порождённые подалгебры которых принадлежат классу $\mathfrak{X}$. Все перечисленные здесь классы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, замкнуты относительно взятия гомоморфных образов. Классы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ замкнуты к тому же относительно взятия подалгебр. Напротив, мы не можем говорить о замкнутости относительно взятия подалгебр классов $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, в случае если основное кольцо F не является нётеровым.

Тем не менее эти классы замкнуты относительно взятия конечно порождённых подалгебр и конечно порождённых идеалов (см. [2, лемма 3.3; 7, леммы 1 и 2; 8, леммы 7 и 8 на с. 131]). Поэтому каждый класс $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}\mathfrak{F}_I, \mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, входит в замкнутый относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов класс локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$. Поскольку нильпотентные алгебры над кольцом F разрешимы и локально конечны над кольцом F, класс локально нильпотентных алгебр $L\mathfrak{N}$ над кольцом F содержится в классе локально конечных локально разрешимых (локально конечных и разрешимых) алгебр над этим кольцом, $L\mathfrak{N} \subset L\mathfrak{S} \cap L\mathfrak{F} = L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F})$. Отсюда следует, что для любого идеала I кольца F классы конечных в смысле Ширшова и локально конечных в смысле Ширшова над идеалом I алгебр $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I$ и $L\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I$ входят в классы конечных и локально конечных над I алгебр $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ и $L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I \subset \mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ и $L\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I \subset L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$. Отметим и то, что указанные включения являются строгими (достаточно вспомнить хорошо известные примеры разрешимых, конечных, ненильпотентных алгебр Ли из [3]).

Выделим теперь в любой алгебре R над кольцом F идеалы

$$\begin{gathered}\mathrm{LF}(R) = \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{F}}(R), \quad \mathrm{LN}(R) = \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{N}}(R),\\ \mathrm{LS}(R) = \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{S}}(R), \quad \mathrm{LSF}(R) = \mathrm{Rad}_{L(\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F})}(R),\\ \mathrm{LNF}_I(R) = \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I}(R), \quad \mathrm{LSF}_I(R) = \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I}(R) \quad (I \lhd F),\end{gathered}$$

где $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}}(R)$ — сумма всех идеалов алгебры R, принадлежащих рассматриваемому классу алгебр $\mathfrak{X}$ над кольцом F. Заметим, что в этих обозначениях $\mathrm{LNF}_{\{0\}}(R) = \mathrm{LN}(R)$, $\mathrm{LSF}_{\{0\}}(R) = \mathrm{LSF}(R)$ и $\mathrm{LNF}_F(R) = \mathrm{LSF}_F(R) = \mathrm{LF}(R)$.

Имеется довольно внушительный список работ, посвящённых обсуждению вопросов существования во всякой алгебре из достаточно хорошего класса (или многообразия) алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F наибольших локально нильпотентного, локально конечного над кольцом F и локально конечного и разрешимого над этим кольцом идеалов и вопросов выполнения свойств радикала Куроша—Амицура для отображений LN, LF и LSF такого класса $\mathfrak{M}$ в себя (в предположении, что последний замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов), ставящих в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ её наибольший локально нильпотентный, локально конечный и локально конечный и разрешимый идеалы $\mathrm{LN}(R)$, $\mathrm{LF}(R)$ и $\mathrm{LSF}(R)$. Среди них в первую очередь следует отметить работы Шао-сюэ Лю [13], Б. И. Плоткина [16], Б. Хартли [25], Е. Н. Кузьмина [10, 11], Г. В. Дорофеева [5], И. П. Шестакова [21], К. А. Жевлакова [6], К. А. Жевлакова и И. П. Шестакова [7], Т. Андерсона [24] и С. В. Пчелинцева [17]. Наше обсуждение будет следовать во многом линии статьи [7], которая объединяет и обобщает основной объём результатов упомянутых работ, хотя и не включает в себя отдельные выводы работ [21] и [17]. В статье [7] достаточно исчерпывающий ответ на вопрос о существовании наибольших локально конечных в смысле Ширшова идеалов даёт теорема 3, которая может быть сформулирована следующим образом.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — однородное многообразие алгебр над кольцом F, такое что для любой алгебры R из многообразия $\mathfrak{H}$*

1) *идеал $(J^3)_R$ алгебры R, порождённый элементами куба J^3 любого её идеала J, содержится в его квадрате J^2, $(J^3)_R \subseteq J^2$;*
2) *каждый элемент алгебры умножений $M(R)$ алгебры R вида $t_a t'_b t''_a$, $a, b \in R$, можно выразить через F-линейную комбинацию элементов алгебры $M(R)$ вида $s_b s'_a s''_a$, $s_b s'_{a^2}$, $s_{a^2} s'_b$, $s_{s'_a b} s''_a$, $s_a s'_{s''_a b}$, $s_{s'_a s''_a b}$ и $s_{s'_b a^2}$, где $t_x, t'_x, t''_x, s_x, s'_x, s''_x \in \{l_x, r_x\}$ (в отличие от [7], здесь указан элемент вида $s_b s'_a s''_a$, поскольку мы используем иной порядок действия эндоморфизмов на элементы).*

Тогда каждая алгебра R из многообразия $\mathfrak{H}$ обладает наибольшим локально конечным в смысле Ширшова над идеалом I идеалом $\mathrm{LNF}_I(R)$ для всех идеалов I кольца F.

Согласно [7] указанным здесь требованиям удовлетворяют многообразия алгебр типа $(\gamma,\ \delta)$, альтернативных и лиевских алгебр, а при наличии $1/2$ в основном кольце F также многообразие алгебр Мальцева и все однородные многообразия σ-допустимых алгебр, включая многообразие линейных йордановых алгебр. Поэтому предложение 1.1 содержит в себе выводы работ [11, 13, 16] и частично [21]. Стоит отметить и то, что условия предложения 1.1 не выполняются на многообразии правоальтернативных алгебр над кольцом F, так как известны примеры правоальтернативных алгебр, не содержащих наибольших локально нильпотентных идеалов (см. [4, 15]).

Замечание 1.2. Алгебра R над кольцом F, имеющая наибольший локально конечный над кольцом F идеал $\mathrm{LF}(R)$, содержит наибольший локально конечный над идеалом I идеал $\mathrm{LSF}_I(R)$ для всех идеалов I кольца F.

Доказательство. Достаточно показать, что сумма любых двух локально конечных над идеалом I идеалов G и H такой алгебры R локально конечна над этим идеалом. Ввиду того что класс конечных над идеалом I алгебр $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр (см. выше), следует установить только конечность над идеалом I подалгебры $C = \langle A, B\rangle$ алгебры R, порождённой элементами произвольных конечных подмножеств A идеала G и B идеала H. В первую очередь заметим, что алгебра C совпадает с суммой своих идеалов $(A)_C$ и $(B)_C$, порождённых элементами множеств A и B, $C = (A)_C + (B)_C$. Так как по условию сумма $G + H$ идеалов G и H является локально конечным над кольцом F идеалом алгебры R, конечно порождённая подалгебра C этой суммы конечна над кольцом F и, как следствие, конечными над F являются конечно порождённые идеалы $(A)_C$ и $(B)_C$ алгебры C. Конечные над кольцом F подалгебры $(A)_C$ и $(B)_C$ локально конечных над идеалом I идеалов G и H конечны над I, а значит, разрешимы по модулю своих идеалов $I(A)_C$ и $I(B)_C$, $(A)_C^{(p)} \subseteq I(A)_C$ и $(B)_C^{(q)} \subseteq I(B)_C$ для подходящих $p, q \geqslant 0$. Поэтому фактор-алгебра C/IC алгебры C по её идеалу IC, будучи суммой своих разрешимых идеалов $\big((A)_C + IC\big)/IC$ и $\big((B)_C + IC\big)/IC$

ступеней разрешимости не выше p и q,

$$\big((A)_C+IC\big)/IC\cong (A)_C/\big((A)_C\cap IC\big)\cong \big((A)_C/I(A)_C\big)/\Big(\big((A)_C\cap IC\big)/I(A)_C\Big),$$

$$\big((B)_C+IC\big)/IC\cong (B)_C/\big((B)_C\cap IC\big)\cong \big((B)_C/I(B)_C\big)/\Big(\big((B)_C\cap IC\big)/I(B)_C\Big),$$

является разрешимой алгеброй ступени разрешимости не более $p+q$, $(C/IC)^{(p+q)}=\{0\}$, $C^{(p+q)}\subseteq IC$. Следовательно, алгебра C конечна над идеалом I. $\square$

Применяя сходные соображения, можно получить следующий результат.

Замечание 1.3. Если R — алгебра над кольцом F, обладающая наибольшим локально конечным над кольцом F идеалом, I — идеал кольца F, такой что для всякой конечной над кольцом F подалгебры A алгебры R сумма любых двух конечных над F нильпотентных идеалов её фактор-алгебры A/IA по идеалу IA нильпотентна, то алгебра R содержит наибольший локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I идеал.

Таким образом, для любого замкнутого относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов класса алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F мы можем сформулировать следующие две пары эквивалентных условий:

1) алгебры из класса $\mathfrak{M}$ обладают наибольшими локально конечными над кольцом F идеалами;
2) алгебры из класса $\mathfrak{M}$ содержат наибольшие локально конечные над идеалом I идеалы для всех идеалов I кольца F;

и

1′) алгебры из класса $\mathfrak{M}$ имеют наибольшие локально конечные над кольцом F и наибольшие локально нильпотентные идеалы;
2′) алгебры из класса $\mathfrak{M}$ содержат наибольшие локально конечные в смысле Ширшова над идеалом I идеалы для всех идеалов I кольца F.

Более того, в случае если степени идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их идеалами, что гарантирует нильпотентность конечных сумм нильпотентных идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$, или в случае если класс $\mathfrak{M}$ является однородным многообразием, удовлетворяющим условиям предложения 1.1, условия 1), 2), 1′) и 2′) эквивалентны друг другу (см. также [7, теорема 2; 10]).

В дальнейшем при рассмотрении замкнутого относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класса алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F в качестве основного класса и одного из классов $\mathfrak{X}=\mathfrak{F},\mathfrak{N},\mathfrak{S}\cap\mathfrak{F},\mathfrak{S},\mathfrak{N}\mathfrak{F}_I,\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I\lhd R$, в ситуации, когда каждая алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ обладает наибольшим локально $\mathfrak{X}$-идеалом $\mathrm{Rad}_{L\mathfrak{X}}(R)$ и при этом отображение $\mathrm{Rad}_{L\mathfrak{X}}\colon R\mapsto \mathrm{Rad}_{L\mathfrak{X}}(R)$, $R\in\mathfrak{M}$, определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, мы будем называть такое радикальное отображение *локально $\mathfrak{X}$-радикалом*. Другими словами, мы будем говорить о локально $\mathfrak{X}$-радикале на классе $\mathfrak{M}$, если и только если пересечение

$\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$. Заметим, что для указанных значений класса $\mathfrak{X}$ последнее равносильно замкнутости класса $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ относительно взятия расширений в классе $\mathfrak{M}$. Впрочем, в данной ситуации мы будем пользоваться, как правило, более традиционной терминологией, в которой радикалы $\mathrm{Rad}_{L\mathfrak{X}} = \mathrm{LF}, \mathrm{LN}, \mathrm{LSF}, \mathrm{LS}, \mathrm{LNF}_I, \mathrm{LSF}_I$, $I \lhd F$, принято называть *локально конечным*, *локально нильпотентным*, *локально конечным и разрешимым*, *локально разрешимым*, *локально конечным в смысле Ширшова над идеалом* I и *локально конечным над идеалом* I *радикалами* соответственно.

Скажем несколько слов о взаимосвязи между радикалами LNF_I, LSF_I, $I \lhd F$, и LS в тех случаях, когда они существуют.

Замечание 1.4. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс алгебр над кольцом F, замкнутый относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов. Тогда

1) если для некоторого идеала I кольца F на классе $\mathfrak{M}$ определён локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I радикал LNF_I, то локально конечный над этим идеалом радикал LSF_I определён на классе $\mathfrak{M}$ и совпадает на нём с радикалом LNF_I, $\mathrm{LSF}_I = \mathrm{LNF}_I$;
2) если на классе $\mathfrak{M}$ определён локально конечный и разрешимый радикал LSF, то на этом классе определён и локально разрешимый радикал LS, совпадающий на нём с радикалом LSF, $\mathrm{LSF} = \mathrm{LS}$, а следовательно, существование на классе $\mathfrak{M}$ локально нильпотентного радикала LN влечёт за собой существование на нём локально конечного и разрешимого и локально разрешимого радикалов LSF и LS, равных радикалу LN, $\mathrm{LN} = \mathrm{LSF} = \mathrm{LS}$;
3) если на классе $\mathfrak{M}$ определён локально конечный радикал LF, то на нём определён локально конечный над идеалом I радикал LSF_I для всех идеалов I кольца F и, как следствие, в данной ситуации локально конечный и разрешимый и локально разрешимый радикалы определяют один радикал $\mathrm{LSF} = \mathrm{LS}$ на классе $\mathfrak{M}$; если в дополнение к этому на классе $\mathfrak{M}$ определён локально нильпотентный радикал LN, то для любого идеала I кольца F на нём определён также локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I радикал LNF_I, равный локально конечному над I радикалу LSF_I, $\mathrm{LNF}_I = \mathrm{LSF}_I$.

Доказательство. Для начала следует отметить, что алгебры с нулевым умножением над кольцом F локально конечны в смысле Ширшова над любым идеалом I этого кольца. Так как разрешимые алгебры содержат конечные нормальные ряды подалгебр, факторы которых являются алгебрами с нулевым умножением, отсюда следует, что в случае если для некоторого идеала I кольца F на классе $\mathfrak{M}$ определён локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I радикал LNF_I, конечные над идеалом I алгебры из класса $\mathfrak{M}$ локально конечны в смысле Ширшова над идеалом I и, как следствие, конечны в смысле Ширшова над I. Поэтому в данной ситуации классы локально конечных в смысле Ширшова над идеалом I и локально конечных над I алгебр из класса $\mathfrak{M}$ образуют один радикальный подкласс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I = \mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ класса $\mathfrak{M}$, которому отвечает радикал $\mathrm{LNF}_I = \mathrm{LSF}_I$. Аналогичным образом существование на классе $\mathfrak{M}$ локально конечного и разрешимого радикала LSF влечёт за собой локальную конечность над кольцом F разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$, совпадение классов локально конечных и разрешимых и локально разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \cap L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}$, и вместе с тем равенство на $\mathfrak{M}$ отображений LSF и LS, $\mathrm{LSF} = \mathrm{LS}$.

Предположим теперь, что на классе $\mathfrak{M}$ определён локально конечный радикал LF. Тогда согласно замечанию 1.2 идеал $\mathrm{LSF}_I(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является её наибольшим локально конечным над идеалом I идеалом для всех идеалов I кольца F. Для доказательства радикальности в смысле Куроша—Амицура отображений LSF_I, $I \lhd F$, класса $\mathfrak{M}$ достаточно установить замкнутость классов $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, относительно взятия расширений в классе $\mathfrak{M}$, т. е. показать то, что для всякого идеала I кольца F каждая алгебра R из класса $\mathfrak{M}$, содержащая локально конечный над идеалом I идеал J, фактор-алгебра по которому R/J локально конечна над идеалом I, также локально конечна над этим идеалом. Существование на классе $\mathfrak{M}$ локально конечного радикала LF гарантирует локальную конечность над кольцом F алгебры R, поскольку последняя является расширением своего локально конечного над кольцом F идеала J при помощи локально конечной над F фактор-алгебры по нему R/J. Поэтому в алгебре R каждая конечно порождённая подалгебра A конечна над кольцом F. Вместе с тем подалгебра A содержит локально конечный над идеалом I идеал $A \cap J$, фактор-алгебра по которому $A/(A \cap J)$ изоморфна образу $(A + J)/J$ подалгебры A в локально конечной над идеалом I фактор-алгебре R/J и, как следствие, конечна над I. Значит, $A^{(k)} \subseteq IA + A \cap J$ для некоторого $k \geqslant 0$. Степени и коммутанты конечной над кольцом F алгебр A, а также их гомоморфные образы, одним из которых является алгебра $(A^{(k)} + IA)/IA$, конечны над F. Так как конечная над кольцом F алгебра $(A^{(k)} + IA)/IA$ является подалгеброй локально конечной над идеалом I или, что равносильно в этом случае, локально конечной над F и локально разрешимой алгебры $(A \cap J + IA)/IA$, она обязана быть разрешимой, т. е. $\big((A^{(k)} + IA)/IA\big)^{(m)} = \big(A^{(k+m)} + IA\big)/IA = \{0\}$, $A^{(k+m)} \subseteq IA$ для соответствующего $m \geqslant 0$. Таким образом, любая конечно порождённая подалгебра A алгебры R конечна над идеалом I, и потому алгебра $R = \mathrm{LSF}_I(R)$ локально конечна над этим идеалом.

В случае если, помимо локально конечного радикала LF, на классе $\mathfrak{M}$ определён ещё и локально нильпотентный радикал LN, из сказанного в начале доказательства следует равенство классов локально нильпотентных и локально разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}$, а вместе с тем и совпадение на классе $\mathfrak{M}$ локально конечного над идеалом I радикала LSF_I, определённого на $\mathfrak{M}$ для любого идеала I кольца F по доказанному ранее, с локально конечным в смысле Ширшова над I радикалом LNF_I, $\mathrm{LSF}_I = \mathrm{LNF}_I$. $\square$

Обсудим теперь используемое в [7] понятие алгебраического элемента над идеалом, необходимое нам для того, чтобы сформулировать полученное в этой работе описание наибольших подклассов многообразий алгебр в условиях предложения 1.1, на которых определены локально конечные в смысле Ширшова радикалы.

Элемент x алгебры R над кольцом F называется *алгебраическим над идеалом* I кольца F, если для каждого элемента y алгебры R найдётся натуральное $m = m(x,y)$, такое что для любых m операторов умножения $t_x^{(i)} \in \{l_x, r_x\}$, $i = 1,\ldots,m$, элемент $t_x^{(1)} \cdots t_x^{(m)} y$ может быть записан в виде конечной суммы

$$t_x^{(1)} \cdots t_x^{(m)} y = \sum_j h_j w_j y$$

для некоторых элементов h_j идеала I и элементов w_j полугруппы $\{x\}^*$, удовлетворяющих условиям $d(w_j) < m$ и $\deg w_j \leqslant m$ для по меньшей мере одного из своих представлений, где $\{x\}^*$ — мультипликативная подполугруппа алгебры умножений $M(R)$ алгебры R, которую порождают операторы левого и правого умножения на элементы порождённого элементом x подгруппоида $\langle x\rangle$ мультипликативного группоида R, а под представлением любого элемента $w \in \{x\}^*$ понимается произвольное его выражение $w = t_{a_1}^{(1)} \cdots t_{a_k}^{(k)}$ через произведение операторов умножения $t_{a_i}^{(i)} \in \{l_{a_i}, r_{a_i}\}$ на элементы $a_i \in \langle x\rangle$, $i = 1,\ldots,k$, с какими-то фиксированными формами записи элементов $a_1,\ldots,a_k$ как неассоциативных слов в одноэлементном алфавите $\{x\}$, причём длина $d(w)$ и степень $\deg w$ элемента w относительно выбранного представления определяются следующим образом: $d(w) = k$ и $\deg w = \deg a_1 + \ldots + \deg a_k$ — сумма длин $\deg a_i$ слов a_i, $i = 1,\ldots,k$, в алфавите $\{x\}$. Алгебраические над нулевым идеалом $I = \{0\}$ кольца F элементы алгебры R называют также её *слабо энгелевыми элементами*. Следуя Б. И. Плоткину, мы будем называть слабо энгелевы элементы антикоммутативных алгебр их *ниль-элементами*. Алгебры над кольцом F, все элементы которых являются алгебраическими над его идеалом I, называются *алгебраическими алгебрами над идеалом* I (*слабо энгелевыми алгебрами* в случае нулевого идеала $I = \{0\}$ или *ниль-алгебрами* в антикоммутативной ситуации по аналогии с ассоциативными, альтернативными и йордановыми алгебрами, состоящими из нильпотентных элементов).

Если элементы x и y алгебры R над кольцом F порождают в ней ассоциативную подалгебру $\langle x,y\rangle$, что, в частности, заведомо имеет место в альтернативной алгебре R, то существование натурального числа $m = m(x,y)$, которое можно без ограничения общности считать бо́льшим 1, с указанными в определении алгебраического элемента над идеалом I кольца F свойствами подразумевает наличие для каждого $s = 0,\ldots,m$ некоторых $h_j \in I$, $1 \leqslant p_j \leqslant m$ и $0 \leqslant q_j \leqslant p_j$, позволяющих записать

$$x^s y x^{m-s} = \sum_j h_j x^{q_j} y x^{p_j - q_j},$$

где $x^0y = yx^0 = y$. Поэтому применительно к альтернативным алгебрам над кольцом F рассматриваемое нами понятие алгебраического над кольцом F (или его несобственным идеалом $I = F$) элемента фактически теряет своё значение, поскольку все их элементы являются алгебраическими над F. Точнее, для таких алгебр понятие алгебраического элемента над идеалом представляет интерес только для собственных идеалов кольца F.

