Теорема Веддербёрна—Артина для параградуированных колец

Э. ИЛИЧ-ГЕОРГИЕВИЧ
Сараевский университет, Босния и Герцеговина
e-mail: emil.ilic.georgijevic@gmail.com

М. ВУКОВИЧ
Академия наук и искусств Боснии и Герцеговины, Босния и Герцеговина
e-mail: mirvuk48@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: параградуированный кольцо, неприводимый параградуированный модуль, радикал Джекобсона.

Аннотация

В данной работе исследованы параградуированные кольца, введено понятие параградуированного радикала Джекобсона, с помощью которого, аналогично неградуированному случаю, доказан аналог теоремы Веддербёрна—Артина. В ходе исследования изучены точные неприводимые параградуированные модули над некоммутативными параградуированными кольцами и доказан параградуированный аналог леммы Шура.

Abstract

E. Ilić-Georgijević, M. Vuković, The Wedderburn–Artin theorem for paragraded rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 125—139.

In this paper, we prove the paragraded version of the Wedderburn–Artin theorem. Following the methods known from the abstract case, we first prove the density theorem and observe the matrix rings whose entries are from a paragraded ring. However, in order to arrive at the desired structure theorem, we introduce the notion of a Jacobson radical of a paragraded ring and prove some properties which are analogous to the abstract case. In the process, we study the faithful and irreducible paragraded modules over noncommutative paragraded rings and prove the paragraded version of the well known Schur's lemma.

1. Введение

М. Краснер, исследуя нормированные тела и их связь с кольцами нормирования, ввёл понятие *корпоида* [8], с которого начала своё развитие общая теория градуированных структур [3, 4, 7, 9—13]: *гомогруппоидов*, *кольцоидов* и *модулоидов*, причём в множестве степеней, задающих градуировку, не предполагается, как в [2], ни ассоциативности, ни коммутативности, ни наличия

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 125—139.

нейтрального элемента. Корпоид является частным случаем кольцоида и рассматривается как однородная часть градуированного тела. Следует отметить, что классы гомогруппоидов, кольцоидов и модулоидов не замкнуты относительно взятия прямых произведений и прямых сумм, поэтому М. Краснер и М. Вукович ввели более общее понятие *параградуированной структуры*, решающее эту проблему [14—18]. В данной работе мы исследуем параградуированные кольца, вводим понятие параградуированного радикала Джекобсона, с помощью которого, аналогично неградуированному случаю, доказываем аналог теоремы Веддербёрна—Артина. Мы следуем изложению И. Н. Херстейна [5].

2. Предварительные сведения

Отображение

$$\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(G), \quad \pi(\delta) = G_\delta \quad (\delta \in \Delta)$$

частично упорядоченного множества $(\Delta, <)$, которое является полной полурешёткой (снизу) и индуктивно упорядоченным множеством, в множество $\mathrm{Sg}(G)$ подгрупп данной группы G называется *параградуировкой* [17, 20], если оно удовлетворяет следующим шести аксиомам.

(i) $\pi(0) = G_0 = \{e\}$, где $0 = \inf\Delta$, $\delta < \delta'$ влечёт $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$.

Замечание 2.1. Множество

$$H = \bigcup_{\delta\in\Delta} G_\delta$$

называется *однородной частью* группы G относительно π.

Замечание 2.2. Для каждого элемента $x \in H$ определяется его тип

$$\delta(x) = \inf\{\delta \in \Delta \mid x \in G_\delta\}.$$

Ясно, что $\delta(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$. Элементы $\delta(x)$, $x \in H$, называются *главными типами*. Множество всех главных типов мы будем обозначать Δ_p.

(ii) $\theta \subseteq \Delta$ влечёт $\bigcap\limits_{\delta\in\theta} G_\delta = G_{\inf\theta}$.

(iii) Если $x, y \in H$ и $yx = zxy$, то $z \in H$ и $\delta(z) \leqslant \inf\{\delta(x), \delta(y)\}$.

(iv) Группа G порождается своей однородной частью H.

