Постклассические семейства функций, присущие дескриптивным и прескриптивным пространствам*

В. К. ЗАХАРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: valeriy_zakharov@list.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru

Т. В. РОДИОНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ttvvrr@yandex.ru

УДК 517.517+517.518.2+510.225+515.128

Ключевые слова: равномерные функции, распределимые функции, измеримые функции, идеал множеств, семейство покрытий, дескриптивное пространство, прескриптивное пространство.

Аннотация

Классиками теории функций — Э. Борелем, Р. Бэром, А. Лебегом, Ф. Хаусдорфом и др. — были заложены основы классической дескриптивной теории функций. В ней исходными являются понятия дескриптивного пространства и измеримой функции на нём. Измеримые функции определялись на классическом прообразном языке. Однако потребности решения ряда задач теории функций, меры и интеграла, развившихся на этой основе, привели к необходимости использования кардинально другого постклассического покрытийного языка, равносильного в классическом случае прообразному. В данной статье с помощью покрытийного языка вводятся общие понятия прескриптивного пространства и распределимых и равномерных функций на нём и изучаются их основные свойства.

Abstract

V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, T. V. Rodionov, Postclassical families of functions proper for descriptive and prescriptive spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 77—113.

The classics of function theory (E. Borel, H. Lebesgue, R. Baire, W. H. Young, F. Hausdorff, et al.) have laid down the foundation of the classical descriptive theory of

*Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ (14-01-00417) и гранта Президента РФ НШ-3682.2014.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 77—113.

functions. Its initial notions are the notions of a descriptive space and of a measurable function on it. Measurable functions were defined in the classical preimage language. However, a specific range of tasks in theory of functions, measure theory, and integration theory emergent on this base necessitates the usage of the entirely different postclassical cover language, equivalent to the preimage language in the classical case. By means of the cover language, the general notions of a prescriptive space and distributable and uniform functions on it are introduced in this paper and their basic properties are studied.

Введение

Классиками теории функций — Э. Борелем, Р. Бэром, А. Лебегом, Ф. Хаусдорфом и др. — были заложены основы *классической дескриптивной теории функций*. В ней исходными являются понятия *дескриптивного пространства* $(T, \mathcal{S})$ с *ансамблем* $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$ и *измеримой функции* $f\colon T \to \mathbb{R}$ на нём. Измеримые функции определялись на классическом языке. Под *классическим языком* в общей теории функций авторы понимают язык, основными операционными средствами которого являются элемент $S \in \mathcal{S}$ и прообраз $f^{-1}[S]$ функции f от S. Этот язык будем кратко называть *прообразным*.

Однако потребности решения ряда задач теории функций, меры и интеграла, развившейся на этой основе, привели к необходимости использования кардинально другого (постклассического) языка, равносильного в классическом случае прообразному. Под *постклассическим языком* в общей теории функций авторы понимают язык, введённый в $[1, 2, 5, 7, 34]$. Основными операционными средствами этого языка являются покрытие $\pi \equiv (S_i \mid i \in I)$ множества T и колебание $\omega(f, \pi)$ функции f на π. Этот язык будем кратко называть *покрытийным*.

Приставка «пост» означает, что использование покрытийного языка значительно расширяет выразительные возможности по сравнению с прообразным языком и приводит к появлению новых (постклассических) семейств функций, не сводимых к классическому семейству измеримых функций.

В данной статье с помощью покрытийного языка вводятся общие понятия *прескриптивного пространства* и *распределимых* и *равномерных функций* на нём и изучаются их основные свойства. Тем самым закладываются новые более широкие основы для современной дескриптивной теории функций, которые позволяют решить как старые задачи самой классической теории функций, так и новые задачи, возникающие в современной математике. К решённым задачам относятся:

1) задача характеризации функций, интегрируемых по Риману (см. применение 3 в разделе 3.3.1);
2) задача Хаусдорфа—Серпинского функционального описания равномерного замыкания *семейства полунепрерывных функций*

$$\mathrm{SC}(T, \mathcal{G}) \equiv \mathrm{SC}^l_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) + \mathrm{SC}^u_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$$

(см. применение 1 в разделе 1.3.1);

3) задача характеризации радоновских интегралов как линейных функционалов на произвольном хаусдорфовом пространстве (проблема Рисса—Радона—Фреше) [7—12];
4) задача Файна—Гиллмана—Ламбека функционального описания равномерного пополнения классического модуля частных модуля непрерывных функций над кольцом ограниченных непрерывных функций на произвольном тихоновском пространстве (см. применение 2 в разделе 3.3.1);
5) задача Накано—Шимогаки функционального описания дедекиндова пополнения решёточного линейного пространства ограниченных непрерывных функций на произвольном тихоновском пространстве (см. применение 2 в разделе 3.3.1).

1. Классические и постклассические семейства функций, присущие дескриптивному пространству

1.1. Дескриптивные пространства

Пусть T — множество и $\mathcal{P}(T)$ — множество всех его подмножеств. Любое непустое подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$ называется *ансамблем на* T. Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T. Тогда пара $(T, \mathcal{S})$ называется *дескриптивным пространством* или *пространством с ансамблем*.

Ансамбль, замкнутый относительно конечных пересечений (*мультипликативный*) и содержащий $\varnothing$ и T, называется *основой на* T. Ансамбль, замкнутый относительно конечных [счётных, произвольных] объединений, называется *аддитивным* [*σ-аддитивным, τ-аддитивным*]; если основа σ-аддитивна [τ-аддитивна], то она называется *σ-основой* [*τ-основой*]. Всякая τ-основа $\mathcal{G}$ на T обычно называется (*открытой*) *топологией на* T, каждый её элемент — *открытым множеством*, а пара $(T, \mathcal{G})$ — *топологическим пространством*. Замкнутая относительно дополнений σ-основа называется *σ-алгеброй*.

Коансамблем ансамбля $\mathcal{S}$ называется ансамбль co-$\mathcal{S}$ на T, состоящий из всех $P \subset T$, таких что $P = T \setminus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$. В случае топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ коансамбль $\mathcal{F} \equiv$ co-$\mathcal{G}$ называется ансамблем *замкнутых множеств*.

Отображение $f\colon I \to X$, записанное в виде $f \equiv (x_i \in X \mid i \in I)$, называется также *коллекцией элементов множества X, индексированной множеством I*. При $X = \mathcal{P}(A)$ говорят о *коллекции подмножеств множества A* и записывают её в виде $f \equiv (A_i \subset A \mid i \in I)$, кроме того, используют обозначение $\operatorname{bod} f \equiv \bigcup(A_i \mid i \in I)$.

Рассмотрим ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$ и $\mathcal{S}_\sigma$ на T, состоящие из всех $P \subset T$, таких что $P = \bigcup(S_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной или счётной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ соответственно.

Коллекция $\pi \equiv (A_i \subset T \mid i \in I)$, такая что $\bigcup(A_i \mid i \in I) = S$, называется *покрытием множества* S.

Семейство всех действительнозначных функций на множестве T обозначим через $F(T)$, его подсемейство ограниченных функций — через $F_{\mathrm{b}}(T)$. Для функции $f \in F(T)$ и множества $X \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$f^{-1}[X] \equiv \big\{t \in T \mid \exists\, x \in X \ \big(x = f(t)\big)\big\}.$$

1.2. Классическое семейство измеримых функций

1.2.1. Определение и основные свойства

Понятие измеримой функции обрело свою форму в работах Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега и др. [18—21, 24—26, 32, 33]. Оно стало одним из важнейших понятий современной математики.

Пусть T и T' — множества, а $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ ансамбли на T и на T' соответственно. Отображение $\tau\colon T \to T'$ называется *измеримым относительно* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{S}'$ или $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-*измеримым*, если $\tau^{-1}[S'] \in \mathcal{S}$ для каждого $S' \in \mathcal{S}'$.

В важном случае $T' = \mathbb{R}$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{G}_{\mathrm{int}} \equiv \{\,]x, y[\mid x, y \in \mathbb{R}\}$ функция $f \in F(T)$, измеримая относительно $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, в [14] была названа просто *измеримой на дескриптивном пространстве* $(T, \mathcal{S})$, или $\mathcal{S}$-*измеримой*. Отметим, что А. Лебег при определении измеримых функций использовал только семейство *односторонних лебеговских множеств* $f^{-1}\big[\,]x, \infty[\,\big]$ и $f^{-1}\big[\,]{-\infty}, y[\,\big]$.

Семейство всех таких функций обозначается через $\mathrm{M}(T, \mathcal{S})$, а его подсемейство $\mathrm{M}(T, \mathcal{S}) \cap F_{\mathrm{b}}(T)$ обозначается через $\mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{S})$.

Теорема 1 (А. Лебег, Э. Борель)**.** *Пусть* $\mathcal{S}$ — σ*-основа на* T. *Тогда* $\mathrm{M}(T, \mathcal{S})$ *и* $\mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{S})$ *являются решёточными линейными алгебрами над* $\mathbb{R}$ *с мультипликативной и порядковой единицей* $\mathbf{1}\colon T \to \{1\}$. *Кроме того,* $\mathrm{M}(T, \mathcal{S})$ $[\mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{S})]$ *замкнуто относительно деления на функции, не обращающиеся в нуль* [*соответственно* на функции, отделённые константой от нуля], *извлечения корней из неотрицательных функций и равномерной сходимости сетей* (*в частности, последовательностей*).

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S})$, $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$.

1. Если $1 \in\,]x, y[$, то $\mathbf{1}^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] = T \in \mathcal{S}$. Если $1 \notin\,]x, y[$, то $\mathbf{1}^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] = \varnothing \in \mathcal{S}$.

2. Если $r > 0$, то $(rf)^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] = f^{-1}\big[\,]x/r, y/r[\,\big] \in \mathcal{S}$. Если $r < 0$, то $(rf)^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] = f^{-1}\big[\,]y/r, x/r[\,\big] \in \mathcal{S}$. Если $r = 0$, то $(rf)^{-1}\big[\,]x, y[\,\big]$ совпадает с $T \in \mathcal{S}$ или с $\varnothing \in \mathcal{S}$.

3. Пусть $t \in (f+g)^{-1}\big[\,]x, y[\,\big]$, т. е. $x - g(t) < f(t) < y - g(t)$. Поскольку существуют такие рациональные числа p и q, что $x - g(t) < p < f(t) < q < y - g(t)$, мы имеем

$$t \in f^{-1}\big[\,]p, q[\,\big] \cap g^{-1}\big[\,]x - p, y - q[\,\big] \equiv T_{pq}.$$

Тогда

$$(f+g)^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] \subset \bigcup\big(T_{pq} \mid p, q \in \mathbb{Q}\ (p < q)\big) \in \mathcal{S}.$$

Обратно, если t принадлежит последнему множеству, то найдутся такие $p,q \in \mathbb{Q}$, что $p < f(t) < q$ и $x - p < g(t) < y - q$. Следовательно, $t \in (f+g)^{-1}\big[\,]x,y[\,\big]$. Таким образом, $f+g \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$.

4. Сначала докажем, что $f^2 \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$.

Пусть $0 \leqslant x < y$. Если $t \in (f^2)^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] \equiv R$, то $0 \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{f^2(t)} < \sqrt{y}$, т. е. $0 \leqslant \sqrt{x} < |f(t)| < \sqrt{y}$. Если $f(t) > 0$, то $0 \leqslant \sqrt{x} < f(t) < \sqrt{y}$, т. е. $t \in f^{-1}\big[\,]\sqrt{x},\sqrt{y}\,[\,\big]$. Если $f(t) < 0$, то $0 \leqslant \sqrt{x} < -f(t) < \sqrt{y}$, т. е. $t \in f^{-1}\big[\,]-\sqrt{y},-\sqrt{x}\,[\,\big]$. Таким образом,

$$R \subset f^{-1}\big[\,]\sqrt{x},\sqrt{y}\,[\,\big] \cup f^{-1}\big[\,]-\sqrt{y},-\sqrt{x}\,[\,\big] \equiv S.$$

Обратно, пусть $t \in S$. Если $f(t) > 0$, то $\sqrt{x} < f(t) < \sqrt{y}$. Следовательно, $x < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Если $f(t) < 0$, то $-\sqrt{y} < f(t) < -\sqrt{x}$. Следовательно, $x < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Это означает, что $R = S \in \mathcal{S}$.

Если $x < y \leqslant 0$, то $(f^2)^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \varnothing \in \mathcal{S}$.

Пусть $x < 0 < y$. Если $t \in (f^2)^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] \equiv R$, то $x < 0 \leqslant f^2(t) < y$. В силу вышеприведённых аргументов $0 \leqslant \sqrt{f^2(t)} < \sqrt{y}$, т. е. $0 \leqslant |f(t)| < \sqrt{y}$. Если $f(t) \geqslant 0$, то $t \in f^{-1}\big[[0,\sqrt{y}\,[\,\big] \equiv S_1$. Если $f(t) < 0$, то из $0 < -f(t) < \sqrt{y}$ вытекает $t \in f^{-1}\big[\,]-\sqrt{y},0[\,\big] \equiv S_2$. В обоих случаях $t \in S_1 \cup S_2 = f^{-1}\big[\,]-\sqrt{y},\sqrt{y}\,[\,\big] \equiv S$. Обратно, пусть $t \in S$, т. е. $-\sqrt{y} < f(t) < \sqrt{y}$. Если $f(t) \geqslant 0$, то из $0 \leqslant f(t) < \sqrt{y}$ вытекает $x < 0 \leqslant f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Если $f(t) < 0$, то $-\sqrt{y} < f(t) < 0$. В силу предыдущих рассуждений $x < 0 < f^2(t) < y$, т. е. $t \in R$. Таким образом, $R = S \in \mathcal{S}$.

Теперь предположим, что $f,g \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$. Пользуясь равенством $fg = \big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)/4$ и доказанными утверждениями 2 и 3, немедленно получаем, что $fg \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$.

5. Из аддитивности и мультипликативности $\mathcal{S}$ и уже доказанного утверждения 2 получаем, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{f}\right)^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \big(f^{-1}\big[\,]0,\infty[\,\big] \cap (xf)^{-1}\big[\,]-\infty,1[\,\big] \cap (yf)^{-1}\big[\,]1,\infty[\,\big]\big) \cup \\ \cup \big(f^{-1}\big[\,]-\infty,0[\,\big] \cap (xf)^{-1}\big[\,]1,\infty[\,\big] \cap (yf)^{-1}\big[\,]-\infty,1[\,\big]\big) \in \mathcal{S}.$$

Тогда $\mathbf{1}/f \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$.

Если функция f отделена константой от нуля, т. е. $|f| \geqslant r\mathbf{1}$ для некоторого $r > 0$, то $|\mathbf{1}/f| \leqslant \mathbf{1}/r$, т. е. функция $\mathbf{1}/f$ ограниченная.

6. Пусть $X \equiv (\sqrt[m]{f})^{-1}\big[\,]x,y[\,\big]$. Если $y \leqslant 0$, то $X = \varnothing \in \mathcal{S}$. Если $x < 0 < y$, то $X = f^{-1}\big[[0,y^m[\,\big] = f^{-1}\big[\,]-y^m,y^m[\,\big] \in \mathcal{S}$. Если $x \geqslant 0$, то $X = f^{-1}\big[\,]x^m,y^m[\,\big] \in \mathcal{S}$.

