О пересечениях примарных подгрупп нечётного порядка в почти простых группах

В. И. ЗЕНКОВ
Уральский федеральный университет,
Институт математики и механики Уральского отделения РАН
e-mail: V1I9Z52@mail.ru

Я. Н. НУЖИН
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, примарная подгруппа.

Аннотация

Для почти простой конечной группы G и её примарных подгрупп A и B нечётного порядка ставится вопрос об определении всех подгрупп A и B, для которых $A \cap B^g \neq 1$ при любом $g \in G$. Мы доказываем, что существуют только четыре случая для упорядоченной пары (A, B).

Abstract

V. I. Zenkov, Ya. N. Nuzhin, On intersection of primary subgroups of odd order in finite almost simple groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 115—123.

We consider the question of the determination of subgroups A and B such that $A \cap B^g \neq 1$ for any $g \in G$ for a finite almost simple group G and its primary subgroups A and B of odd order. We prove that there exist only four possibilities for the ordered pair (A, B).

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — её подгруппы. По определению M есть совокупность подгрупп, минимальных по включению среди всех подгрупп вида $A \cap B^g$, $g \in G$, а m состоит из элементов множества M, порядок которых минимален. Положим $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M \rangle$, $\min_G(A, B) = \langle m \rangle$. Очевидно, $\mathrm{Min}_G(A, B) \geqslant \min_G(A, B)$ и следующие три условия эквивалентны:

а) $A \cap B^g \neq 1$ для любого $g \in G$;
б) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;
в) $\min_G(A, B) \neq 1$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 115—123.

Первый автор установил, что $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$ для любой пары абелевых подгрупп A и B из G [2, теорема 1], где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G (наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа из G). С другой стороны, в [4, теорема 1] В. И. Зенков и В. Д. Мазуров доказали, что $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$ для любой пары примарных подгрупп A и B простой неабелевой группы G. Но уже в почти простой группе $G \simeq \mathrm{Aut}\big(L(2,7)\big)$ $\mathrm{Min}_G(S,S) = \mathrm{min}_G(S,S) = S$ для силовской 2-подгруппы S из G. Более того, в [3] доказано, что в группе G с цоколем $L(2,q)$, $q > 3$, в случае примарности подгрупп A и B неравенство $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$ справедливо только для $q = 9$ и для простого числа Мерсенна $q = 2^n - 1$, причём в этих случаях подгруппы A и B являются 2-группами.

В настоящей работе рассматривается случай, когда в почти простой группе G подгруппы A и B являются примарными подгруппами нечётного порядка.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — конечная почти простая группа, A и B — примарные подгруппы нечётного порядка группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;
2) *G содержит нормальную подгруппу индекса не более 2, изоморфную $D_4(3) \rtimes Z_3$, и $(A,B) \in \{S, S_0\}^2$, где S — силовская 3-подгруппа группы G, $S_0 = O_3\big(N_G(P)\big)$ и P — минимальная собственная параболическая подгруппа группы $D_4(3)$, соответствующая центральной вершине в графе Кокстера типа D_4, причём $S_0 = \mathrm{min}_G(S,S)$.*

В разделе 2 устанавливаются некоторые необходимые для доказательства теоремы 1 свойства подгрупп групп Шевалле, которые, по мнению авторов, представляют самостоятельный интерес.

1. Обозначения и предварительные результаты

Группа G называется *почти простой*, если $\mathrm{Inn}(K) \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(K)$, где K — конечная простая неабелева группа, а $\mathrm{Inn}(K)$ и $\mathrm{Aut}(K)$ — группа внутренних автоморфизмов и группа всех автоморфизмов группы K соответственно. В статье также приняты следующие сокращения и обозначения:

— $g^h = h^{-1}gh$ для элементов g и h из группы G;
— $A^B = \{a^b \mid a \in A,\ b \in B\}$ для групп A и B;
— $A \leqslant G$ (A является подгруппой группы G);
— $\langle M \rangle$ (группа, порождённая множеством M);
— $N_G(A)$ (нормализатор подгруппы A в группе G);
— $O_p(G)$ (максимальная нормальная p-подгруппа конечной группы G);
— $A \rtimes B$ (полупрямое произведение групп A и B с нормальной подгруппой A).