(v) Пусть $A \subseteq H$ — такое подмножество, что для всех $x, y \in A$ типы $\delta(x)$, $\delta(y)$ ограничены сверху. Тогда существует верхняя грань всех типов $\delta(x)$, $x \in A$.

(vi) Группа G порождается множеством H с помощью H-внутренних и левых перестановочных соотношений:

- $xy = z$ (H-внутренние соотношения);
- $yx = z(x, y)xy$ (левые перестановочные соотношения).

Группа с заданной параградуировкой называется *параградуированной группой*. Кольцо R называется *параградуированным*, если его аддитивная группа параградуированная и для всех $\xi, \eta \in \Delta$ существует такое $\zeta \in \Delta$, что $R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta$. Это определение задаёт на множестве Δ бинарную операцию

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi\eta = \sup\{\delta(x) \mid x \in R_\xi R_\eta\},$$

называемую *минимальным умножением* [17, 20], для которой, таким образом, выполнено включение $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi\eta}$. Пусть R — параградуированное кольцо с параградуировкой E и множеством типов Δ, M — коммутативная параградуированная группа с параградуировкой F и множеством типов D, причём M является R-модулем. Обозначим $R_\delta := E(\delta)$, $M_d := F(d)$ для $\delta \in \Delta$, $d \in D$. R-модуль M называется левым (правым) *параградуированным*, если для каждого $\delta \in \Delta$ и каждого $d \in D$ найдётся $t \in D$, такое что $R_\delta M_d \subseteq M_t$ (соответственно для каждого $\delta \in \Delta$ и каждого $d \in D$ найдётся $t \in D$, такое что $M_d R_\delta \subseteq M_t$). В частности, определено *минимальное умножение* [17, 20]

$$d\delta = \sup\{d(x) \mid x \in M_d R_\delta\},$$

где

$$d(x) = \inf\{d \in D \mid x \in M_d\}.$$

Гомоморфизм называется *квазиоднородным*, если образы однородных элементов однородны. Однородный подмодуль в N определяется стандартным образом, т. е. как подмодуль, порождённый пересечением подмодуля N и однородной части параградуированного модуля.

3. Параградуированные модули и лемма Шура

Пусть M — правый параградуированный R-модуль с множеством степеней Δ, где R — параградуированное кольцо с тем же множеством степеней. Мы будем называть такие модули параградуированными модулями типа Δ и далее все модули будем предполагать именно такими, если не оговорено противное.

Определение 3.1. Параградуированный R-модуль M типа Δ называется *точным*, если из равенства $M_\xi R_\eta = \{0\}$ следует равенство $R_\eta = \{0\}$.

Введём понятие аннулятора аналогично неградуированному случаю.

Определение 3.2. Для каждого $\delta \in \Delta$ множество

$$A(M)_\delta = \{r \in R_\delta \mid Mr = \{0\}\}$$

назовём *δ-аннулятором* модуля M.

Рассмотрим множество

$$A(M) = \Big\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} A(M)_\delta \Big\rangle.$$

Лемма 3.3. *Множество $A(M)$ является однородным идеалом параградуированного кольца R. Кроме того, модуль M является точным параградуированным $R/A(M)$-модулем типа Δ.*

Доказательство. Пусть $x, x' \in A(M)$. Тогда

$$x = \sum_{\delta} r_\delta, \quad x' = \sum_{\delta'} r'_{\delta'},$$

где $r_\delta \in A(M)_\delta$, $r'_{\delta'} \in A(M)_{\delta'}$. Поэтому $Mr_\delta = \{0\}$, $Mr'_{\delta'} = \{0\}$, следовательно, $M(x - x') = \{0\}$, т. е. $x - x' \in A(M)$. Отсюда сразу следует, что $Mxr = \{0\}$ для всех $x \in A(M)$, $r \in R$. Значит, $A(M)$ — правый идеал. Так как для всех $\xi, \eta \in \Delta$ и $r \in A(M)_\delta$, $r_\eta \in R_\eta$, то