Аналогичный вывод верен и для линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$. Действительно, для любого элемента x линейной йордановой алгебры R над кольцом F с $1/2$ подалгебра $M^R(\langle x\rangle)$, которую в алгебре умножений $M(R)$ алгебры R порождают операторы умножения на элементы порождённой элементом x подалгебры $\langle x\rangle$ алгебры R ($M^R(\langle x\rangle)$ представляет собой подмодуль F-модуля $M(R)$, порождённый элементами полугруппы $\{x\}^*$), совпадает с подалгеброй алгебры $M(R)$, порождённой операторами умножения на элементы x и x^2,

$$M^R(\langle x\rangle) = \big\langle m_z \mid z \in \langle x\rangle \big\rangle = \langle m_x, m_{x^2}\rangle,$$

где $m_z = l_z = r_z \colon y \mapsto z \cdot y = y \cdot z$ для всех $z, y \in R$ (см. [8, предложение 2 на с. 86]). Поскольку операторы m_x и m_{x^2} перестановочны, подалгебра $M^R(\langle x\rangle)$ коммутативна. Используя эти наблюдения и однородность многообразия линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$, мы можем выразить каждый оператор умножения m_{x^k}, $k \geqslant 3$, через конечную F-линейную комбинацию произведений степеней операторов умножения m_x и m_{x^2} вида $m_x^i m_{x^2}^j$ с $i + 2j = k$, $i, j \geqslant 0$. Более того, применяя индукцию, хорошо известное соотношение между операторами умножения на элементы линейных йордановых алгебр

$$m_{(a\cdot b)\cdot c} + m_a m_c m_b + m_b m_c m_a = m_c m_{a\cdot b} + m_b m_{a\cdot c} + m_a m_{b\cdot c} \quad (a, b, c \in R)$$

и его следствие

$$m_{x^{k+2}} = -2m_{x^k} m_x^2 + 2m_x m_{x^{k+1}} + m_{x^2} m_{x^k} \quad (k \geqslant 1),$$

несложно показать, что все коэффициенты такой линейной комбинации, выражающей оператор m_{x^k}, являются целыми. Равенства

$$2m_x^3 + m_{x^3} = 3m_{x^2} m_x, \quad m_x^3 = \frac{3}{2} m_{x^2} m_x - \frac{1}{2} m_{x^3},$$
$$m_x^4 = \left(\frac{3}{2} m_{x^2} m_x - \frac{1}{2} m_{x^3}\right) m_x = \frac{3}{2} m_{x^2} m_x^2 - \frac{1}{2} m_{x^3} m_x,$$
$$m_{x^4} + 2m_{x^2} m_x^2 = 2m_{x^3} m_x + m_{x^2}^2,$$
$$m_x^4 = \frac{3}{2}\left(m_{x^3} m_x + \frac{1}{2} m_{x^2}^2 - \frac{1}{2} m_{x^4}\right) - \frac{1}{2} m_{x^3} m_x = m_{x^3} m_x + \frac{3}{4} m_{x^2}^2 - \frac{3}{4} m_{x^4}$$

могут служить также основанием индукции для доказательства существования при всех $k \geqslant 3$ представления оператора m_x^k в виде

$$m_x^k = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k/2} g_{ik} m_{x^i} m_{x^{k-i}}$$

для некоторых элементов $g_{ik} \in \mathbb{Z}[1/2] \subseteq F$, $0 \leqslant i \leqslant k/2$, где $\mathbb{Z}[1/2]$ — подкольцо кольца F, порождённое его элементом $1/2$, $m_{x^0} = \mathrm{Id}_R$ — тождественный эндоморфизм F-модуля R. Для этого достаточно заметить, что, предполагая уже доказанной осуществимость такого представления для всех $k \geqslant 3$, меньших или равных некоторого $m \geqslant 3$, мы можем записать при $k = m+1$ равенство

$$m_x^{m+1} = m_x^m m_x = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m/2} g_{im} m_{x^i} m_{x^{m-i}} m_x,$$

где для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m/2$,

$$\begin{aligned} m_{(x^i \cdot x^{m-i}) \cdot x} + 2m_{x^i} m_{x^{m-i}} m_x &= m_{x^{m+1}} + 2m_{x^i} m_{x^{m-i}} m_x = \\ &= m_{x^i} m_{x^{m-i} \cdot x} + m_{x^{m-i}} m_{x^i \cdot x} + m_x m_{x^i \cdot x^{m-i}} = \\ &= m_{x^i} m_{x^{m-i+1}} + m_{x^{m-i}} m_{x^{i+1}} + m_x m_{x^m} \end{aligned}$$

и, как следствие,

$$m_{x^i} m_{x^{m-i}} m_x = \frac{1}{2}\big(m_{x^i} m_{x^{m-i+1}} + m_{x^{m-i}} m_{x^{i+1}} + m_x m_{x^m} - m_{x^{m+1}}\big).$$

Подставляя эти выражения для операторов $m_{x^i} m_{x^{m-i}} m_x$, $1 \leqslant i \leqslant m/2$, в приведённое выше равенство для оператора m_x^{m+1} и собирая затем подобные слагаемые, мы получим выражение

$$m_x^{m+1} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant (m+1)/2} g_{jm+1} m_{x^j} m_{x^{m+1-j}}$$

для соответствующих элементов $g_{jm+1} \in \mathbb{Z}[1/2] \subseteq F$, $0 \leqslant j \leqslant (m+1)/2$. Таким образом, каждый элемент x линейной йордановой алгебры R над кольцом F с $1/2$ является алгебраическим над кольцом F, а его алгебраичность над идеалом I кольца F равносильна существованию для всякого элемента y алгебры R натурального числа $m = m(x, y) > 2$, такого что элемент $m_x^m y$ может быть записан в виде конечной суммы

$$m_x^m y = \sum_j h_j m_x^{u_j} m_{x^2}^{w_j} y$$

для подходящих элементов $h_j \in I$ и показателей $u_i, w_j \geqslant 0$, $u_j + 2w_j \leqslant m$.

Нетрудно заметить, что слабо энгелевы элементы алгебр, имеющие ассоциативные степени, являются нильпотентными. В силу сделанных выше замечаний для элементов альтернативных и линейных йордановых алгебр (в йордановом случае мы предполагаем наличие в основном кольце $1/2$) условия слабой энгелевости и нильпотентности эквивалентны друг другу, а значит, слабо энгелевы альтернативные и линейные йордановы алгебры являются ниль-алгебрами в привычном для алгебр с ассоциативным степенями смысле этого понятия. Последнее, естественно, справедливо далеко не для всех алгебр с ассоциативными степенями. Так, например, ненулевые элементы антикоммутативных алгебр являются нильпотентными элементами индекса 2, но могут не быть их слабо энгелевыми элементами.

Предваряя обсуждение антикоммутативной ситуации, мы введём дополнительное понятие локально конечного над идеалом эндоморфизма модуля.

Будем говорить, что эндоморфизм φ модуля M над кольцом F является *локально конечным над идеалом* I кольца F, если для всякого элемента a модуля M существует по меньшей мере один многочлен

$$ {}_af = {}_af(t) = t^n + {}_af_{n-1}t^{n-1} + \ldots + {}_af_1t \in F[t] $$

степени $\deg {}_af = n = n(a) \geqslant 1$ с коэффициентами ${}_af_1, \ldots, {}_af_{n-1} \in I$ (предполагается, что случай $n = 1$ соответствует $a = 0$), такой что элемент a входит в ядро значения ${}_af(\varphi)$ этого многочлена на эндоморфизме φ, т. е.

$$ {}_af(\varphi)(a) = \varphi^n(a) + {}_af_{n-1}\varphi^{n-1}(a) + \ldots + {}_af_1\varphi(a) = 0. $$

Локально конечные над нулевым идеалом $I = \{0\}$ кольца F эндоморфизмы F-модуля M мы будем называть также его *локально нильпотентными эндоморфизмами*.

Замечание 1.5. Эндоморфизм φ модуля M над кольцом F тогда и только тогда локально конечен над идеалом I кольца F, когда он является локально конечным над кольцом F эндоморфизмом модуля M и его ограничение $\varphi|_{M'}$ на любой инвариантный относительно его действия конечно порождённый подмодуль M' модуля M является целым над идеалом I элементом алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(M')$ модуля M'.

Доказательство. В первую очередь необходимо напомнить, что элемент алгебры над кольцом F называется *целым* (*целым в смысле Ширшова*) *над идеалом* I кольца F, если он порождает конечную (конечную в смысле Ширшова) над идеалом I подалгебру этой алгебры. Для элемента алгебры, имеющего ассоциативные степени, выполнение любого из условий целостности над идеалом I равносильно существованию аннулирующего его многочлена над кольцом F без свободного члена с единичным старшим коэффициентом и остальными коэффициентами из идеала I.

Пусть φ — локально конечный над идеалом I кольца F эндоморфизм F-модуля M и M' — инвариантный относительно его действия конечно порождённый подмодуль модуля M. Отмеченная ранее локальная конечность конечных алгебр над кольцом F и теорема Прочези—Смолла (см. [26, предложение 1.3.1 на с. 14]) гарантируют локальную конечность над кольцом F алгебр эндоморфизмов конечно порождённых F-модулей и вместе с тем целостность над F всех элементов этих алгебр. Поэтому ограничение $\varphi|_{M'}$ эндоморфизма φ на подмодуль M' является целым над кольцом F элементом алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(M')$ модуля M'. Выберем и зафиксируем произвольную конечную систему порождающих $\{e_1, \ldots, e_s\}$ модуля M', а затем, используя локальную конечность над идеалом I эндоморфизма φ, подберём для каждого $i = 1, \ldots, s$ многочлен

$$ {}_{e_i}f = {}_{e_i}f(t) = t^{n(e_i)} + {}_{e_i}f_{n(e_i)-1}t^{n(e_i)-1} + \ldots + {}_{e_i}f_1t \in F[t] $$

степени $n(e_i) = \deg {}_{e_i}f \geqslant 1$ с коэффициентами ${}_{e_i}f_1, \ldots, {}_{e_i}f_{n(e_i)-1} \in I$, такой что

$$ \varphi^{n(e_i)}(e_i) + {}_{e_i}f_{n(e_i)-1}\varphi^{n(e_i)-1}(e_i) + \ldots + {}_{e_i}f_1\varphi(e_i) = 0, $$

и обозначим через n максимальную из степеней $n(e_1),\ldots,n(e_s)$ указанных многочленов. По построению n-я степень $(\varphi|_{M'})^n = \varphi^n|_{M'}$ эндоморфизма $\varphi|_{M'}$ отображает модуль M' в его подмодуль IM', состоящий из конечных сумм элементов вида ha, $h\in I$, $a\in M'$,

$$(\varphi|_{M'})^n\colon M' = Fe_1+\ldots+Fe_s \to IM' = Ie_1+\ldots+Ie_s,$$

а значит, мы можем подобрать в идеале I элементы $\{h_{ij}\}_{i,j=1}^s$, позволяющие записать

$$(\varphi|_{M'})^n(e_i) = \sum_{j=1}^{s} h_{ji}e_j \quad (i=1,\ldots,s).$$

Матрица $H=(h_{ij})_{i,j=1}^s$ эндоморфизма $(\varphi|_{M'})^n$ в системе $\{e_1,\ldots,e_s\}$, составленная из найденных таким образом элементов, аннулируется согласно теореме Гамильтона—Кэли своим характеристическим многочленом

$$\chi_H = \chi_H(t) = t^s+\chi_{H,s-1}t^{s-1}+\ldots+\chi_{H,0}\in F[t],$$

все коэффициенты которого, за исключением, быть может, его единичного старшего коэффициента, принадлежат идеалу I. Многочлен χ_H аннулирует также эндоморфизм $(\varphi|_{M'})^n$ в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(M')$ модуля M',

$$\chi_H\bigl((\varphi|_{M'})^n\bigr) = (\varphi|_{M'})^{ns}+\chi_{H,s-1}(\varphi|_{M'})^{n(s-1)}+\ldots+\chi_{H,1}(\varphi|_{M'})^n+\chi_{H,0}\,\mathrm{Id}_{M'} = 0,$$

где $\mathrm{Id}_{M'}$ — тождественный эндоморфизм модуля M'. Отсюда следует, что $\varphi|_{M'}$ является целым над идеалом I элементом алгебры $\mathrm{End}_F(M')$.

Предположим теперь, что φ — локально конечный над кольцом F эндоморфизм F-модуля M, ограничения которого на инвариантные относительно его действия конечно порождённые подмодули модуля M являются целыми над идеалом I кольца F элементами алгебр эндоморфизмов этих подмодулей. В таком случае для каждого элемента a модуля M можно подобрать многочлен с коэффициентами из кольца F

$$_af = {}_af(t) = t^{n(a)}+{}_af_{n(a)-1}t^{n(a)-1}+\ldots+{}_af_1t\in F[t]$$

степени $\deg{}_af = n(a)\geqslant 1$ ($n(a)=1$ при $a=0$), такой что

$$\varphi^{n(a)}(a)+{}_af_{n(a)-1}\varphi^{n(a)-1}(a)+\ldots+{}_af_1\varphi(a) = 0,$$

а потому подмодуль $M(a,\varphi)$ модуля M, порождённый всеми элементами $\varphi^k(a)$, $k\geqslant 0$, или, что то же самое, наименьший из всех его подмодулей, которые содержат элемент a и инвариантны относительно действия эндоморфизма φ, порождается конечной системой элементов $\{\varphi^k(a)\mid k=0,\ldots,n(a)-1\}$,

$$M(a,\varphi) = \sum_{k\geqslant 0}F\varphi^k(a) = \sum_{k=0}^{n(a)-1}F\varphi^k(a).$$

Поскольку по условию ограничение $\varphi|_{M(a,\varphi)}$ эндоморфизма φ на инвариантный относительно его действия конечно порождённый подмодуль $M(a,\varphi)$ модуля M является целым над идеалом I элементом алгебры эндоморфизмов

$\mathrm{End}_F\big(M(a,\varphi)\big)$ модуля $M(a,\varphi)$, оно аннулируется некоторым многочленом

$$g = g(t) = t^m + g_{m-1}t^{m-1} + \ldots + g_1 t \in F[t]$$

степени $\deg g = m \geqslant 1$ ($m = 1$ при $\varphi|_{M(a,\varphi)} = 0$) с коэффициентами $g_1, \ldots, g_{m-1} \in I$, т. е. $g(\varphi|_{M(a,\varphi)}) = 0$. Последнее означает, в частности, что

$$g(\varphi_{M(a,\varphi)})(a) = g(\varphi)(a) = \varphi^m(a) + g_{m-1}\varphi^{m-1}(a) + \ldots + g_1\varphi(a) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемый эндоморфизм φ локально конечен над идеалом I. □

В соответствии с определением алгебраического элемента над идеалом элемент x антикоммутативной алгебры R над кольцом F является алгебраическим над идеалом I этого кольца, если для всякого элемента y алгебры R можно подобрать натуральное число $m = m(x,y)$, такое что элемент $l_x^m y = (-1)^m r_x^m y$ представим в виде конечной суммы

$$l_x^m y = \sum_j h_j l_x^{m_j} y$$

для подходящих элементов $h_j \in I$ и показателей $1 \leqslant m_j < m$. Иначе говоря, элемент x такой алгебры R является алгебраическим над идеалом I тогда и только тогда, когда оператор умножения на него $l_x = -r_x$ является локально конечным над идеалом I эндоморфизмом F-модуля R. В частности, для элемента x алгебры R свойство быть ниль-элементом (слабо энгелевым элементом) равносильно локальной нильпотентности эндоморфизма l_x, т. е. существованию для любого элемента y алгебры R натурального числа $m = m(x,y)$, при котором $l_x^m y = 0$. По этой причине алгебраические над ненулевым идеалом I кольца F элементы антикоммутативных алгебр над кольцом F мы будем называть в дальнейшем их *локально конечными над идеалом I элементами*.

Приведём также следующее полезное наблюдение.

Замечание 1.6. Для любого идеала I кольца F элементы локально конечных в смысле Ширшова над идеалом I идеалов алгебры R над кольцом F являются её алгебраическими над идеалом I элементами.

Доказательство. Воспользуемся заключительной частью доказательства теоремы 4 из [7], соответствующей приводимому далее предложению 1.7. Рассмотрим произвольные локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I идеал J алгебры R, его элемент x и элемент y алгебры R. Обозначим через A подалгебру алгебры R, которую вместе с элементом x порождают все элементы вида zy и yz, где z пробегает элементы порождённой элементом x подалгебры $\langle x\rangle$. Так как подалгебра $\langle x\rangle$ локально конечного в смысле Ширшова над идеалом I идеала J конечна в смысле Ширшова над идеалом I, подалгебра A идеала J является конечно порождённой и, следовательно, также конечна в смысле Ширшова над I. Кроме того, подалгебра A инвариантна относительно действия элементов подалгебры $B = \langle l_x, r_x\rangle$ алгебры умножений

$M(R)$ алгебры R, порождённой операторами l_x и r_x левого и правого умножения на элемент x. Используя локальную конечность над кольцом F алгебр эндоморфизмов конечно порождённых F-модулей, отмеченную в доказательстве предыдущего замечания, мы получаем, что алгебра B', состоящая из ограничений элементов алгебры B на алгебру A, как и всякая конечно порождённая подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(A)$ конечно порождённого F-модуля A, конечна над кольцом F. Конечная в смысле Ширшова над идеалом I алгебра A нильпотентна по модулю своего идеала IA, $A^k \subseteq IA$ для некоторого $k \geqslant 2$, а потому

$$B'^{k-1}A = \{\varphi(a) \mid \varphi \in B'^{k-1},\ a \in A\} \subseteq A^k \subseteq IA.$$

Значит, зафиксировав любую конечную систему порождающих $\{e_1, \ldots, e_n\}$ F-модуля A, мы можем поставить в соответствие каждому эндоморфизму φ этого модуля из алгебры $B'' = B'^{k-1}$ одну из его матриц в выбранной системе $H_\varphi = (h^\varphi_{ji})^n_{i,j=1}$ с коэффициентами из идеала I, которые удовлетворяют равенствам

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} h^\varphi_{ji} e_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Характеристический многочлен χ_φ матрицы H_φ,

$$\chi_\varphi = \chi_\varphi(t) = t^n + \chi_{\varphi,n-1}t^{n-1} + \ldots + \chi_{\varphi,0} \in F[t],$$

аннулирующий её согласно теореме Гамильтона—Кэли, аннулирует эндоморфизм φ в алгебре $\mathrm{End}_F(A)$. Поскольку все коэффициенты многочлена χ_φ, кроме, быть может, его единичного старшего коэффициента, принадлежат идеалу I, отсюда следует, что порождённая эндоморфизмом φ подалгебра $\langle\varphi\rangle$ алгебры B'' нильпотентна по модулю своего идеала $I\langle\varphi\rangle$ и имеет индекс нильпотентности не выше $n+1$ по его модулю. Таким образом, $\varphi^{n+1} \in I\langle\varphi\rangle \subseteq IB''$ для всех $\varphi \in B''$. Поэтому алгебра B'' является ниль-алгеброй ограниченного индекса $n+1$ по модулю своего идеала IB'', или, что равносильно, её фактор-алгебра B''/IB'' удовлетворяет ассоциативному тождеству $x^{n+1} = 0$. В силу теоремы Левицкого—Амицура (см. [1, теорема 3 на с. 86; 26, следствие 1.6.26 на с. 46 и теорема 1.6.36 на с. 48]) последнее влечёт за собой локальную нильпотентность алгебры B''/IB'' и, более того, нильпотентность этой алгебры вследствие её конечности над кольцом F (здесь используется конечность над кольцом F степеней конечной над ним алгебры B', в число которых входит алгебра $B'' = B'^{k-1}$), т. е.

$$B''^l = B'^{(k-1)l} \subseteq IB'' = IB'^{k-1} \subseteq IB'$$

для подходящего $l \geqslant 1$. Полученный вывод гарантирует конечность в смысле Ширшова над идеалом I алгебры B' и тем самым предполагает существование натурального числа $m = m(x, y)$, такого что ограничение на алгебру A произведения $t^{(1)}_x \cdots t^{(m)}_x$ любых m операторов умножения $t^{(i)}_x \in \{l_x, r_x\}$, $i = 1, \ldots, m$, может быть записано в виде конечной суммы ограничений на неё произведений $h_jt(j)_x^{(1)}\cdots t(j)_x^{(m_j)}$ некоторых элемента $h_j\in I$ и операторов умножения $t(j)_x^{(p)}\in\{l_x,r_x\}$, $p=1,\ldots,m_j$, $1\leqslant m_j<m$,

$$t_x^{(1)}\cdots t_x^{(m)}\big|_A=\sum_j h_jt(j)_x^{(1)}\cdots t(j)_x^{(m_j)}\big|_A,$$

и, как следствие,

$$t_x^{(1)}\cdots t_x^{(m)}y=\sum_j h_jt(j)_x^{(1)}\cdots t(j)_x^{(m_j)}y.$$

Справедливость сказанного для любых элементов y алгебры R и x её идеала J означает, что все элементы этого идеала являются алгебраическими над идеалом I элементами алгебры R. $\square$

Наиболее важным для нашего обсуждения результатом работы [7], связанным с понятием алгебраического элемента над идеалом, является теорема 4, которую можно сформулировать следующим образом.

Предложение 1.7. *Пусть I — идеал кольца F, R — алгебра из однородного многообразия алгебр $\mathfrak{H}$ над кольцом F, удовлетворяющего условиям предложения* 1.1, *и J — локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I идеал алгебры R, фактор-алгебра R/J по которому локально конечна в смысле Ширшова над идеалом I. Тогда алгебра R локально конечна в смысле Ширшова над идеалом I, если и только если она является алгебраической алгеброй над этим идеалом.*

С учётом замечания 1.4 мы сразу получаем отсюда следствие 1.8.