7. Пусть $(f_i \in \mathrm{M}(T,\mathcal{S}) \mid i \in I)$ — конечная коллекция, $g,h \in F(T)$ и $g = \sup(f_i \mid i \in I)$ в $F(T)$, $h = \inf(f_i \mid i \in I)$ в $F(T)$. Пусть $t \in R \equiv g^{-1}\big[\,]x,y[\,\big]$. Тогда $x < \sup(f_i(t) \mid i \in I) < y - 1/n < y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f_i(t) < y - 1/n$ для всех $i \in I$ и найдётся такое $i \in I$, что $f_i(t) > x$. Отсюда вытекает, что

$$t \in \Big(\bigcup\big(f_i^{-1}\big[\,]x,\infty[\,\big] \mid i \in I\big)\Big) \cap \\ \cap \bigg(\bigcup\bigg(\bigcap\bigg(f_i^{-1}\bigg[\bigg]{-\infty}, y-\frac{1}{n}\bigg[\bigg] \;\bigg|\; i \in I\bigg) \;\bigg|\; n \in \mathbb{N}\bigg)\bigg) \equiv S.$$

Поэтому $R \subset S$.

Обратно, если $t \in S$, то $f_i(t) > x$. Кроме того, существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $f_i(t) < y - 1/n$ для всех $i \in I$. Следовательно, $g(t) > x$ и $g(t) < y - 1/n$, т. е. $t \in R$. Таким образом, $R = S \in \mathcal{S}$, откуда и вытекает, что $g \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S})$.

Поскольку $\inf(f_i \mid i \in I) = -\sup(-f_i \mid i \in I)$, то из доказанного выше следует, что $h \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S})$.

8. Пусть $f \in F(T)$, $(f_n \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S}) \mid n \in N)$ — некоторая сеть и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$. По условию найдётся m, такое что $|f - f_p| < (1/l)\mathbf{1}$ для всех $p \geqslant m$. Определим множества $S \equiv f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big]$ и $S_l \equiv f^{-1}\big[[x + 3/l, y - 3/l]\big]$, числа $r_k \equiv k/(2l)$ и множества $R_k \equiv f_m^{-1}\big[\,]r_{k-1}, r_{k+1}[\,\big] \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$. Множества R_k покрывают множество T. Рассмотрим множества

$$Q_l \equiv \bigcup(R_k \mid k \in \mathbb{Z} \wedge R_k \cap S_l \neq \varnothing) \in \mathcal{S}.$$

Легко убедиться, что $S_l \subset Q_l$. Предположим, что $t \in Q_l$. Тогда найдутся такие $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in T$, что $t \in R_k$ и $s \in R_k \cap S_l$. Поэтому из $f(t) < f_m(t) + 1/l < f_m(s) + 2/l < f_m(s) + 3/l \leqslant y - 3/l + 3/l = y$ и $f(t) > f_m(t) - 1/l > f_m(s) - 2/l > f_m(s) - 3/l \geqslant x + 3/l - 3/l = x$ следует, что $t \in S$. Поэтому $Q_l \subset S$ и

$$S = \bigcup(S_l \mid l \in \mathbb{N}) \subset \bigcup(Q_l \mid l \in \mathbb{N}) \subset S.$$

Таким образом,

$$S = \bigcup(Q_l \mid l \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}$$

и $f \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S})$.

Если, кроме того, все f_n принадлежат $\mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$, то $f \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$. □

Отметим, что это доказательство существенно использует счётное множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Лемма 1. *Существуют основа $\mathcal{K}$ на $T \equiv [0, 1[\; \subset \mathbb{R}$, последовательность $(f_n \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{N})$ и функции $h', h'' \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K})$ и $f, g \in F_\mathrm{b}(T)$, такие что $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ равномерно сходится к f, $g = h' - h''$ и $f, g \notin \mathrm{M}(T, \mathcal{K})$.*

Доказательство. Определим топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$, взяв $T \equiv [0, 1[\; \subset \mathbb{R}$ и $\mathcal{G} \equiv \{[0, b[\; \mid 0 < b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}$. Тогда $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G} = \{[a, 1[\; \mid 0 \leqslant a < 1\}$. Положим

$$\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\} = \{[a, b[\; \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{K}$ — основа.

Для всякого $n \in \omega$ обозначим $\Delta_n \equiv [2^{-(n+1)}, 2^{-n}[$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $f_n \colon T \to [0,1]$, положив $f_n(t) \equiv 2^{-k}$ для всех $t \in \Delta_k$, $k \in n$, и $f_n(t) \equiv 0$ иначе. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если $x \geqslant 1$ или $y \leqslant 0$, то $f_n^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \varnothing \in \mathcal{K}$. Если $x < 1$ и $y > 0$, то $f_n^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = [a,b[\,\in \mathcal{K}$ или $f_n^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \varnothing \in \mathcal{K}$. Следовательно, $f_n \in \mathrm{M_b}(T,\mathcal{K})$.

Рассмотрим функции $h' \equiv f_1$, $h'' \equiv -f_2$ и $g \equiv h' + h''$. Поскольку $g(t) = -1/2$ для всех $t \in \Delta_1$ и $g(t) = 0$ в других точках, мы видим, что

$$g^{-1}\Big[\Big]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big[\Big] = T \setminus \Delta_1 = \Big[0,\frac{1}{4}\Big[\cup \Big[\frac{1}{2},1\Big[\notin \mathcal{K},$$

и следовательно, $g \notin \mathrm{M}(T,\mathcal{K})$.

Определим функцию $f \colon T \to [0,1]$, положив $f(t) \equiv 2^{-n}$ для всех $t \in \Delta_n$, $n \in \omega$, и $f(0) \equiv 0$. Из $f^{-1}\big[\,]0,2[\,\big] = \,]0,1[\,\notin \mathcal{K}$ вытекает, что $f \notin \mathrm{M}(T,\mathcal{K})$. Нетрудно заметить, что $f = \text{u-}\lim(f_n \mid n \in \mathbb{N})$. $\square$

Лемма 1 показывает, что класс σ-основ $\mathcal{S}$ является самым широким классом ансамблей, для которых семейство $\mathrm{M}(T,\mathcal{S})$ является хорошим, т. е. замкнутым относительно операций над функциями из теоремы 1.

Если семейство $A(T) \subset F(T)$ обладает свойствами семейства $\mathrm{M}(T,\mathcal{S})$ из теоремы 1, то оно называется *нормальным* [14]. Как показывается ниже, других нормальных семейств, кроме семейств измеримых функций на дескриптивных пространствах с σ-основами, не существует.

1.2.2. Естественность класса семейств измеримых функций на дескриптивных пространствах

Для функции $f \in F(T)$ множество $\operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ называется *конуль-множеством функции* f (см., например, [28, гл. II, 6.5.5]). Множество $\operatorname{coz} f$ сводится к объединению двух основных лебеговских множеств $f^{-1}\big[\,]0,\infty[\,\big]$ и $f^{-1}\big[\,]-\infty,0[\,\big]$.

Для семейства $A(T) \subset F(T)$ ансамбль $\operatorname{Coz} A(T) \equiv \{\operatorname{coz} f \mid f \in A(T)\}$ называется *ансамблем конуль-множеств семейства* $A(T)$.

Теорема 2. *Пусть $A(T)$ — семейство функций на T. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *семейство $A(T)$ является нормальным*;
2) $A(T) = \mathrm{M}(T,\mathcal{S})$ *для некоторой σ-основы* $\mathcal{S}$;
3) $A(T) = \mathrm{M}\big(T, \{\varnothing, T\} \cup \big(\operatorname{Coz} A(T)\big)_{\eta\sigma}\big)$.

Доказательство этой теоремы в приведённой формулировке было дано в [6]. Равносильность утверждений 1) и 2) естественно называть *теоремой Лебега—Бореля—Хаусдорфа* [17, 37.IX]. Этот результат показывает естественность класса измеримых функций на дескриптивных пространствах с σ-основами.

Доказательство естественности класса измеримых функций на дескриптивных пространствах с σ-алгебрами затянулось на длительный срок. Только в 1977 г. в работе Дж. Реголи [27] была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $A(T)$ — *семейство функций на множестве* T. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *семейство* $A(T)$ вполне нормально, *т. е. нормально и замкнуто относительно поточечной сходимости*;
2) $A(T) = \mathrm{M}(T, \mathcal{S})$ *для некоторой* σ*-алгебры* $\mathcal{S}$;
3) $\operatorname{Coz} A(T)$ *является* σ*-алгеброй и* $A(T) = \mathrm{M}\big(T, \operatorname{Coz} A(T)\big)$.

1.2.3. Покрытийная характеризация измеримых функций

Число

$$\omega(f, A) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid t, s \in A\} \in \bar{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty]$$

называется *колебанием функции* $f \in F(T)$ *на множестве* $A \subset T$. Для коллекции $\pi \equiv (A_i \subset T \mid i \in I)$ число

$$\omega(f, \pi) \equiv \sup(\omega(f, A_i) \mid i \in I) \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

называется *колебанием функции* f *на коллекции* π.

Все $\mathcal{S}$-измеримые функции для σ-аддитивного $\mathcal{S}$ могут быть охарактеризованы посредством их колебаний на счётных или конечных покрытиях следующим образом.

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *ансамбль на* T. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S}_\sigma)$;
2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует счётное покрытие* $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ *множества* T, *такое что* $\omega(f, \pi) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Пусть $f \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S}_\sigma)$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и такое $n \in \mathbb{N}$, что $2/n < \varepsilon$. Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ определим множества

$$X_m \equiv f^{-1}\big[\,](m-1)/n, (m+1)/n[\,\big] \in \mathcal{S}_\sigma.$$

Для всякого X_m существует такая счётная коллекция $(Q_{mp} \in \mathcal{S} \mid p \in P_m)$, что

$$X_m = \bigcup (Q_{mp} \mid p \in P_m).$$

Рассмотрим счётное множество

$$I \equiv \bigcup (\{m\} \times P_m \mid m \in \mathbb{Z}).$$

Положим $S_i \equiv Q_{mp}$ для всякого $i = (m, p) \in I$. Тогда $\omega(f, S_i) \leqslant \omega(f, X_m) < < 2/n < \varepsilon$. Кроме того, мы видим, что

$$\bigcup (S_i \mid i \in I) = \bigcup (Q_{mp} \mid (m, p) \in I) = \\ = \bigcup \Big(\bigcup (Q_{mp} \mid p \in P_m) \;\Big|\; m \in \mathbb{Z} \Big) = \bigcup (X_m \mid m \in \mathbb{Z}) = T,$$

и следовательно, коллекция $(S_i \mid i \in I)$ является счётным покрытием T.

Докажем импликацию 2) $\vdash$ 1). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим счётное покрытие $\pi_n \equiv (S_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$, такое что $\omega(f, \pi_n) < 1/n$.

Возьмём произвольные действительные числа $x < y$ и рассмотрим множества

$$E \equiv f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big], \quad E_n \equiv f^{-1}\big[\,[x + 1/n, y - 1/n]\,\big],$$
$$J_n \equiv \{i \in I_n \mid S_{ni} \cap E_n \neq \varnothing\}, \quad F_n \equiv \bigcup(S_{ni} \mid i \in J_n) \in \mathcal{S}_\sigma.$$

Поскольку π_n — покрытие T, имеем $E_n \subset F_n$. Если $t \in F_n$, то $t \in S_{ni}$ для некоторого $i \in J_n$. Следовательно, найдётся $s \in S_{ni} \cap E_n$. Поэтому $f(t) < f(s) + 1/n < y$ и $f(t) > f(s) - 1/n > x$, т. е. $t \in E$. Отсюда вытекает, что $F_n \subset E$. Таким образом,

$$E \subset \bigcup(E_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset \bigcup(F_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset E.$$

В результате получаем, что

$$E = \bigcup(F_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}_\sigma.$$

Это означает, что $f \in \mathrm{M}(T, \mathcal{S}_\sigma)$. □

Следствие. *Пусть* $\mathcal{S}$ — σ*-аддитивный ансамбль на* T. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f \in M(T, \mathcal{S})$ $[f \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})]$;
2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое счётное* [*конечное*] *покрытие* $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ *множества* T, *что* $\omega(f, \pi) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\vdash$ 2). Если $f \in M(T, \mathcal{S})$, то утверждаемое следует непосредственно из предложения 1.

Предположим, что $f \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$. Тогда $|f| \leqslant a\mathbf{1}$ для некоторого $a > 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое $n \in \mathbb{N}$, что $2/n < \varepsilon$. Тогда множество $I \equiv \{i \in \mathbb{Z} \mid |i| \leqslant na\}$ будет конечным. Положим $S_i \equiv f^{-1}\big[\,](i-1)/n, (i+1)/n[\,\big] \in \mathcal{S}$ и получим, что $\bigcup(S_i \mid i \in I) = T$ и $\omega(f, S_i) < 2/n < \varepsilon$.

Докажем импликацию 2) $\vdash$ 1). По предложению 1 $f \in M(T, \mathcal{S})$. Ясно, что $f \in F_{\mathrm{b}}(T)$. □

Использование покрытийного языка в предложении 1 даёт основу для введения новых классов функций, обладающих хорошими свойствами для любой основы $\mathcal{S}$, в то время как класс измеримых функций обладает этими свойствами только для σ-основы $\mathcal{S}$.

1.3. Постклассические семейства функций

1.3.1. Семейства равномерных функций

Пусть $(T, \mathcal{S})$ — дескриптивное пространство. Функция $f \in F(T)$ называется *равномерной на дескриптивном пространстве* $(T, \mathcal{S})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T, что

$\omega(f,\pi) < \varepsilon$ (см. [5]). Семейство всех равномерных функций на $(T,\mathcal{S})$ обозначим через $\mathrm{U}(T,\mathcal{S})$.

Из следствия предложения 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{S}$ — σ*-аддитивный ансамбль на множестве* T. *Тогда* $\mathrm{U}(T,\mathcal{S}) = \mathrm{M_b}(T,\mathcal{S})$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *ансамбль на множестве* T. *Тогда* $\mathrm{M_b}(T,\mathcal{S}) \subset \mathrm{U}(T,\mathcal{S}) \subset \subset \mathrm{M_b}(T,\mathcal{S}_\sigma)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{M_b}(T,\mathcal{S})$. Тогда $f[T] \subset \,]-a,a[$ для некоторого $a > 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положительное натуральное число n, такое что $2a/n < \varepsilon$. Рассмотрим множества $C_i \equiv f^{-1}\big[\,]a(i-1)/n, a(i+1)/n[\,\big] \in \mathcal{S}$, $|i| \in n$. Ясно, что $\bigcup(C_i \mid |i| \in n) = T$ и $\omega(f,C_i) \leqslant 2a/n < \varepsilon$. Таким образом, $f \in \mathrm{U}(T,\mathcal{S})$.

Второе включение следует из леммы 2 и тривиального включения $\mathrm{U}(T,\mathcal{S}) \subset \subset \mathrm{U}(T,\mathcal{S}_\sigma)$. □

Нам потребуется следующая тонкая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $x, y \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $0 < y < x$. *Тогда*

1) $(x+y)^m - x^m > x^m - (x-y)^m$;
2) $\sqrt[m]{x+y} - \sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{x-y}$.