$$M_\xi(r_\eta r) = (M_\xi r_\eta)r \subseteq M_\zeta r = \{0\}$$

и идеал $A(M)$ однородный, поэтому кольцо $R/A(M)$ можно снабдить параградуировкой типа Δ естественным образом: $\big(R/A(M)\big)_\delta = \big(R_\delta + A(M)\big)/A(M)$ [1,17]. Далее M — параградуированный $R/A(M)$-модуль типа Δ: $m(r+A(M)) = mr$, $m \in M$, $r + A(M) \in R/A(M)$. Действительно, для всех $\xi, \eta \in \Delta$, таких что $m \in M_\xi$ и $r + A(M) \in (R/A(M))_\eta$, имеем

$$m\big(r + A(M)\big) = mr \in M_\xi R_\eta \subseteq M_\zeta$$

для некоторого $\zeta \in \Delta$. Наконец, модуль M является $R/A(M)$-точным, так как если $m \in M_\xi$, $r + A(M) \in (R/A(M))_\eta$ и $m(r + A(M)) = \{0\}$, то $mr = 0$, т. е. $r \in A(M)$. □

Определение 3.4 [6]. Пусть M и M' — параградуированные R-модули типа Δ. Будем говорить, что гомоморфизм $f\colon M \to M'$ имеет степень δ, если для каждого $\delta' \in \Delta$ справедливо $f(M_{\delta'}) \subseteq M'_{\delta'\delta}$, где $\delta'\delta$ — минимальное умножение. Обозначим множество всех гомоморфизмов степени δ через $\hom(M, M')_\delta$ и определим

$$\mathrm{HOM}(M, M') := \Big\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} \hom(M, M')_\delta \Big\rangle.$$

Мы будем часто использовать естественный гомоморфизм степени $\delta \in \Delta$ — умножение на элемент кольца степени δ:

$$f_a\colon M \to M, \quad f_a(m) = ma \ \ (m \in M), \quad a \in R_\delta.$$

Ясно, что

$$f_a(M_\xi) = M_\xi a \subseteq M_\xi R_\delta \subseteq M_{\xi\delta}$$

для $\xi \in \Delta$.

Предложение 3.5. *Предположим, что минимальное умножение ассоциативно. Пусть $f\colon M \to M'$ — морфизм степени δ_1 и $g\colon M' \to M''$ — морфизм степени δ_2. Тогда $g \circ f$ — морфизм степени $\delta_1\delta_2$.*

Доказательство. Пусть $\delta \in \Delta$, $f \in \mathrm{hom}(M, M')_{\delta_1}$. Тогда

$$(g \circ f)(M_\delta) = g\big(f(M_\delta)\big) \subseteq g(M'_{\delta\delta_1}),$$

и так как $g \in \mathrm{hom}(M, M')_{\delta_2}$, то

$$g(M'_{\delta\delta_1}) \subseteq M''_{(\delta\delta_1)\delta_2}.$$

Ввиду ассоциативности минимального умножения отсюда следует, что

$$M''_{(\delta\delta_1)\delta_2} = M''_{\delta(\delta_1\delta_2)}.$$

Следовательно, $(g \circ f)(M_\delta) \subseteq M''_{\delta(\delta_1\delta_2)}$ для всех $\delta \in \Delta$, т. е. $g \circ f \in \mathrm{hom}(M, M'')_{\delta_1\delta_2}$. □

Предложение 3.6. *Пусть минимальное умножение ассоциативно и M — параградуированный R-модуль типа Δ. Тогда $\mathrm{HOM}(M, M)$ — параградуированное кольцо, которое мы будем обозначать $\mathrm{END}(M)$.*

Доказательство. Как показано в [6], $(\mathrm{HOM}(M, M), +) = (\mathrm{END}(M), +)$ — коммутативная параградуированная группа. Определим произведение элементов $f, g \in \mathrm{END}(M)$ как $f \cdot g := g \circ f$. Если $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, то

$$\mathrm{END}(M)_{\delta_1}\mathrm{END}(M)_{\delta_2} = \mathrm{hom}(M, M)_{\delta_1}\,\mathrm{hom}(M, M)_{\delta_2} \subseteq \mathrm{hom}(M, M)_{\delta_1\delta_2}$$