Следствие 1.8. *Пусть I — идеал кольца F и $\mathfrak{H}_I$ — класс алгебраических над идеалом I алгебр из однородного многообразия алгебр $\mathfrak{H}$ над кольцом F, удовлетворяющего условиям предложения* 1.1. *Тогда на классе $\mathfrak{H}_I$ определены локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I и локально конечный над идеалом I радикалы LNF_I и LSF_I, совпадающие на этом классе между собой, $\mathrm{LNF}_I=\mathrm{LSF}_I$. Следовательно, на классе алгебраических над кольцом F алгебр $\mathfrak{H}_F$ из многообразия $\mathfrak{H}$ определены все радикалы LSF_I, $I\lhd F$, включая локально конечный и локально конечный и разрешимый радикалы* LF *и* LSF, *последний из которых совпадает на классе $\mathfrak{H}_F$ с локально разрешимым радикалом* LS, LSF = LS, *а на классе слабо энгелевых алгебр $\mathfrak{H}_{\{0\}}$ из многообразия $\mathfrak{H}$ определён локально нильпотентный радикал* LN, *равный на данном классе радикалам* LSF *и* LS, LN = LSF = LS.

Согласно замечанию 1.6 последнее означает, что для любого идеала I кольца F класс $\mathfrak{H}_I$ алгебраических над идеалом I алгебр из многообразия $\mathfrak{H}$ является наибольшим среди замкнутых относительно взятия идеалов и гомоморфных образов подклассов класса $\mathfrak{H}$, содержащих класс $\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I=\mathfrak{H}_I\cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$ локально конечных в смысле Ширшова над I алгебр из $\mathfrak{H}$ в качестве радикального подкласса. Отметим, что класс $\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$ совпадает также со своим расширением

$A(\mathfrak{H} \cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I)$ в классе $\mathfrak{H}_I$, которое составляют алгебры из класса $\mathfrak{H}_I$, обладающие возрастающими нормальными рядами подалгебр с факторами из класса $\mathfrak{H} \cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$.

Упомянутое в следствии 1.8 совпадение на классе слабо энгелевых алгебр $\mathfrak{H}_{\{0\}}$ из многообразия $\mathfrak{H}$ локально нильпотентного и локально разрешимого радикалов LN и LS формулируется, как правило, следующим образом: локально разрешимая алгебра из многообразия $\mathfrak{H}$ является локально нильпотентной, если и только если она слабо энгелева (с учётом того факта, что по замечанию 1.6 локально нильпотентные алгебры являются слабо энгелевыми и, как следствие, $\mathfrak{H} \cap L\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_{\{0\}} \cap L\mathfrak{R}$).

Ранее уже отмечалось, что многообразия альтернативных алгебр над кольцом F и при наличии $1/2$ в кольце F линейных йордановых алгебр над ним удовлетворяют условиям предложения 1.1 и состоят из алгебраических над кольцом F алгебр. Поэтому следствие 1.8 гарантирует существование на этих многообразиях локально конечного радикала LF и совпадающих на них между собой локально конечного и разрешимого и локально разрешимого радикалов LSF и LS, причём радикалы LSF и LS равны в данном случае также локально нильпотентному радикалу LN, LN $=$ LSF $=$ LS (см. [8, следствие из теоремы Дорофеева на с. 197, теорема Жевлакова на с. 112]). Более того, согласно замечанию 1.4 на указанных многообразиях определены равные друг другу локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I и локально конечный над идеалом I радикалы LNF_I и LSF_I, $\mathrm{LNF}_I = \mathrm{LSF}_I$, для любого идеала I кольца F. Стоит подчеркнуть и то, что существование на многообразиях альтернативных и линейных йордановых алгебр локально нильпотентного и локально конечного радикалов LN и LF обсуждалось в [13] задолго до появления работы [7].

В ряде случаев равные в силу следствия 1.8 на классе слабо энгелевых алгебр $\mathfrak{H}_{\{0\}}$ из многообразия алгебр $\mathfrak{H}$ локально нильпотентный, локально конечный и разрешимый и локально разрешимый радикалы LN, LSF и LS совпадают на классе $\mathfrak{H}_{\{0\}}$ ещё и с локально конечным радикалом LF, существование которого на классе $\mathfrak{H}_{\{0\}}$ следует из очевидного включения последнего в класс алгебраических над кольцом F алгебр $\mathfrak{H}_F$ из многообразия $\mathfrak{H}$ и всё того же следствия 1.8. Это верно, в частности, для многообразий альтернативных и лиевских алгебр над кольцом F и линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$, что без труда устанавливается при помощи приводимых ниже хорошо известных фактов из структурной теории данных многообразий. Начнём с того, что локально нильпотентный радикал LN специален на любом замкнутом относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F, на котором он определён, т. е. LN-полупростые алгебры из такого класса $\mathfrak{M}$ являются полупрямыми произведениями первичных LN-полупростых алгебр из $\mathfrak{M}$ (см. [2, теорема 3.4; 7, теорема 7]). Последнее относится в том числе к классам лиевских ниль-алгебр и альтернативных алгебр над кольцом F и линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$. Далее, конечные альтернативные и линейные йордановы ниль-алгебры над кольцом F локально нильпотентны и потому нильпотентны, так как на классах альтернативных и линейных йордановых PI-алгебр над кольцом F верхний ниль-радикал $\mathcal{N}$ совпадает с локально нильпотентным радикалом LN, где, как и ранее, в йордановом случае предполагается, что $1/2 \in F$. Для альтернативных алгебр это сразу следует из специальности радикала LN, $\mathcal{N}$-полупростоты первичных ассоциативных PI-алгебр, которую гарантирует теорема Левицкого—Амицура (см. [1, теорема 3 на с. 86; 26, следствие 1.6.26 на с. 46 и теорема 1.6.36 на с. 48]), описания LN-полупростых первичных неассоциативных альтернативных алгебр как колец Кэли—Диксона и $\mathcal{N}$-полупростоты последних (см. [8, теорема 11 на с. 232 и следствие на с. 229]), а для линейных йордановых алгебр — из результатов Е. И. Зельманова (см. [9, теорема 4; 20, теоремы 1, 2; 27; 22]). Наконец, поскольку согласно теореме Энгеля—Джекобсона любая конечномерная алгебра Ли над полем, порождённая как векторное пространство над ним элементами своего лиевского ниль-подкольца, нильпотентна (см. [3, с. 43]) и всякая первичная конечная алгебра Ли над кольцом F имеет конечномерное центральное замыкание над своим центроидом Мартиндейла (последнее представляет собой первичную алгебру Ли, которую порождают как векторное пространство над её центроидом Мартиндейла (расширенным центроидом), являющимся в данном случае полем, элементы исходной алгебры), что немедленно вытекает из теоремы Размыслова о ранге (см. [18, теорема 4.1 на с. 47]), не существует ненулевых первичных конечных ниль-алгебр Ли над кольцом F и, как следствие, все конечные ниль-алгебры Ли над F локально нильпотентны, а значит, нильпотентны.

Завершая эту вводную часть статьи, мы сформулируем следующее предложение, объединяющее теорему 6 и ряд связанных с ней замечаний из [7].

Предложение 1.9. *Пусть $\mathfrak{H}$ — однородное многообразие алгебр с ассоциативными степенями над кольцом F, удовлетворяющее условиям предложения* 1.1. *Тогда локально конечный в смысле Ширшова над идеалом I радикал LNF_I определён на многообразии $\mathfrak{H}$ для всех идеалов I кольца F в том и только в том случае, если элементы с нулевыми квадратами алгебр из этого многообразия являются их слабо энгелевыми элементами.*

В соответствии с выводами работы [7] условия данного предложения выполняются на многообразии альтернативных алгебр над кольцом F, а также на любом однородном многообразии σ-допустимых алгебр над кольцом F с $1/2$ и многообразии алгебр над кольцом типа (γ, δ), аддитивные группы которых не имеют $(\gamma+\delta)(1-\gamma-\delta)$-кручения, в случае если $\gamma+\delta \neq 0, 1$. Поэтому оно может быть использовано в качестве ещё одного варианта обоснования существования на многообразиях альтернативных алгебр над кольцом F и линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$ радикалов LF, $\mathrm{LN} = \mathrm{LSF} = \mathrm{LS}$ и $\mathrm{LNF}_I = \mathrm{LSF}_I$, $I \lhd F$, в дополнение к приведённым нами ранее рассуждениям.

2. Локально конечные радикалы алгебр, алгебраических в смысле Плоткина и Кузьмина

Первой задачей данного раздела является вывод теорем Плоткина и Кузьмина (см. [11, 16]) из предложения 1.7, что потребует введения ряда дополнительных понятий и обозначений.

Для любых алгебры R над кольцом F и её элементов x и y обозначим через $I(y,x)$ идеал порождённой ими подалгебры $\langle x,y\rangle$, порождённой элементом y, через $M(y,x)$ — подмодуль F-модуля $I(y,x)$, порождённый элементом y и всеми элементами vy, $v \in \{x\}^*$, или, что то же самое, множество образов элемента y при действии элементов подалгебры $F\operatorname{Id}_R + M^R(\langle x\rangle)$ алгебры умножений с единицей $M(R)' = F\operatorname{Id}_R + M(R)$ алгебры R, где Id_R — тождественный эндоморфизм F-модуля R, $M^R(\langle x\rangle)$ — подалгебра алгебры $M(R)$, которую порождают операторы левого и правого умножения на элементы подалгебры $\langle x\rangle$, порождённой элементом x, и через $K(y,x)$ — порождённую элементами подмодуля $M(y,x)$ подалгебру алгебры $I(y,x)$,

$$M(y,x) = \{wy \mid w \in F\operatorname{Id}_R + M^R(\langle x\rangle)\} \subseteq \\ \subseteq K(y,x) = \langle M(y,x)\rangle \subseteq I(y,x) = (y)_{\langle x,y\rangle}.$$

В ситуации, когда подалгебра $\langle x,y\rangle$ является антикоммутативной, её подмодуль $M(y,x)$ порождается над кольцом F элементами вида $l_x^k y = (-1)^k r_x^k y$, $k \geqslant 1$, и потому совпадает с подмодулями $M(y,l_x)$ и $M(y,r_x)$ модуля R, отвечающими его эндоморфизмам l_x и r_x и элементу y (см. доказательство замечания 1.5).

Пользуясь введёнными обозначениями, определим теперь понятия алгебраических в смысле Плоткина и Кузьмина элемента и алгебры. Будем говорить, что элемент x алгебры R над кольцом F является *алгебраическим в смысле Плоткина и Кузьмина*, или *PK-алгебраическим*, если для любого элемента y алгебры R идеал $I(y,x)$ подалгебры $\langle x,y\rangle$ включает в себя как минимум одну содержащую элемент y конечно порождённую подалгебру $A(y,x)$, инвариантную относительно действия операторов левого и правого умножения l_x и r_x на элемент x. При этом подалгебры $A(y,x)$ и $I(y,x)$ могут совпадать, что, к примеру, заведомо имеет место тогда, когда подалгебра $\langle x,y\rangle$ является алгеброй Ли и, как следствие, её идеал $I(y,x) = (y)_{\langle x,y\rangle}$ и подалгебра $K(y,x)$, порождённая в данном случае всеми элементами $l_x^k y$, $k \geqslant 0$, равны друг другу, $I(y,x) = K(y,x) = \langle l_x^k y \mid k \geqslant 0\rangle$. Последнее также означает, что элемент x бинарно лиевской алгебры R тогда и только тогда является PK-алгебраическим, когда для каждого её элемента y подалгебра $I(y,x)$ конечно порождённая. В частности, все локально конечные над кольцом F элементы такой алгебры R являются PK-алгебраическими. Алгебры над кольцом F, состоящие из PK-алгебраических элементов, мы будем называть *PK-алгебраическими*. Одним из самых простых примеров подобных алгебр являются локально конечные алгебры над кольцом F, их PK-алгебраичность следует из отмеченной ранее конечности над кольцом F конечно порождённых идеалов конечных алгебр над этим кольцом.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$ *— класс РК-алгебраических алгебр из однородного многообразия алгебр* $\mathfrak{H}$ *над кольцом* F*, удовлетворяющего условиям предложения* 1.1*. Тогда на классе* $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$ *определён локально конечный над идеалом* I *радикал* LSF_I *для всех идеалов* I *кольца* F*.*

Доказательство. В силу замечания 1.4 достаточно доказать существование локально конечного радикала LF на замкнутом относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$. Для этого необходимо показать только замкнутость класса $\mathfrak{H} \cap L\mathfrak{F}$ локально конечных алгебр из многообразия $\mathfrak{H}$ относительно взятия расширений в содержащем его классе $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$, т. е. установить локальную конечность над кольцом F любой алгебры R из класса $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$, имеющей локально конечный над кольцом F идеал J, фактор-алгебра по которому R/J локально конечна над F. Для начала стоит отметить, что алгебры J и R/J являются алгебраическими над кольцом F (см. замечание 1.6). Рассмотрим произвольные элементы x и y алгебры R. Алгебраичность над кольцом F алгебры R/J позволяет подобрать натуральное число $n = n(x, y)$, такое что для любых n операторов умножения $s_x^{(i)} \in \{l_x, r_x\}$, $i = 1, \ldots, n$, элемент $s_x^{(1)} \cdots s_x^{(n)} y$ можно записать в виде конечной суммы

$$s_x^{(1)} \cdots s_x^{(n)} y = \sum_j h_j w_j y + z$$

для подходящих элементов $h_j \in F$, $z \in J$ и $\{w_j\} \in \{x\}^*$, где каждый элемент w_j обладает как минимум одним представлением с $d(w_j) < n$ и $\deg w_j \leqslant n$ (см. выше). Более того, мы можем считать, что любой из элементов w_j в этом выражении представляет собой произведение $w_j = s(j)_x^{(1)} \cdots s(j)_x^{(n_j)}$ некоторых операторов умножения $s(j)_x^{(q)} \in \{l_x, r_x\}$, $q = 1, \ldots, n_j$, в котором $1 \leqslant n_j < n$ (для этого достаточно повторить рассуждения из доказательства замечания 1.6, применив их к образам $x + J$ и $y + J$ элементов x и y в локально конечной над кольцом F алгебре R/J). Для каждого элемента $s_x^{(1)} \cdots s_x^{(n)} y$, $s_x^{(i)} \in \{l_x, r_x\}$, $i = 1, \ldots, n$, выберем и зафиксируем одно из его представлений указанного здесь вида и обозначим через Z множество всех элементов z идеала J, участвующих в выбранных представлениях. Вследствие РК-алгебраичности алгебры R в её идеал J вместе с любым его элементом a входит некоторая содержащая элемент a конечно порождённая подалгебра $A(a, x)$, инвариантная относительно действия операторов левого и правого умножения l_x и r_x на элемент x. Алгебра $A(a, x)$, будучи конечно порождённой подалгеброй локально конечной над кольцом F алгебры J, конечна над F. Используя локальную конечность над кольцом F алгебр эндоморфизмов конечно порождённых F-модулей, отмеченную в доказательстве замечания 1.5, мы получаем, что подалгебра $C(a, x)$ алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F\big(A(a, x)\big)$ конечно порождённого F-модуля $A(a, x)$, порождённая ограничениями на него операторов умножения l_x и r_x, является конечной над кольцом F, а потому найдётся натуральное число $k = k(x, a)$, такое что для любых k операторов умножения $u_x^{(i)} \in \{l_x, r_x\}$, $i = 1, \ldots, k$, элемент

$u_x^{(1)}\cdots u_x^{(k)}a$ представим в виде конечной суммы

$$u_x^{(1)}\cdots u_x^{(k)}a=\sum_p f_p u(p)_x^{(1)}\cdots u(p)_x^{(k_p)}a$$

для некоторых элементов $f_p\in F$ и операторов $u(p)_x^{(l)}\in\{l_x,r_x\}$, $l=1,\dots,k_p$, $1\leqslant k_p<k$. Обозначим через $\hat{k}$ наибольшее из всех чисел $k(x,z)$, $z\in Z$, выбор которого возможен ввиду конечности множества Z. Тогда для произвольных элемента $z\in Z$ и операторов умножения $v_x^{(i)}\in\{l_x,r_x\}$, $i=1,\dots,\hat{k}$, мы можем записать

$$v_x^{(1)}\cdots v_x^{(\hat{k})}z=\sum_l g_l v(l)_x^{(1)}\cdots v(l)_x^{(p_l)}z,$$

подобрав соответствующие элементы $g_l\in F$ и операторы $v(l)_x^{(q)}\in\{l_x,r_x\}$, $q=1,\dots,p_l$, $1\leqslant p_l<\hat{k}$. Поскольку по построению каждый элемент $z\in Z$ имеет вид

$$z=s_x^{(1)}\cdots s_x^{(n)}y-\sum_j h_j w_j y=s_x^{(1)}\cdots s_x^{(n)}y-\sum_j h_j s(j)_x^{(1)}\cdots s(j)_x^{(n_j)}y,$$

где $h_j\in F$, $s(j)^{(q)}\in\{l_x,r_x\}$, $q=1,\dots,n_j$, $1\leqslant n_j<n$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\bigl(v_x^{(1)}\cdots v_x^{(\hat{k})}s_x^{(1)}\cdots s_x^{(n)}\bigr)y&=\sum_j h_j\bigl(v_x^{(1)}\cdots v_x^{(\hat{k})}s(j)_x^{(1)}\cdots s(j)_x^{(n_j)}\bigr)y+\\&+\sum_l g_l\bigl(v(l)_x^{(1)}\cdots v(l)_x^{(p_l)}s_x^{(1)}\cdots s_x^{(n)}\bigr)y-\\&-\sum_{l,j} g_l h_j\bigl(v(l)_x^{(1)}\cdots v(l)_x^{(p_l)}s(j)_x^{(1)}\cdots s(j)_x^{(n_j)}\bigr)y.\end{aligned}$$

Полученный нами вывод означает, что для любых элементов x и y алгебры R и системы из $\hat{m}=n(x,y)+\hat{k}$ операторов умножения $b_x^{(i)}\in\{l_x,r_x\}$, $i=1,\dots,\hat{m}$, элемент $b_x^{(1)}\cdots b_x^{(\hat{m})}y$ выражается через конечную сумму

$$b_x^{(1)}\cdots b_x^{(1)}y=\sum_j c_j b_j y$$

для подходящих элементов $c_j\in F$ и операторов $b_j\in\{x\}^*$, в которой каждый элемент b_j имеет по меньшей мере одно представление с $d(b_j)<\hat{m}$ и $\deg b_j\leqslant\hat{m}$. Следовательно, алгебра R является алгебраической над кольцом F и, более того, согласно предложению 1.7 локально конечной над этим кольцом.

Установленное нами существование на классе PK-алгебраических алгебр $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$ из многообразия $\mathfrak{H}$ локально конечного радикала LF влечёт за собой существование на классе $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$ локально конечного над идеалом I радикала LSF_I для всех идеалов I кольца F и, в частности, локально конечного и разрешимого радикала LSF, совпадающего на $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$ с локально разрешимым радикалом LS, LSF = LS (см. замечание 1.4). Вместе с тем, учитывая замкнутость класса $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$

относительно взятия подалгебр, мы получаем, что для каждого идеала I кольца F класс $\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I = \mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}\cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ локально конечных над идеалом I алгебр из многообразия $\mathfrak{H}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{H}^{\mathrm{PK}}$, равным своему расширению $A(\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I)$ в этом классе, $\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I = A(\mathfrak{H}\cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I)$. □

Для многообразий алгебр Ли над кольцом F и алгебр Мальцева над кольцом F с $1/2$ утверждение теоремы 2.1 соответствует исходным формулировкам теорем Плоткина и Кузьмина о существовании на данных многообразиях локально конечного и локально разрешимого радикалов.

Нашей следующей целью является описание ещё одного подхода к обоснованию существования локально конечных радикалов, в основе которого лежат вводимые ниже понятия идеально алгебраической, почти идеально алгебраической и слабо идеально алгебраической алгебр.

Алгебры над кольцом F, конечно порождённые идеалы конечно порождённых подалгебр которых являются конечно порождёнными подалгебрами, мы будем называть *идеально алгебраическими*. Нетрудно заметить, что формируемый ими класс идеально алгебраических алгебр IAlg над кольцом F содержит класс локально конечных алгебр $L\mathfrak{F}$ над F и замкнут относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов. Позднее будет показано также, что включение $L\mathfrak{F}\subset \mathrm{IAlg}$ является строгим.

Замечание 2.2. Любая идеально алгебраическая алгебра R над кольцом F является РК-алгебраической.

Доказательство. Чтобы убедиться в РК-алгебраичности произвольного элемента x такой алгебры R, достаточно заметить, что для каждого её элемента y порождённый им идеал $I(y,x)$ подалгебры $\langle x,y\rangle$, которую порождают элементы x и y, является конечно порождённой подалгеброй, а значит, можно положить $A(y,x)=I(y,x)$. □

Мы будем называть алгебру R над кольцом F *почти идеально алгебраической* (*слабо идеально алгебраической*), если для любых конечно порождённой подалгебры A алгебры R и конечно порождённого идеала I подалгебры A существует по меньшей мере одна содержащая подалгебру A (её идеал I, но, возможно, не всю подалгебру A) подалгебра B алгебры R, идеал которой $(I)_B$, порождённый элементами подалгебры I, является конечно порождённой подалгеброй. Класс идеально алгебраических алгебр IAlg над кольцом F связан с классами почти и слабо идеально алгебраических алгебр QIAlg и WIAlg над этим кольцом очевидными включениями $\mathrm{IAlg}\subseteq\mathrm{QIAlg}\subseteq\mathrm{WIAlg}$. Кроме того, мы можем сделать следующее простое наблюдение.

Замечание 2.3. Алгебра R над кольцом F является идеально алгебраической, если и только если все её подалгебры (конечно порождённые подалгебры) являются слабо идеально алгебраическими.

Из определений почти и слабо идеально алгебраических алгебр следует замкнутость классов таких алгебр QIAlg и WIAlg над кольцом F относительно взятия гомоморфных образов. Вместе с тем эти определения не гарантируют замкнутость классов QIAlg и WIAlg относительно взятия идеалов, что, в свою очередь, не позволяет нам говорить о радикалах в смысле Куроша—Амицура, определённых на данных классах. Последнее обстоятельство можно преодолеть путём выделения подклассов классов QIAlg и WIAlg, на которых рассмотрение радикалов в смысле Куроша—Амицура возможно.