Доказательство. 1. По биномиальной формуле Ньютона

$$(x+y)^m - x^m = \sum(C_m^k x^{m-k} y^k \mid k \in (m+1)\setminus 1) >$$
$$> \sum\big((-1)^{k+1} C_m^k x^{m-k} y^k \mid k \in (m+1)\setminus 1\big) = x^m - (x-y)^m.$$

2. Обозначим $\sqrt[m]{x}$ через a и $\sqrt[m]{x+y} - \sqrt[m]{x}$ через b. Тогда $b < \sqrt[m]{2x} - a \leqslant \leqslant \sqrt[m]{2^m x} - a = a$. Предположим, что $b \geqslant a - \sqrt[m]{x-y}$, т. е. $0 < a - b \leqslant \sqrt[m]{x-y}$. Из 1) следует, что

$$y = x + y - x = (a+b)^m - a^m > a^m - (a-b)^m \geqslant x - (x-y) = y,$$

что невозможно. Это противоречие доказывает желаемое неравенство. □

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *основа на* T. *Тогда* $\mathrm{U}(T,\mathcal{S})$ *обладает всеми свойствами* $\mathrm{M_b}(T,\mathcal{S})$ *из теоремы* 1.

Доказательство. Обозначим $\mathrm{U}(T,\mathcal{S})$ через $A(T)$. Пусть $f, g \in A(T)$, $\varepsilon > 0$. Возьмём такие положительные числа a и b, что $|f| \leqslant a\mathbf{1}$ и $|g| \leqslant b\mathbf{1}$.

1. Для любого покрытия $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ имеем $\omega(\mathbf{1},\pi) = 0$.

2. Пусть $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует конечное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in S_i$, то

$$|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r|\,|f(s) - f(t)| \leqslant |r|\,\omega(f,\pi).$$

Следовательно, $\omega(rf,\pi) \leqslant |r|\,\omega(f,\pi) < \varepsilon$ и $rf \in A(T)$.

При $r = 0$ имеем $\omega(rf, \pi) = \omega(\mathbf{0}, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \equiv \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$.

3. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leqslant |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ конечно и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку $\mathcal{S}$ мультипликативен, мы заключаем, что $E_k \in \mathcal{S}$. Следовательно,

$$\omega(f+g, \rho) \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Таким образом, $f + g \in A(T)$.

4. Возьмём числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/(2b)$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/(2a)$ и рассмотрим покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$\begin{aligned} |(fg)(s) - (fg)(t)| = |(f(s)g(s) - f(t)g(s)| + |(f(t)g(s) - f(t)g(t)| \leqslant \\ \leqslant |g(s)|\,|f(s) - f(t)| + |f(t)|\,|g(s) - g(t)| \leqslant b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa). \end{aligned}$$

Как и в пункте 3, рассмотрим конечное покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$. Тогда

$$\omega(fg, \rho) \leqslant b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa) < \varepsilon,$$

и следовательно, $fg \in A(T)$.

5. Пусть $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leqslant c\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа c. Для $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/c^2$ найдётся такое покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in S_i$, то

$$\left| \frac{\mathbf{1}}{f}(s) - \frac{\mathbf{1}}{f}(t) \right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)|\,|f(t)|} \leqslant c^2 \omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(\mathbf{1}/f, \pi) \leqslant c^2 \omega(f, \pi) < \varepsilon$. Таким образом, $\mathbf{1}/f \in A(T)$.

6. Согласно принципу Архимеда найдётся $n \in \mathbb{N}$, такое что $a/n < \varepsilon^m/2$. Разделим интервал $[0, a]$ точками $x_k = ak/n$, $k \in n+1$. Тогда $0 = x_0 < \ldots < x_n = a$ и $x_{k+1} - x_k = a/n$.

Возьмём такое $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f, \pi) < a/n$. Рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}\big[[x_k, x_{k+1}]\big]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in n \mid S_i \cap X_k \neq \varnothing\}$ непусто и конечно. Пусть k_i — наименьший элемент K_i. Предположим, что $s \in C_i$ и возьмём точку $t \in S_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < < \omega(f, S_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geqslant -\omega(f, S_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{f(s)} < < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + a/n}$ для всех $s \in S_i$. Отсюда вытекает неравенство

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}}.$$

Если $k_i \geqslant 2$, то, используя лемму 4, получаем

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_{k_i} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{x_{k_i}} - \sqrt[m]{x_{k_i} - \frac{a}{n}} =$$
$$= \sqrt[m]{x_{k_i-1} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2}} < \sqrt[m]{x_{k_i-1}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2} - \frac{a}{n}} =$$
$$= \sqrt[m]{x_{k_i-2} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-3}} < \ldots < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{\frac{2a}{n}} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon.$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_0 + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{x_1} - \sqrt[m]{x_0} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_1 + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_1} = \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_1} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы увидели, что $\omega(\sqrt[m]{f}, \pi) < \varepsilon$.

7. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то по неравенству Биркгофа

$$|(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| \leqslant |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leqslant \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi).$$

Аналогично пункту 3 рассмотрим конечное покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$. Тогда $\omega(f \vee g, \rho) \leqslant \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon$, и мы видим, что $f \vee g \in A(T)$.

Вполне аналогично проверяется, что $f \wedge g \in A(T)$.

8. Пусть $f \in F(T)$, $(f_n \in A(T) \mid n \in N)$ — некоторая сеть и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in N$, такое что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим такое покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

для всех $s, t \in S_i$. Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $f \in A(T)$. □

Применение 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ — ансамбль всех *симметризуемых множеств*. Семейство $S(T, \mathcal{G}) \equiv \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$ всех *симметризуемых функций* совпадает с равномерным замыканием семейства *полунепрерывных функций*

$$\mathrm{SC}(T, \mathcal{G}) \equiv \mathrm{SC}^l_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) + \mathrm{SC}^u_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}),$$

что даёт решение задачи Хаусдорфа—Серпинского [23, 30].

Это семейство сыграло ключевую роль в решении проблемы Рисса—Радона—Фреше характеризации радоновских интегралов как линейных функционалов для произвольного хаусдорфова пространства $(T, \mathcal{G})$ [8, 11, 12].

1.3.2. Семейства распределимых функций

Пусть $(T, \mathcal{S})$ — дескриптивное пространство. Функцию $f \in F(T)$ назовём *распределимой на дескриптивном пространстве* $(T, \mathcal{S})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ (см. также [5]). Семейство всех распределимых функций на $(T, \mathcal{S})$ обозначим через $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$.

Из предложения 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *ансамбль на множестве* T. *Тогда* $\mathrm{D}(T, \mathcal{S}) = \mathrm{M}(T, \mathcal{S}_\sigma)$.

Эта лемма показывает, что понятие распределимой функции использует другой язык по сравнению с классическим прообразным языком, но не порождает новой сущности, отличной от понятия измеримой функции. Однако положение кардинально меняется для квазираспределимых функций, рассматриваемых далее в разделе 3.3 (см. применение 2).

Для семейства $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$ верен аналог теоремы 4, но с более сложным доказательством.

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *основа на* T. *Тогда* $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$ *обладает всеми свойствами* $\mathrm{M}(T, \mathcal{S})$ *из теоремы* 1.

Доказательство. Обозначим $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$ через $A(T)$. Пусть $f, g \in A(T)$, $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$.

1. Для любого покрытия $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ имеем $\omega(\mathbf{1}, \pi) = 0$.

2. Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in S_i$, то

$$|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r|\,|f(s) - f(t)| \leqslant |r|\,\omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leqslant |r|\,\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $rf \in A(T)$.

Для $r = 0$ имеем, что $\omega(rf, \pi) = \omega(\mathbf{0}, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$.

3. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ счётно и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку $\mathcal{S}$ мультипликативно, мы заключаем, что $E_k \in \mathcal{S}$. Если $s, t \in E_k$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leqslant |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Поэтому

$$\omega(f + g, \rho) \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Таким образом, $f + g \in A(T)$.

4. Возьмём такое $m \in \mathbb{N}$, что $1/m < \varepsilon$. Найдутся счётные покрытия $\varkappa_m \equiv \equiv (G_{mi} \in \mathcal{S} \mid i \in I_m)$ и $\lambda_m \equiv (H_{mj} \in \mathcal{S} \mid j \in J_m)$, для которых $\omega(f, \varkappa_m) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_m) < 1/m$.

Определим множества

$$A_k \equiv f^{-1}\big[[-k,k]\big], \quad B_l \equiv g^{-1}\big[[-l,l]\big],$$
$$I_{mk} \equiv \{i \in I_m \mid G_{mi} \cap A_k \neq \varnothing\}, \quad J_{ml} \equiv \{j \in J_m \mid H_{mj} \cap B_l \neq \varnothing\}$$

для всех $k, l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим счётные коллекции $\varkappa_{mk} \equiv (G_{mi} \mid i \in I_{mk})$ и $\lambda_{ml} \equiv (H_{mj} \mid j \in J_{ml})$, покрывающие множества $\operatorname{bod} \varkappa_{mk} = \bigcup(G_i \mid i \in I_{mk}) \supset A_k$ и $\operatorname{bod} \lambda_{ml} = \bigcup(H_j \mid j \in J_{ml}) \supset B_l$ соответственно. Ясно, что $\omega(f, \varkappa_{mk}) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_{ml}) < 1/m$.

Очевидно, что

$$\sup\{|f(t)| \mid t \in \operatorname{bod} \varkappa_{mk}\} \leqslant k + \frac{1}{m} \equiv a_{mk}$$

и

$$\sup\{|g(t)| \mid t \in \operatorname{bod} \lambda_{ml}\} \leqslant l + \frac{1}{m} \equiv b_{ml}.$$

Возьмём натуральные числа $p_{ml} \equiv 2ml + 2$ и $q_{mk} \equiv 2mk + 2$. Для каждой упорядоченной пары $z \equiv (k, l) \in \mathbb{N}^2$ определим множество

$$W_{mz} \equiv I_{mk} \times J_{ml} \times I_{p_{ml}} \times J_{q_{mk}}.$$

Для любого набора $w \equiv (i_1, j_1, i_2, j_2) \in W_{mz}$ рассмотрим множество

$$Q_{mzw} \equiv G_{mi_1} \cap H_{mj_1} \cap G_{p_{ml}i_2} \cap H_{q_{mk}j_2} \in \mathcal{S}.$$

Если $s, t \in Q_{mzw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leqslant |f(t)|\,|g(t) - g(s)| + |g(s)|\,|f(t) - f(s)| \leqslant \frac{a_{mk}}{q_{mk}} + \frac{b_{ml}}{p_{ml}} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{mzw}) \leqslant 1/m$. Определим множество

$$C_m \equiv \bigcup(\{z\} \times W_{mz} \mid z \in \mathbb{N}^2),$$

оно является счётным. Тогда счётная коллекция $\mu_m \equiv (S_{mc} \in \mathcal{S} \mid c \in C_m)$, где $S_{mc} \equiv Q_{mzw}$ для $c \equiv (z, w)$, покрывает множество T, и $\omega(fg, \mu_m) \leqslant 1/m < \varepsilon$.

5. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует счётное покрытие $\pi_m \equiv (S_{mi_m} \in \mathcal{S} \mid i_m \in I_m)$, такое что $\omega(f, \pi_m) < 1/m$. Рассмотрим множества $X_a \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/a\}$ для всех $a \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) = T$.

Возьмём такое $p \in \mathbb{N}$, что $1/p < \varepsilon$. Для каждого $a \in \mathbb{N}$ положим $m_{ap} \equiv 9pa^2$. Тогда $m_{ap} > 2a$ и $4a^2/m_{ap} < 1/2p$.

Рассмотрим множество

$$J_{m_{ap}} \equiv \{i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}} \mid S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \varnothing\}$$

и коллекцию

$$\varkappa_{m_{ap}} \equiv (S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}).$$

Легко убедиться, что $X_a \subset \operatorname{bod} \varkappa_{m_{ap}}$.

Пусть $i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}}$. Возьмём $s', t' \in S_{m_{ap} i_{m_{ap}}}$. Так как $S_{m_{ap} i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \varnothing$, видим, что существуют $s, t \in S_{m_{ap} i_{m_{ap}}} \cap X_a$.

Если $f(s) > 0$, то $f(s) = |f(s)| > 1/a$. Из того, что $|f(s) - f(s')| < 1/m_{ap} < 1/2a$, следует, что $f(s') > f(s) - 1/2a > 1/a - 1/2a = 1/2a > 0$. Поэтому $|f(s')| = f(s') > 1/2a$.

Если $f(s) < 0$, то из $-f(s) = |f(s)| > 1/a$ вытекает, что $f(s') < f(s) + 1/2a < -1/a + 1/2a = -1/2a < 0$. Поэтому $|f(s')| = -f(s') > 1/2a$.

Таким образом, $|f(s')| > 1/2a$. Аналогично $|f(t')| > 1/2a$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(s')} - \frac{1}{f(t')}\right| = \frac{|f(s') - f(t')|}{|f(s')|\,|f(t')|} < \frac{1}{m_{ap}} \cdot 2a \cdot 2a < \frac{1}{2p}.$$

Рассмотрим счётное множество

$$J_p \equiv \bigcup(\{a\} \times J_{m_{ap}} \mid a \in \mathbb{N}).$$

Если $j \in J_p$, то $j = (a, i_{m_{ap}})$ для некоторых $a \in \mathbb{N}$ и $i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}$. Обозначим $S_{m_{ap} i_{m_{ap}}}$ через S_j. Таким образом, мы получаем счётную коллекцию $\rho_p \equiv (S_j \in \mathcal{S} \mid j \in J_p)$, такую что $\omega(1/f, \rho_p) < 1/p$. Поскольку

$$T = \bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) \subset \bigcup\Big(\bigcup(S_{m_{ap} i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}) \mid a \in \mathbb{N}\Big) = (S_j \mid j \in J_p),$$

коллекция ρ_p покрывает множество T.

6. Согласно принципу Архимеда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon^m/2$. Разделим множество $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ точками $x_k = k/n$, $k \in \omega$. Тогда $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ и $x_{k+1} - x_k = 1/n$.

Возьмём такое счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, что $\omega(f, \pi) < 1/n$, и рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}\big[[x_k, x_{k+1}]\big]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in \omega \mid S_i \cap X_k \neq \varnothing\}$ непусто. Это множество имеет единственный наименьший элемент $k_i \in K_i$. Предположим, что $s \in S_i$, и возьмём точку $t \in S_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < \omega(f, S_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geqslant -\omega(f, S_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{f(s)} < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + 1/n}$ для каждого $s \in S_i$. Отсюда следует неравенство $\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + 1/n} - \sqrt[m]{x_{k_i}}$. Если $k_i \geqslant 2$, то пользуясь леммой 4 имеем

$$\begin{aligned}
\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) &< \sqrt[m]{x_{k_i} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{x_{k_i}} - \sqrt[m]{x_{k_i} - \frac{1}{n}} = \\
&= \sqrt[m]{x_{k_i-1} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2}} < \sqrt[m]{x_{k_i-1}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2} - \frac{1}{n}} = \\
&= \sqrt[m]{x_{k_i-2} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-3}} < \ldots < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{\frac{2}{n}} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_0 + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{x_1} - \sqrt[m]{x_0} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_1} = \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_1} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получили, что $\omega(\sqrt[m]{f}, \pi) < \varepsilon$.