по предложению 3.5. □

Лемма 3.7. *Пусть M — параградуированный R-модуль типа Δ, и пусть минимальное умножение ассоциативно. Тогда $R/A(M)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathrm{END}(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon R \to \mathrm{END}(M), \quad \varphi(a) = f_a \quad (a \in R).$$

Так как элемент a является суммой однородных, то $f_a \in \mathrm{END}(M)$ (ранее мы показали, что $f_{a_\delta} \in \mathrm{hom}(M, M)_\delta$). Ясно, что φ — гомоморфизм колец, являющийся морфизмом в категории параградуированных колец типа Δ, так как $\varphi(a) = f_a \in \mathrm{hom}(M, M)_\delta$ для всех $\delta \in \Delta$ и $a \in R_\delta$. Остаётся заметить, что $\ker\varphi = A(M)$. □

Определение 3.8. Для $\delta \in \Delta$ определим

$$C(M)_\delta = \{f \in \mathrm{hom}(M, M)_\delta \mid f f_a = f_a f \ (a \in R)\}$$

и

$$C(M) = \Big\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} C(M)_\delta \Big\rangle.$$

Если M — параградуированный R-модуль типа Δ и минимальное умножение ассоциативно, то, очевидно, $C(M)$ — однородное подкольцо в $\mathrm{END}(M)$. Если, кроме того, минимальное умножение коммутативно, то $C(M)$ — кольцо всех эндоморфизмов модуля M в категории параградуированных модулей типа Δ

(аналогично неградуированному случаю [5]). Действительно, пусть $f \in C(M)$. Тогда $f = \sum\limits_{\delta} f_\delta$, где $f_\delta \in C(M)_\delta$. Если $m \in M_\xi$ и $a \in R_\eta$ для некоторых $\xi, \eta \in \Delta$, то

$$f_\delta(m)a = f_a\big(f_\delta(m)\big) = f_\delta\big(f_a(m)\big) = f_\delta(ma), \quad f_\delta(m)a \in M_{\xi\delta}a \subseteq M_{\xi\delta\eta},$$
$$f_\delta(ma) \in f_\delta(M_{\xi\eta}) \subseteq M_{\xi\eta\delta} = M_{\xi\delta\eta}.$$

Чтобы доказать параградуированный аналог леммы Шура аналогично неградуированному случаю [5], нам потребуется понятие неприводимости.

Определение 3.9. Назовём параградуированный R-модуль M типа Δ *неприводимым*, если существуют такие $\xi, \eta \in \Delta$, что $M_\xi R_\eta \neq \{0\}$, и если M имеет ровно два параградуированных подмодуля $\{0\}$ и M.

Теорема 3.10. *Пусть M — неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ, и пусть минимальное умножение ассоциативно. Тогда $C(M)$ — параградуированное тело типа Δ.*

Доказательство. Аналогично неградуированному случаю [5] достаточно доказать, что каждый ненулевой однородный элемент из $C(M)$ обратим в $\mathrm{END}(M)$. Пусть $0 \neq f \in C(M)$ — однородный элемент. Тогда $f(M)$ — однородный подмодуль [17]. Так как $f \neq 0$ и M неприводим, то f инъективен и $f(M) = M$, т. е. f сюръективен. Значит, f — обратимый элемент в $\mathrm{END}(M)$. $\square$

Предложение 3.11. *Пусть M — неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ. Тогда M изоморфен параградуированному модулю R/ρ для некоторого однородного максимального правого идеала ρ в R. Более того, существует такой элемент $a \in R$, что $x - ax \in \rho$ для всех однородных $x \in R$.*

Доказательство. Множество

$$S = \Big\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} S_\delta \Big\rangle, \quad S_\delta = \{m \in M_\delta \mid mR = \{0\}\},$$

является однородным подмодулем в M, $\delta \in \Delta$. Поскольку оно отлично от M, то $S = \{0\}$ ввиду неприводимости модуля M. Поэтому для всякого однородного ненулевого элемента $m \in M$ имеем $mR \neq \{0\}$ и $mR = M$. Определим отображение

$$\varphi\colon R \to M, \quad \varphi(r) = mr \quad (r \in R).$$

Предположим, что $m \in M_\xi$, где $\xi \in \Delta$. Тогда $\varphi(R_\eta) = mR_\eta \subseteq M_{\xi\eta}$, и следовательно, φ квазиоднородно. Ядро отображения φ является однородным правым идеалом, обозначим его через ρ. По первой теореме об изоморфизме для параградуированных модулей [17] получаем изоморфизм $N \cong R/\rho$.