Доказательство импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) из теоремы 1, по существу, сводится к рассмотрению ситуации в группе $D_4(3) \rtimes Z_3$ применением следующего результата первого автора.

Лемма 1 [3, теорема B (2a)]. *Пусть G — конечная почти простая группа, p — нечётное простое число, S — силовская p-подгруппа группы G. Если $S \cap S^g \neq 1$ для любого элемента g из G, то $p = 3$ и группа G содержит нормальную подгруппу индекса не более 2, изоморфную $D_4(3) \leftthreetimes Z_3$.*

Нам потребуются также следующие две технические леммы, которые используются далее неоднократно.

Лемма 2 [3, лемма 3.1]. *Пусть G — конечная группа, M_1 — её подгруппа, P_1 — силовская p-подгруппа группы M_1, такая что $P_1 \cap P_1^k$ для некоторого $k \in M$, и M_2 — сопряжённая с M_1 подгруппа из G. Тогда найдётся такая силовская p-подгруппа P_2 группы M_2, что $P_1 \cap P_2 \leqslant O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$.*

Лемма 3. *Пусть A, B, S — подгруппы конечной группы G, причём $A \leqslant S$, $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$ и $A \cap B^h = S \cap S^h = T$ для некоторого элемента $h \in G$ и некоторой циклической подгруппы T простого порядка. Тогда $T^S \leqslant A$.*

Доказательство. В силу предположений леммы $T^s = S \cap S^{hs} \geqslant A \cap B^{hs} \neq 1$ для любого $s \in S$. Отсюда, учитывая, что T — циклическая подгруппа простого порядка, получаем включение $T^s \leqslant A$ для любого $s \in S$, т. е. $T^S \leqslant A$. Лемма доказана. □

2. Некоторые свойства пересечений силовских p-подгрупп групп Шевалле над конечным полем характеристики p

Далее Φ — приведённая неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — множество её фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π, а также $\Phi^- = -\Phi^+$. Всегда считаем, что r_1 — короткий корень и сумма $r_i + r_j$, $i \leqslant j$, является корнем тогда и только тогда, когда

— $(i, j) = (l-3, l)$ или $(i, j) = (i, i+1)$, $1 \leqslant i \leqslant l-2$, если $\Phi = E_l$;
— $(i, j) = (1, 3)$ или $(i, j) = (i, i+1)$, $2 \leqslant i \leqslant l-1$, если $\Phi = D_l$;
— $(i, j) = (i, i+1)$ в остальных случаях.

Нам потребуется следующее усиление леммы 3.6.2 из [5, с. 50].

Лемма 4. *Пусть фундаментальный корень r_{i_1} входит с ненулевым коэффициентом в разложение корня $r \in \Phi^+$ по базису Π. Тогда корень r может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней*

$$r = r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_k}$$

таким образом, что сумма $r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_s}$ является корнем для всех $s \leqslant k$.

Доказательство. Любой корень $r \in \Phi^+$ есть линейная комбинация фундаментальных корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Пусть

$$r = c_1 r_1 + \ldots + c_l r_l.$$

Очевидно, возможны два следующих случая:

1) все числа c_i не больше 1;
2) хотя бы одно из чисел c_i больше 1.

Для любого подграфа графа Кокстера типа Φ, вершины которого помечены фундаментальными корнями $r_{j_1}, \ldots, r_{j_m}$, сумма $r_{j_1} + \ldots + r_{j_m}$ является корнем тогда и только тогда, когда этот подграф связен. Поэтому в первом случае лемма справедлива. Второй случай сводится по индукции к первому в силу следующего утверждения:

$$\text{если хотя бы одно из чисел } c_i \text{ больше 1, то существует } j, \text{ такое что } c_j > 1 \text{ и разность } r - r_j \text{ является корнем.} \tag{A}$$

Утверждение (A) можно непосредственно проверить для каждой системы корней по отдельности.