7. Возьмём такие счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv \equiv (D_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$, что $\omega(f,\pi) < \varepsilon/2$ и $\omega(g,\varkappa) < \varepsilon/2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i,j) \in K$. Поскольку $\mathcal{S}$ мультипликативен, имеем $E_k \in \mathcal{S}$. Если $s,t \in C_i \cap D_j$, то по неравенству Биркгофа

$$|(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| \leqslant |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leqslant \leqslant |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leqslant \omega(g,\varkappa) + \omega(f,\pi) < \varepsilon.$$

Так как K счётно, заключаем, что $f \vee g \in A(T)$.

Совершенно так же убеждаемся, что $f \wedge g \in A(T)$.

8. Пусть $f \in F(T)$, $(f_n \in A(T) \mid n \in N)$ — некоторая сеть и $f = = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$.

Возьмём такой элемент $m \in N$, что $|f - f_n| < (\varepsilon/3)\mathbf{1}$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, такое что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leqslant \leqslant |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

для всех $s,t \in S_i$. Следовательно, $\omega(f,\pi) < \varepsilon$ и $f \in A(T)$. $\square$

1.3.3. Несводимость некоторых постклассических семейств функций к классическим

Предложение 2. *На $T \equiv [0,1[\subset \mathbb{R}$ существует такая основа $\mathcal{K}$, что*

$$\mathrm{M_b}(T,\mathcal{K}) \subsetneqq \mathrm{U}(T,\mathcal{K}) \subsetneqq \mathrm{M_b}(T,\mathcal{K}_\sigma).$$

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $(T,\mathcal{G})$ из леммы 1, взяв $\mathcal{G} \equiv \{[0,b[\mid 0 < b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}$. Тогда $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G} = \{[a,1[\mid 0 \leqslant a < 1\}$ и

$$\mathcal{K} = \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\} = \{[a,b[\mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\} \cup \{\varnothing\}.$$

Включения справедливы в силу леммы 3. Теперь покажем, что $\mathrm{U}(T,\mathcal{K}) \not\subset \not\subset \mathrm{M_b}(T,\mathcal{K})$.

Рассмотрим функцию $g\colon T \to [0,1]$, определённую в доказательстве леммы 1. Напомним, что $g(t) \equiv 2^{-n}$ для всех $t \in \Delta_n \equiv [2^{-(n+1)}, 2^{-n}[$, $n \in \omega$, и $g(0) \equiv 0$. Там же было показано, что $g \notin \mathrm{M}(T,\mathcal{K})$, поскольку $g^{-1}[\,]0,2[\,] =]0,1[\notin \mathcal{K}$.

Проверим, что $g \in \mathrm{U}(T,\mathcal{K})$. При $\varepsilon > 1$ имеем $\omega(g,\pi_0) = 1 < \varepsilon$ для покрытия $\pi_0 \equiv \{T\}$. Для любого $\varepsilon \in]0,1]$ возьмём такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что $2^{-j_0} < \varepsilon \leqslant 2^{-j_0+1}$. Положим $K_j \equiv \Delta_j \in \mathcal{K}$ для $j \in j_0$ и $K_{j_0} \equiv [0, 2^{-j_0}[\in \mathcal{G} \subset \mathcal{K}$. Следовательно,

$\omega(g, K_j) = 0$ для $j \in j_0$ и $\omega(g, K_{j_0}) = 2^{-j_0}$. Таким образом, $\omega(g, \pi) = 2^{-j_0} < \varepsilon$ для покрытия $\pi \equiv (K_j \mid j \in j_0 + 1)$.

Докажем, наконец, что $\mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma) \not\subset \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$.

Определим множества $\Gamma_n \equiv [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)}[$, $n \in \omega$, и функцию $h\colon T \to [0,1]$, положив $h(t) \equiv 1 - 2^{-2k}$ для $t \in \Gamma_{2k}$, $k \in \omega$, и $h(t) \equiv 0$ в остальных точках. Если $x \geqslant 1$ или $y \leqslant 0$, то $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \varnothing$; если $x < 0 < 1 \leqslant y$, то $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = T$; если $0 \leqslant x < 1 \leqslant y$, то $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] = \bigcup(\Gamma_{2n} \mid n > n_0)$; если $0 \leqslant x < y < 1$, то $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big]$ является конечным объединением $\bigcup(\Gamma_i \mid i \in I)$ или пусто; если $x < 0 < y < 1$, то $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big]$ является счётным объединением $\bigcup(\Gamma_m \mid m \in M)$. Так как $\Gamma_n \in \mathcal{K}$, $n \in \omega$, мы заключаем, что $h^{-1}\big[\,]x,y[\,\big] \in \mathcal{K}_\sigma$ во всех перечисленных выше случаях. Таким образом, $h \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma)$.

Теперь проверим, что $h \notin \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$. Возьмём $\varepsilon \equiv 1/2$ и конечное покрытие $\pi' \equiv (K_j \in \mathcal{K} \mid j \in J)$ множества T. Поскольку непустые элементы ансамбля $\mathcal{K}$ имеют вид $[a, b[$ с $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, найдётся такое $j_1 \in J$, что $K_{j_1} = [a, 1[$. Отсюда следует, что $1 - 2^{-n} \in K_{j_1}$ для всех $n \geqslant n_1 \in \omega$, где $2^{-n_1} \leqslant 1 - a < 2^{-n_1+1}$. Поэтому $\bigcup(\Gamma_n \mid n \geqslant n_1) \subset K_{j_1}$. Следовательно

$$\begin{aligned} \omega(h, \pi') \geqslant \omega(h, K_{j_1}) \geqslant \omega(h, \Gamma_{n_1+1} \cup \Gamma_{n_1+2}) = \\ = \big|h\big(1 - 2^{-(n_1+1)}\big) - h\big(1 - 2^{-(n_1+2)}\big)\big| \geqslant 1 - 2^{-(n_1+1)} \geqslant \frac{1}{2} \equiv \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3. *На $T \equiv [0, 1[\subset \mathbb{R}$ существует такая основа $\mathcal{K}$, что для любой σ-основы $\mathcal{S}$ на T справедливо неравенство $\mathrm{U}(T, \mathcal{K}) \neq \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$.*

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$ и основу $\mathcal{K}$ из предложения 2.

Предположим, что для некоторой σ-основы $\mathcal{S}$ на T справедливо равенство $\mathrm{U}(T, \mathcal{K}) = \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$. По теореме 2 семейство $\mathrm{M}(T, \mathcal{S})$ нормально и $\mathrm{M}(T, \mathcal{S}) = \mathrm{M}\big(T, \big(\operatorname{Coz} \mathrm{M}(T, \mathcal{S})\big)_{\eta\sigma}\big)$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(T, \mathcal{K}) = \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S}) = \mathrm{M_b}(T, (\operatorname{Coz} \mathrm{M}(T, \mathcal{S}))_{\eta\sigma}) = \\ = \mathrm{M_b}(T, (\operatorname{Coz} \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S}))_{\eta\sigma}) = \mathrm{M_b}\big(T, \big(\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{K})\big)_{\eta\sigma}\big). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что $\mathcal{K} \subset \operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$, взяв произвольное $K = G \cap F \in \mathcal{K}$, функцию $f \equiv \chi(K)$ и покрытие $\pi \equiv (P_i \mid i \in 3)$, где $P_0 \equiv K \in \mathcal{K}$, $P_1 \equiv T \setminus G \in \mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ и $P_2 \equiv T \setminus F \in \mathcal{G} \subset \mathcal{K}$, и заметив, что $\omega(f, \pi) = 0$, т. е. $f \in \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$.

Следовательно, $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{K}_{\eta\sigma} \subset (\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{K}))_{\eta\sigma}$ и потому

$$\mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma) \subset \mathrm{M_b}\big(T, \big(\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{K})\big)_{\eta\sigma}\big) = \mathrm{U}(T, \mathcal{K}),$$

что противоречит предложению 2, согласно которому $\mathrm{U}(T, \mathcal{K}) \subsetneqq \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma)$. $\square$

Это утверждение показывает, что, вообще говоря, невозможно описать семейство равномерных функций как семейство ограниченных измеримых функций. Следовательно, класс семейств равномерных функций действительно шире класса семейств ограниченных измеримых функций.

Из лемм 2 и 5 следует, что в случае классического дескриптивного пространства $(T, \mathcal{S})$ с σ-основой $\mathcal{S}$ классические и постклассические семейства совпадают.

Теоремы 1, 4 и 5 и предложение 3 показывают, что переход от классического прообразного языка Бореля—Лебега к постклассическому покрытийному языку значительно расширил возможности дескриптивной теории функций и позволил открыть новый способ для введения хороших постклассических семейств функций на дескриптивных пространствах.

Однако для этих постклассических семейств функций дескриптивные пространства не являются «естественной средой обитания», каковой они были для классического семейства измеримых функций. Поэтому далее мы рассматриваем постклассические семейства равномерных и распределимых функций на естественных для них прескриптивных пространствах.

2. Постклассические семейства функций, присущие прескриптивным пространствам

2.1. Прескриптивные пространства

Множество $\mathfrak{C}$ покрытий $\pi \equiv (A_i \in \mathcal{P}(T) \mid i \in I)$ множества T, содержащее *одночленное покрытие* $(A_i \equiv T \mid i \in \{i\})$, назовём *покрыванием на* T. Пару $(T, \mathfrak{C})$ назовём *прескриптивным пространством* или *пространством с покрыванием*.

Покрывание $\mathfrak{C}$ назовём *φ-покрыванием* [*σ-покрыванием*], если $\mathfrak{C}$ состоит только из конечных [счётных] покрытий.

Покрывание $\mathfrak{C}$ множества T называется *мультипликативным*, если для любых коллекций $\pi \equiv (A_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\rho \equiv (B_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$ коллекция $\pi \wedge \rho \equiv (C_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$, $C_k \equiv A_i \cap B_j$ для каждого $k \equiv (i, j) \in K$, также принадлежит $\mathfrak{C}$.

Любой ансамбль $\mathcal{S}$ на T, содержащий T, порождает *канонические покрывания* $\mathrm{Cov_f}\,\mathcal{S}$ и $\mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}$, состоящие соответственно из всех конечных и всех счётных покрытий $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T. Если $\mathcal{S}$ — основа, то покрывания $\mathrm{Cov_f}\,\mathcal{S}$ и $\mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}$ мультипликативны.

В свою очередь, всякое покрывание $\mathfrak{C}$ порождает *канонический ансамбль* $\mathcal{E}(\mathfrak{C})$, состоящий из $\varnothing$ и всех членов всех коллекций из $\mathfrak{C}$. Ясно, что если $\mathfrak{C}$ мультипликативно, то $\mathcal{E}(\mathfrak{C})$ — основа. Кроме того, $\mathfrak{C}$ порождает *производные ансамбли* $\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}$ и $\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}$, состоящие из всех множеств вида $\mathrm{bod}_J\,\pi \equiv \bigcup(A_j \mid j \in J)$ для соответственно всех конечных и всех счётных множеств $J \subset I$ и всех покрытий $\pi \equiv (A_i \in \mathcal{P}(T) \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$.

Пусть $\pi \equiv (P_i \subset T \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (K_j \subset T \mid j \in J)$ — коллекции подмножеств T. Если для любого $j \in J$ существует такое $i \in I$, что $K_j \subset P_i$, то будем писать $\varkappa \prec \pi$.

Назовём σ-покрывание $\mathfrak{C}$ *насыщенным*, если для любого $\pi \in \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{E}(\mathfrak{C})$ существует такое $\varkappa \in \mathfrak{C}$, что $\varkappa \prec \pi$. Ясно, что для любого ансамбля $\mathcal{S}$ покрывание $\mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}$ является насыщенным, более того, $\mathrm{Cov_c}\,\mathcal{E}(\mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}) = \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}$.

2.2. Семейства равномерных функций на прескриптивном пространстве

Пусть $(T, \mathfrak{C})$ — прескриптивное пространство с φ-покрыванием $\mathfrak{C}$. Функция $f \in F(T)$ называется *равномерной на прескриптивном пространстве* $(T, \mathfrak{C})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\pi \in \mathfrak{C}$ множества T, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ (см. [14]). Множество всех таких функций обозначим через $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$. Легко убедиться, что $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C}) = U_{\mathrm{b}}(T, \mathfrak{C}) \equiv \mathrm{U}(T, \mathfrak{C}) \cap F_{\mathrm{b}}(T)$.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на T семейство $\mathrm{U}(T, \mathrm{Cov_f}\,\mathcal{S})$ было обозначено выше через $\mathrm{U}(T, \mathcal{S})$.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное φ-покрывание на T. Тогда $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$ обладает всеми свойствами $\mathrm{U}(T, \mathcal{S})$ из теоремы 4.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$ через $A(T)$. Пусть $f, g \in \mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$, $\varepsilon > 0$. Возьмём такие положительные числа a и b, что $|f| \leqslant a\mathbf{1}$ и $|g| \leqslant b\mathbf{1}$.

1. Для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$ имеем $\omega(\mathbf{1}, \pi) = 0$.

2. Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то

$$|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r|\,|f(s) - f(t)| \leqslant |r|\,\omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leqslant |r|\,\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $rf \in A(T)$.

При $r = 0$ имеем $\omega(rf, \pi) = \omega(\mathbf{0}, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$.

3. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leqslant |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Следовательно,

$$\omega(f+g, \pi \wedge \varkappa) \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Так как $\mathfrak{C}$ мультипликативно, мы заключаем, что $\pi \wedge \varkappa \in \mathfrak{C}$. Таким образом, $f + g \in A(T)$.

4. Возьмём числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/(2b)$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/(2a)$ и рассмотрим покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$\begin{aligned}|(fg)(s) - (fg)(t)| &= |(f(s)\,g(s) - f(t)\,g(s)| + |(f(t)\,g(s) - f(t)\,g(t)| \leqslant \\ &\leqslant |g(s)|\,|f(s) - f(t)| + |f(t)|\,|g(s) - g(t)| \leqslant b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa).\end{aligned}$$

Тогда

$$\omega(fg, \pi \wedge \varkappa) \leqslant b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa) < \varepsilon,$$

и следовательно, $fg \in A(T)$.

5. Пусть $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leqslant c\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа c. Для $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/c^2$ найдётся такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$. Если $s,t \in C_i$, то

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{f}(s) - \frac{\mathbf{1}}{f}(t)\right| = \frac{|f(s)-f(t)|}{|f(s)|\,|f(t)|} \leqslant c^2\omega(f,\pi).$$

Следовательно, $\omega(\mathbf{1}/f,\pi) \leqslant c^2\omega(f,\pi) < \varepsilon$. Таким образом, $\mathbf{1}/f \in A(T)$.

6. Согласно принципу Архимеда найдётся $n \in \mathbb{N}$, такое что $a/n < \varepsilon^m/2$. Разделим интервал $[0,a]$ точками $x_k = ak/n$, $k \in n+1$. Тогда $0 = x_0 < \ldots < x_n = a$ и $x_{k+1} - x_k = a/n$.