Оставшаяся часть предложения доказывается аналогично неградуированному случаю [5]. $\square$

4. Радикал кольца

В этом разделе R — параградуированное кольцо с множеством степеней Δ.

Определение 4.1. *δ-радикал* кольца R, $\delta \in \Delta$, который мы будем обозначать $J(R)_\delta$, — это множество всех элементов группы R_δ, аннулирующих все неприводимые параградуированные R-модули. Если кольцо R не имеет неприводимых модулей, положим $J(R)_\delta = R$. *Параградуированный радикал Джекобсона* (или просто *радикал*) $J(R)$ кольца R определим как

$$J(R) = \Big\langle \bigcup_{\delta\in\Delta} J(R)_\delta \Big\rangle.$$

Лемма 4.2. *$J(R)_\delta = \bigcap\limits_M A(M)_\delta$, где M пробегает множество всех неприводимых параградуированных R-модулей типа Δ.*

Доказательство. Включение

$$J(R)_\delta \subseteq \bigcap_M A(M)_\delta$$

очевидно. Если $x \in \bigcap\limits_M A(M)_\delta$, то $x \in A(M)_\delta$ для всех неприводимых параградуированных R-модулей типа Δ, т. е. x — такой элемент из R_δ, что $Mx = (0)$ для всех M. Следовательно, $x \in J(R)_\delta$. □

Следствие 4.3. *$J(R) = \bigcap\limits_M A(M)$, где M пробегает множество всех неприводимых параградуированных R-модулей типа Δ.*

Доказательство. Каждый элемент $x \in J(R)$ является суммой элементов $x_\delta \in J(R)_\delta$, таких что x_δ аннулирует все неприводимые модули, поэтому тем же свойством обладает x. Значит,

$$x \in \bigcap_M \Big\langle \bigcup_{\delta\in\Delta} A(M)_\delta \Big\rangle = \bigcap_M A(M).$$

Если $x \in \bigcap\limits_M A(M)$, то $x \in A(M)$ для всех неприводимых модулей M. Следовательно, x порождается элементами $x_\delta \in A(M)_\delta$, иными словами, $x_\delta \in \bigcap\limits_M A(M)_\delta = J(R)_\delta$, поэтому

$$x \in \Big\langle \bigcup_{\delta\in\Delta} J(R)_\delta \Big\rangle = J(R). \qquad □$$

Определение 4.4. Правый однородный идеал A кольца R называется *регулярным*, если существует такой элемент $a \in R$, что $x - ax \in A$ для всех однородных $x \in R$.

Замечание 4.5. Заметим, что если правый идеал A регулярен и однородный элемент $a \in R$ таков, что $x - ax \in A$ для всех однородных $x \in R$, то $x - ax \in A$ для всех $x \in R$. Действительно, запишем произвольный элемент $x \in R$ в виде суммы однородных элементов $\sum x_\delta$. Имеем $x_\delta - ax_\delta \in A$ для каждого δ, и так как правый идеал A регулярен, то

$$x - ax = \sum x_\delta - a\sum x_\delta = \sum(x_\delta - ax_\delta) \in A.$$

Определение 4.6. Для правого однородного идеала A кольца R определим

$$(A : R) = \Big\langle \bigcup_{\delta\in\Delta} (A : R)_\delta \Big\rangle = \Big\langle \bigcup_{\delta\in\Delta} \{x \in R_\delta \mid Rx \subseteq A\} \Big\rangle.$$