Алгебры над кольцом F, все достижимые подалгебры которых являются почти (слабо) идеально алгебраическими, мы будем называть *наследственно почти* (*слабо*) *идеально алгебраическими*. Классы наследственно почти и слабо идеально алгебраических алгебр QIAlg′ и WIAlg′ над кольцом F замкнуты относительно взятия гомоморфных образов и являются наибольшими из всех замкнутых относительно взятия идеалов подклассов классов почти и слабо идеально алгебраических алгебр QIAlg и WIAlg над F, а значит, являются также наибольшими среди тех их подклассов, на которых могут быть определены радикалы в смысле Куроша—Амицура.

Будем говорить, что эндоморфизм φ алгебры R над кольцом F как F-модуля является *PK-алгебраическим*, если для любого элемента x алгебры R подалгебра $K(x,\varphi)$ алгебры R, порождённая образами $\varphi^k(x)$, $k \geqslant 0$, элемента x при действии всех неотрицательных степеней эндоморфизма φ, конечно порождённая и, следовательно, порождается конечной системой таких образов $\{\varphi^k(x) \mid k=0,\ldots,n\}$ для соответствующего $n=n(\varphi,x)\geqslant 0$,

$$K(x,\varphi)=\langle \varphi^k(x) \mid k\geqslant 0\rangle = \langle \varphi^k(x) \mid k=0,\ldots,n\rangle.$$

Кроме того, мы будем называть эндоморфизм φ *почти PK-алгебраическим* (*слабо PK-алгебраическим*), если для каждого элемента x алгебры R подалгебра $K(x,\varphi)$ входит в некоторую конечно порождённую инвариантную относительно действия эндоморфизма φ (конечно порождённую, но не обязательно инвариантную относительно действия φ) подалгебру алгебры R. Примером PK-алгебраического эндоморфизма алгебры R как F-модуля может служить любой его локально конечный над кольцом F эндоморфизм φ (в этом случае подмодуль $M(x,\varphi)$ модуля R, порождённый всеми элементами $\varphi^k(x)$, $k\geqslant 0$, является конечно порождённым для всякого элемента x из R). Стоит отметить, что элемент x алгебры R, порождающий в алгебре R вместе с любым её элементом y лиевскую подалгебру $\langle x,y\rangle$, является PK-алгебраическим тогда и только тогда, когда PK-алгебраическим эндоморфизмом F-модуля R является его эндоморфизм $l_x=-r_x$ (в данной ситуации $K(y,x)=I(y,x)=K(y,l_x)$ при всех $y\in R$).

Замечание 2.4. Пусть H — подкольцо кольца F, которое содержит его единицу и обладает тем свойством, что кольцо F является целым над кольцом H. Тогда почти PK-алгебраические дифференцирования и эндоморфизмы любой алгебры R над кольцом F являются её почти PK-алгебраическими дифференцированиями и эндоморфизмами как алгебры над кольцом H.

Доказательство. Сразу оговоримся, что здесь идёт речь об эндоморфизмах алгебры R, которые являются её почти PK-алгебраическими эндоморфизмами как F-модуля. Напомним также, что целостность кольца F над его подкольцом с единицей H подразумевает существование для каждого элемента кольца F по меньшей мере одного аннулирующего его многочлена с коэффициентами из кольца H без свободного члена и единичным старшим коэффициентом. Последнее, в свою очередь, равносильно тому, что кольцо F является локально конечной алгеброй над кольцом H.

Рассмотрим любое дифференцирование (эндоморфизм) d алгебры R над кольцом F, которое является её почти РК-алгебраическим эндоморфизмом как F-модуля, и инвариантную относительно его действия конечно порождённую подалгебру A алгебры R. Зафиксировав произвольную конечную систему порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ алгебры A, мы можем выразить каждый элемент алгебры A через конечную F-линейную комбинацию конечных произведений элементов этой системы. Выберем по одному из таких представлений для элементов $d(a_1), \ldots, d(a_n)$ и обозначим через K подалгебру алгебры F над кольцом H, порождённую её единицей и всеми коэффициентами из F, участвующими в выбранных представлениях данных элементов. Конечно порождённые подалгебры локально конечной над кольцом H алгебры F, в число которых входит и алгебра K, конечны над кольцом H, т. е. являются конечно порождёнными H-модулями. Поэтому $K = Hf_1 + \ldots + Hf_m$ для подходящих $m \geqslant 1$ и $f_1, \ldots, f_m \in K$. Выделим теперь H-подалгебру A' алгебры R, порождённую элементами a_i, $f_j a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Найденная таким образом подалгебра A' является одной из тех конечно порождённых d-инвариантных H-подалгебр алгебры R, которые содержат порождающие $a_1, \ldots, a_n$ её d-инвариантной F-подалгебры A. Отсюда следует, что каждый элемент алгебры R, порождающий вместе с элементами некоторой конечной системы её d-инвариантную F-подалгебру, входит вместе с элементами этой системы в по меньшей мере одну из конечно порождённых d-инвариантных H-подалгебр алгебры R. $\square$

Замечание 2.5. Пусть R — бинарно лиевская почти (слабо) идеально алгебраическая алгебра над кольцом F. Тогда для любых элемента x алгебры R и её идеала J оператор $l_x = -r_x$ является почти (слабо) РК-алгебраическим эндоморфизмом F-модуля J.

Доказательство. Согласно сделанным нами ранее замечаниям для любых элементов x и y алгебры R порождённый элементом y идеал $I(y, x) = (y)_{\langle x, y\rangle}$ подалгебры $\langle x, y\rangle$ алгебры R, которую порождают элементы x и y, совпадает с её подалгеброй $K(y, l_x)$, порождённой всеми элементами $l_x^k y = (-1)^k r_x^k y$, $k \geqslant 0$, $I(y, x) = K(y, l_x)$. Если алгебра R является слабо идеально алгебраической, то в ней имеется по меньшей мере одна содержащая подалгебру $I(y, x)$ подалгебра A, идеал которой $\big(I(y, x)\big)_A$, порождённый элементами подалгебры $I(y, x)$, является конечно порождённой подалгеброй. В случае если алгебра R является почти идеально алгебраической, подобная подалгебра A может быть выбрана среди тех подалгебр алгебры R, которые содержат её подалгебру $\langle x, y\rangle$. Последнее, в свою очередь, влечёт за собой инвариантность соответствующей конечно порождённой подалгебры $\big(I(y, x)\big)_A$ относительно действия оператора $l_x = -r_x$.

После этого нам остаётся лишь заметить, что подалгебра $\big(I(y,x)\big)_A$ и вместе с ней подалгебра $I(y,x) = K(y,l_x)$ входят в любой содержащий элемент y идеал J алгебры R. $\square$

Теорема 2.6. *Для любых идеала I кольца F и почти идеально алгебраической алгебры R над кольцом F алгебра R обладает наибольшим локально конечным над идеалом I идеалом $\mathrm{LSF}_I(R)$, фактор-алгебра $R/\mathrm{LSF}_I(R)$ по которому не содержит ненулевых локально конечных над I идеалов. Если кольцо F нётерово, то это верно также для всех слабо идеально алгебраических алгебр над этим кольцом.*

Доказательство. В первую очередь мы установим существование во всякой почти идеально алгебраической алгебре R над кольцом F наибольшего локально конечного над кольцом F идеала $\mathrm{LF}(R)$, фактор-алгебра $R/\mathrm{LF}(R)$ по которому не имеет ненулевых локально конечных над F идеалов. Для этого нам необходимо (и достаточно) доказать локальную конечность над кольцом F любой подалгебры R' алгебры R, являющейся локально конечным над F расширением некоторого локально конечного над F идеала J алгебры R. Рассмотрим произвольную конечно порождённую подалгебру A алгебры R' с выделенной в ней конечной системой порождающих $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Воспользовавшись тем, что конечно порождённая подалгебра A имеет конечный над кольцом F образ $(A+J)/J \cong A/(A\cap J)$ в локально конечной над этим кольцом фактор-алгебре R'/J, мы можем подобрать конечную систему элементов $\{b_1,\ldots,b_m\}$ алгебры A, позволяющую записать любой её элемент a в виде

$$a = \sum_{k=1}^{m} f_k(a)b_k + d(a)$$

для подходящих элементов $f_1(a),\ldots,f_m(a) \in F$ и $d(a) \in A\cap J$. Выбрав и зафиксировав для каждого из элементов a_i и b_lb_k, $i=1,\ldots,n$, $l,k=1,\ldots,m$, одно из таких его представлений, а затем обозначив через D идеал алгебры A, порождённый участвующими в нём элементами $d(a_i)$ и $d(b_lb_k)$, $i=1,\ldots,n$, $l,k=1,\ldots,m$, и через B — её F-подмодуль, порождённый элементами $b_1,\ldots,b_m$, $B = Fb_1+\ldots+Fb_m$, мы можем выразить алгебру A через сумму F-подмодуля B и идеала D, входящего в её пересечение $A\cap J$ с идеалом J алгебры R, $A = B + D$. Так как алгебра R является почти идеально алгебраической, в ней имеется содержащая её конечно порождённую подалгебру A подалгебра A', идеал $D' = (D)_{A'}$ которой, порождённый элементами конечно порождённого идеала D алгебры A, является конечно порождённой подалгеброй. По построению конечно порождённая подалгебра D' входит в локально конечный над кольцом F идеал J и потому конечна над F. Таким образом, конечно порождённая алгебра A является подалгеброй конечной над кольцом F алгебры $B+D'$, что вследствие отмеченной ранее локальной конечности конечных алгебр гарантирует её конечность над кольцом F. Справедливость данного вывода для любой конечно порождённой подалгебры A

алгебры R' означает, что R' является локальной конечной над кольцом F алгеброй. При помощи индукции отсюда можно без труда вывести локальную конечность над кольцом F конечных сумм локально конечных над F идеалов алгебры R и тем самым установить локальную конечность над F произвольных сумм таких идеалов вместе с существованием в алгебре R наибольшего локально конечного над F идеала $\mathrm{LF}(R)$. Более того, из полученного нами вывода сразу следует, что в фактор-алгебре $R/\mathrm{LF}(R)$ алгебры R по её идеалу $\mathrm{LF}(R)$ нет ненулевых локально конечных над кольцом F идеалов. Применяя замечание 1.2 и рассуждения из доказательства замечания 1.4, мы получаем также, что для любого идеала I кольца F алгебра R обладает наибольшим локально конечным над идеалом I идеалом $\mathrm{LSF}_I(R)$, фактор-алгебра по которому $R/\mathrm{LSF}_I(R)$ не содержит ненулевых локально конечных над I идеалов.

Для получения аналогичных утверждений для любой слабо идеально алгебраической алгебры R над нётеровым кольцом F следует лишь сделать ряд небольших изменений в приведённом здесь обосновании локальной конечности над кольцом F подалгебры R' алгебры R, содержащей локально конечный над F идеал J алгебры R, фактор-алгебра по которому R'/J локально конечна над F. Как и ранее, каждая конечно порождённая подалгебра A такой алгебры R' может быть записана в виде суммы некоторых своих конечно порождённого F-подмодуля B и конечно порождённого идеала D, входящего в пересечение $A \cap J$, $A = B + D$. Слабая идеальная алгебраичность алгебры R позволяет выбрать среди подалгебр этой алгебры, содержащих идеал D её подалгебры A, подалгебру A'', идеал которой $D'' = (D)_{A''}$, порождённый элементами D, является конечно порождённой подалгеброй. Поскольку подалгебра D'' входит в локально конечный над кольцом F идеал J алгебры R, она конечна над F, или, что то же самое, является конечно порождённым F-модулем. Из нётеровости кольца F и элементарных свойств нётеровых колец и модулей (см., к примеру, [12, 19]) следует нётеровость конечно порождённого модуля над ним D'', а вместе с тем нётеровость и конечная порождённость всех его подмодулей, одним из которых является по построению идеал D алгебры A. Поэтому алгебра $A = B + D$ конечна над кольцом F. Ввиду того что последнее справедливо для любой конечно порождённой подалгебры A алгебры R', алгебра R' локально конечна над кольцом F. □

Применяя замечание 1.4, мы немедленно получаем следствие 2.7.

Следствие 2.7. *Локально конечный над идеалом I радикал LSF_I определён на классе наследственно почти идеально алгебраических алгебр QIAlg' над кольцом F для всех идеалов I кольца F. Если кольцо F нётерово, тогда радикалы LSF_I, $I \lhd F$, определены также на классе наследственно слабо идеально алгебраических алгебр WIAlg' над кольцом F. Следовательно, на классе идеально алгебраических алгебр IAlg над любым кольцом F определены все радикалы LSF_I, $I \lhd F$, включая локально конечный и разрешимый* *радикал* LSF, *совпадающий на этом классе с локально разрешимым радикалом* LS, LSF = LS.

Для того чтобы применить последний вывод непосредственно к алгебрам Ли, нам придётся доказать следующее обобщение теоремы Плоткина о существовании локально конечного радикала LF на классе PK-алгебраических алгебр Ли (см. [16]).

Теорема 2.8. *Пусть R — PK-алгебраическая алгебра Ли над кольцом F, содержащая идеально алгебраический идеал J, фактор-алгебра R/J по которому локально конечна над кольцом F. Тогда алгебра R является идеально алгебраической.*

Доказательство. Поскольку в данном случае речь идёт об алгебрах Ли, мы будем пользоваться традиционной для них системой обозначений, в соответствии с которой операция умножения (лиевская скобка) рассматриваемой алгебры Ли R обозначается через $[\,,\,]$, а оператор левого умножения l_x на любой элемент x алгебры R, или, что то же самое, соответствующее ему внутреннее (присоединённое) дифференцирование этой алгебры — через ad_x, $\mathrm{ad}_x\colon y \mapsto [x, y]$, $y \in R$.

Рассмотрим произвольные конечно порождённую подалгебру A алгебры R и конечно порождённый идеал B подалгебры A, $A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ и $B = (b_1, \ldots, b_m)_A$ для некоторых $n, m \geqslant 1$ и элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_m \in B$. Образ $(A + J)/J$ конечно порождённой подалгебры A алгебры R в её локально конечной над кольцом F фактор-алгебре R/J является конечно порождённой подалгеброй последней и потому конечен над F. Следовательно, выбрав в алгебре A любую конечную систему элементов $\{e_1, \ldots, e_p\}$, образы которых в алгебре $(A+J)/J \cong A/(A\cap J)$ формируют её конечную систему порождающих как F-модуля, мы можем представить каждый элемент $a \in A$ в виде

$$a = f(a)_1 e_1 + \ldots + f(a)_p e_p + d(a)$$

для подходящих элементов $f(a)_1, \ldots, f(a)_p \in F$ и $d(a) \in A \cap J$. Зафиксируем по одной из таких записей элементов a_l, $l = 1, \ldots, n$, и $[e_i, e_j]$, $1 \leqslant i < j \leqslant p$, и обозначим через A' идеал алгебры A, порождённый участвующими в них элементами $d(a_l)$, $l = 1, \ldots, n$, и $d([e_i, e_j])$, $1 \leqslant i < j \leqslant p$. В рамках оригинального доказательства теоремы Плоткина (см. [16]) было установлено, что алгебра A совпадает с суммой своих конечно порождённого F-подмодуля $Fe_1 + \ldots + Fe_p$ и идеала A', являющегося её конечно порождённой подалгеброй, $A = Fe_1 + \ldots + Fe_p + A'$. Естественный эпиморфизм $A \to A/A'$ алгебры A на её конечную над кольцом F фактор-алгебру A/A' по идеалу A' отображает конечно порождённый идеал B алгебры A на конечно порождённый идеал $(B + A')/A'$ алгебры A/A', который вследствие отмеченной ранее замкнутости класса конечных алгебр над кольцом F относительно взятия конечно порождённых идеалов также конечен над F. Поэтому мы можем найти элементы $e'_1, \ldots, e'_q$ алгебры B, образы которых в алгебре $(B+A')/A' \cong B/(B\cap A')$ составляют одну из её конечных систем порождающих как F-модуля, и выразить с их помощью любой элемент $b \in B$ через сумму

$$b = g(b)_1 e_1' + \ldots + g(b)_q e_q' + c(b)$$

для некоторых элементов $g(b)_1, \ldots, g(b)_q \in F$ и $c(b) \in B \cap A'$. Это позволяет представить алгебру B в виде суммы её конечно порождённого F-подмодуля $Fe_1' + \ldots + Fe_q'$ и идеала $B \cap A'$, $B = Fe_1' + \ldots + Fe_q' + B \cap A'$. Выберем для каждого из элементов b_i и $[a_j, e_t']$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, q$, одну из его записей указанного здесь вида, сформируем из участвующих в них элементов идеала $B \cap A'$ алгебр A' и B конечное подмножество

$$C = \{c(b_i), c([a_j, e_t']) \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, q\}$$

и обозначим через B' идеал алгебры A', порождённый всеми элементами $\mathrm{ad}_{e_p}^{k_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{k_1} c$, $c \in C$, $k_1, \ldots, k_p \geqslant 0$. Поскольку по условию алгебра Ли R является РК-алгебраической, для любых её элементов x и y можно подобрать целое $n(x, y) \geqslant 0$, такое что элементы $\mathrm{ad}_x^k y$, $k = 0, \ldots, n(x, y)$, формируют конечную систему порождающих подалгебры $I(y, x)$ алгебры R, порождённой всеми элементами $\mathrm{ad}_x^k y$, $k \geqslant 0$,

$$I(y, x) = K(y, x) = \langle \mathrm{ad}_x^k y \mid k \geqslant 0 \rangle = \langle \mathrm{ad}_x^k y \mid k = 0, \ldots, n(x, y) \rangle.$$

Пользуясь этим свойством и тождеством Якоби, мы можем записать каждый элемент $\mathrm{ad}_{e_p}^{k_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{k_1} c$, $c \in C$, $k_1, \ldots, k_p \geqslant 0$, в виде конечной F-линейной комбинации элементов $\mathrm{ad}_{e_p}^{l_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{l_1} c$, где показатели $l_1, \ldots, l_p$ принимают значения $l_1 = 0, \ldots, n_1(c) = n(e_1, c)$ и далее $l_s = 0, \ldots, n_s(l_1, \ldots, l_{s-1}, c) = n(e_s, \mathrm{ad}_{e_{s-1}}^{l_{s-1}} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{l_1} c)$, $s = 2, \ldots, p$ (каждое значение l_1 определяет предел изменения l_2, каждая пара значений l_1 и l_2 определяет предел изменения l_3 и т. д.). Так как для всякого элемента $c \in C$ множество всех возможных строк показателей $\{(l_1, \ldots, l_p)\}$, определённых в соответствии с описанным правилом, заведомо конечно, идеал B' алгебры A' конечно порождён. Поставим в соответствие каждому $l \geqslant 1$ идеал B_l' алгебры A', порождённый всеми элементами $\mathrm{ad}_{e_p}^{k_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{k_1} c$, $c \in C$, $k_1, \ldots, k_p \geqslant 0$, $k_1 + \ldots + k_p \leqslant l$. Идеалы B_l', $l \geqslant 1$, входят в идеал B' и образуют неубывающую цепочку

$$B_1' \subseteq \ldots \subseteq B_l' \subseteq \ldots \subseteq B' = \bigcup_{l \geqslant 1} B_l',$$

которая вследствие конечной порождённости идеала B' стабилизируется на каком-то шаге $\hat{l} \geqslant 1$, $B' = B_{\hat{l}}' = B_l'$ для любого $l \geqslant \hat{l}$. Используя индукцию по $l \geqslant 1$, мы покажем, что каждый идеал B_l' содержит все элементы $\mathrm{ad}_{e_{s_l}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c$, $c \in C$, $1 \leqslant s_1, \ldots, s_l \leqslant p$, а значит, совпадает с идеалом алгебры A', порождённым элементами множества S и всеми элементами вида $\mathrm{ad}_{e_{s'_{l'}}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s'_1}} c$, $c \in C$, $1 \leqslant l' \leqslant l$, $1 \leqslant s'_1, \ldots, s'_{l'} \leqslant p$. Выполнение основания индукции сразу следует из заложенного в определение идеала B_1' включения в него элементов $\mathrm{ad}_{e_s} c$, $c \in C$, $s = 1, \ldots, p$. Предполагая доказанность рассматриваемого утверждения при $l=1,\ldots,k-1$ для некоторого $k>1$, установим его справедливость в случае $l=k$. Для этого в первую очередь следует заметить, что для любых элементов $x_1,\ldots,x_i,y\in R$, $i\geqslant 1$,

$$\left(\prod_{j=i}^{1}\mathrm{ad}_{x_j}\right)\mathrm{ad}_y=\sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_i\leqslant 1}\mathrm{ad}_{\left(\prod_{j=i}^{1}\mathrm{ad}_{x_j}^{k_j}\right)y}\left(\prod_{j=i}^{1}\mathrm{ad}_{x_j}^{1-k_j}\right),\tag{1}$$

где все выделенные в скобках произведения степеней внутренних дифференцирований записаны в порядке убывания индексов, т. е.

$$\prod_{j=i}^{1}\mathrm{ad}_{x_j}^{k_j}=\mathrm{ad}_{x_i}^{k_i}\cdots\mathrm{ad}_{x_1}^{k_1}\quad(0\leqslant k_1,\ldots,k_i\leqslant 1).$$

Последнее несложно доказать при помощи индукции по $i\geqslant 1$, опираясь на тождество Якоби, представленное в виде

$$\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y=\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x+\mathrm{ad}_{[x,y]}=\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x+\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x y}\quad(x,y\in R).$$