Возьмём такое $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f,\pi) < a/n$. Рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}\big[[x_k, x_{k+1}]\big]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in n \mid C_i \cap X_k \neq \varnothing\}$ непусто и конечно. Пусть k_i — наименьший элемент K_i. Предположим, что $s \in C_i$, и возьмём точку $t \in C_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < \omega(f,C_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geqslant -\omega(f,C_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{f(s)} < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + a/n}$ для всех $s \in C_i$. Отсюда вытекает неравенство $\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + a/n} - \sqrt[m]{x_{k_i}}$. Если $k_i \geqslant 2$, то, используя лемму 4 получаем

$$\begin{aligned}\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) &< \sqrt[m]{x_{k_i} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{x_{k_i}} - \sqrt[m]{x_{k_i} - \frac{a}{n}} = \\ &= \sqrt[m]{x_{k_i-1} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2}} < \sqrt[m]{x_{k_i-1}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2} - \frac{a}{n}} = \\ &= \sqrt[m]{x_{k_i-2} + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-3}} < \ldots < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{\frac{2a}{n}} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) < \sqrt[m]{x_0 + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{x_1} - \sqrt[m]{x_0} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, C_i) < \sqrt[m]{x_1 + \frac{a}{n}} - \sqrt[m]{x_1} = \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_1} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы увидели, что $\omega(\sqrt[m]{f}, \pi) < \varepsilon$.

7. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, такие что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g,\varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s,t \in C_i \cap D_j$, то по неравенству Биркгофа

$$\begin{aligned}|(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| &\leqslant |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leqslant \\ &\leqslant |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leqslant \omega(g,\varkappa) + \omega(f,\pi).\end{aligned}$$

Следовательно,
$$\omega(f \vee g, \pi \wedge \varkappa) \leqslant \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon,$$
и мы видим, что $f \vee g \in A(T)$.

Вполне аналогично проверяется, что $f \wedge g \in A(T)$.

8. Пусть $f \in F(T)$, $(f_n \in A(T) \mid n \in N)$ — некоторая сеть и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in N$, такое что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда
$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$
для всех $s, t \in C_i$. Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $f \in A(T)$. □

Если семейство $A(T) \subset F_{\mathrm{b}}(T)$ обладает свойствами семейства $\mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$ из теоремы 1 или, что то же самое, свойствами семейства $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$ из теоремы 6, то оно называется *ограниченно нормальным* [14]. Как показывается ниже, других ограниченно нормальных семейств, кроме семейств равномерных функций на прескриптивных пространствах с мультипликативными φ-покрываниями, не существует.

2.3. Естественность класса семейств равномерных функций на прескриптивных пространствах

Для функции $f\colon T \to \mathbb{R}$ множество $\operatorname{coz}_n f \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\}$ для $n \in \mathbb{N}$ называется *n-м конуль-множеством функции f*.

Для семейства $A(T) \subset F_{\mathrm{b}}(T)$ рассмотрим φ-покрывание $\mathrm{Cov_f}\, A(T)$ на T, состоящее из всех конечных покрытий $\pi \equiv (C_i \mid i \in I)$ множества T, таких что или $\pi = (T_i \equiv T \mid i \in \{i\})$, или для π существуют конечная коллекция $(f_i \in A(T)_+ \mid i \in I)$ и число $n \in \mathbb{N}$, такие что $C_i = \operatorname{coz} f_i$, а коллекция $(\operatorname{coz}_n f_i \mid i \in I)$ является покрытием T.

Для покрывания $\mathfrak{C}$ на T рассмотрим его *η-оболочку* $\mathfrak{C}_\eta$, состоящую из всех коллекций $\pi \equiv (P_u \in \mathcal{P}(T) \mid u \in U)$, таких что для π существует конечная коллекция $(\gamma_i \in \mathfrak{C} \mid i \in I)$ покрытий $\gamma_i \equiv (C_{im} \mid m \in M_i)$ множества T, такая что $U = \prod(M_i \mid i \in I)$ и $P_u = \bigcap(C_{iu(i)} \mid i \in I)$ для каждого $u \in U$.

Теорема 7. *Пусть $A(T)$ — семейство ограниченных функций на T. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *семейство $A(T)$ является ограниченно нормальным*;
2) $A(T) = \mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$ *для некоторого мультипликативного φ-покрывания* $\mathfrak{C}$;
3) $A(T) = \mathrm{U}(T, (\mathrm{Cov_f}\, A(T))_\eta)$.

Эта теорема, доказанная в [6, 14], показывает естественность класса равномерных функций на прескриптивных пространствах с мультипликативными φ-покрываниями.

2.4. Семейства распределимых функций на прескриптивном пространстве

Пусть $(T, \mathfrak{C})$ — прескриптивное пространство с σ-покрыванием $\mathfrak{C}$. Функцию $f \in F(T)$ будем называть *распределимой на прескриптивном пространстве* $(T, \mathfrak{C})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое счётное покрытие $\pi \in \mathfrak{C}$ множества T, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Множество всех таких функций обозначим через $\mathrm{D}(T, \mathfrak{C})$.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на T семейство $\mathrm{D}(T, \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S})$ было обозначено выше через $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное σ-покрывание на T. Тогда $\mathrm{D}(T, \mathfrak{C})$ обладает всеми свойствами $\mathrm{D}(T, \mathcal{S})$ из теоремы 5, кроме замкнутости относительно умножения и замкнутости относительно деления на функции, не обращающиеся в нуль. Если же покрывание $\mathfrak{C}$ насыщенно, то $\mathrm{D}(T, \mathfrak{C})$ обладает и этими двумя свойствами.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{D}(T, \mathfrak{C})$ через $A(T)$. Пусть $f, g \in \mathrm{D}(T, \mathfrak{C})$, $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$.

1. Для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$ имеем $\omega(\mathbf{1}, \pi) = 0$.

2. Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in S_i$, то

$$|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r|\,|f(s) - f(t)| \leqslant |r|\,\omega(f, \pi).$$

Следовательно,

$$\omega(rf, \pi) \leqslant |r|\,\omega(f, \pi) < \varepsilon$$

и $rf \in A(T)$.

Для $r = 0$ имеем $\omega(rf, \pi) = \omega(\mathbf{0}, \pi) = 0$ для любого покрытия $\pi \in \mathfrak{C}$.

3. Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ счётно и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку $\mathfrak{C}$ мультипликативно, мы заключаем, что $\rho \in \mathfrak{C}$. Если $s, t \in E_k$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leqslant |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Поэтому

$$\omega(f+g, \rho) \leqslant \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Таким образом, $f + g \in A(T)$.

4. Согласно принципу Архимеда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon^m/2$. Разделим множество $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ точками $x_k = k/n$, $k \in \omega$. Тогда $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ и $x_{k+1} - x_k = 1/n$.

Возьмём такое счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < 1/n$, и рассмотрим множества $X_k \equiv f^{-1}\big[[x_k, x_{k+1}]\big]$. Для каждого $i \in I$ множество $K_i \equiv \{k \in \omega \mid S_i \cap X_k \neq \varnothing\}$ непусто. Это множество имеет единственный наименьший элемент $k_i \in K_i$. Предположим, что $s \in S_i$, и возьмём точку $t \in S_i \cap X_{k_i}$. Тогда $f(s) = f(s) - f(t) + f(t) < \omega(f, S_i) + x_{k_i+1}$ и $f(s) \geqslant -\omega(f, S_i) + x_{k_i}$. Следовательно, $\sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{f(s)} < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + 1/n}$ для каждого $s \in S_i$. Отсюда следует неравенство $\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_{k_i+1} + 1/n} - \sqrt[m]{x_{k_i}}$. Если $k_i \geqslant 2$, то, пользуясь леммой 4, имеем

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_{k_i} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i}} < \sqrt[m]{x_{k_i}} - \sqrt[m]{x_{k_i} - \frac{1}{n}} =$$
$$= \sqrt[m]{x_{k_i-1} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2}} < \sqrt[m]{x_{k_i-1}} - \sqrt[m]{x_{k_i-2} - \frac{1}{n}} =$$
$$= \sqrt[m]{x_{k_i-2} + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_{k_i-3}} < \ldots < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{\frac{2}{n}} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon.$$

Если $k_i = 0$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_0 + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_0} = \sqrt[m]{x_1} - \sqrt[m]{x_0} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Если $k_i = 1$, то

$$\omega(\sqrt[m]{f}, S_i) < \sqrt[m]{x_1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[m]{x_1} = \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_1} < \sqrt[m]{x_2} - \sqrt[m]{x_0} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получили, что $\omega(\sqrt[m]{f}, \pi) < \varepsilon$.

5. Существуют такие счётные покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon/2$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon/2$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (E_k \mid k \in K)$, где $K \equiv I \times J$ и $E_k \equiv C_i \cap D_j$ для каждого $k = (i, j) \in K$. Поскольку $\mathfrak{C}$ мультипликативно, имеем $\rho \in \mathfrak{C}$. Если $s, t \in E_k$, то по неравенству Биркгофа

$$|(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| \leqslant |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leqslant \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon.$$

Так как K счётно, заключаем, что $f \vee g \in A(T)$.

Совершенно так же убеждаемся, что $f \wedge g \in A(T)$.

6. Пусть $f \in F(T)$, $(f_n \in A(T) \mid n \in N)$ — некоторая сеть и $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in N)$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмём такой элемент $m \in N$, что $|f - f_n| < (\varepsilon/3)\mathbf{1}$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, такое что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

для всех $s, t \in S_i$. Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и $f \in A(T)$.

7. Пусть далее покрывание $\mathfrak{C}$ насыщенное, т. е. $\mathrm{Cov}_c\,\mathcal{E}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{C}$.

Возьмём такое $m \in \mathbb{N}$, что $1/m < \varepsilon$. Найдутся счётные покрытия $\varkappa_m \equiv \equiv (G_{mi} \mid i \in I_m) \in \mathfrak{C}$ и $\lambda_m \equiv (H_{mj} \mid j \in J_m) \in \mathfrak{C}$, для которых $\omega(f, \varkappa_m) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_m) < 1/m$.

Определим множества

$$A_k \equiv f^{-1}\big[[-k,k]\big], \quad B_l \equiv g^{-1}\big[[-l,l]\big],$$
$$I_{mk} \equiv \{i \in I_m \mid G_{mi} \cap A_k \neq \varnothing\}, \quad J_{ml} \equiv \{j \in J_m \mid H_{mj} \cap B_l \neq \varnothing\}$$

для всех $k, l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим счётные коллекции $\varkappa_{mk} \equiv (G_{mi} \mid i \in I_{mk})$ и $\lambda_{ml} \equiv (H_{mj} \mid j \in J_{ml})$, покрывающие множества $\operatorname{bod} \varkappa_{mk} = \bigcup(G_i \mid i \in I_{mk}) \supset A_k$ и $\operatorname{bod} \lambda_{ml} = \bigcup(H_j \mid j \in J_{ml}) \supset B_l$ соответственно. Ясно, что $\omega(f, \varkappa_{mk}) < 1/m$ и $\omega(g, \lambda_{ml}) < 1/m$.

Очевидно, что

$$\sup\{|f(t)| \mid t \in \operatorname{bod} \varkappa_{mk}\} \leqslant k + \frac{1}{m} \equiv a_{mk}$$

и

$$\sup\{|g(t)| \mid t \in \operatorname{bod} \lambda_{ml}\} \leqslant l + \frac{1}{m} \equiv b_{ml}.$$

Возьмём натуральные числа $p_{ml} \equiv 2ml + 2$ и $q_{mk} \equiv 2mk + 2$. Для каждой упорядоченной пары $z \equiv (k, l) \in \mathbb{N}^2$ определим множество

$$W_{mz} \equiv I_{mk} \times J_{ml} \times I_{p_{ml}} \times J_{q_{mk}}.$$

Для любого набора $w \equiv (i_1, j_1, i_2, j_2) \in W_{mz}$ рассмотрим множество

$$Q_{mzw} \equiv G_{mi_1} \cap H_{mj_1} \cap G_{p_{ml} i_2} \cap H_{q_{mk} j_2} \in \mathcal{E}(\mathfrak{C}).$$

Если $s, t \in Q_{mzw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leqslant |f(t)|\,|g(t) - g(s)| + |g(s)|\,|f(t) - f(s)| \leqslant \frac{a_{mk}}{q_{mk}} + \frac{b_{ml}}{p_{ml}} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{mzw}) \leqslant 1/m$. Определим множество

$$C_m \equiv \bigcup(\{z\} \times W_{mz} \mid z \in \mathbb{N}^2),$$

оно является счётным. Тогда счётная коллекция $\mu_m \equiv (S_{mc} \mid c \in C_m)$, где $S_{mc} \equiv Q_{mzw} \in \mathcal{E}(\mathfrak{C})$ для $c \equiv (z, w)$, покрывает множество T, $\omega(fg, \mu_m) \leqslant \leqslant 1/m < \varepsilon$ и $\mu_m \in \operatorname{Cov_c} \mathcal{E}(\mathfrak{C})$. Ввиду насыщенности покрывания $\mathfrak{C}$ существует такое покрытие $\nu_m \in \mathfrak{C}$, что $\nu_m \prec \mu_m$. Следовательно, $\omega(fg, \nu_m) \leqslant \leqslant \omega(fg, \mu_m) < \varepsilon$.

8. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует счётное покрытие $\pi_m \equiv (S_{mi_m} \mid i_m \in I_m) \in \mathfrak{C}$, такое что $\omega(f, \pi_m) < 1/m$. Рассмотрим множества $X_a \equiv \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/a\}$ для всех $a \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) = T$.

Возьмём такое $p \in \mathbb{N}$, что $1/p < \varepsilon$. Для каждого $a \in \mathbb{N}$ положим $m_{ap} \equiv 9pa^2$. Тогда $m_{ap} > 2a$ и $4a^2/m_{ap} < 1/2p$.

Рассмотрим множество

$$J_{m_{ap}} \equiv \{i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}} \mid S_{m_{ap} i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \varnothing\}$$

и коллекцию

$$\varkappa_{m_{ap}} \equiv (S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}).$$

Легко убедиться, что $X_a \subset \mathrm{bod}\,\varkappa_{m_{ap}}$.

Пусть $i_{m_{ap}} \in I_{m_{ap}}$. Возьмём $s', t' \in S_{m_{ap}i_{m_{ap}}}$. Так как $S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a \neq \varnothing$, видим, что существуют $s, t \in S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \cap X_a$.

Если $f(s) > 0$, то $f(s) = |f(s)| > 1/a$. Из того, что $|f(s) - f(s')| < 1/m_{ap} < < 1/2a$, следует, что $f(s') > f(s) - 1/2a > 1/a - 1/2a = 1/2a > 0$. Поэтому $|f(s')| = f(s') > 1/2a$.

Если $f(s) < 0$, то из $-f(s) = |f(s)| > 1/a$ вытекает, что $f(s') < f(s) + 1/2a < < -1/a + 1/2a = -1/2a < 0$. Поэтому $|f(s')| = -f(s') > 1/2a$.