Теорема 4.7. *Пусть R — параградуированное кольцо типа Δ. Тогда $J(R) = \bigcap(A : R)$, где A пробегает множество всех регулярных максимальных правых однородных идеалов кольца R, причём $(A : R)$ — наибольший однородный идеал в R, содержащийся в A.*

Доказательство. Пусть A — регулярный максимальный правый однородный идеал в R и $M = R/A$. Тогда M — параградуированный R-модуль типа Δ с параградуировкой $\delta \to M_\delta = (R_\delta + A)/A$ $(\delta \in \Delta)$. По предложению 3.11 модуль M неприводим. Найдём $A(M)_\delta$. Если $x \in A(M)_\delta$, то $x \in R_\delta$ и $Mx = (0)$, т. е. $(R/A)x = (0)$ и $(r + A)x = A$ для всех $r \in R$. Отсюда следует, что $Rx \subseteq A$ и $x \in (A : R)_\delta$. Аналогично $(A : R)_\delta \subseteq A(M)_\delta$. Значит, $(A : R)_\delta = A(M)_\delta$, следовательно, $(A : R) = A(M)$, поэтому по предложению 3.11 $J(R) = \bigcap(A : R)$, где A пробегает множество всех регулярных максимальных правых однородных идеалов кольца R. Ввиду регулярности A существует такой однородный элемент $a \in R$, что $x - ax \in A$ для всех $x \in R$. В частности, если $x \in (A : R)_\delta$, то $x \in A$ для всех $\delta \in \Delta$, поэтому $A(M) = (A : R)$ — наибольший идеал, содержащийся в A. $\square$

Лемма 4.8. *Если A — регулярный правый однородный идеал параградуированного кольца R типа Δ, то A содержится в максимальном правом однородном идеале кольца R, являющемся регулярным.*

Доказательство. Пусть $a \in R$ — такой однородный элемент, что $x - ax \in A$ для всех $x \in R$. Если $a \in A$, то $x \in A$ для всех $x \in R$, откуда следует, что $A = R$. Значит, $a \notin A$. Пусть $\mathcal{A}$ — множество всех собственных правых однородных идеалов в R, содержащих A. Применяя лемму Цорна, найдём максимальный элемент $A_0 \in \mathcal{A}$. Этот идеал регулярен, так как $x - ax \in A \subseteq A_0$. $\square$

Теорема 4.9. *Пусть R — параградуированное кольцо типа Δ. Тогда $J(R) = \bigcap A$, где A пробегает множество всех максимальных регулярных правых однородных идеалов кольца R.*

Доказательство. По предыдущей теореме $J(R) \subseteq \bigcap A$. Пусть $T = \bigcap A$ и $x \in T$. Рассмотрим множество $S = \{xy + y \mid y \in R\}$. Предположим, что $S \neq R$. Множество S является регулярным правым однородным идеалом и по предыдущей лемме содержится в некотором максимальном регулярном правом однородном идеале A_0. Так как $x \in T$, $xy \in A_0$, то $y \in A_0$ для всех $y \in R$.

Следовательно, $S = R$. В частности, $-x = w + xw$ для некоторого $w \in R$. Если $T \nsubseteq J(R)$, то существует неприводимый параградуированный R-модуль M типа Δ, для которого $MT \neq \{0\}$, откуда следует, что $mT \neq \{0\}$ для некоторого $m \in M$. Можно считать элемент m однородным. Ввиду неприводимости модуля M $mT = M$. Отсюда следует, что $mt = -m$ для некоторого $t \in T$. Тогда существует такое $s \in R$, что $t + s + ts = 0$. Имеем $0 = m(t + s + ts) = = -m + ms - ms = -m$, следовательно, $T \subseteq J(R)$. □

Определение 4.10. Элемент $a \in R$ называется *квазирегулярным справа*, если для любой его однородной компоненты h существует такое $a' \in R$, что $h + a' + ha' = 0$. Однородный правый идеал в R называется *квазирегулярным*, если все его элементы квазирегулярны справа.

Замечание 4.11. Если элемент a квазирегулярен справа, то существует такое $a' \in R$, что $a + a' + aa' = 0$.

Следующая теорема доказывается аналогично неградуированному случаю.