Ввиду того что алгебра A' является идеалом алгебры $A=Fe_1+\ldots+Fe_p+A'$ (см. выше), из приведённого соотношения и включений

$$\mathrm{ad}_{e_{s_l}}\cdots\mathrm{ad}_{e_{s_1}}c=\left(\prod_{j=l}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_j}}\right)c\in B'_l\quad(l=1,\ldots,k-1,\ c\in C,\ 1\leqslant s_l,\ldots,s_l\leqslant p),$$

выполняющихся по предположению индукции, вытекает, что при всех $l=1,\ldots,k-1$, $c\in C$, $a'\in A$, $1\leqslant l',l''\leqslant l$, $\varepsilon,\varepsilon'\in\{0,1\}$, $\varepsilon l'+\varepsilon' l''=l$, $1\leqslant s_1,\ldots,s_{l'},s'_1,\ldots,s'_{l''}\leqslant p$

$$\left(\prod_{j=l'}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_j}}\right)^{\varepsilon}\mathrm{ad}_{a'}\left(\prod_{j'=l''}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s'_{j'}}}\right)^{\varepsilon'}c=$$
$$=\sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_{l'}\leqslant 1}\mathrm{ad}_{\left(\prod_{j=l'}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_j}}^{k_j}\right)^{\varepsilon}a'}\left(\prod_{j=l'}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_j}}^{1-k_j}\right)^{\varepsilon}\left(\prod_{j'=l''}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s'_{j'}}}\right)^{\varepsilon'}c\in B'_l.$$

Более того, применяя равенства

$$[e_s,e_{s'}]=-[e_{s'},e_s]=f([e_s,e_{s'}])_1e_1+\ldots+f([e_s,e_{s'}]_pe_p+d([s_s,s_{s'}])$$
$$(1\leqslant s<s'\leqslant p),$$

где $f([e_s,e_{s'}])_1,\ldots,f([e_s,e_{s'}])_p\in F$ и $d([e_s,e_{s'}])\in A'$, мы получаем, что для любых $c\in C$, $1\leqslant k',k''\leqslant k-2$, $\varepsilon,\varepsilon'\in\{0,1\}$, $\varepsilon k'+\varepsilon k''=k-2$, $1\leqslant s_1,\ldots,s_{k'},s,s',s'_1,\ldots,s'_{k''}\leqslant p$

$$\left(\prod_{i=k'}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_i}}\right)^{\varepsilon}(\mathrm{ad}_{e_s}\mathrm{ad}_{e_{s'}}-\mathrm{ad}_{e_s}\mathrm{ad}_{e_{s'}})\left(\prod_{i'=k''}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s'_{i'}}}\right)^{\varepsilon'}c=$$
$$=\left(\prod_{i=k'}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s_i}}\right)^{\varepsilon}\mathrm{ad}_{[e_s,e_{s'}]}\left(\prod_{i'=k''}^{1}\mathrm{ad}_{e_{s'_{i'}}}\right)^{\varepsilon'}c=$$

$$= \sum_{j=1}^{p} f([e_s, e_{s'}])_j \left(\prod_{i=k'}^{1} \mathrm{ad}_{e_{s_i}}\right)^{\varepsilon} \mathrm{ad}_{e_j} \left(\prod_{i'=k''}^{1} \mathrm{ad}_{e_{s'_{i'}}}\right)^{\varepsilon'} c +$$
$$+ \left(\prod_{i=k'}^{1} \mathrm{ad}_{e_{s_i}}\right)^{\varepsilon} \mathrm{ad}_{d([e_s, e_{s'}])} \left(\prod_{i'=k''}^{1} \mathrm{ad}_{e_{s'_{i'}}}\right)^{\varepsilon'} c \in B'_{k-1}.$$

Это означает также, что для каждой транспозиции $\tau = (i\, i+1) \in \mathfrak{S}_k$ (через $\mathfrak{S}_k$ обозначена симметрическая группа степени k), $i = 1, \ldots, k-1$,

$$\mathrm{ad}_{e_{s_k}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c - \mathrm{ad}_{e_{s_{\tau(1)}}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_{\tau(k)}}} c \in B'_{k-1} \quad (c \in C,\ 1 \leqslant s_1, \ldots, s_k \leqslant p).$$

Поскольку каждая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ является произведением некоторого конечного набора транспозиций $(i\, i+1)$, $i = 1, \ldots, k-1$, отсюда следует более общее включение

$$\mathrm{ad}_{e_{s_k}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c - \mathrm{ad}_{e_{s_{\sigma(k)}}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_{\sigma(1)}}} c \in B'_{k-1} \ (c \in C,\ 1 \leqslant s_1, \ldots, s_k \leqslant p,\ \sigma \in \mathfrak{S}_k).$$

Поэтому мы можем подобрать для любых индексов $s_1, \ldots, s_k$, $1 \leqslant s_1, \ldots, s_k \leqslant p$, такую перестановку $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, что

$$\mathrm{ad}_{e_{s_{\sigma(k)}}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_{\sigma(1)}}} c = \mathrm{ad}_{e_p}^{l_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{l_1} c \in B'_k \quad (c \in C),$$

где l_s — число индексов $s_1, \ldots, s_k$, равных s, $s = 1, \ldots, p$, $l_1 + \ldots + l_p = k$, и получить включение

$$\mathrm{ad}_{e_{s_k}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}}(c) = \mathrm{ad}_{e_p}^{l_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{l_1} c + \left(\mathrm{ad}_{e_{s_k}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c - \mathrm{ad}_{e_p}^{l_p} \cdots \mathrm{ad}_{e_1}^{l_1} c\right) \in$$
$$\in B'_k + B'_{k-1} = B'_k \quad (c \in C).$$

Шаг индукции доказан полностью. Таким образом, идеал B' алгебры A' содержит все элементы $\mathrm{ad}_{e_{s_l}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c$, $c \in C$, $l \geqslant 1$, $1 \leqslant s_1, \ldots, s_l \leqslant p$. Вариант тождества Якоби (1) можно переписать в виде

$$\left(\prod_{j=i}^{1} \mathrm{ad}_{x_j}\right) \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \left(\prod_{j=i}^{1} \mathrm{ad}_{x_j}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{0 \leqslant k_1, \ldots, k_i \leqslant 1, \\ (k_1, \ldots, k_i) \neq (0, \ldots, 0)}} \mathrm{ad}_{\left(\prod\limits_{j=i}^{1} \mathrm{ad}_{x_j}^{k_j}\right) y} \left(\prod_{j=i}^{1} \mathrm{ad}_{x_j}^{1-k_j}\right) \quad (x_1, \ldots, x_i, y \in R,\ i \geqslant 1). \quad (2)$$

Применяя соотношение (2), наблюдения, сделанные относительно идеала B' алгебры A', и тот факт, что алгебра A' является идеалом алгебры $A = Fe_1 + \ldots + Fe_p + A'$, мы получаем, что идеал B' совпадает как с F-подмодулем алгебры A', порождённым элементами вида

$$\mathrm{ad}_{a'_{l'}} \cdots \mathrm{ad}_{a'_1} \mathrm{ad}_{e_{s_l}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} c \ \ (c \in C,\ l', l \geqslant 0,\ a'_1, \ldots, a'_{l'} \in A',\ 1 \leqslant s_1, \ldots, s_l \leqslant p),$$

так и с её F-подмодулем, порождённым элементами вида

$$\mathrm{ad}_{e_{s_l}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}} \mathrm{ad}_{a'_{l'}} \cdots \mathrm{ad}_{a'_1} c \ \ (c \in C,\ l', l \geqslant 0,\ a'_1, \ldots, a'_{l'} \in A',\ 1 \leqslant s_1, \ldots, s_l \leqslant p),$$

где в случае $l = 0$ или (и) $l' = 0$ соответствующее произведение операторов умножения $\mathrm{ad}_{e_{s_l}} \cdots \mathrm{ad}_{e_{s_1}}$ или (и) $\mathrm{ad}_{a'_{l'}} \cdots \mathrm{ad}_{a'_1}$ следует заменить тождественным эндоморфизмом Id_R F-модуля R. Поэтому идеал B' алгебры A' является также идеалом алгебры A, а точнее, равен её идеалу, порождённому элементами множества C. По построению элементы

$$b_i = g(b_i)_1 e'_1 + \ldots + g(b_i)_q e'_q + c(b_i) \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$[a_j, e'_t] = g([a_j, e'_t])_1 e'_1 + \ldots + g([a_j, e'_t])_q e'_q + c([a_j, e'_t]) \quad (j{=}1, \ldots, n,\ t{=}1, \ldots, q)$$

входят в сумму $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ конечно порождённого F-подмодуля $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q$ алгебры A и её идеала B'. Значит, данная сумма формирует идеал алгебры A. Кроме того, идеал $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ алгебры A содержится в её идеале B и включает в себя его порождающие $b_1, \ldots, b_m$. Следовательно, идеалы B и $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ алгебры A совпадают.

Так как по условию идеал J алгебры R является идеально алгебраическим, конечно порождённый идеал B' его конечно порождённой подалгебры A' является конечно порождённой подалгеброй, и потому идеал $B = Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ подалгебры A алгебры R также является конечно порождённой подалгеброй. Справедливость последнего вывода для любых конечно порождённой подалгебры A алгебры R и её конечно порождённого идеала B означает, что алгебра R является идеально алгебраической. $\square$

Из теоремы 2.8 и следствия 2.7 сразу следует, что любая РК-алгебраическая алгебра Ли R над кольцом F, содержащая локально конечный над кольцом F идеал J, фактор-алгебра R/J по которому локально конечна над F, является идеально алгебраической и, более того, локально конечной над F. Таким образом, мы получили ещё один вариант доказательства теоремы Плоткина, базирующийся на понятии идеально алгебраической алгебры.

Помимо понятия РК-алгебраического элемента, мы будем использовать также его односторонние версии, что по понятным причинам имеет смысл в первую очередь для алгебр, не являющихся коммутативными и антикоммутативными. Будем говорить, что элемент x алгебры R над кольцом F является *левым* (*правым*) *РК-алгебраическим*, если для любого элемента y алгебры R порождённый им левый идеал $I_l(y, x)$ (правый идеал $I_r(y, x)$) подалгебры $\langle x, y\rangle$ алгебры R, порождённой элементами x и y, включает в себя по меньшей мере одну содержащую элемент y конечно порождённую подалгебру $A_l(y, x)$ ($A_r(y, x)$), инвариантную относительно действия оператора левого умножения l_x (правого умножения r_x) на элемент x. При этом подалгебры $A_l(y, x)$ и $I_l(y, x)$ ($A_r(y, x)$ и $I_r(y, x)$) могут быть равными. Последнее, в частности, выполняется в ситуации, когда подалгебра $\langle x, y\rangle$ является ассоциативной и, следовательно, её левый и правый идеалы $I_l(y, x)$ и $I_r(y, x)$ совпадают с подалгебрами $K(y, l_x)$ и $K(y, r_x)$, порождёнными всеми элементами $l_x^k y$, $k \geqslant 0$, и всеми элементами $r_x^k y$, $k \geqslant 0$, соответственно,

$$I_l(y, x) = K(y, l_x) = \langle l_x^k y \mid k \geqslant 0\rangle, \quad I_r(y, x) = K(y, r_x) = \langle r_x^k y \mid k \geqslant 0\rangle.$$

Поскольку согласно теореме Артина альтернативные алгебры могут быть определены как алгебры, в которых любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру, элемент x альтернативной алгебры R тогда и только тогда является левым (правым) PK-алгебраическим, когда оператор левого умножения l_x (правого умножения r_x) на этот элемент является PK-алгебраическим эндоморфизмом F-модуля R. Алгебры над кольцом F, состоящие из левых (правых) PK-алгебраических элементов, мы будем называть *PK-алгебраическими слева* (*справа*). Понятно, что для коммутативных и антикоммутативных алгебр понятия левого (правого) PK-алгебраического элемента и PK-алгебраической слева (справа) алгебры равнозначны введённым выше понятиям PK-алгебраического элемента и PK-алгебраической алгебры.

Мы будем называть *идеально алгебраическими слева* (*справа*) *алгебрами* те алгебры над кольцом F, конечно порождённые левые (правые) идеалы конечно порождённых подалгебр которых являются их конечно порождёнными подалгебрами. Аналогичным образом, заменив в определениях почти и слабо идеально алгебраических алгебр термин идеал левым (правым) идеалом, можно определить почти и слабо идеально алгебраические слева (справа) алгебры. Как и ранее в замечании 2.2, можно показать, что идеально алгебраические слева (справа) алгебры являются PK-алгебраическими слева (справа). Стоит отметить и то, что локально конечные алгебры над кольцом F являются не только идеально алгебраическими (см. выше), но и идеально алгебраическими слева и справа. Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь установить конечность над кольцом F конечно порождённых односторонних идеалов любой конечной алгебры A над F. Алгебра умножений $M(A) = \langle l_a, r_a \mid a \in A\rangle$ такой алгебры A и её подалгебры левых и правых умножений $L(A) = \langle l_a \mid a \in A\rangle$ и $R(A) = \langle r_a \mid a \in A\rangle$ являются конечно порождёнными, причём для каждой конечной системы порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ алгебры A как F-модуля операторы левых и правых умножений, операторы левых умножений и операторы правых умножений на элементы данной системы составляют конечные системы порождающих алгебр $M(A) = \langle l_{a_i}, r_{a_i} \mid i = 1, \ldots, n\rangle$, $L(A) = \langle l_{a_i} \mid i = 1, \ldots, n\rangle$ и $R(A) = \langle r_{a_i} \mid i = 1, \ldots, n\rangle$. Из уже неоднократно отмечавшейся нами прежде локальной конечности над кольцом F алгебр эндоморфизмов конечно порождённых F-модулей следует, что подалгебры $M(A)$, $L(A)$ и $R(A)$ алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(A)$ модуля A являются также конечными над F. Поэтому для всякого конечного семейства элементов $\{b_1, \ldots, b_m\}$ алгебры A её левый, правый и двусторонний идеалы $\sum\limits_{i=1}^{m}(Fb_i + L(A)b_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{m}(Fb_i + R(A)b_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m}(Fb_i + M(A)b_i)$, которые порождают элементы этого семейства, конечны над кольцом F, где через $L(A)b$, $R(A)b$ и $M(A)b$ обозначены F-подмодули алгебры A, состоящие из образов её элемента b при действии всех эндоморфизмов из алгебр $L(A)$, $R(A)$ и $M(A)$ соответственно.

Замечание 2.9. Любая PK-алгебраическая (PK-алгебраическая слева или (и) справа) ассоциативная локально PI-алгебра R над кольцом F является идеально алгебраической (идеально алгебраической слева или (и) справа) алгеброй.

Доказательство. Здесь используется традиционное для ассоциативных алгебр над кольцом F понятие PI-алгебры как алгебры, удовлетворяющей тождеству $f = 0$ для некоторого собственного ассоциативного многочлена f с коэффициентами из F (см., к примеру, [14]). Последний является элементом свободной ассоциативной алгебры без единицы над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих, таким что по меньшей мере одна F-линейная комбинация коэффициентов его несократимой записи равна единице 1 кольца F. Термин локально PI-алгебра означает, что каждая конечно порождённая подалгебра такой алгебры является PI-алгеброй.

Для начала сделаем ряд замечаний относительно произвольной PK-алгебраической с одной из сторон ассоциативной алгебры R над кольцом F. Для определённости мы будем считать эту алгебру PK-алгебраической слева, и значит, для любых её элементов a и b можно найти целое $n_l(a,b) \geqslant 0$, такое что элементы $b, ab, \ldots, a^{n(a,b)}b$ формируют конечную систему порождающих подалгебры $K(b, l_a) = I_l(b,a)$, которую порождают все элементы $l_a^k b = a^k b$, $k \geqslant 0$ (см. выше). Несложно показать также, что для произвольных элемента a алгебры R и её конечно порождённой подалгебры B подалгебра $K(B, l_a)$, порождённая всеми элементами $a^k b$, $k \geqslant 0$, $b \in B$, является конечно порождённой. Действительно, для этого достаточно выделить любую конечную систему порождающих $\{b_1, \ldots, b_m\}$ подалгебры B и заметить, что подалгебра $K(B, l_a)$ порождается конечным набором элементов $\{a^k b_i \mid k = 0, \ldots, n_l(a, b_i),\ i = 1, \ldots, m\}$,

$$K(B, l_a) = \big\langle a^k b \mid k \geqslant 0,\ b \in B = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \big\rangle = \\ = \langle a^k b_i \mid k = 0, \ldots, n_l(a, b_i),\ i = 1, \ldots, m\rangle.$$

Более того, используя индукцию по $q \geqslant 1$, можно доказать конечную порождённость подалгебры $K_q\big(B, l_{a_1}, \ldots, l_{a_q}\big)$ алгебры R, порождённой всеми элементами $a_q^{k_q} \cdots a_1^{k_1} b$, $k_1, \ldots, k_q \geqslant 0$, $b \in B$, где $a_1, \ldots, a_q$ — любые q элементов алгебры R, а B — любая её конечно порождённая подалгебра. Выполнение основания индукции для $q = 1$ следует из отмеченной нами выше конечной порождённости подалгебры $K_1(B, l_{a_1}) = K(B, l_{a_1})$. Доказательство шага индукции сводится к применению индуктивного предположения к очевидным равенствам

$$K_{i+1}\big(B, l_{a_1}, \ldots, l_{a_i}, l_{a_{i+1}}\big) = \langle a_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots a_1^{k_1} b \mid k_1, \ldots, k_{i+1} \geqslant 0,\ b \in B\rangle = \\ = K\big(K_i\big(B, l_{a_1}, \ldots, l_{a_i}\big), l_{a_{i+1}}\big) = \\ = \big\langle a_{i+1}^k d \mid k \geqslant 0,\ d \in K_i\big(B, l_{a_1}, \ldots, l_{a_i}\big)\big\rangle \quad (i = 1, \ldots, q-1).$$

Предположим теперь, что ассоциативная PK-алгебраическая слева алгебра R над кольцом F является локально PI-алгеброй. В этом случае каждая конечно порождённая подалгебра A алгебры R является PI-алгеброй и согласно теореме Ширшова о высоте (см., например, [8, теорема 2 на с. 133]) существуют целое $h = h(A) \geqslant 1$ и конечный набор элементов V алгебры A, позволяющие записать каждый элемент алгебры A в виде конечной F-линейной комбинации элементов $v_1^{p_1}\cdots v_j^{p_j}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $v_i \in V$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1,\ldots,j$. Поэтому левый идеал $B + AB$ алгебры A, порождённый элементами любой её конечно порождённой подалгебры B, совпадает с подалгеброй алгебры A, которую порождают элементы всех её подалгебр $K_h(B, l_{v_1},\ldots,l_{v_h})$, $v_1,\ldots,v_h \in V$. Поскольку по доказанному подалгебры $K_h(B, l_{v_1},\ldots,l_{v_h})$, $v_1,\ldots,v_h \in V$, являются конечно порождёнными и число этих подалгебр заведомо конечно (оно не превосходит $|V|^h$), отсюда следует, что левый идеал $B + BA$ алгебры A является конечно порождённой подалгеброй. Таким образом, конечно порождённые левые идеалы конечно порождённых подалгебр ассоциативной PK-алгебраической слева локально PI-алгебры R являются конечно порождёнными как алгебры, и потому такая алгебра R является идеально алгебраической слева.

Обоснование идеальной алгебраичности справа ассоциативных PK-алгебраических справа локально PI-алгебр проводится аналогичным образом.

Перейдём к обсуждению ситуации, когда рассматриваемая ассоциативная алгебра R над кольцом F является PK-алгебраической и, следовательно, для любых её элементов a и b порождённый элементом b идеал

$$I(b,a) = \langle l_a^k r_a^{k'} b = a^k b a^{k'} \mid k, k' \geqslant 0\rangle$$

подалгебры $\langle a, b\rangle$, которую порождают элементы a и b, является конечно порождённой подалгеброй. Нетрудно заметить, что для каждого элемента a алгебры R и любой её подалгебры B с выделенной в ней системой порождающих B' идеал $I(B,a)$, который порождают элементы подалгебры B в подалгебре $\langle a, B\rangle$, порождённой элементом a и элементами B, совпадает с подалгеброй алгебры $\langle a, B\rangle$, порождённой элементами всех её подалгебр $I(b', a)$, $b' \in B'$, $I(B,a) = \langle I(b',a) \mid b' \in B'\rangle$. Поэтому в случае если подалгебра B является конечно порождённой, подалгебра $I(B,a)$ также является конечно порождённой. Более того, мы можем утверждать, что для любых $q \geqslant 1$ элементов $a_1,\ldots,a_q$ алгебры R и её конечно порождённой подалгебры B подалгебра $I_q(B, a_1,\ldots,a_q)$, порождённая всеми элементами $a_q^{k_q}\cdots a_1^{k_1} b a_1^{k'_1}\cdots a_q^{k'_q}$, $k_1,\ldots,k_q,k'_1,\ldots,k'_q \geqslant 0$, $b \in B$, является конечно порождённой. Для обоснования данного вывода можно использовать индукцию по q. При этом основание индукции выполняется в силу отмеченной выше конечной порождённости подалгебры $I_1(B,a_1) = I(B,a_1)$, а доказательство индуктивного шага осуществляется на основе предположения индукции и равенств

$$\begin{aligned}
&I_{i+1}(B, a_1,\ldots,a_{i+1}) = \\
&\quad= \langle a_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots a_1^{k_1} b a_1^{k'_1}\cdots a_{i+1}^{k'_{i+1}} \mid k_1,\ldots,k_{i+1},k'_1,\ldots,k'_{i+1} \geqslant 0,\ b \in B\rangle = \\
&\quad= I(I_i(B,a_1,\ldots,a_i), a_{i+1}) = \\
&\quad= \langle a_{i+1}^{k} d a_{i+1}^{k'} \mid k,k' \geqslant 0,\ d \in I_i(B,a_1,\ldots,a_i)\rangle \quad (i = 1,\ldots,q-1).
\end{aligned}$$

Если ассоциативная алгебра R является не только PK-алгебраической, но и локально PI-алгеброй, то, вновь воспользовавшись теоремой Ширшова о высоте, мы можем выбрать для каждой конечно порождённой подалгебры A алгебры R целое $h = h(A) \geqslant 1$ и конечную систему элементов V алгебры A, которые позволяют выразить её элементы через конечные F-линейные комбинации элементов $v_1^{p_1} \cdots v_j^{p_j}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $v_i \in V$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, j$, и заметить, что идеал $(B)_A = B + BA + AB + ABA$ алгебры A, порождённый элементами любой из её конечно порождённых подалгебр B, представляет собой подалгебру алгебры A, порождённую элементами всех её подалгебр $I_{2h}(B, v_1, \ldots, v_{2h})$, $v_1, \ldots, v_{2h} \in V$. Так как каждая подалгебра $I_{2h}(B, v_1, \ldots, v_{2h})$, $v_1, \ldots, v_{2h} \in V$, является конечно порождённой (см. выше) и число этих подалгебр конечно (оно меньше или равно $|V|^{2h}$), отсюда сразу следует, что такой идеал $(B)_A$ алгебры A является конечно порождённой подалгеброй. Поэтому конечно порождённые идеалы конечно порождённых подалгебр ассоциативной PK-алгебраической локально PI-алгебры R являются конечно порождёнными как алгебры и алгебра R является идеально алгебраической. $\square$

Замечание 2.10. Множества левых и правых PK-алгебраических элементов любой альтернативной алгебры без делителей нуля R над кольцом F совпадают.