Для системы корней типа A_l возможен только первый случай.

Для системы корней типа B_l в случае 2)

$$r = 2r_1 + \ldots + 2r_s + r_{s+1} + \ldots + r_t,$$

где $1 \leqslant s < t \leqslant l$. Здесь возможен только один вариант $j = s$, для того чтобы разность $r - r_j$ была корнем.

Для системы корней типа C_l в случае 2)

$$r = r_t + \ldots + r_{s-1} + 2r_s + \ldots + 2r_{l-1} + r_l,$$

где $1 \leqslant t \leqslant s \leqslant l-1$ (при $s = 1$ по определению $r = 2r_1 + \ldots + 2r_{l-1} + r_l$). Здесь также возможен только один вариант $j = s$.

Для системы корней типа D_l в случае 2)

$$r = r_1 + r_2 + 2r_3 + \ldots + 2r_s + r_{s+1} + \ldots + r_t,$$

где $3 \leqslant s < t \leqslant l$. Здесь также возможен только один вариант $j = s$.

В таблицах V—VIII из [1] для исключительных типов E_l и F_4 приведены все положительные корни, у которых хотя бы одно из чисел c_j больше единицы. Используя эти таблицы, несложно проверить справедливость утверждения (A) для типов E_l и F_4. Заметим, что здесь уже для некоторых корней параметр j определяется неоднозначно.

Для типа G_2 справедливость утверждения (A) легко проверяется, и в этом случае параметр j определяется однозначно.

Таким образом, утверждение (A), а вместе с ним и лемма доказаны. □

Далее $\Phi(q)$ — присоединённая группа Шевалле типа Φ ранга l над конечным полем $\mathbb{F}_q$ порядка $q = p^n$, где p — простое число. Группа $\Phi(q)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = \langle x_r(t) \mid t \in K \rangle, \quad r \in \Phi,$$

где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент в группе $\Phi(q)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(q)$:

— унипотентные подгруппы

$$U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \rangle, \quad V = \langle X_r \mid r \in \Phi^- \rangle,$$

— мономиальная подгруппа

$$N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in \mathbb{F}_q^* \rangle,$$

— диагональная подгруппа

$$H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in \mathbb{F}_q^* \rangle,$$

— борелевская подгруппа

$$B = UH.$$

Здесь $\mathbb{F}_q^*$ — мультипликативная подгруппа поля $\mathbb{F}_q$ и

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t), \quad h_r(t) = n_r(t)n_r(-1).$$

Положим также

$$I = \{1, 2, \ldots, l\}.$$

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряжённые с ними называются параболическими. Согласно известному результату Ж. Титса параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами P_J, $J \subseteq I$, где

$$P_J = \langle B, n_{r_j}(1) \mid j \in J \rangle.$$

Лемма 5. *Зафиксируем мономиальный элемент n_0 с условием $U^{n_0} = V$ и натуральное число $i \in I$. Пусть $n = n_0 n_{r_i}(1)$. Тогда $U \cap U^n = X_{r_i}$.*

Доказательство. Корневые подгруппы X_{r_i} и X_{-r_i} нормализуют подгруппу

$$V_{r_i} = \langle X_r \mid r \in \Phi^- \setminus \{-r_i\} \rangle$$

и $V = V_{r_i} X_{-r_i}$ [5, лемма 8.1.1]. Отсюда следует, что $U^n = V^{n_{r_i}(1)} = V_{r_i} X_{r_i}$. Очевидно, что $U \cap V_{r_i} X_{r_i} = X_{r_i}$. Лемма доказана. $\square$

При $l = 1$ корневая подгруппа X_{r_i} совпадает со всей силовской p-подгруппой группы $\Phi(q)$, и в этом случае элемент n из леммы 5 диагональный.