Таким образом, $|f(s')| > 1/2a$. Аналогично $|f(t')| > 1/2a$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(s')} - \frac{1}{f(t')}\right| = \frac{|f(s') - f(t')|}{|f(s')|\,|f(t')|} < \frac{1}{m_{ap}} \cdot 2a \cdot 2a < \frac{1}{2p}.$$

Рассмотрим счётное множество $J_p \equiv \bigcup(\{a\} \times J_{m_{ap}} \mid a \in \mathbb{N})$. Если $j \in J_p$, то $j = (a, i_{m_{ap}})$ для некоторых $a \in \mathbb{N}$ и $i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}$. Обозначим $S_{m_{ap}i_{m_{ap}}}$ через S_j. Таким образом, мы получаем счётную коллекцию $\rho_p \equiv (S_j \in \mathcal{E}(\mathfrak{C}) \mid j \in J_p)$, такую что $\omega(\mathbf{1}/f, \rho_p) < 1/p$. Поскольку

$$T = \bigcup(X_a \mid a \in \mathbb{N}) \subset \bigcup\Big(\bigcup(S_{m_{ap}i_{m_{ap}}} \mid i_{m_{ap}} \in J_{m_{ap}}) \mid a \in \mathbb{N}\Big) = (S_j \mid j \in J_p),$$

коллекция ρ_p покрывает множество T, и следовательно, $\rho_p \in \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{E}(\mathfrak{C})$. Ввиду насыщенности покрывания $\mathfrak{C}$ существует такое покрытие $\sigma_p \in \mathfrak{C}$, что $\sigma_p \prec \rho_p$. Следовательно, $\omega(\mathbf{1}/f, \sigma_p) \leqslant \omega(\mathbf{1}/f, \rho_p) < 1/p$. $\square$

Теоремы 6 и 8 показывают, что введённые постклассические семейства равномерных и распределимых функций сохраняют все хорошие свойства классических семейств измеримых функций.

3. Классические и постклассические семейства функций, присущие дескриптивным и прескриптивным пространствам с пренебрежимостью

3.1. Пространства с пренебрежимостью

Пусть $(T, \mathcal{S})$ — дескриптивное пространство. Ансамбль $\mathcal{N}$ на T назовём *пренебрежимостью относительно ансамбля* $\mathcal{S}$ или *пренебрежимостью на дескриптивном пространстве* $(T, \mathcal{S})$, если для любого $S \in \mathcal{S} \cup \{T\} \cup \{\varnothing\}$ и для любого $N \in \mathcal{N}_\varphi$ из $S \subset N$ следует $S = \varnothing$. В этом случае тройка $(T, \mathcal{S}, \mathcal{N})$ будет называться *дескриптивным пространством с пренебрежимостью*.

Аддитивный ансамбль $\mathcal{I}$ на T называется *идеальным ансамблем* или *идеалом (множеств)*, если

$$\forall I \in \mathcal{I}\ \forall P \in \mathcal{P}(T)\ (P \subset I \Rightarrow P \in \mathcal{I}).$$

Каждый идеальный ансамбль мультипликативен и содержит $\varnothing$.

Если $\mathcal{I}$ — пренебрежимость на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{I}$ — идеал, то естественно называть $\mathcal{I}$ *идеальной пренебрежимостью*. Заметим, что каждая пренебрежимость $\mathcal{N}$ порождает соответствующую *идеальную пренебрежимость*

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}_\varphi) \equiv \{I \subset T \mid \exists N \in \mathcal{N}_\varphi\ (I \subset N)\}.$$

Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на множестве T и $\mathcal{S} \neq \{\varnothing\}$. Множество $D \subset T$ назовём *плотным относительно ансамбля* $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}$-*плотным*, если $D \cap S \neq \varnothing$ для каждого $S \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$. Ансамбль всех $\mathcal{S}$-плотных множеств $D \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\mathcal{D}(\mathcal{S})$.

Множество $N \subset T$ назовём *нигде не плотным относительно ансамбля* $\mathcal{S}$, если $N \subset T \setminus D$ для некоторого $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$. Ансамбль всех таких множеств обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{S})$. Очевидно, что $\mathcal{N}(\mathcal{S}) = \mathcal{I}(\text{co-}\mathcal{D}(\mathcal{S}))$. Заметим, что в случае основы $\mathcal{S}$ ансамбли $\mathcal{N}(\mathcal{S})$, $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)$ являются идеальными пренебрежимостями.

Пусть $(T, \mathfrak{C})$ — прескриптивное пространство. Ансамбль $\mathcal{N}$ на T назовём *пренебрежимостью относительно покрывания* $\mathfrak{C}$ или *пренебрежимостью на прескриптивном пространстве* $(T, \mathfrak{C})$, если он является пренебрежимостью относительно ансамбля $\mathcal{E}(\mathfrak{C})$. В этом случае тройка $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{N})$ будет называться *прескриптивным пространством с пренебрежимостью*.

3.2. Семейства почти измеримых, почти равномерных и почти распределимых функций

Пространства с пренебрежимостью, и дескриптивные $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, и прескриптивные $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, определяют новые и более обширные семейства функций за счёт нарушения рассмотренных свойств измеримости, распределимости и равномерности на пренебрежимых множествах. Однако при этом, в отличие от предыдущих пунктов, возможна потеря некоторых свойств, перечисленных в теореме 1.

Ансамбль

$$\mathcal{S}_E \equiv \{P \subset T \mid P = S \cap E\ \wedge\ S \in \mathcal{S}\}$$

называется *следом ансамбля* $\mathcal{S}$ *на множестве* $E \subset T$.

Функция $f \in F(T)$ называется *почти измеримой на* $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если существует такое $E \in \text{co-}\mathcal{I}$, что $f|E \in \mathrm{M}(E, \mathcal{S}_E)$. Семейство всех почти измеримых функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $\mathrm{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Ясно, что $\mathrm{M}(T, \mathcal{S}) \subset \mathrm{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Обозначим через $\mathfrak{C}_E$ покрывание на множестве $E \subset T$, состоящее из *следов* $\pi|E \equiv (A_i \cap E \mid i \in I)$ *на множестве* E всех покрытий $\pi \equiv (A_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$.

Если покрывание $\mathfrak{C}$ было мультипликативным или насыщенным, то, очевидно, и $\mathfrak{C}_E$ будет обладать этими свойствами.

Функция $f \in F(T)$ называется *почти равномерной* [*почти распределимой*] *на* $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, если для некоторого множества $E \in$ co-$\mathcal{I}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечное [счётное] покрытие $\pi \in \mathfrak{C}_E$, такое что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Семейство всех почти равномерных [почти распределимых] функций на $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ обозначим через $\mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ $[\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})]$. Ясно, что $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C}) \subset \mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{D}(T, \mathfrak{C}) \subset$ $\subset \mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$.

Если $\mathcal{S}$ — ансамбль на T, то множества $\mathrm{AU}(T, \mathrm{Cov_f}\,\mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{AD}(T, \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначаются также через $\mathrm{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{AD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Легко убедиться, что

$$\mathrm{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{AM}(T, \mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}) = \mathrm{AD}(T, \mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I}).$$

Если $\mathcal{S}$ — σ-аддитивный ансамбль, то

$$\mathrm{AU_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = \mathrm{AM_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = \mathrm{AD_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}).$$

Частные случаи $\mathrm{AD}\big(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\sigma)\big)$ и $\mathrm{AU}\big(T, \mathcal{S}, \mathcal{N}(\mathcal{S}_\varphi)\big)$ рассматривались в [5]. Эти семейства расширяют семейство *почти непрерывных функций*, т. е. непрерывных на плотных открытых множествах, впервые использованное в [22].

Естественно, что для введённых семейств сохраняются все свойства из теорем 1, 6 и 8, кроме замкнутости относительно равномерной сходимости.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{C}$ — мультипликативное покрывание на T и $\mathcal{I}$ — аддитивный ансамбль на T. Тогда семейство $\mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ является решёточной линейной алгеброй над $\mathbb{R}$ с мультипликативной и порядковой единицей $\mathbf{1}$, замкнутой относительно деления на функции, отделённые константой от нуля, а семейство $\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ является решёточным линейным пространством над $\mathbb{R}$ с порядковой единицей $\mathbf{1}$.*

Если же покрывание $\mathfrak{C}$ является насыщенным, то семейство $\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ замкнуто относительно умножения и деления на функции, не обращающиеся в нуль, и поэтому семейство $\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ тоже является решёточной линейной алгеброй над $\mathbb{R}$ с мультипликативной и порядковой единицей $\mathbf{1}$.

Доказательство. Рассмотрим случай семейства $\mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Во-первых, прямо из определения следует, что $\mathbf{1} \in \mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$.

Пусть $f, g \in \mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Тогда $f|D \in \mathrm{U}(D, \mathfrak{C}_D)$ и $g|E \in \mathrm{U}(E, \mathfrak{C}_E)$ для некоторых $D, E \in$ co-$\mathcal{I}$. Из аддитивности $\mathcal{I}$ следует мультипликативность co-$\mathcal{I}$. Следовательно, $H \equiv D \cap E \in$ co-$\mathcal{I}$. Тогда $f|H \in \mathrm{U}(H, \mathfrak{C}_H)$ и $g|H \in \mathrm{U}(H, \mathfrak{C}_H)$. По теореме 6 функции $rf|H$ (для $r \in \mathbb{R}$), $(f+g)|H$, $(fg)|H$, $(f \vee g)|H$, $(f \wedge g)|H$ принадлежат $\mathrm{U}(H, \mathcal{S}_H)$. Следовательно, функции rf, $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$ принадлежат $\mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$.

Пусть $f \in \mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ и $\mathbf{1}/f \in F_\mathrm{b}(T)$. Тогда существует $D \in$ co-$\mathcal{I}$, такое что $f|D \in \mathrm{U}(D, \mathfrak{C}_D)$. По теореме 6 $(\mathbf{1}/f)|D \in \mathrm{U}(D, \mathcal{S}_D)$, откуда получаем, что $\mathbf{1}/f \in \mathrm{AU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Для семейства $\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ аналогичные рассуждения проводятся с использованием теоремы 8. $\square$

С использованием теоремы 1 вполне аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть* $\mathcal{S}$ — σ*-основа на* T *и* $\mathcal{I}$ — *аддитивный ансамбль на* T. *Тогда семейство* $\mathrm{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ *является решёточной линейной алгеброй над* $\mathbb{R}$ *с порядковой и мультипликативной единицей* $\mathbf{1}$, *замкнутой относительно деления на функции, не обращающиеся в нуль.*

Отсутствие в предложениях 4 и 5, в отличие от теорем 1, 6 и 8, свойства равномерной замкнутости приводит к следующим определениям.

3.3. Семейства квазиизмеримых, квазиравномерных и квазираспределимых функций

3.3.1. Определения и основные свойства

Пусть $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ — дескриптивное пространство с пренебрежимостью. Функцию $f \in F(T)$ назовём *квазиизмеримой на* $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и $g \in \mathrm{M}(E, \mathcal{S}_E)$, что $|f|E - g| < \varepsilon \mathbf{1}|E$. Семейство всех квазиизмеримых функций на $(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначим через $\mathrm{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Непосредственно из определений следует, что $\mathrm{AM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Пусть $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ — прескриптивное пространство с пренебрежимостью. Функцию $f \in F(T)$ назовём *квазиравномерной* [*квазираспределимой*] *на* $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $E \in \text{co-}\mathcal{I}$ и конечное [счётное] покрытие $\pi \in \mathfrak{C}_E$ множества E, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Семейство всех квазиравномерных [квазираспределимых] функций на $(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ обозначим через $\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ [$\mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$]. Ясно, что $\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Непосредственно из определений следует, что $\mathrm{AU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{AD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Если $\mathcal{S}$ — ансамбль на T, то семейства $\mathrm{QU}(T, \mathrm{Cov_f}\, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{QD}(T, \mathrm{Cov_c}\, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ обозначаются также через $\mathrm{QU}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

Переход от «почти» к «квази» позволил обрести свойство равномерной замкнутости, имевшееся в теоремах 1, 6 и 8, за счёт частичной потери свойств умножения и деления.

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{C}$ — *мультипликативное покрывание на* T *и* $\mathcal{I}$ — *аддитивный ансамбль на* T. *Тогда семейства* $\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, $\mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ *и* $\mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ *являются решёточными линейными пространствами над* $\mathbb{R}$ *с порядковой единицей* $\mathbf{1}$, *замкнутыми относительно деления на функции, отделённые константой от нуля, и равномерной сходимости сетей. Кроме того, семейства* $\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ *и* $\mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ *замкнуты относительно умножения.*

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай $\mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Положим $A(T) \equiv \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Взяв $D \in \mathcal{I}$ и одночленное покрытие $(D_i \equiv D \mid i \in \{i\})$ множества $D \subset T$, видим, что $\mathbf{1} \in A(T)$.

Пусть $f, g \in A(T)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют $D_n, E_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и счётные покрытия $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$ и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \mid j \in J_n) \in \mathfrak{C}_{E_n}$, такие что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$.

Для каждого $r \in \mathbb{R}$ положим $p(r,n) \equiv \min\{l \in \mathbb{N} \mid |r|/l < 1/n\}$ и $\pi_n \equiv \varkappa_{p(r,n)}$. Тогда $\omega(rf, \pi_n) < 1/n$, и следовательно, $rf \in A(T)$.

Заметим, что $D_{2n} \cap E_{2n} \in \text{co-}\mathfrak{I}$, и рассмотрим счётную коллекцию

$$\nu_n \equiv (G_{2n,i} \cap H_{2n,j} \mid (i,j) \in I_{2n} \times J_{2n}) \in \mathfrak{C}_{D_n \cap C_n}.$$

Для неё

$$\omega(f+g, \nu_n) \leqslant \omega(f, \nu_n) + \omega(g, \nu_n) < \frac{1}{n}.$$

Поэтому $f + g \in A(T)$.

Если $t, s \in G_{2n,i} \cap H_{2n,j}$, то

$$|f(t) \vee g(t) - f(s) \vee g(s)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(t) \vee g(t) - f(t) \vee g(s)| + |f(t) \vee g(s) - f(s) \vee g(s)| \leqslant |g(t) - g(s)| + |f(t) - f(s)| < \frac{1}{n},$$

и следовательно, $\omega(f \vee g, \nu_n) < 1/n$. Отсюда вытекает, что $f \vee g \in A(T)$. Аналогично $f \wedge g \in A(T)$.

Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_q \mid q \in N)$ для некоторой сети $(f_q \in A(T) \mid q \in N)$. Возьмём такое $m \in N$, что $|f(t) - f_q(t)| < 1/(3n)$ для всех $t \in T$ и $q \geqslant m$. Для функции $h \equiv f_m$ существуют $V_n \in \text{co-}\mathfrak{I}$ и коллекция $\mu_n \equiv \equiv (S_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{V_n}$, такие что $\omega(h, \mu_n) < 1/(3n)$. Тогда

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |f(t) - h(t)| + |h(t) - h(s)| + |h(s) - f(s)| < \frac{1}{n}$$

для всех $s, t \in S_{ni}$. Поэтому $\omega(f, \mu_n) < 1/n$, и следовательно, $f \in A(T)$.