Доказательство. Если a — левый PK-алгебраический элемент алгебры R, то для каждого элемента b алгебры R можно подобрать целое $n = n_l(a, b) \geqslant 0$, такое что её подалгебра $K(b, l_a) = I_l(b, a) = \langle a^k b \mid k \geqslant 0 \rangle$ порождается элементами $a^k b$, $k = 0, \ldots, n$ (см. выше). Последнее равносильно существованию представления элемента $a^{n+1} b$ в виде конечной F-линейной комбинации

$$a^{n+1} b = \sum_{q \geqslant 1} \sum_{\substack{\bar{n}_q = (n_1, \ldots, n_q), \\ n_1, \ldots, n_q \geqslant 0,\ n_q \geqslant 1}} \sum_{\substack{\bar{m}_q = (m_1, \ldots, m_q), \\ 0 \leqslant m_1, \ldots, m_q \leqslant n}} f_{\bar{n}_q \bar{m}_q} (a^{m_1} b)^{n_1} \cdots (a^{m_q} b)^{n_q}$$

для некоторых элементов $f_{\bar{n}_q \bar{m}_q} \in F$. Поскольку в алгебре R нет ненулевых делителей нуля, в случае если элемент b отличен от нуля, мы можем сократить на него указанное здесь представление элемента $a^{n+1} b$ и получить выражение для элемента a^{n+1},

$$a^{n+1} = \sum_{q \geqslant 1} \sum_{\substack{\bar{n}_q = (n_1, \ldots, n_q), \\ n_1, \ldots, n_q \geqslant 0,\ n_q \geqslant 1}} \sum_{\substack{\bar{m}_q = (m_1, \ldots, m_q), \\ 0 \leqslant m_1, \ldots, m_q \leqslant n}} f_{\bar{n}_q \bar{m}_q} \times \\ \times (a^{m_1} b)^{n_1} \cdots (a^{m_{q-1}} b)^{n_{q-1}} (a^{m_q} b)^{n_q - 1} a^{m_q},$$

а вместе с ним и выражение для элемента $b a^{n+1}$,

$$b a^{n+1} = \sum_{q \geqslant 1} \sum_{\substack{\bar{n}_q = (n_1, \ldots, n_q), \\ n_1, \ldots, n_q \geqslant 0,\ n_q \geqslant 1}} \sum_{\substack{\bar{m}_q = (m_1, \ldots, m_q), \\ 0 \leqslant m_1, \ldots, m_q \leqslant n}} f_{\bar{n}_q \bar{m}_q} \times \\ \times b (a^{m_1} b)^{n_1} \cdots (a^{m_{q-1}} b)^{n_{q-1}} (a^{m_q} b)^{n_q - 1} a^{m_q} = \\ = \sum_{q \geqslant 1} \sum_{\substack{\bar{n}_q = (n_1, \ldots, n_q), \\ n_1, \ldots, n_q \geqslant 0,\ n_q \geqslant 1}} \sum_{\substack{\bar{m}_q = (m_1, \ldots, m_q), \\ 0 \leqslant m_1, \ldots, m_q \leqslant n}} f_{\bar{n}_q \bar{m}_q} \times \\ \times (b a^{m_1})^{n_1} \cdots (b a^{m_{q-1}})^{n_{q-1}} (b a^{m_q})^{n_q}.$$

Это означает, что подалгебра $K(b, r_a) = I_r(b, a) = \langle ba^k \mid k \geqslant 0 \rangle$ алгебры R порождается элементами ba^k, $k = 0, \ldots, n$. Данный вывод, полученный нами для ненулевого элемента b, сохраняет очевидным образом справедливость и в ситуации, когда b равен нулю. Следовательно, любой левый РК-алгебраический элемент a алгебры R является также её правым РК-алгебраическим элементом.

Применяя сходные соображения к правым РК-алгебраическим элементам алгебры R, можно показать, что они являются её левыми РК-алгебраическими элементами. Поэтому множества левых и правых РК-алгебраических элементов алгебры R равны друг другу. $\square$

Докажем теперь следующую версию теоремы 2.8 для альтернативных алгебр.

Теорема 2.11. *Пусть R — альтернативная алгебра над кольцом F, содержащая идеально алгебраический идеал J, фактор-алгебра по которому R/J локально конечна над кольцом F. Тогда алгебра R является идеально алгебраической.*

Доказательство. Для начала необходимо напомнить соотношения между операторами левого и правого умножения на элементы любой альтернативной алгебры

$$r_x^k = r_{x^k}, \quad l_x^k = l_{x^k}, \quad r_x r_y + r_y r_x = r_{xy+yx}, \quad l_x l_y + l_y l_x = l_{xy+yx}, \tag{3}$$

$$r_x l_y - l_y r_x = r_{yx} - r_x r_y = -l_{yx} + l_y l_x, \quad r_x l_x = l_x r_x, \tag{4}$$

которые выполняются для всех её элементов x, y и показателей $k \geqslant 1$. В дальнейшем мы будем регулярно использовать также такое элементарное следствие этих соотношений: подалгебра алгебры умножений альтернативной алгебры, порождённая операторами левого и правого умножения на элементы произвольной её подалгебры, совпадает с подалгеброй, которую порождают операторы левого и правого умножения на элементы любой системы порождающих данной подалгебры.

Пусть A — конечно порождённая подалгебра алгебры R с выделенной в ней конечной системой порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 2.8, мы можем выбрать конечную систему элементов $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$ алгебры A, позволяющую представить любой её элемент a в виде

$$a = f_1(a)e_1 + \ldots + f_p(a)e_p + d(a) \tag{5}$$

для подходящих элементов $f_1(a), \ldots, f_p(a) \in F$ и $d(a) \in A \cap J$. Зафиксируем по одному из таких выражений элементов a_i, $e_l e_k$, $i = 1, \ldots, n$, $l, k = 1, \ldots, p$, и обозначим через D множество участвующих в них элементов $d(a_i)$, $d(e_l e_k)$, $i = 1, \ldots, n$, $l, k = 1, \ldots, p$. Это позволяет нам записать алгебру A как сумму её конечно порождённого F-подмодуля $Fe_1 + \ldots + Fe_p$ и идеала $A' = (D)_A$, порождённого элементами конечного множества D, $A = Fe_1 + \ldots + Fe_p + A'$. Покажем, что такой идеал A' алгебры A является её конечно порождённой подалгеброй, а точнее, порождается как алгебра элементами

$$c(d,\delta_1,\ldots,\delta_p,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)=r_{e_p}^{\delta_p}l_{e_p}^{\varepsilon_p}\cdots r_{e_1}^{\delta_1}l_{e_1}^{\varepsilon_1}d\quad (d\in D,\ \delta_i,\varepsilon_i\in\{0,1\},\ i=1,\ldots,p).$$

Так как алгебру умножений $M(A)$ алгебры A порождают операторы левого и правого умножения на элементы любой её системы порождающих и, в частности, системы $E\cup D$ (см. соотношения (3)—(5)), для этого достаточно установить, что каждый элемент вида

$$t_{x_k}^{(k)}\ldots t_{x_1}^{(1)}d,\quad k\geqslant 1,\ d\in D,\ x_i\in E\cup D,\ t_{x_i}^{(i)}\in\{l_{x_i},r_{x_i}\},\ i=1,\ldots,k,$$

является конечной F-линейной комбинацией элементов

$$s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0,\quad l\geqslant 0,\ z_j=c\big(d_j,\delta_1^{(j)},\ldots,\delta_p^{(j)},\varepsilon_1^{(j)},\ldots,\varepsilon_p^{(j)}\big),\ d_j\in D,$$
$$\delta_q^{(j)},\varepsilon_q^{(j)}\in\{0,1\},\ q=1,\ldots,p,\ s_{z_j}^{(j)}\in\{l_{z_j},r_{z_j}\},\ j=0,\ldots,l,$$

которые удовлетворяют условиям $d_0=d$ и

$$\sum_{j=0}^{l}w(z_j)=\sum_{j=0}^{l}\sum_{q=1}^{p}\big(\delta_q^{(j)}+\varepsilon_q^{(j)}\big)\leqslant w=w\big(t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d\big)=|\{x_1,\ldots,x_k\}\cap E|.$$

Множество всех таких элементов $s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0$ мы будем обозначать через $C_w(d)$. Для доказательства данного утверждения мы будем использовать индукцию по числу $w=w(t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d)\geqslant 0$, основание которой при $w=0$ выполняется очевидным образом. Предположим, что существование подобного представления уже доказано для всех w, $0\leqslant w<m$, для некоторого $m\geqslant 1$. В таком случае любой из элементов

$$t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d,\quad k\geqslant 1,\ d\in D,\ x_i\in E\cup D,\ t_{x_i}^{(i)}\in\{l_{x_i},r_{x_i}\},\ i=1,\ldots,k,$$

с $w(t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d)=m$ можно записать как

$$t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d=t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_{k'+1}}^{(k'+1)}t_{x_{k'}}^{(k')}t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d=$$
$$=t_{x_k}^{(k)}\cdots t_{x_{k'+1}}^{(k'+1)}t_{x_{k'}}^{(k')}\Bigg(\sum_{s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0\in C_{m-1}(d)}g_{s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0}\big(t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d\big)s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0\Bigg),$$

где число k', $1\leqslant k'\leqslant k$, выбрано таким образом, что $x_{k'}\in E$ и $x_j\in D$ при всех $k'<j\leqslant k$, а равенство

$$t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d=\sum_{s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0\in C_{m-1}(d)}g_{s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0}\big(t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d\big)s_{z_l}^{(l)}\cdots s_{z_1}^{(1)}z_0$$

является одним из представлений элемента

$$t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d,\quad w\big(t_{x_{k'-1}}^{(k'-1)}\cdots t_{x_1}^{(1)}d\big)=m-1,$$

в виде конечной F-линейной комбинации элементов множества $C_{m-1}(d)$, существование которого следует из предположения индукции. Кроме того, мы располагаем для всякого элемента $s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 \in C_{m-1}(d)$ выражением

$$\begin{aligned} t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 &= \big[t_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_l}^{(l)}\big] s_{z_{l-1}}^{(l-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 + s_{z_l}^{(l)} t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_{l-1}}^{(l-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 = \\ &= \big[t_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_l}^{(l)}\big] s_{z_{l-1}}^{(l-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 + \\ &+ \sum_{i=1}^{l-1} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} \big[t_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_i}^{(i)}\big] s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 + s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} t_{x_{k'}}^{(k')} z_0, \end{aligned} \tag{6}$$

в котором в силу равенств (3) и (4)

$$\begin{aligned} \big[t_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_j}^{(j)}\big] &= t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_j}^{(j)} - s_{z_j}^{(j)} t_{x_{k'}}^{(k')} = \\ &= \begin{cases} r_{x_{k'} z_j + z_j x_{k'}} - 2 r_{z_j} r_{x_{k'}}, & \text{если } t_{x_{k'}}^{(k')} = r_{x_{k'}},\ s_{z_j}^{(j)} = r_{z_j}; \\ -l_{z_j x_{k'}} + l_{z_j} l_{x_{k'}}, & \text{если } t_{x_{k'}}^{(k')} = r_{x_{k'}},\ s_{z_j}^{(j)} = l_{z_j}; \\ l_{x_{k'} z_j + z_j x_{k'}} - 2 l_{z_j} l_{x_{k'}}, & \text{если } t_{x_{k'}}^{(k')} = l_{x_{k'}},\ s_{z_j}^{(j)} = l_{z_j}; \\ -r_{x_{k'} z_j} + r_{z_j} r_{x_{k'}}, & \text{если } t_{x_{k'}}^{(k')} = l_{x_{k'}},\ s_{z_j}^{(j)} = r_{z_j}. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя выражения (7) в равенство (6), мы получаем новое представление элемента $t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0$ в форме целочисленной линейной комбинации элементов вида

$$s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} {t'}_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0, \quad s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s''}_{{t''}_{x_{k'}}^{(i)} z_i}^{(i)} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0,$$

где ${s'}_{z_i}^{(i)} \in \{l_{z_i}, r_{z_i}\}$, ${t''}_{x_{k'}}^{(i)}, {t'}_{x_{k'}}^{(k')} \in \{l_{x_{k'}}, r_{x_{k'}}\}$ и ${s''}_{{t''}_{x_{k'}}^{(i)} z_i}^{(i)} \in \{l_{{t''}_{x_{k'}}^{(i)} z_i}, r_{{t''}_{x_{k'}}^{(i)} z_i}\}$, после чего можем выразить каждый элемент $s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} {t'}_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0$ через сумму

$$\begin{aligned} s_{z_l}^{(l)} &\cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} {t'}_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 = \\ &= s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} \big[{t'}_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_{i-1}}^{(i-1)}\big] s_{z_{i-2}}^{(i-2)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-2} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_{j+1}}^{(j+1)} \big[{t'}_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_j}^{(j)}\big] s_{z_{j-1}}^{(j-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 + \\ &+ s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_{i+1}}^{(i+1)} {s'}_{z_i}^{(i)} s_{z_{i-1}}^{(i-1)} \cdots s_{z_1}^{(1)} {t'}_{x_{k'}}^{(k')} z_0, \end{aligned}$$

заменить в ней коммутаторы $\big\{\big[{t'}_{x_{k'}}^{(k')}, s_{z_q}^{(q)}\big]\big\}$ на их выражения (7) и подставить результат этих действий в запись элемента $t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_l}^{(l)} \cdots z_{z_1}^{(1)} z_0$, полученную ранее, и т. д. Продолжая действовать подобным образом, мы придём в итоге к равенству

$$t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{a(i) \in \left\{ s'^{(l)}_{z_l} \cdots s'^{(i+1)}_{z_{i+1}} s''^{(i)}_{t''_{x_{k'}} z_i} s'^{(i-1)}_{z_{i-1}} \cdots s'^{(1)}_{z_1} z_0 \right\}} k_{a(i)} a(i) + \\ + \sum_{a \in \{ s'^{(l)}_{z_l} \cdots s'^{(1)}_{z_1} t'^{(k')}_{x_{k'}} z_0 \}} k_a a \qquad (8)$$

с подходящими целочисленными коэффициентами $\{k_{a(i)}, k_a\}$. Рассмотрим теперь любой элемент $t''_{x_{k'}} z_i \in \{x_{k'} z_i, z_i x_{k'}\}$. Поскольку $x_{k'} \in E$, $x_{k'} = e_q$ для некоторых $q = 1, \dots, p$ и

$$z_i = c(d_i, \delta_1^{(i)}, \dots, \delta_p^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, \dots, \varepsilon_p^{(i)}) = r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i,$$

мы можем записать

$$\begin{aligned} t''_{x_{k'}} z_i = t''_{e_q} z_i = \big[t''_{e_q}, r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}}\big] r_{e_{p-1}}^{\delta_{p-1}^{(i)}} l_{e_{p-1}}^{\varepsilon_{p-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i + \\ + \sum_{j=q+1}^{p-1} r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{j+1}}^{\delta_{j+1}^{(i)}} l_{e_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}^{(i)}} \big[t''_{e_q}, r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}}\big] r_{e_{j-1}}^{\delta_{j-1}^{(i)}} r_{e_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i + \\ + r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{q+1}}^{\delta_{q+1}^{(i)}} l_{e_{q+1}}^{\varepsilon_{q+1}^{(i)}} \big(t''_{e_q} r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}}\big) r_{e_{q-1}}^{\delta_{q-1}^{(i-1)}} l_{e_{q-1}}^{\varepsilon_{q-1}^{(i-1)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(1)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(1)}} d_i, \end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$\big[t''_{e_q}, r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}}\big] = \delta_j^{(i)} [t''_{e_q}, r_{e_j}] l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} [t''_{e_q}, l_{e_j}].$$

В силу равенств (3) и (4)

$$[t''_{e_q}, s_{e_j}] = \begin{cases} r_{e_q e_j + e_j e_q} - 2 r_{e_j} r_{e_q}, & \text{если } t''_{e_q} = r_{e_q},\ s_{e_j} = r_{e_j}, \\ -l_{e_j e_q} + l_{e_j} l_{e_q}, & \text{если } t''_{e_q} = r_{e_q},\ s_{e_j} = l_{e_j}, \\ l_{e_q e_j + e_j e_q} - 2 l_{e_j} l_{e_q}, & \text{если } t''_{e_q} = l_{e_q},\ s_{e_j} = l_{e_j}, \\ -r_{e_q e_j} + r_{e_j} r_{e_q}, & \text{если } t''_{e_q} = l_{e_q},\ s_{e_j} = r_{e_j}. \end{cases} \qquad (10)$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} [r_{e_q}, r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}}] = \delta_j^{(i)} (r_{e_q e_j + e_j e_q} - 2 r_{e_j} r_{e_q}) l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} (-l_{e_j e_q} + l_{e_j} l_{e_q}) = \\ = \delta_j^{(i)} r_{e_q e_j + e_j e_q} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} - \delta_j^{(i)} \varepsilon_j^{(i)} 2 r_{e_j} [r_{e_q}, l_{e_j}] - \delta_j^{(i)} 2 r_{e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q} - \\ - \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j e_q} + \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j} l_{e_q} = \\ = \delta_j^{(i)} r_{e_q e_j + e_j e_q} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \delta_j^{(i)} \varepsilon_j^{(i)} 2 r_{e_j} (l_{e_j e_q} - l_{e_j} l_{e_q}) - \delta_j^{(i)} 2 r_{e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q} - \\ - \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j e_q} + \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j} l_{e_q} = \\ = \delta_j^{(i)} r_{e_q e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \delta_j^{(i)} r_{e_j e_q}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \\ + \varepsilon_j^{(i)} (2\delta_j^{(i)} - 1) r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j e_q}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \varepsilon_j^{(i)} (1 - 2\delta_j^{(i)}) r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} l_{e_q} - 2\delta_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
[l_{e_q}, r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}}] &= \delta_j^{(i)}(-r_{e_q e_j} + r_{e_j} r_{e_q}) l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \\
&+ \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} (l_{e_q e_j + e_j e_q} - 2 l_{e_j} l_{e_q}) = \\
&= -\delta_j^{(i)} r_{e_q e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \delta_j^{(i)} \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j} [r_{e_q}, l_{e_j}] + \delta_j^{(i)} r_{e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q} + \\
&+ \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_q e_j + e_j e_q} - \varepsilon_j^{(i)} 2 r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j} l_{e_q} = \\
&= -\delta_j^{(i)} r_{e_q e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \delta_j^{(i)} \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j} (-l_{e_j e_q} + l_{e_j} l_{e_q}) + \delta_j^{(i)} r_{e_j} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q} + \\
&+ \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_q e_j + e_j e_q} - \varepsilon_j^{(i)} 2 r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j} l_{e_q} = \\
&= -\delta_j^{(i)} r_{e_q e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \varepsilon_j^{(i)} (1 - \delta_j^{(i)}) r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j e_q}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \varepsilon_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_q e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} + \\
&+ \varepsilon_j^{(i)} (-2 + \delta_j^{(i)}) r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} l_{e_q} + \delta_j^{(i)} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_q}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), мы получим представление элемента ${t''}_{e_q}^{(i)} z_i$ в форме целочисленной линейной комбинации элементов, имеющих вид

$$r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{j'+1}}^{\delta_{j'+1}^{(i)}} l_{e_{j'+1}}^{\varepsilon_{j'+1}^{(i)}} t_{e_q} r_{e_{j'}}^{\delta_{j'}^{(i)}} l_{e_{j'}}^{\varepsilon_{j'}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i, \tag{11}$$

$$r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_q}^{\varepsilon_j^{(i)}} \cdots r_{e_{j+1}}^{\delta_{j+1}^{(i)}} l_{e_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}^{(i)}} r_{t_{e_q} e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_{j-1}}^{\delta_{j-1}^{(i)}} l_{e_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} d_i, \tag{12}$$

$$r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_q}^{\varepsilon_j^{(i)}} \cdots r_{e_{j+1}}^{\delta_{j+1}^{(i)}} l_{e_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}^{(i)}} r_{e_j}^{\delta_j^{(i)}} l_{t_{e_q} e_j}^{\varepsilon_j^{(i)}} r_{e_{j-1}}^{\delta_{j-1}^{(i)}} l_{e_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} d_i, \tag{13}$$