Лемма 6. *Пусть $P = P_{I \setminus \{i\}}$ — максимальная параболическая подгруппа группы $\Phi(q)$ типа A_l, D_l или E_l ранга $l \geqslant 2$ и мономиальный элемент n такой, как в лемме 5. Тогда $U \cap U^n = X_{r_i}$ и $\langle X_{r_i}^U \rangle = O_p(P)$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.5.2 из [5] для групп Шевалле $\Phi(q)$ любого типа справедливо равенство

$$O_p(P) = \langle X_r \mid r = c_k r_k + \ldots + c_i r_i + \ldots + c_m r_m,\ 1 \leqslant k \leqslant i \leqslant m \leqslant l,\ c_j \geqslant 1 \rangle.$$

Для типов A_l, D_l и E_l все структурные константы в коммутаторной формуле Шевалле равны 1. Поэтому, используя лемму 4, можно получить равенство

$\langle X_{r_i}^U \rangle = O_p(P)$. Действительно, пусть $X_r \in O_p(P)$. Тогда по лемме 4 при $i = i_1$ для корня r имеем представление

$$r = r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_k},$$

где сумма $r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_s}$ является корнем для всех $s \leqslant k$. Отсюда последовательно получаем включения

$$\begin{aligned}
&[X_{r_{i_1}}, X_{r_{i_2}}] = X_{r_{i_1}+r_{i_2}} \subset \langle X_{r_i}^U \rangle,\\
&[X_{r_{i_1}+r_{i_2}}, X_{r_{i_3}}] = X_{r_{i_1}+r_{i_2}+r_{i_3}} \subset \langle X_{r_i}^U \rangle,\\
&\quad \ldots\\
&[X_{r_{i_1}+\cdots+r_{i_{k-1}}}, X_{r_k}] = X_{r_{i_1}+\cdots+r_{i_k}} = X_r \subset \langle X_{r_i}^U \rangle.
\end{aligned}$$

Итак, $\langle X_{r_i}^U \rangle = O_p(P)$. Равенство $U \cap U^n = X_{r_i}$ даёт лемма 5. Лемма 6 доказана. □

Утверждение леммы 6 нельзя перенести в общем случае для каждого из типов B_l, C_l, F_4 и G_2.

Лемма 7. *Пусть $P = P_{I\setminus\{1\}}$ — максимальная параболическая подгруппа группы $\Phi(2)$ типа B_l ранга $l \geqslant 2$ над полем из двух элементов, где r_1 — короткий корень. Тогда не существует корневой подгруппы X_r, для которой $\langle X_r^U \rangle = O_p(P)$.*

Доказательство. По выбору максимальной параболической подгруппы P справедливо равенство

$$O_p(P) = \langle X_s \mid s = c_1 r_1 + \ldots + c_k r_k,\ 1 \leqslant k \leqslant l,\ c_j \geqslant 1 \rangle.$$

Очевидно, равенство $\langle X_r^U \rangle = O_p(P)$ возможно лишь при $r = r_1$. Остаётся заметить, что подгруппа $\langle X_{r_1}^U \rangle$ содержит произведение $x_{r_1+r_2}(1) x_{2r_1+r_2}(1)$, но по отдельности элементы $x_{r_1+r_2}(1)$ и $x_{2r_1+r_2}(1)$ не лежат в $\langle X_{r_1}^U \rangle$. Лемма доказана. □

На рис. 1 установлено соответствие между вершинами графа Кокстера и корнями из фундаментальной системы корней, ассоциированными с группой Шевалле типа D_4.

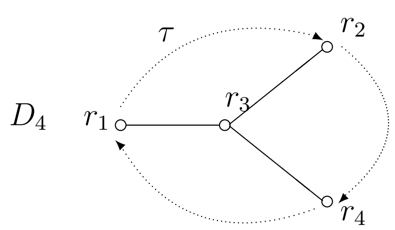

Рис. 1

Лемма 8. *Пусть* $G = D_4(3) \leftthreetimes \langle\tau\rangle$ *и* $S = U \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, *где* τ — *графовый автоморфизм порядка* 3 *группы* $D_4(3)$, *и пусть мономиальный элемент* $n = n_0 n_{r_1}(1) \in D_4(3)$ *такой, как в лемме* 5. *Тогда* $S \cap S^n = X_{r_1}$ *и, в частности,* $U \cap U^n = X_{r_1}$.