Предположим, что $f \in A(T)$, $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leqslant c\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа c. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $D \in \text{co-}\mathfrak{I}$ и счётное покрытие $\pi \equiv (S_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}_{D_n}$, такие что $\omega(f, \pi) < \varepsilon/c^2$. Если $s, t \in S_i$, то

$$\left| \frac{\mathbf{1}}{f}(s) - \frac{\mathbf{1}}{f}(t) \right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)|\,|f(t)|} \leqslant c^2 \omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(\mathbf{1}/f, \pi) \leqslant c^2 \omega(f, \pi) < \varepsilon$. Таким образом, $\mathbf{1}/f \in A(T)$.

2. В случае $\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathfrak{I})$ рассуждения аналогичны.

3. Пусть $f, g \in \mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathfrak{I})$. Возьмём положительные числа c и d, такие что $|f| \leqslant c\mathbf{1}$ и $|g| \leqslant d\mathbf{1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $(c+d)/n < \varepsilon/2$, и такие $D_n, E_n \in \text{co-}\mathfrak{I}$ и счётные покрытия $\varkappa_n \equiv \equiv (G_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$ и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \mid j \in J_n) \in \mathfrak{C}_{E_n}$, что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$.

Рассмотрим множество $F_n \equiv D_n \cap E_n \in \text{co-}\mathfrak{I}$ и счётное множество $W_n \equiv I_n \times J_n$. Для каждой пары $w \equiv (i,j) \in W_n$ рассмотрим множество $Q_{nw} \equiv G_{ni} \cap H_{nj} \subset F_n$. Поскольку

$$F_n \equiv D_n \cap E_n = \bigcup (G_{ni} \mid i \in I_n) \cap \bigcup (H_{nj} \mid j \in J_n) =$$
$$= \bigcup (G_{ni} \cap H_{nj} \mid (i,j) \in I_n \times J_n) = \bigcup (Q_{nw} \mid w \in W_n),$$

счётная коллекция $\mu_n \equiv (Q_{nw} \mid w \in W_n)$ является покрытием множества F_n. Из мультипликативности покрывания $\mathfrak{C}_{F_n}$ следует, что

$$\mu_n = \varkappa_n|E_n \wedge \lambda_n|D_n = \varkappa_n|F_n \wedge \lambda_n|F_n \in \mathfrak{C}_{F_n}.$$

Если $s, t \in Q_{nw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leqslant |f(t)|\,|g(t) - g(s)| + |g(s)|\,|f(t) - f(s)| \leqslant \frac{c}{n} + \frac{d}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{nw}) \leqslant \varepsilon/2$. Тогда $\omega(fg, \mu_n) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$. Таким образом, $fg \in \mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathfrak{I})$.

4. Пусть $f, g \in \mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathfrak{I})$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$, и существуют такие $D_n, E_n \in$ co-$\mathfrak{I}$ и конечные покрытия $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$ и $\lambda_n \equiv (H_{nj} \mid j \in J_n) \in \mathfrak{C}_{E_n}$, что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$ и $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$.

Из ограниченности равномерных функций $f|D_n$ и $f|E_n$ следует, что можно определить числа $a_n \equiv \sup\{|f(t)| \mid t \in D_n\}$ и $b_n \equiv \sup\{|g(t)| \mid t \in E_n\}$. По принципу Архимеда существуют $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, такие что $p_n > 2nb_n$ и $q_n > 2na_n$. Рассмотрим множество

$$F_n \equiv D_n \cap E_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n} \in \text{co-}\mathfrak{I}$$

и конечное множество

$$W_n \equiv I_n \times J_n \times I_{p_n} \times J_{q_n}.$$

Для любого набора $w \equiv (i_1, j_1, i_2, j_2) \in W_n$ рассмотрим множество

$$Q_{nw} \equiv G_{ni_1} \cap H_{nj_1} \cap G_{p_n i_2} \cap H_{q_n j_2} \subset F_n.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} F_n &\equiv D_n \cap E_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n} = \\ &= \bigcup(G_{ni_1} \mid i_1 \in I_n) \cap \bigcup(H_{nj_1} \mid j_1 \in J_n) \cap \\ &\cap \bigcup(G_{p_n i_2} \mid i_2 \in I_{p_n}) \cap \bigcup(H_{q_n j_2} \mid j_2 \in J_{q_n}) = \\ &= \bigcup(G_{ni_1} \cap H_{nj_1} \cap G_{p_n i_2} \cap H_{q_n j_2} \mid (i_1, j_1, i_2, j_2) \in I_n \times J_n \times I_{p_n} \times J_{q_n}) = \\ &= \bigcup(Q_{nw} \mid w \in W_n), \end{aligned}$$

конечная коллекция $\mu_n \equiv (Q_{nw} \mid w \in W_n)$ является покрытием множества F_n. Из мультипликативности покрывания $\mathfrak{C}_{F_n}$ следует, что

$$\begin{aligned} \mu_n &= \varkappa_n|(E_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n}) \wedge \lambda_n|(D_n \cap D_{p_n} \cap E_{q_n}) \wedge \\ &\wedge \varkappa_{p_n}|(D_n \cap E_n \cap E_{q_n}) \wedge \lambda_{q_n}|(D_n \cap E_n \cap D_{p_n}) = \\ &= \varkappa_n|F_n \wedge \lambda_n|F_n \wedge \varkappa_{p_n}|F_n \wedge \lambda_{q_n}|F_n \in \mathfrak{C}_{F_n}. \end{aligned}$$

Если $s, t \in Q_{nw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leqslant |f(t)|\,|g(t) - g(s)| + |g(s)|\,|f(t) - f(s)| \leqslant \frac{a_n}{q_n} + \frac{b_n}{p_n} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $\omega(fg, Q_{nw}) \leqslant 1/n$. Тогда $\omega(fg, \mu_n) \leqslant 1/n < \varepsilon$. Таким образом, $fg \in \mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. $\square$

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{S}$ — σ-основа на T и $\mathcal{I}$ — аддитивный ансамбль на T. Тогда семейство $\mathrm{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ является решёточным линейным пространством над $\mathbb{R}$ с порядковой единицей $\mathbf{1}$, замкнутым относительно деления на функции, отделённые константой от нуля, и равномерной сходимости сетей. При этом его подсемейство $\mathrm{QM_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ замкнуто относительно умножения.*

Доказательство. 1. Поскольку $\mathbf{0}|D, \mathbf{1}|D \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$ для любого $D \subset T$, имеем, что $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in B(T) \equiv \mathrm{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$.

2. Пусть $f \in B(T)$, $\varepsilon > 0$ и $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда найдутся $D \in$ co-$\mathcal{I}$ и $g \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$, такие что $|f|D - g| < (\varepsilon/|r|)\mathbf{1}|D$. Из $rg \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$ следует, что $|(rf)|D - (rg)| < \varepsilon\mathbf{1}|D$, т. е. $rf \in B(T)$.

3. Для $f_1, f_2 \in B(T)$ и $\varepsilon > 0$ возьмём $D_1, D_2 \in$ co-$\mathcal{I}$, $g_1 \in \mathrm{M}(D_1, \mathcal{S}_{D_1})$ и $g_2 \in \mathrm{M}(D_2, \mathcal{S}_{D_2})$, такие что $|f_1|D_1 - g_1| < (\varepsilon/2)\mathbf{1}|D_1$ и $|f_2|D_2 - g_2| < (\varepsilon/2)\mathbf{1}|D_2$. Рассмотрим множество $D \equiv D_1 \cap D_2 \in$ co-$\mathcal{I}$ и функции $f \equiv (f_1 + f_2)|D$, $g \equiv (g_1 + g_2)|D$, $\tilde{f} \equiv (f_1 \vee f_2)|D$ и $\tilde{g} \equiv (g_1 \vee g_2)|D$. Поскольку $g_1|D, g_2|D \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$, из теоремы 1 следует, что $g, \tilde{g} \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$. Тогда из того, что

$$|f - g| \leqslant |f_1|D - g_1|D| + |f_2|D - g_2|D| < \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{1}|D + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{1}|D = \varepsilon\mathbf{1}|D,$$

следует, что $f \in B(T)$. Из неравенства Биркгофа следует, что

$$|\tilde{f} - \tilde{g}| \leqslant |(f_1 \vee f_2)|D - (f_1 \vee g_2)|D| + |(f_1 \vee g_2)|D - (g_1 \vee g_2)|D| \leqslant$$
$$\leqslant |f_2|D - g_2|D| + |f_1|D - g_1|D| < \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{1}|D + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{1}|D = \varepsilon\mathbf{1}|D,$$

и мы заключаем, что $\tilde{f} \in B(T)$. Так же доказываем и для $f_1 \wedge f_2$.

4. Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{u-lim}(f_q \mid q \in N)$ для некоторой сети $(f_q \in B(T) \mid q \in N)$. Возьмём такое $m \in N$, что $|f(t) - f_q(t)| < \varepsilon/2$ для всех $t \in T$ и $q \geqslant m$. Пусть $D \in$ co-$\mathcal{I}$ и $g \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$ таковы, что $|f_q|D - g| < (\varepsilon/2)\mathbf{1}|D$. Тогда

$$|f|D - g| \leqslant |f|D - f_q|D| + |f_q|D - g| < \varepsilon\mathbf{1}|D.$$

Таким образом, $f \in B(T)$.

5. Пусть $f \in B(T)$, $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leqslant c\mathbf{1}$ для некоторого положительного числа c. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\beta \equiv \big(\varepsilon/(2c^2)\big) \wedge (1/2c)$. Существуют $D \in$ co-$\mathcal{I}$ и $g \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$, такие что $|f|D - g| < \beta\mathbf{1}|D$. Следовательно, $|g| > (1/c - \beta)\mathbf{1}|D$. Из того, что

$$\left|\frac{1}{f}\Big|D - \frac{1}{g}\right| = \frac{|f|D - g|}{|f|D|\,|g|} < \left(\frac{c\beta}{1/c - \beta}\right)\mathbf{1}|D \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2 - 2c\beta}\right)\mathbf{1}|D \leqslant \varepsilon\mathbf{1}|D,$$

получаем, что $1/f \in B(T)$.

6. Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{QM_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ и $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $c > 0$, что $|f_1| \leqslant c\mathbf{1}$ и $|f_2| \leqslant c\mathbf{1}$. Положим $\beta \equiv (\varepsilon/3c) \wedge (\sqrt{\varepsilon}/2)$. Существуют такие $D_1, D_2 \in$ co-$\mathcal{I}$,

$g_1 \in \mathrm{M}(D_1, \mathcal{S}_{D_1})$ и $g_2 \in \mathrm{M}(D_2, \mathcal{S}_{D_2})$, что $|f_1|D_1 - g_1| < \beta\mathbf{1}|D_1$ и $|f_2|D_2 - g_2| < \beta\mathbf{1}|D_2$. Рассмотрим множество $D \equiv D_1 \cap D_2 \in$ co-$\mathcal{J}$ и функции $f \equiv (f_1 f_2)|D$ и $g \equiv (g_1 g_2)|D$. Поскольку $g_1|D, g_2|D \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$, по теореме 1 имеем, что $g \in \mathrm{M}(D, \mathcal{S}_D)$. Очевидно, что $|g_2| < (c+\beta)\mathbf{1}|D$. Тогда из того, что

$$|f-g| \leqslant |(f_1 f_2)|D - (f_1 g_2)|D| + |(f_1 g_2)|D - (g_1 g_2)|D| < \\ < c|f_2|D - g_2|D| + (c+\beta)|f_2|D - g_2|D| < (2c\beta + \beta^2)\mathbf{1}|D \leqslant \left(\frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}|D < \varepsilon\mathbf{1}|D,$$

следует, что $f \in \mathrm{QM_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$. □

Остаются открытыми вопросы о том, являются ли семейства $\mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{J})$ и $\mathrm{QM}(T, \mathcal{S}, \mathcal{J})$ кольцами с делением, т. е. замкнуты ли они относительно умножения и деления. Следующее предложение является модульным вариантом обобщения теоремы 9 для квазираспределимых функций.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{C}$ — насыщенное мультипликативное покрывание на T и $\mathcal{J}$ — аддитивный ансамбль на T. Тогда для любых $f \in \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{J})$ и $g \in \mathrm{AD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{J})$ имеем $fg \in \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{J})$.*

Доказательство. Возьмём такое $E \in$ co-$\mathcal{J}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует счётное покрытие $\lambda_n \equiv (H_{nj} \mid j \in J_n) \in \mathfrak{C}_E$, такое что $\omega(g, \lambda_n) < 1/n$. Пусть b — такое положительное число, что $|g| \leqslant b\mathbf{1}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем какое-нибудь $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $(b+1)/n < \varepsilon$. Найдутся $D_n \in$ co-$\mathcal{J}$ и счётное покрытие $\varkappa_n \equiv (G_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$, такие что $\omega(f, \varkappa_n) < 1/n$.

Для всех $k \in \mathbb{N}$ определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}\big[[-k,k]\big] \cap D_n$ и $I_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid G_{ni} \cap A_{nk} \neq \varnothing\}$. Рассмотрим счётные коллекции $\varkappa_{nk} \equiv (G_{ni} \mid i \in I_{nk})$, покрывающие множества $\operatorname{bod}\varkappa_{nk} \equiv \bigcup(G_{ni} \mid i \in I_{nk}) \supset A_{nk}$. Ясно, что $\omega(f, \varkappa_{nk}) < 1/n$. Также ясно, что $\sup\{|f(t)| \mid t \in \operatorname{bod}\varkappa_{nk}\} \leqslant k + 1/n \equiv a_{nk}$. Возьмём натуральные числа $q_{nk} \equiv 2nk + 2$.

Рассмотрим множество $F_n \equiv D_n \cap E \in \mathcal{J}$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим счётное множество $W_{nk} \equiv I_{nk} \times J_{q_{nk}}$. Для любой пары $w \equiv (i,j) \in W_{nk}$ рассмотрим множество $Q_{nkw} \equiv G_{ni} \cap H_{q_{nk}j} \in \mathcal{E}(\mathfrak{C}_{F_n})$. Положим $C_n \equiv \bigcup(\{k\} \times W_{nk} \mid k \in \mathbb{N})$. Поскольку

$$\begin{aligned} F_n \supset \bigcup(Q_{nkw} \mid (k,w) \in C_n) &= \bigcup\Big(\bigcup(Q_{nkw} \mid w \in W_{nk}) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big) = \\ &= \bigcup\Big(\bigcup(G_{ni} \cap H_{q_{nk}j} \mid (i,j) \in I_{nk} \times J_{q_{nk}}) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big) = \\ &= \bigcup\Big(\bigcup(G_{ni} \mid i \in I_{nk}) \cap \bigcup(H_{q_{nk}j} \mid j \in J_{q_{nk}}) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big) \supset \\ &\supset \bigcup(A_{nk} \cap E \mid k \in \mathbb{N}) = \bigcup(A_{nk} \mid k \in \mathbb{N}) \cap E = D_n \cap E \equiv F_n, \end{aligned}$$

счётная коллекция $\mu_n \equiv (S_{nc} \mid c \in C_n)$, где $S_{nc} \equiv Q_{nkw}$ для $c \equiv (k,w)$, является покрытием множества F_n и $\mu_n \in \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{E}(\mathfrak{C}_{F_n})$. Ввиду насыщенности покрывания $\mathfrak{C}_{F_n}$ существует такое покрытие $\nu_n \in \mathfrak{C}_{F_n}$, что $\nu_n \prec \mu_n$.