где $j' = q, \ldots, p-1$, $j = q+1, \ldots, p$, $t_{e_q} \in \{l_{e_q}, r_{e_q}\}$. В свою очередь каждый элемент вида (11) при $j' = u > q$ может быть записан как

$$\begin{aligned}
& r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{u+1}}^{\delta_{u+1}^{(i)}} l_{e_{u+1}}^{\varepsilon_{u+1}^{(i)}} t_{e_q} r_{e_u}^{\delta_u^{(i)}} l_{e_u}^{\varepsilon_u^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i = \\
&\quad = r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{u+1}}^{\delta_{u+1}^{(i)}} l_{e_{u+1}}^{\varepsilon_{u+1}^{(i)}} \big[t_{e_q}, r_u^{\delta_u^{(i)}} l_{e_u}^{\varepsilon_u^{(i)}}\big] r_{e_{u-1}}^{\delta_{u-1}^{(i)}} l_{e_{u-1}}^{\varepsilon_{u-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i + \\
&\quad + \sum_{v=q+1}^{u-1} r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{v+1}}^{\delta_{v+1}^{(i)}} l_{e_{v+1}}^{\varepsilon_{v+1}^{(i)}} \big[t_{e_q}, r_{e_v}^{\delta_v^{(i)}} l_{e_v}^{\varepsilon_v^{(i)}}\big] r_{e_{v-1}}^{\delta_{v-1}^{(i)}} r_{e_{v-1}}^{\varepsilon_{v-1}^{(i)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(i)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(i)}} d_i + \\
&\quad + r_{e_p}^{\delta_p^{(i)}} l_{e_p}^{\varepsilon_p^{(i)}} \cdots r_{e_{q+1}}^{\delta_{q+1}^{(i)}} l_{e_{q+1}}^{\varepsilon_{q+1}^{(i)}} (t_{e_q} r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}}) r_{e_{q-1}}^{\delta_{q-1}^{(i-1)}} l_{e_{q-1}}^{\varepsilon_{q-1}^{(i-1)}} \cdots r_{e_1}^{\delta_1^{(1)}} l_{e_1}^{\varepsilon_1^{(1)}} d_i,
\end{aligned}$$

а затем может быть преобразован по описанной выше схеме в целочисленную линейную комбинацию элементов вида (11) с $j' = q, \ldots, u-1$ и вида (12) и (13) с $j = q+1, \ldots, u$. Поэтому элемент ${t''}_{e_q} z_i$ является целочисленной линейной комбинацией элементов вида (11) с $j' = q, \ldots, p-2$ и элементов вида (12) и (13). Более того, повторяя проделанные здесь рассуждения достаточное число раз, мы можем выразить элемент ${t''}_{e_q} z_i$ через целочисленную линейную комбинацию элементов вида (11) с $j' = q$ и элементов вида (12) и (13). Так как согласно равенству (5)

$$s_{t_{e_q}e_j} = \sum_{l=1}^{p} f_l(t_{e_q}e_j)s_{e_i} + s_{d(t_{e_q}e_j)} \quad (s_{t_{e_q}e_j} = l_{t_{e_q}e_j}, r_{t_{e_q}e_j})$$

и

$$t_{e_q} r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}} = \begin{cases} r_{e_q} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}}, & \text{если } \delta_q^{(i)} = 0,\ t_{e_q} = r_{e_q}, \\ r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{e_q}, & \text{если } \varepsilon_q^{(i)} = 0,\ t_{e_q} = l_{e_q}, \\ \sum\limits_{l=1}^{p} f_l(e_q^2) r_{e_l} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}} + r_{d(e_q^2)} l_{e_q}^{\varepsilon_q^{(i)}}, & \text{если } \delta_q^{(i)} = 1,\ t_{e_q} = r_{e_q}, \\ \sum\limits_{l=1}^{p} f_l(e_q^2) r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{e_l} + r_{e_q}^{\delta_q^{(i)}} l_{d(e_q^2)}, & \text{если } \varepsilon_q^{(i)} = 1,\ t_{e_q} = l_{e_q}, \end{cases}$$

отсюда следует, что элемент $t''_{x_{k'}} z_i = t''_{e_q} z_i$ равен некоторой F-линейной комбинации элементов

$$t_{y_{w(z_i)}} \cdots t_{y_1} d_i, \quad y_j \in E \cup D, \quad w(t_{y_{w(z_i)}} \cdots, t_{y_1} d_i) \in \{w(z_i), w(z_i) - 1\},$$

и, возможно, элемента

$$c\bigl(d_i, \delta_1^{(i)}, \dots, \delta_{q-1}^{(i)}, 1, \delta_{q+1}^{(i)}, \dots, \delta_p^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, \dots, \varepsilon_p^{(i)}\bigr)$$

в случае $\delta_q^{(i)} = 0$ и (или) элемента

$$c\bigl(d_i, \delta_1^{(i)}, \dots, \delta_p^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, \dots, \varepsilon_{q-1}^{(i)}, 1, \varepsilon_{q+1}^{(i)}, \dots, \varepsilon_p^{(i)}\bigr)$$

в случае $\varepsilon_q^{(i)} = 0$. Поскольку по предположению индукции каждый элемент $t_{y_{w(z_i)}} \cdots t_{y_1} d_i$ может быть записан в виде F-линейной комбинации элементов $t_{z'_{l'}} \cdots t_{z'_1} z'_0 \in C_{w(z_i)}(d_i)$, любой оператор умножения на этот элемент $s''^{(i)}_{t_{y_{w(z_i)}} \cdots t_{y_1} d_i}$ выражается через F-линейную комбинацию операторов умножения $s''^{(i)}_{t_{z'_{l'}} \cdots t_{z'_1} z'_0}$, которые в соответствии с равенствами (3) и (4) являются целочисленными линейными комбинациями операторов умножения $t'_{z'_{i_1}} \cdots t'_{z'_{i_{l'+1}}}$ с $t'_{z'_{i_j}} \in \{l_{z'_{i_j}}, r_{z'_{i_j}}\}$ и $\{i_1, \dots, i_{l'+1}\} = \{0, \dots, l'\}$. Применяя данные выводы к равенству (8), мы получаем, что для любого элемента $s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0 \in C_{m-1}(d)$ элемент $t_{x_{k'}}^{(k')} s_{z_l}^{(l)} \cdots s_{z_1}^{(1)} z_0$ представим в виде F-линейной комбинации элементов множества $C_m(d)$ и, следовательно, это верно также для исходного элемента $t_{x_k}^{(k)} \cdots t_{x_1}^{(1)} d$. Шаг индукции доказан полностью. Таким образом, мы показали, что элементы $c(d, \delta_1, \dots, \delta_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, $d \in D$, $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, p$, порождают алгебру A'.

Покажем теперь, что конечно порождённые идеалы алгебры A являются её конечно порождёнными подалгебрами. Рассмотрим любой такой идеал B алгебры A, в котором выделена конечная система порождающих $\{b_1, \dots, b_m\}$. Образ $(B + A')/A' \cong B/(B \cap A')$ идеала B в конечной над кольцом F фактор-алгебре A/A' алгебры A по идеалу A' является конечно порождённым и, следовательно, конечным над кольцом F идеалом алгебры A/A'. Поэтому в алгебре B имеется конечная система элементов $\{e'_1, \ldots, e'_q\}$, при помощи которой каждый её элемент b может быть представлен в виде

$$b = g_1(b)e'_1 + \ldots + g_q(b)e'_q + c(b)$$

для подходящих элементов $g_1(b), \ldots, g_q(b) \in F$ и $c(b) \in B \cap A'$. Последнее означает, что алгебра B является суммой своих конечно порождённого F-подмодуля $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q$ и идеала $B \cap A'$, $B = Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B \cap A$. Зафиксируем для каждого из элементов b_i, $a_je'_t$ и e'_ta_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, q$, одну из его записей указанного здесь вида, сформируем из участвующих в них элементов идеала $B \cap A'$ алгебр B и A' конечное множество

$$C = \{c(b_i),\, c(a_je'_t),\, c(e'_ta_j) \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, q\}$$

и выделим в алгебре A' идеал B', порождённый элементами $c(c, \delta_1, \ldots, \delta_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, $c \in C$, $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, p$. Применяя индуктивные рассуждения из первой части доказательства к элементам вида $t^{(k)}_{x_k} \ldots t^{(1)}_{x_1} c$, $k \geqslant 1$, $c \in C$, $x_i \in E \cup D$, $t^{(i)}_{x_i} \in \{l_{x_i}, r_{x_i}\}$, $i = 1, \ldots, k$, можно показать, что любой из них выражается через конечную F-линейную комбинацию элементов $s^{(l)}_{z_l} \cdots s^{(1)}_{z_1} z_0$, где $l \geqslant 0$, $z_j = c\big(d_j, \delta^{(j)}_1, \ldots, \delta^{(j)}_p, \varepsilon^{(j)}_1, \ldots, \varepsilon^{(j)}_p\big)$, $d_0 = c$, $d_1, \ldots, d_l \in D$, $\delta^{(j)}_u, \varepsilon^{(j)}_u \in \{0, 1\}$, $u = 1, \ldots, p$, $s^{(j)}_{z_j} \in \{l_{z_j}, r_{z_j}\}$, $j = 0, \ldots, l$, и при этом

$$\sum_{j=0}^{l} w(z_j) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{u=1}^{p} \big(\delta^{(j)}_u + \varepsilon^{(j)}_u\big) \leqslant w = w\big(t^{(k)}_{x_k} \cdots t^{(1)}_{x_1} c\big) = |\{x_1, \ldots, x_k\} \cap E|.$$

Поскольку алгебра умножений $M(A)$ алгебры A порождается операторами левого и правого умножения на элементы системы $E \cup D$ (см. выше), отсюда следует, что идеал $(C)_A$ алгебры A, порождённый элементами множества C, не только включает в себя её идеал B', но и сам входит в этот идеал, а значит, совпадает с ним, $(C)_A = B'$. Кроме того, по построению сумма $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ конечно порождённого F-подмодуля $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q$ алгебры A и её идеала B' содержит элементы

$$b_i = g(b_i)_1 e'_1 + \ldots + g(b_i)_q e'_q + c(b_i) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$s_{a_j} e'_t = g(s_{a_j} e'_t)_1 e'_1 + \ldots + g(s_{a_j} e'_t)_q e'_q + c(s_{a_j} e'_t) \qquad (j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, q,\ s_{a_j} = l_{a_j}, r_{a_j})$$

и потому инвариантна относительно действия операторов левого и правого умножения на элементы системы порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ алгебры A, что, в свою очередь, влечёт за собой её инвариантность относительно действия всех элементов порождённой этими операторами алгебры умножений $M(A)$ алгебры A (см. начало доказательства). Таким образом, сумма $Fe'_1 + \ldots + Fe'_q + B'$ является идеалом алгебры A. Данный идеал входит в идеал B алгебры A и вместе с тем содержит все порождающие B как идеал элементы $b_1, \dots, b_m$. Поэтому имеет место равенство $B = Fe'_1 + \dots + Fe'_q + B'$. Так как алгебра A' конечно порождённая (см. выше) и является подалгеброй идеально алгебраического идеала J алгебры R, все её конечно порождённые идеалы, включая идеал B', являются конечно порождёнными как алгебры. Следовательно, идеал B алгебры A также конечно порождён как алгебра. Выполнение полученного вывода для произвольных конечно порождённой подалгебры A алгебры R и конечно порождённого идеала B этой подалгебры означает, что алгебра R является идеально алгебраической. $\square$

Для ассоциативных алгебр этот результат можно дополнить следующим образом.

Замечание 2.12. Пусть R — ассоциативная алгебра над кольцом F, содержащая идеально алгебраический слева (справа) идеал J, фактор-алгебра по которому R/J локально конечна над кольцом F. Тогда алгебра R является идеально алгебраической слева (справа).

Доказательство. Для определённости мы будем считать, что рассматриваемый идеал J алгебры R является идеально алгебраическим слева. Покажем, что конечно порождённые левые идеалы любой конечно порождённой подалгебры $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ алгебры R являются конечно порождеными подалгебрами. Алгебра A имеет конечный над кольцом F образ $(A + J)/J \cong A/(A \cap J)$ в локально конечной над этим кольцом фактор-алгебре R/J и потому содержит конечную систему элементов $\{e_1, \dots, e_p\}$, которая позволяет представить каждый элемент $a \in A$ в виде

$$a = f_1(a)e_1 + \dots + f_p(a)e_p + d(a)$$

для подходящих элементов $f_1(a), \dots, f_p(a) \in F$ и $d(a) \in A \cap J$. Используя приведённые выше рассуждения для альтернативной ситуации, мы можем выразить алгебру A через сумму её конечно порождённого F-подмодуля $Fe_1 + \dots + Fe_p$ и идеала $(D)_A$, который порождают элементы множества $D = \{d(a_i), d(e_l e_k) \mid i = 1, \dots, n,\ l, k = 1, \dots, p\}$, причём составляющие D элементы $d(a_i)$ и $d(e_l e_k)$ выбираются из некоторых фиксированных представлений элементов a_i и $e_l e_k$ указанного здесь вида, $A = Fe_1 + \dots + Fe_p + (D)_A$. Более того, по выбору множества D подалгебра A' алгебры A, порождённая элементами конечного множества $D' = \{d, e_l d, de_k, e_l de_k \mid d \in D,\ l, k = 1, \dots, p\}$, является её идеалом и алгебра A совпадает с суммой своих F-подмодуля $Fe_1 + \dots + Fe_p$ и идеала $A' = \langle D' \rangle$, $A = Fe_1 + \dots + Fe_p + A'$. Отсюда следует, что левый идеал алгебры A, порождённый любым её элементом b, может быть записан как сумма

$$Fb + Ab = Fb + \sum_{i=1}^{p} Fe_i b + A'b = Fb + \sum_{i=1}^{p} Fe_i b + \sum_{d' \in D'} \big(F(d'b) + A'(d'b)\big),$$

где $F(d'b) + A'(d'b)$ — левый идеал алгебры A', порождённый элементом $d'b$,

$d' \in D'$. Поскольку по условию конечно порождённая алгебра A' является подалгеброй идеально алгебраического слева идеала J, все её конечно порождённые левые идеалы и среди них левые идеалы $F(d'b) + A'(d'b)$, $d' \in D'$, являются конечно порождёнными как алгебры. Поэтому каждый однопорождённый левый идеал алгебры A также конечно порождён как алгебра, и следовательно, это верно для любого её конечного порождённого левого идеала, т. е. алгебра A является идеально алгебраической слева. □

Согласно теореме 2.11 наличие в альтернативной алгебре R над кольцом F локально конечного над кольцом F идеала J, фактор-алгебра R/J по которому локально конечна над F, влечёт за собой её идеальную алгебраичность, а в силу следствия 2.7 и локальную конечность над F. Таким образом, теорема 2.11 и следствие 2.7 позволяют получить ещё один подход к обоснованию существования локально конечных радикалов на классе альтернативных алгебр над кольцом F, первоначально установленного в [13] и впоследствии выведенного в качестве следствия в [7].

Будет уместно также поставить вопрос о возможности перенесения сказанного в этом разделе относительно локально конечных расширений идеально алгебраических алгебр на более общую ситуацию, что предполагает получение аналога теорем 2.8 и 2.11 для однородных многообразий алгебр над кольцом F, удовлетворяющих некоторым достаточным условиям. Отдельный интерес представляет и более специальный вопрос о существовании подобных аналогов для линейных и квадратичных йордановых алгебр. При этом в случае если такие йордановы аналоги имеются, они могут быть перенесены также на односторонние альтернативные алгебры.

3. Примеры

В качестве иллюстрации к полученным выводам приведём ряд известных примеров идеально алгебраических алгебр, не являющихся локально конечными. На самом деле речь пойдёт об алгебрах, удовлетворяющих условию максимальности для подалгебр, т. е. алгебрах, подалгебры которых являются конечно порождёнными. Избегая ссылок на достаточно общие конструкции работы [23], мы ограничимся двумя примерами подобных алгебр, сформулировав их в виде предложений.

Предложение 3.1. *Любая однопорождённая ассоциативная коммутативная алгебра R с единицей или без неё над полем $\mathbb{F}$ удовлетворяет условию максимальности для подалгебр.*

Доказательство. В зависимости от наличия или отсутствия в алгебре R единичного элемента она является гомоморфным образом либо алгебры многочленов $\mathbb{F}[x]$ от одной переменной x над полем $\mathbb{F}$, либо её подалгебры $x\mathbb{F}[x] = \langle x \rangle$, порождённой переменной x. Поэтому нам достаточно (и необходимо) установить только то, что каждая ненулевая подалгебра M алгебры $\mathbb{F}[x]$ является конечно порождённой. Если алгебра M состоит из многочленов нулевой степени, она совпадает с основным полем $\mathbb{F}$ и порождается любым из своих ненулевых элементов. Предположим теперь, что алгебра M содержит по меньшей мере один многочлен a степени $\deg a = l \geqslant 1$. В алгебру M вместе с каждым ненулевым многочленом b входит многочлен ba^k степени $\deg ba^k = \deg b + kl$ для всех $k \geqslant 0$. Обозначив через $\{l_1, \ldots, l_s\}$, $1 \leqslant s \leqslant l$, полную систему остатков от деления на l степеней ненулевых многочленов из алгебры M, мы можем представить множество $M \setminus \{0\}$ в виде дизъюнктного объединения $M \setminus \{0\} = M_1 \sqcup \ldots \sqcup M_s$ его подмножеств

$$M_j = \{0 \neq b \in M \mid \deg b \equiv l_j \ (l)\} \quad (j = 1, \ldots, s).$$

В каждом из множеств M_j, $j = 1, \ldots, s$, выберем по одному многочлену a_j и положим $n = \max\limits_{i=1,\ldots,s} \deg a_i$. Рассмотрим произвольный отличный от нуля многочлен b из алгебры M степени $\deg b \geqslant n$. Многочлен b входит в множество M_{j_1} для подходящего $1 \leqslant j_1 \leqslant s$, и его степень может быть представлена как $\deg b = \deg a_{j_1} + m_1 l$ для некоторого $m_1 \geqslant 1$. Поскольку алгебра M содержит многочлен $a_{j_1} a^{m_1}$ степени $\deg a_{j_1} a^{m_1} = a_{j_1} + m_1 l = \deg b$, можно подобрать элемент $u_1 \in \mathbb{F}$, такой что многочлен $b_1 = g - u_1 a_{j_1} a^{m_1} \in M$ имеет степень $\deg b_1 \leqslant \deg b - 1$. Если $\deg b_1 \geqslant n$, то, рассуждая аналогичным образом, мы получаем, что $b_1 \in M_{j_2}$, $\deg b_1 = \deg a_{j_2} + m_2 l$, $b_2 = b_1 - u_2 a_{j_2} a^{m_2} \in M$, $\deg b_2 \leqslant \deg b_1 - 1$ для подходящих $1 \leqslant j_2 \leqslant s$, $m_2 \geqslant 0$, $u_2 \in \mathbb{F}$. Повторяя данное построение достаточное число раз, мы придём в результате к многочлену $b_q \in M$, $1 \leqslant q \leqslant \deg b - n + 1$, степени $\deg b_q \leqslant n - 1$, который связан с исходным многочленом $b = b_0$ равенством

$$b_q = b - \sum_{k=1}^{q} u_k a_{j_k} a^{m_k},$$

где $b_{k-1} \in M_{j_k}$, $1 \leqslant j_k \leqslant s$, $\deg b_{k-1} = \deg a_{j_k} + m_k l$, $m_k \geqslant 0$, $b_k = b_{k-1} - u_k a_{j_k} a^{m_k}$, $u_k \in \mathbb{F}$ и $\deg b_k \leqslant \deg b_{k-1} - 1 \leqslant \deg b - k$ при всех $k = 1, \ldots, q$. Поэтому каждый многочлен b из алгебры M степени $\deg b \geqslant n$ выражается через сумму $b = b_q + d$ многочлена

$$d = \sum_{k=1}^{q} u_k a_{j_k} a^{m_k}$$

из подалгебры A алгебры M, порождённой многочленами a и $a_1, \ldots, a_s$, и многочлена b_q из подпространства M_{n-1} алгебры M, состоящего из многочленов $f \in M$, $\deg f \leqslant n - 1$, $M_{n-1} = M \cap (\mathbb{F} + \mathbb{F}x + \ldots + \mathbb{F}x^{n-1})$. Иначе говоря, алгебра M совпадает с суммой своих конечно порождённой подалгебры A и конечномерного подпространства M_{n-1} (точнее, $\dim_{\mathbb{F}} M_{n-1} \leqslant n$), $M = A + M_{n-1}$, а потому является конечно порождённой. $\square$

Следует отметить, что алгебра $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$, над любым полем $\mathbb{F}$ не является идеально алгебраической и, более того, слабо идеально алгебраической. Действительно, в противном случае конечно порождённые идеалы алгебры $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ и, в частности, её идеал $I = x_1\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, порождённый переменной x_1, являются конечно порождёнными как алгебры. В таком случае мы можем выбрать целые $k_1, \ldots, k_{n-1} \geqslant 1$, такие что элементы $x_1x_2^{i_1} \cdots x_n^{i_{n-1}}$, $i_j = 0, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, порождают алгебру I,

$$I = \langle x_1x_2^{i_1} \cdots x_n^{i_{n-1}} \mid i_1, \ldots, i_{n-1} \geqslant 0\rangle = \\ = \langle x_1x_2^{i_1} \cdots x_n^{i_{n-1}} \mid i_j = 0, \ldots, k_j,\ j = 1, \ldots, n-1\rangle.$$

Последнее позволяет записать

$$x_1x_2^{k_1+1} \cdots x_n^{k_{n-1}+1} = \sum_{l\geqslant 1} \sum_{\substack{0\leqslant i_j\leqslant k_j l,\\ j=1,\ldots,n-1}} u_l(i_1, \ldots, i_{n-1})x_1^l x_2^{i_1} \cdots x_n^{i_{n-1}}$$

для подходящего конечного набора элементов $\{u_l(i_1, \ldots, i_{n-1})\} \subseteq \mathbb{F}$, что невозможно. Таким образом, алгебра $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ не является идеально алгебраической и (вследствие её конечной порождённости) слабо идеально алгебраической.