Доказательство. В группе Вейля типа D_4 существует такой элемент w_0, что $w_0(r) = -r$ для любого корня r. Более точно, w_0 совпадает с кубом c^3 элемента Кокстера

$$c = w_{r_3} w_{r_1} w_{r_2} w_{r_4}.$$

Поэтому в нашем случае элемент n_0 является прообразом элемента w_0 при гомоморфизме мономиальной подгруппы группы $D_4(3)$ на группу Вейля типа D_4. Более того, можно считать, что

$$n_0 = \big(n_{r_3}(1) n_{r_1}(1) n_{r_2}(1) n_{r_4}(1)\big)^3.$$

Так как графовый автоморфизм τ централизует мономиальный элемент $n_{r_3}(1) n_{r_1}(1) n_{r_2}(1) n_{r_4}(1)$ (см. рис. 1 и [5, предложение 12.2.3]), то

$$\tau^n = \tau^{n_{r_1}(1)} = \tau n_{r_2}(-1) n_{r_1}(1).$$

Очевидно, $\tau n_{r_2}(-1) n_{r_1}(1) \notin \langle\tau\rangle$. Отсюда и из равенства $U \cap U^n = X_{r_1}$, которое даёт лемма 5, получаем равенство $S \cap S^n = X_{r_1}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $G = D_4(3) \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, $S = U \leftthreetimes \langle\tau\rangle$ *и* $S_0 = U_{r_3} \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, *где* $U_{r_3} = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \{r_3\}\rangle$. *Тогда* $S_0 = \min_G(S, S)$.

Доказательство. Подгруппа S является силовской 3-подгруппой группы G. Поэтому в силу леммы 1 $S \cap S^x \neq 1$ для любого $x \in G$, и следовательно, $\min_G(A, B) = \langle m\rangle \neq 1$ и по лемме 8 множество m состоит из подгрупп порядка 3. В графе Кокстера типа D_4 корни r_1, r_2 и r_4 соответствуют симметричным вершинам (см. рис. 1), поэтому лемма 8 остаётся верной, если корень r_1 заменить на корень r_2 или r_4. Отсюда по лемме 6 получаем, что $O_3\big(P_{\{i\}}\big) \leqslant \min_G(S, S)$ для любого $i = 1, 2, 4$. Таким образом, леммы 1, 5, 6 и 8 вместе с равенством

$$\big\langle O_3\big(P_{I\setminus\{1\}}\big), O_3\big(P_{I\setminus\{2\}}\big), O_3\big(P_{I\setminus\{4\}}\big)\big\rangle = O_3\big(P_{\{3\}}\big)$$

дают включение $S_0 \leqslant \min_G(S, S)$.

Допустим, что $S_0 < \min_G(S, S)$. Тогда найдётся элемент (подгруппа) D из множества m, такой что $D = S \cap S^g \nleqslant S_0$ для некоторого $g \in G$. Так как $|S \cap S^g| = 3$ по лемме 8, то $S_0 \cap S_0^g = 1$. Подгруппы S и S_0 удовлетворяют условиям леммы 2 при

$$G = D_4(3) \leftthreetimes \langle\tau\rangle, \quad M_1 = N_G\big(P_{\{3\}}\big), \quad P_1 = S,$$
$$O_3(M_1) = S_0, \quad k = n_{r_3}(1), \quad O_3(M_2) = S_0.$$