Если $s, t \in Q_{nkw}$, то

$$|(fg)(t) - (fg)(s)| \leqslant |f(t)|\,|g(t) - g(s)| + |g(s)|\,|f(t) - f(s)| \leqslant \\ \leqslant \frac{a_{nk}}{q_{nk}} + \frac{b}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{b}{n} < \frac{b+1}{n}.$$

Поэтому $\omega(fg, Q_{nzw}) \leqslant (b+1)/n$. Следовательно, $\omega(fg, \nu_n) \leqslant \omega(fg, \mu_n) \leqslant \leqslant (b+1)/n < \varepsilon$. Таким образом, $fg \in \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. □

Применение 2. Постклассические семейства $\mathrm{QD}\big(T, \mathcal{G}, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ и $\mathrm{QD}\big(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{N}(\mathcal{G}^0)\big)$, где $\mathcal{G}^0 \equiv \mathrm{Coz}\, C(T, \mathcal{G})$, позволили решить *задачи Файна—Гиллмана—Ламбека* о функциональном описании равномерного пополнения классического модуля частных и рационально полного модуля частных модуля непрерывных функций над кольцом ограниченных непрерывных функций на произвольном тихоновском пространстве [1, 5], что полностью оправдывает рассмотрение прескриптивных пространств с σ-покрываниями.

Кроме того, семейства $\mathrm{QD_b}\big(T, \mathcal{G}, \mathcal{N}(\mathcal{G})\big)$ и $\mathrm{QD_b}\big(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{N}(\mathcal{G}^0)\big)$ позволили решить *задачу Накано—Шимогаки* о функциональном описании дедекиндова пополнения и задачу о функциональном описании канторова пополнения решёточного линейного пространства ограниченных непрерывных функций на произвольном тихоновском пространстве [1, 4, 5]. Для узкого класса бэровских пространств эти задачи решались с помощью классического семейства (измеримых) *функций со свойством Бэра*.

3.3.2. Сводимость некоторых семейств ограниченных квазираспределимых и квазиравномерных функций к семействам равномерных функций

Замечательно, что семейства $\mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ и $\mathrm{QU_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ могут быть представлены как семейства функций, равномерных относительно некоторых производных основ.

Множество $X \subset T$ назовём *множеством со свойством Стоуна относительно ансамбля* $\mathcal{S}$ *и идеала* $\mathcal{I}$, если $X = S \cup N$ для некоторых $S \in \mathcal{S}$ и $N \in \mathcal{I}$. Ансамбль всех таких множеств обозначим через $\mathcal{SP}(\mathcal{S}, \mathcal{I})$. Частный случай, когда $\mathcal{S} = \mathcal{G}$, $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и $\mathcal{I} = \mathcal{N}(\mathcal{G})$, рассматривался М. Стоуном в [31].

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{C}$ — *покрывание на* T, $\mathcal{I}$ — *идеальный ансамбль на* T *и* $]x, y[\, \subset \mathbb{R}$. *Если* $f \in \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, *то* $f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] \in \big(\mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\, \mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)_\sigma$. *Если* $f \in \in \mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$, *то* $f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] \in \big(\mathcal{SP}(\mathrm{Bod_f}\, \mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)_\sigma$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{QD}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и счётное покрытие $\pi_n \equiv (S_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$, что $\omega(f, \pi_n) < 1/n$. Рассмотрим множества

$$X \equiv f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big], \quad X_n \equiv f^{-1}\left[\left[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}\right]\right],$$

$$J_n = \{i \in I_n \mid S_{ni} \cap X_n \neq \varnothing\}, \quad G_n \equiv \bigcup(S_{ni} \mid i \in J_n).$$

Ясно, что $X_n \cap D_n \subset G_n$. Из $N_n \equiv X \setminus D_n \subset T \setminus D_n \in \mathcal{I}$ следует, что $N_n \in \mathcal{I}$. Пусть $s \in G_n$. Тогда найдутся $i \in J_n$ и $t \in T$, такие что $s \in S_{ni}$ и $t \in S_{ni} \cap X_n$. Поэтому из $x \leqslant f(t) - 1/n < f(s) < f(t) + 1/n \leqslant y$ вытекает, что $G_n \subset X$. Следовательно,

$$X = \bigcup(X_n \mid n \in \mathbb{N}) = \\ = \bigcup((X_n \cap D_n) \cup (X_n \setminus D_n) \mid n \in \mathbb{N}) \subset \bigcup(G_n \cup N_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset X$$

влечёт

$$X = \bigcup(G_n \cup N_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \big(\mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)_\sigma.$$

Доказательство для $f \in \mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ проводится аналогично. □

Следствие. *Пусть $\mathfrak{C}$ — покрывание на T, $\mathcal{I}$ — идеальный ансамбль на T. Тогда*

$$\mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{M}\big(T, \big(\mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)_\sigma\big) = \mathrm{D}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)$$

и

$$\mathrm{QU}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{M}\big(T, \big(\mathcal{SP}(\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)_\sigma\big) = \mathrm{D}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big).$$

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{C}$ — насыщенное покрывание на T и $\mathcal{I}$ — идеальный ансамбль на T. Тогда*

$$\mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) = \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)$$

и

$$\mathrm{QU_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) = \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$ и $|f| \leqslant z\mathbf{1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon$ и существуют множество $D_n \in \text{co-}\mathcal{I}$ и его счётное покрытие $\pi_n \equiv (R_{ni} \mid i \in I_n) \in \mathfrak{C}_{D_n}$, такие что $\omega(f, \pi_n) < 1/n < \varepsilon$. Пусть $k_n \in \mathbb{N}$ таково, что $k_n > 6nz$. Рассмотрим точки $x_{kn} \equiv -z + k/(3n) \in \mathbb{R}$ для всех $k \in k_n$. Тогда $\bigcup([x_{nk}, x_{n,k+1}] \mid k \in k_n) \supset [-z, z]$. Определим множества $A_{nk} \equiv f^{-1}\big[[x_{nk}, x_{n,k+1}]\big]$, $J_{nk} \equiv \{i \in I_n \mid R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \varnothing\}$, $E_{nk} \equiv \bigcup(R_{3n,i} \mid i \in J_{nk}) \in \mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}$ и $N_{nk} \equiv A_{nk} \setminus D_n$. Так как $\mathcal{I}$ — идеал и $N_{nk} \subset T \setminus D_n \in \mathcal{I}$, имеем, что $N_{nk} \in \mathcal{I}$. Поэтому $S_{nk} \equiv E_{nk} \cup N_{nk} \in \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Кроме того, мы видим, что коллекция $\varkappa_n \equiv (S_{nk} \mid k \in k_n)$ является конечным покрытием T.

Пусть $s, t \in S_{nk}$. Если $s, t \in E_{nk}$, то $s \in R_{3n,i}$ и $t \in R_{3n,j}$ для некоторых i и j, таких что $X \equiv R_{3n,i} \cap A_{nk} \neq \varnothing$ и $Y \equiv R_{3n,j} \cap A_{nk} \neq \varnothing$. Пусть $s_i \in X$ и $s_j \in Y$. Тогда имеем, что

$$|f(s) - f(t)| \leqslant |f(s) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(t)| < \frac{1}{n}.$$

Если $s \in E_{nk}$ и $t \in N_{nk}$, то из $s \in R_{3n,i}$ вытекает, что

$$|f(s) - f(t)| \leqslant |f(s) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(t)| < \frac{2}{3n}.$$

Наконец, если $s, t \in N_{nk}$, то

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{3n}.$$

Таким образом, $\omega(f, S_{nk}) < 1/n < \varepsilon$. Это означает, что $f \in \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I})\big)$.

Пусть $f \in \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\varkappa \equiv (X_i \in \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I}) \mid i \in I)$ множества T, что $\omega(f, X_i) < \varepsilon/2$. По определению $X_i = S_i \cup N_i$, где $S_i \in \mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}$ и $N_i \in \mathcal{I}$. Рассмотрим множества $N \equiv \bigcup(N_i \mid i \in I) \in \mathcal{I}$ и $D \equiv T \setminus N \in \text{co-}\mathcal{I}$.

По определению $S_i = \bigcup(S_{ij} \mid j \in J_i)$ для некоторого покрытия $(S_{ij} \mid j \in J'_i) \in \mathfrak{C}$ и счётного множества $J_i \subset J'_i$. Рассмотрим счётное множество $K \equiv \bigcup(\{i\} \times J_i \mid i \in I)$. Счётная коллекция $\varkappa \equiv (R_k \mid k \in K)$, где $R_k \equiv S_{ij} \cap D \in \mathcal{E}(\mathfrak{C}_D)$ для $k = (i, j) \in K$, является покрытием множества D, т. е. $\varkappa \in \mathrm{Cov_c}\,\mathcal{E}(\mathfrak{C}_D)$. При этом $\omega(f, R_k) \leqslant \omega(f, X_i) < \varepsilon/2$. Ввиду насыщенности покрывания $\mathfrak{C}_D$ существует такое покрытие $\nu \in \mathfrak{C}_D$, что $\nu \prec \varkappa$. Поэтому $\omega(f, \nu) \leqslant \omega(f, \varkappa) < \varepsilon$. Следовательно, $f \in \mathrm{QD}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$. Согласно лемме 3 любая равномерная функция является ограниченной, и потому $f \in \mathrm{QD_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I})$.

Рассуждения, пригодные для доказательства равенства

$$\mathrm{QU_b}(T, \mathfrak{C}, \mathcal{I}) = \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}, \mathcal{I})\big),$$

аналогичны. Нужно только заменить $\mathrm{Bod_c}\,\mathfrak{C}$ на $\mathrm{Bod_f}\,\mathfrak{C}$, QD на QU и «счётные» на «конечные». $\square$

Следствие. *Пусть $\mathcal{S}$ — основа на T и $\mathcal{I}$ — идеал на T. Тогда*

$$\mathrm{QD_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{I})\big)$$

и

$$\mathrm{QU_b}(T, \mathcal{S}, \mathcal{I}) = \mathrm{U}\big(T, \mathcal{SP}(\mathcal{S}_\varphi, \mathcal{I})\big).$$

Применение 3. Использование понятия равномерной функции позволило дать другую (отличную от лебеговской) характеризацию функций, интегрируемых по Риману. Приведём эту характеризацию.

Пусть $(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu)$ — тихоновское топологическое пространство с ансамблем $\mathcal{G}$ всех открытых множеств и положительной ограниченной радоновской мерой $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, a] \subset \mathbb{R}$, заданной на σ-алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств, порождённой ансамблем $\mathcal{G}$. Рассмотрим пренебрежимый ансамбль $\mathcal{F}_\mu \equiv \{F \in \mathcal{F} \mid \mu F = 0\}$ и порождённый им идеал

$$\mathcal{N}_\mu \equiv \mathcal{I}(\mathcal{F}_\mu) \equiv \{I \subset T \mid \exists\, F \in \mathcal{F}_\mu\ (I \subset F)\}.$$

Использование свойства Стоуна для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}_\mu$ даёт ансамбль

$$\mathcal{ZP}_\mu \equiv \mathcal{SP}(\mathcal{G}, \mathcal{N}_\mu) \equiv \{G \cup N \mid G \in \mathcal{G} \wedge N \in \mathcal{N}_\mu\}$$

всех *множеств со свойством Захарова*.

В [4, 13, 16] доказано, что следующие утверждения равносильны:

1) функция $f\colon T \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману;
2) $f \in \mathrm{U}(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Из следствия предложения 8 вытекает, что эти утверждения равносильны также утверждению

3) $f \in \mathrm{QU_b}(T, \mathcal{G}, \mathcal{N}_\mu)$.

Литература

[1] Захаров В. К. Функциональная характеризация абсолюта, векторные решётки функций со свойством Бэра и квазинормальных функций и модули частных непрерывных функций // Тр. ММО. — 1982. — Т. 45, № 1. — С. 68—104.

[2] Захаров В. К. Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 928—956.

[3] Захаров В. К. Расширения кольца непрерывных функций, порождённые регулярным, счетно-делимым и полным кольцами частных, и соответствующие им прообразы // Изв. РАН. Сер. матем. — 1995. — Т. 59, № 4. — С. 15—60.

[4] Захаров В. К. Связи между расширением Римана и классическим кольцом частных и между прообразом Семадени и секвенциальным абсолютом // Тр. ММО. — 1996. — Т. 57. — С. 239—262.

[5] Захаров В. К. Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 2. — С. 167—171.

[6] Захаров В. К. Теоремы Хаусдорфа об измеримых функциях и новый класс равномерных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 3—8.

[7] Захаров В. К., Михалёв А. В. Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, № 4. — С. 1135—1172.

[8] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. матем. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 37—82.

[9] Захаров В. К., Михалёв А. В. Связь между интегральными радоновскими представлениями для локально компактного и хаусдорфова пространств // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, № 1. — С. 33—46.

[10] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66, № 6. — С. 3—18.

[11] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов // УМН. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 153—178.

[12] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Описание радоновских интегралов как линейных функционалов // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 87—161.

[13] Захаров В. К., Михалёв А. В., Рединский А. А. Характеризация пространства функций, интегрируемых по Риману, посредством сечений пространства непрерывных функций. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 11—20.

[14] Захаров В. К., Родионов Т. В. Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 809—824.

[15] Захаров В. К., Родионов Т. В. Естественность класса измеримых функций в смысле Лебега—Бореля—Хаусдорфа // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 554—563.

[16] Захаров В. К., Серединский А. А. Новая характеризация функций, интегрируемых по Риману // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, № 3. — С. 73—83.

[17] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: УРСС, 2004.

[18] Baire R. Sur les fonctions de variables réelles // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IIIa. — 1899. — Vol. 3. — P. 1—122.

[19] Baire R. Leçons sur les fonctions discontinues. — Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[20] Borel E. Leçons sur la théorie des fonctions. — Paris: Gauthier-Villars, 1898.

[21] Borel E. Leçons sur les fonctions de variables réelles. — Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[22] Fine N. T., Gillman l., Lambek J. Rings of Quotients of Rings of Functions. — Montreal: McGill Univ. Press, 1965.

[23] Hausdorff F. Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung // Math. Z. — 1915. — Bd. 4. — S. 292—309.

[24] Lebesgue H. Integral, longeur, aire // Ann. Math. (3). — 1902. — Vol. 7. — P. 231—359.

[25] Lebesgue H. Sur les séries triginométriques // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). — 1903. — Vol. 20. — P. 453—485.

[26] Lebesgue H. Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives. — Paris: Gauthier-Villars, 1904.

[27] Regoli G. Some characterization of sets of measurable functions // Am. Math. Month. — 1977. — Vol. 84, no. 6. — P. 455—458.

[28]

[29] Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functions. — Warszawa: PWA, 1971. — (Mon. Mat.; Vol. 55).

[30] Sierpiński W. Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues // Fund. Math. — 1921. — Vol. 2. — P. 15—27.

[31] Stone M. N. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Am. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41. — P. 375—481.

[32] Young W. H. On upper and lower integration // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1905. — Vol. 2. — P. 52—66.

[33] Young W. H. A new method in the theory of integration // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1911. — Vol. 9. — P. 15—50.

[34] Zakharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpińskian extension // Stud. Sci. Math. Hungar. — 1989. — Vol. 24, no. 2-3. — P. 93—117.