Заметим, что алгебру многочленов $\mathbb{F}[x]$ от одной переменной x над любым полем $\mathbb{F}$ характеристики $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ можно рассматривать и как пример линейной йордановой алгебры с операцией умножения $f\cdot g = 1/2(fg+gf) = fg$, $f, g \in \mathbb{F}[x]$, удовлетворяющей условию максимальности для подалгебр (сходный вывод верен, естественно, для всех однопорождённых ассоциативных коммутативных алгебр над полем $\mathbb{F}$).

Пример алгебры Ли с условием максимальности для подалгебр предоставляет нам следующее предложение.

Предложение 3.2. *Алгебра дифференцированний $\operatorname{Der}(\mathbb{F}[x])$ алгебры многочленов $\mathbb{F}[x]$ от одной переменной x над полем нулевой характеристики $\mathbb{F}$ удовлетворяет условию максимальности для подалгебр.*

Доказательство. Напомним, что каждое дифференцирование d алгебры $\mathbb{F}[x]$ является композицией формального дифференцирования d_x по переменной x и оператора левого (правого) умножения l_f на образ $f = d(x) \in \mathbb{F}[x]$ переменной x при действии d, $d = l_f d_x$, где $d\colon g \mapsto l_f d_x g = fg'$ для всех $g \in \mathbb{F}[x]$. Дифференцирования алгебры $\mathbb{F}[x]$ формируют подалгебру $\operatorname{Der}(\mathbb{F}[x]) = \{l_f d_x \mid f \in \mathbb{F}[x]\}$ алгебры Ли $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x])^{(-)}$, полученной на базе ассоциативной алгебры эндоморфизмов $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x])$ пространства $\mathbb{F}[x]$ над полем $\mathbb{F}$ в результате замены её операции умножения (композиции) на связанную с ней лиевскую скобку (кольцевой коммутатор) $[\,,\,]$, $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$, $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x])$. Поскольку для любых $f, g \in \mathbb{F}[x]$

$$[l_f d_x, l_h d_x] = l_f d_x l_h d_x - l_h d_x l_f d_x = l_{f d_x(h) - d_x(f) h} d_x + l_{fh}(d_x^2 - d_x^2) = l_{fh' - f'h} d_x,$$

где $fh' - f'h = \{f, h\}$ — значение скобки Пуассона $\{\,,\,\}$ на паре (f, h), соответствие $l_f d_x \mapsto f$, $f \in \mathbb{F}[x]$, устанавливает изоморфизм между алгебрами Ли $\operatorname{Der}(\mathbb{F}[x])$ и $\mathbb{F}[x]^{\{\,,\,\}}$, последняя из которых определена на основе алгебры $\mathbb{F}[x]$

посредством замены операции умножения этой алгебры на скобку Пуассона $\{\,,\,\}$.

Говоря о свойствах скобки Пуассона, следует в первую очередь отметить то, что её значение $\{f,g\}$ на паре ненулевых многочленов $f,g\in\mathbb{F}[x]$ тогда и только тогда равно нулю, когда эти многочлены ассоциированы, $f=vh$ для некоторого $v\in\mathbb{F}$. Вследствие линейности скобки $\{\,,\,\}$ и равенства нулю её значений на парах многочленов нулевой степени, $\{u,v\}=uv\{1,1\}=0$ для всех $0\neq u,v\in\mathbb{F}$, для того чтобы убедиться в этом, следует лишь установить совпадение любых двух нормализованных многочленов f и g степеней $\deg f=n\geqslant 1$ и $\deg g=m\geqslant 1$, таких что $\{f,g\}=0$. Действительно, пусть

$$f=f_nx^n+f_{n-1}x^{n-1}+\ldots+f_1x+f_0,\quad h=h_mx^m+h_{m-1}x^{m-1}+\ldots+h_1x+h_0,$$

где $f_1,\ldots,f_n,h_1,\ldots,h_m\in\mathbb{F}$, $f_n=h_m=1$, и, кроме того,

$$\{f,h\}=fh'-f'h=\sum_{k=1}^{n+m}\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m,\\ i+j=k}}(jf_ih_j-if_ih_j)x^{k-1}=0.$$

Последнее равенство равносильно системе равенств

$$\begin{aligned}0&=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m,\\ i+j=k}}(jf_ih_j-if_ih_j)=\\&=\sum_{i=\max\{0,k-m\}}^{\min\{n,k\}}\big((k-i)f_ih_{k-i}-if_ih_{k-i}\big)=\sum_{i=\max\{0,k-m\}}^{\min\{n,k\}}(k-2i)f_ih_{k-i}=\\&=\begin{cases}(m-n)f_nf_m=m-n & \text{at } k=n+m;\\ \sum\limits_{i=\max\{0,k-m\}}^{\min\{n,[k/2]\}}(k-2i)(f_ih_{k-i}-f_{k-i}h_i) & \text{at } k=1,\ldots,n+m-1,\end{cases}\end{aligned}$$

где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$. Отсюда следует, в частности, что $n=m$. Если l, $0\leqslant l<n$, является одним из тех индексов, для которых выполнены равенства $f_i=g_i$, $i=l+1,\ldots,n$ (последнее верно, например, для $l=n-1$, так как $f_n=g_n=1$), то k-е равенство для $k=n+l$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}0=\sum_{i=l}^{[(n+l)/2]}&(n+l-2i)(f_ih_{n+l-i}-f_{n+l-i}h_i)=\\&=\sum_{i=l}^{[(n+l)/2]}(n+l-2i)f_{n+l-i}(f_i-h_i)=(n-l)(f_l-h_l),\end{aligned}$$

что влечёт за собой равенство $f_l=h_l$. Применяя данное наблюдение последовательно к $l=n-1,\ldots,1$, мы получаем, что многочлены f и g имеют одинаковые коэффициенты $f_i=h_i$, $i=0,\ldots,n$, и значит, являются равными, $f=g$.

Заметим также, что в соответствии с приведёнными в рамках проделанного нами рассуждения равенствами значение скобки Пуассона $\{f,h\}$ на паре любых ненулевых многочленов f и h, $f, h \in \mathbb{F}[x]$, различных степеней $n = \deg f \geqslant 0$ и $m = \deg h \geqslant 0$, $n \neq m$, с ненулевыми старшими коэффициентами f_n и h_m является ненулевым многочленом степени $n+m-1$ со старшим коэффициентом $(m-n) f_n h_m$.

Покажем теперь, что каждая подалгебра M алгебры Ли $\mathbb{F}[x]^{\{\,,\}}$ является конечно порождённой. По понятным причинам в рассмотрении нуждается лишь ситуация, когда алгебра M имеет бесконечную размерность над полем $\mathbb{F}$, а значит, содержит многочлены степени, большей или равной k для всех $k \geqslant 0$. Выберем и зафиксируем произвольный многочлен $a \in M$ степени $\deg a = l > 1$. С учётом сделанных ранее замечаний в алгебру M вместе со всяким её многочленом b, $\deg b > \deg a$, входят все ненулевые многочлены $\operatorname{ad}_a^i b = b(i)$, $\deg b(i) = \deg b + k(l-1)$, $i \geqslant 0$, где $b(0) = b$ и $b(j) = \{a, b(j-1)\}$ при любом $j \geqslant 1$. Обозначим через $\{l_1, \ldots, l_s\}$, $1 \leqslant s \leqslant l-1$, полную систему остатков от деления на $l-1$ степеней многочленов из множества $V = \{b \in \mathbb{F}[x] \mid b \in M,\ \deg b > l\}$. Представим множество V в виде дизъюнктного объединения $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_s$ его подмножеств

$$V_j = \{b \in V \mid \deg b \equiv l_j \ (l-1)\} \quad (j = 1, \ldots, s),$$

а затем выберем в каждом из множеств V_j, $j = 1, \ldots, s$, по одному многочлену a_j. Любой многочлен b из множества V степени $\deg b \geqslant n = \max\limits_{i=1,\ldots,s} \deg a_i$ принадлежит одному из его подмножеств V_{j_1} для некоторого $1 \leqslant j_1 \leqslant s$, и потому найдётся целое $m_1 \geqslant 0$, такое что $\deg b = \deg a_{j_1} + m_1(l-1)$. Поскольку алгебра M содержит вместе с многочленом a_{j_1} многочлен $a_{j_1}(m_1) = \operatorname{ad}_a^{m_1} a_{j_1}$ степени $\deg a_{j_1}(m_1) = a_{j_1} + m_1(l-1) = \deg b$ (см. выше), мы можем подобрать элемент $u_1 \in \mathbb{F}$, при котором многочлен $b_1 = g - u_1 a_{j_1}(m_1) \in M$ будет иметь степень $\deg b_1 \leqslant \deg b - 1$. В случае если $\deg b_1 \geqslant n$, мы можем применить описанное рассуждение к многочлену b_1 и определить для него индекс j_2, $1 \leqslant j_2 \leqslant s$, и целое $m_2 \geqslant 0$, для которых $b_1 \in V_{j_2}$ и $\deg b_1 = \deg a_{j_2} + m_2(l-1)$, а потом найти элемент $u_2 \in \mathbb{F}$, такой что многочлен $b_2 = b_1 - u_2 a_{j_2}(m_2) \in M$ имеет степень $\deg b_2 \leqslant \deg b_1 - 1$, и т. д. Продолжая данное построение, мы получим в результате на некотором конечном шаге q, $1 \leqslant q \leqslant \deg b - n + 1$, многочлен

$$b_q = b - \sum_{k=1}^{q} u_k a_{j_k}(m_k) \in M$$

степени $\deg b_q \leqslant n-1$, где $b_0 = b$, $b_{k-1} \in V_{j_k}$, $1 \leqslant j_k \leqslant s$, $\deg b_{k-1} = \deg a_{j_k} + m_k(l-1)$, $m_k \geqslant 0$, $b_k = b_{k-1} - u_k a_{j_k}(m_k)$, $u_k \in \mathbb{F}$, $\deg b_k \leqslant \deg b_{k-1} - 1 \leqslant \deg b - k$ при $k = 1, \ldots, q$. Поэтому каждый многочлен b из алгебры M степени $\deg b \geqslant n$ представим в виде суммы $b = d + b_q$ многочлена d из подалгебры A алгебры M, порождённой многочленами a и $a_1, \ldots, a_s$, и многочлена b_q из подпространства M_{n-1} алгебры M, которое составляют многочлены $f \in M$, $\deg f \leqslant n-1$, $M_{n-1} = M \cap (\mathbb{F} + \mathbb{F}x + \ldots + \mathbb{F}x^{n-1})$. Последнее в свою очередь позволяет записать алгебру M как сумму её конечно порождённой подалгебры A и подпространства M_{n-1} размерности не выше n, $M = A + M_{n-1}$, что гарантирует также её конечную порождённость.

Таким образом, подалгебры алгебры Ли $\mathbb{F}^{\{\,,\}}$ являются конечно порождёнными, и потому алгебра $\mathbb{F}^{\{\,,\}}$ и изоморфная ей алгебра Ли $\mathrm{Der}(\mathbb{F}[x])$ удовлетворяют условию максимальности для подалгебр. Вместе с тем алгебры $\mathbb{F}^{\{\,,\}}$ и $\mathrm{Der}(\mathbb{F}[x])$ имеют бесконечную размерность над полем $\mathbb{F}$, а значит, не являются локально конечномерными над этим полем. $\square$

Предложение 3.2 не переносится на случай поля $\mathbb{F}$ положительной характеристики $p > 0$. Действительно, рассмотрим подалгебру $K(x^p, x^{p+1}) = \langle \mathrm{ad}^k_{x^{p+1}} x^p \mid k \geqslant 0\rangle$ алгебры Ли $\mathbb{F}[x]^{\{\,,\}}$ над полем $\mathbb{F}$. Поскольку

$$\mathrm{ad}_{x^{p+1}} x^{kp} = \{x^{p+1}, x^{kp}\} = -x^{(k+1)p}, \quad \mathrm{ad}^k_{x^{p+1}} x^p = (-1)^k x^{(k+1)p} \quad (k \geqslant 0),$$
$$\{x^{ip}, x^{jp}\} = 0 \quad (i, j \geqslant 1),$$

подалгебра $K(x^p, x^{p+1})$ является бесконечномерной абелевой алгеброй Ли над полем $\mathbb{F}$ с базисом $\{x^{ip} \mid i \geqslant 1\}$. Отсюда следует, что алгебра $\mathbb{F}^{\{\,,\}} \cong \mathrm{Der}(\mathbb{F}[x])$ не является PK-алгебраической и тем более идеально алгебраической (см. замечание 2.2).

В заключение мы продемонстрируем различие между условиями идеальной и почти идеальной алгебраичности на примере алгебр Ли.

Для любых ассоциативного коммутативного кольца K и $m \geqslant 2$ обозначим через $L(m, K)$ кольцо Ли матриц размера $m \times m$ над кольцом K, имеющих нулевой след, или, что то же самое, подкольцо кольца Ли $\mathrm{M}_m(K)^{(-)}$, образованное этими матрицами, где $\mathrm{M}_m(K)$ — ассоциативное кольцо всех матриц размера $m \times m$ над K и $\mathrm{M}_m(K)^{(-)}$ — кольцо Ли, полученное из кольца $\mathrm{M}_m(K)$ в результате замены его операции умножения на скобку $[\,,\,]$, $[(a_{ij}), (b_{ij})] = (a_{ij})(b_{ij}) - (b_{ij})(a_{ij})$, $(a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathrm{M}_m(K)$,

$$L(m, K) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_m(K) \mid a_{11} + \ldots + a_{mm} = 0\}.$$

Нетрудно заметить, что каждому идеалу I кольца K соответствует идеал $L(m, I)$ кольца Ли $L(m, K)$. В случае если $m \geqslant 3$ и кольцо K содержит единицу, взаимосвязь между идеалами колец K и $L(m, K)$ исчерпывающим образом описывает следующее замечание.

Замечание 3.3. Пусть K — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей 1, $m \geqslant 3$ и $I = (A)_{L(m,K)}$ — идеал кольца Ли $L(m, K)$, который порождают элементы некоторого его подмножества A. Тогда идеал I может быть записан в виде суммы $I = D + L(m, H)$, где D — абелево подкольцо кольца $L(m, K)$, порождённое диагоналями матриц из множества A, и H — идеал кольца K, порождённый элементами $a_{ii} - a_{jj}$, a_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, $a = (a_{pq}) \in A$.

Доказательство. В первую очередь отметим, что для любых матрицы $a = (a_{pq}) \in A$ и индексов i, j, k, $1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant m$, выполняются включения

$$\Big[e_{jk},[e_{ik},[e_{ij},a]]\Big]=[e_{jk},[e_{ik},e_{ij}a-ae_{ij}]]=[e_{jk},-e_{ik}ae_{ij}-e_{ij}ae_{ik}]=a_{ki}e_{ik}\in I,$$

$$\Big[e_{ji},[e_{ki},[e_{kj},a_{ki}e_{ik}]]\Big]=[e_{ji},[e_{ki},-a_{ki}e_{ij}]]=[e_{ji},-a_{ki}e_{kj}]=a_{ki}e_{ki}\in I,$$

где e_{pq} — элементарная матрица из кольца $\mathrm{M}_m(K)$, в которой на позиции (p,q) стоит единичный элемент 1 кольца K, а остальные позиции заполнены нулевыми элементами, $p,q=1,\ldots,m$. Поэтому в идеал I кольца Ли $L(m,K)$ вместе с каждой порождающей его матрицей $a=(a_{pq})\in A$ входит её диагональ

$$a-\sum_{1\leqslant i\neq k\leqslant m}a_{ik}e_{ik}=a_{11}e_{11}+\ldots+a_{mm}e_{mm}=\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{mm})=$$

$$=a_{11}(e_{11}-e_{22})+(a_{11}+a_{22})(e_{22}-e_{33})+\ldots+(a_{11}+\ldots+a_{m-1m-1})(e_{m-1m-1}-e_{mm}),$$

а также матрицы $[\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{mm}),e_{ik}]=(a_{ii}-a_{kk})e_{ik}$, $1\leqslant i\neq k\leqslant m$. Поскольку для всех элементов $z,y\in K$ и индексов i, j, k, $1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant m$,

$$[ze_{ij},ye_{jk}]=zye_{ik},\quad [ze_{ij},ye_{ji}]=zy(e_{ii}-e_{jj}), \tag{14}$$

$$[z(e_{ii}-e_{jj}),ye_{ik}]=zye_{ik},\quad [z(e_{ii}-e_{jj}),ye_{ij}]=2zye_{ij}, \tag{15}$$

идеал I содержит все матрицы $h(e_{ii}-e_{jj})$ и he_{ij}, $1\leqslant i\neq j\leqslant m$, $h\in H$, где H — идеал кольца K, определённый в формулировке этого замечания, и, как следствие, включает в себя идеал $L(m,H)$ кольца $L(m,K)$, $I\supseteq L(m,H)$. Кроме того, согласно приведённым выше коммутационным соотношениям $[a,L(m,K)]\subseteq L(m,H)$ для любой матрицы $a\in A$. Поэтому каждый элемент идеала I совпадает с суммой некоторых конечной системы диагоналей матриц из множества A и матрицы из идеала $L(m,H)$, а значит, идеал I представим в виде $I=D+L(m,H)$. □

Замечание 3.4. Пусть K — конечно порождённая ассоциативная коммутативная алгебра над кольцом F. Тогда алгебра Ли $L(m,K)$ над кольцом F является конечно порождённой при любом $m\geqslant 3$.

Доказательство. Достаточно выделить в алгебре K произвольную конечную систему порождающих $\{a_1,\ldots,a_n\}$ и заметить, что в силу соотношений (14) и (15) этой системе соответствует конечная система порождающих

$$\{a_k(e_{ii}-e_{jj}),\ a_ke_{ij}\mid 1\leqslant i\neq j\leqslant m,\ k=1,\ldots,n\}$$

алгебры Ли $L(m,K)$ при любом $m\geqslant 3$. □

Следствие 3.5. *При всех $m\geqslant 3$ алгебра Ли $L(m,\mathbb{F}[x])$ над любым полем $\mathbb{F}$ является почти идеально алгебраической, но не является идеально алгебраической.*

Доказательство. Согласно замечанию 3.4 для любого $m\geqslant 3$ алгебра Ли $L(m,\mathbb{F}[x])$ над полем $\mathbb{F}$ является конечно порождённой. В силу замечаний 3.3, 3.4 и предложения 3.1 все её конечно порождённые идеалы являются конечно порождёнными подалгебрами. Поэтому алгебра $L(m,\mathbb{F}[x])$ является почти идеально алгебраической. В то же время для любых индексов i, j, k,

$1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant m$, элементы $\operatorname{ad}^n_{x(e_{ii}-e_{jj})} e_{ik} = x^n e_{ik}$, $n \geqslant 0$, порождают в алгебре $L(m, \mathbb{F}[x])$ абелеву подалгебру бесконечной размерности $K\big(e_{ik}, x(e_{ii}-e_{jj})\big) = \mathbb{F}[x]e_{ik}$, и следовательно, элемент $x(e_{ii}-e_{jj})$ алгебры $L(m, \mathbb{F}[x])$ не является РК-алгебраическим. В соответствии с замечанием 2.2 последнее означает также, что алгебра $L(m, \mathbb{F}[x])$ не может быть идеально алгебраической. $\square$

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин В. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр. — В печати.

[3] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[4] Дорофеев Г. В. О нильпотентности правоальтернативных колец // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 3. — С. 302—305.

[5] Дорофеев Г. В. О локально нильпотентном радикале неассоциативных колец // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 4. — С. 355—364.

[6] Жевлаков К. А. Разрешимость и нильпотентность йордановых колец // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 37—58.

[7] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[8] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[9] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 23, № 6. — С. 100—116.

[10] Кузьмин Е. Н. Об антикоммутативных алгебрах, удовлетворяющих условию Энгеля // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 5. — С. 1026—1034.

[11] Кузьмин Е. Н. Алгебраические множества в алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 2. — С. 42—47.

[12] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971; М.: Факториал Пресс, 2005.

[13] Лю Шао-сюэ. О расщеплении бесконечных алгебр // Матем. сб. — 1957. — Т. 42, № 3. — С. 327—352.

[14] Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порождённой PI-алгебры: Препринт № 64. — Новосибирск: Ин-т Матем. СО АН СССР, 1984.

[15] Михеев И. М. Локально правонильпотентный радикал в классе правоальтернативных колец // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 2. — С. 174—185.

[16] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // УМН. — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[17] Пчелинцев С. В. Локально нильпотентный радикал на некоторых классах правоальтернативных колец // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 340—360.

[18] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[19] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1977; 1979.

[20] Шестаков И. П. Конечномерные алгебры с ниль-базисом // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 1. — С. 87—99.

[21] Шестаков И. П. О некоторых классах некоммутативных йордановых колец // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 4. — С. 407—448.

[22] Albert A. A. A structure theory for Jordan algebras // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48. — P. 546—567.

[23] Amayo R. K. A construction for algebras satisfying the maximal condition for subalgebras // Compositio Math. — 1975. — Vol. 31, No. 1. — P. 31—46.

[24] Anderson T. The Levitzki radical in varieties of algebras // Math. Ann. — 1971. — Vol. 194, No. 1. — P. 27—34.

[25] Hartley B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1967. — Vol. 63, pt. 2. — P. 257—272.

[26] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[27] Zorn M. Theorie der alternativen Ringe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1930. — Vol. 8. — P. 123—147.