Поэтому по лемме 2

$$S \cap S^x \leqslant S_0 \cap S_0^g = 1$$

для подходящего $x \in G$. Следовательно, $S \cap S^x = 1$. Противоречие с леммой 1. Лемма 9 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 1. Далее для подгрупп и элементов группы Шевалле $D_4(3)$ мы используем обозначения из предыдущего раздела.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$. Так как A и B — примарные подгруппы, то из условия $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$ следует, что подгруппы A и B примарны по одному нечётному простому числу p. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что подгруппы A и B лежат в одной фиксированной силовской p-подгруппе S группы G. Снова ввиду условия $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$ получаем неравенство $S \cap S^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Согласно лемме 1 можно считать, что $p = 3$ и группа G содержит нормальную подгруппу

$$G_0 = D_4(3) \leftthreetimes \langle\tau\rangle$$

индекса не более 2, где τ — графовый автоморфизм порядка 3 группы $D_4(3)$. Можно считать, что

$$S = U \leftthreetimes \langle\tau\rangle.$$

Пусть

$$n_0 = \big(n_{r_3}(1)n_{r_1}(1)n_{r_2}(1)n_{r_4}(1)\big)^3.$$

Тогда (см. доказательство леммы 8)

$$S \cap S^{n_0} = \langle\tau\rangle.$$

Так как

$$\langle\tau\rangle = S \cap S^{n_0} \geqslant A \cap B^{n_0} \neq 1,$$

то

$$A \cap B^{n_0} = \langle\tau\rangle.$$

По лемме 8 существует мономиальный элемент $n \in D_4(3)$, такой что

$$S \cap S^n = X_{r_1}.$$

Так как

$$X_{r_1} = S \cap S^n \geqslant A \cap B^n \neq 1,$$

то

$$A \cap B^n = X_{r_1}.$$

По лемме 3

$$X_{r_1}^S \leqslant A.$$

По лемме 6

$$\langle X_{r_1}^U\rangle = O_3\big(P_{I\setminus\{1\}}\big).$$

Так как $\tau \in A$, то

$$\big\langle O_3\big(P_{I\setminus\{1\}}\big),\, O_3\big(P_{I\setminus\{1\}}^{\tau}\big),\, O_3\big(P_{I\setminus\{1\}}^{\tau^2}\big)\big\rangle = O_3\big(P_{\{3\}}\big) \leqslant A.$$

Следовательно,
$$O_3\Big(N_G\big(P_{\{3\}}\big)\Big) \leqslant A.$$
Положим
$$S_0 = O_3\Big(N_G\big(P_{\{3\}}\big)\Big).$$
Заметим, что $|S : S_0| = 3$. Поэтому либо $A = S_0$, либо $A = S$. Условие $A \cap B^g \neq 1$ для любого $g \in G$ эквивалентно условию $B \cap A^{g^{-1}} \neq 1$ для любого $g \in G$. Таким образом,
$$(A, B) \in \{S, S_0\}^2.$$

Осталось установить равенство $S_0 = \min_G(S, S)$. Возможны два случая:

а) $G = G_0$;

б) $|G : G_0| = 2$.

В случае а) равенство $S_0 = \min_G(S, S)$ является утверждением леммы 9.

Случай б) следует из а) и инвариантности подгруппы S относительно внешних (графовых) автоморфизмов порядка 2 группы $D_4(3)$.

Докажем импликацию 1) $\Longleftarrow$ 2). Очевидно, для пары (S, S) неравенство $S \cap S^g \neq 1$ для любого элемента $g \in G$ следует из только что установленного равенства $S_0 = \min_G(S, S)$.

Так как уже известно, что $S \cap S^g \neq 1$ для любого $g \in G$ и $S \cap S^{n_{r_3}(1)} = S_0$, то по лемме 2 (см. доказательство леммы 9) имеем $S_0 \cap S_0^g \neq 1$ и тем более $S_0 \cap S^g \neq 1$ и $S \cap S_0^g \neq 1$ для любого $g \in G$.

Теорема доказана.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ — ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009). Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00968-а).

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. VII—VIII. — М.: Мир, 1978.

[2] Зенков В. И. Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56. — С. 869—871.

[3] Зенков В. И. Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 1—92.

[4] Мазуров В. Д., Зенков В. И. О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. — 1996. — Т. 35, № 4. — С. 424—432.

[5] Carter R. W. Finite Groups of Lie Type. — London: Wiley, 1985.