Теорема 4.12. *Пусть R — параградуированное кольцо типа Δ. Тогда $J(R)$ — единственный максимальный правый квазирегулярный однородный идеал кольца R.*

Замечание 4.13. Аналогично можно ввести понятие квазирегулярного слева элемента. С его помощью можно доказать, что радикал кольца R является однородным идеалом.

Мы опускаем доказательство следующей теоремы, поскольку оно полностью аналогично неградуированному случаю. Эта теорема нам понадобится для доказательства теоремы Веддербёрна—Артина для параградуированных колец. Отметим, что понятие артинова параградуированного кольца вводится естественным образом.

Теорема 4.14. *Если R — артиново параградуированное кольцо, то $J(R)$ — нильпотентный однородный идеал.*

5. Теорема плотности

Определение 5.1. Параградуированное (экстраградуированное) кольцо R типа Δ называется *примитивным*, если оно обладает точным неприводимым параградуированным (экстраградуированным) R-модулем типа Δ.

Пусть R — примитивное параградуированное кольцо типа Δ, и пусть M — точный неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ. Мы уже доказали, что $C(M)$ — параградуированное тело типа Δ. Определив $mf := f(m)$ для $m \in M$ и $f \in C(M)$, мы превратим M в $C(M)$-модуль. Является ли он параградуированным? Нам нужно проверить, что существует такое $\zeta \in \Delta$, что $M_\xi C(M)_\eta \subseteq M_\zeta$. Пусть $f \in C(M)_\eta$. Тогда $f \in \mathrm{END}(M)_\eta$, и значит, $f(M_\xi) \subseteq M_{\xi\eta}$, откуда следует, что $M_\xi C(M)_\eta \subseteq M_{\xi\eta}$. Далее мы докажем теорему плотности для параградуированных колец.

Определение 5.2. Будем говорить, что кольцо R действует *плотно* на модуле M, если для любого натурального n, любых однородных элементов $v_1, \ldots, v_n \in M$, линейно независимых над $C(M)$, и любых однородных элементов $w_1, \ldots, w_n \in M$ существует такой элемент $r \in R$, что $w_i = v_i r$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 5.3. *Пусть R — примитивное параградуированное кольцо типа Δ, M — точный неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ. Предположим, что минимальное умножение ассоциативно. Тогда кольцо R плотно действует на M над $D := C(M)$.*

Доказательство. Аналогично неградуированному случаю [5] достаточно доказать, что для любого однородного конечномерного подмодуля V в M над D и любого однородного $m \in M \setminus V$ существует такой однородный элемент $r \in R$, что $Vr = \{0\}$ и $mr \neq 0$. Проведём индукцию по размерности подмодуля V. Пусть $V = V_0 + wD$, где $\dim V_0 = \dim V - 1$ и w — однородный элемент из M, не лежащий в V_0. Пусть $A(V_0)_\delta = \big\{x \in R_\delta \mid V_0 x = \{0\}\big\}$, $\delta \in \Delta$. Тогда для любого $\delta \in \Delta$ из $mA(V_0)_\delta = \{0\}$ следует, что $m \in V_0$, аналогично неградуированному случаю. По построению

$$A(V_0) = \Big\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} A(V_0)_\delta \Big\rangle -$$

однородный правый идеал в R. Так как $w \notin V_0$, $wA(V_0)_\delta \neq \{0\}$ для всех $\delta \in \Delta$ и $wA(V_0)$ — однородный подмодуль в M, то $wA(V_0) = M$. Предположим, что $m \in M \setminus V$ — такой однородный элемент, что для любого однородного $r \in R$ из $Vr = \{0\}$ следует $mr = 0$. Для всякого $x \in M$ существует такое $a \in A(V_0)$, что $x = wa$, поэтому можно определить отображение $\tau \colon M \to M$, $\tau(x) = ma$. Легко убедиться, что τ корректно определено и что $\tau \in D$. Дальнейшие рассуждения аналогичны неградуированному случаю [5]: используя отображение τ, можно показать, что не существует такого однородного элемента $m \in M \setminus V$, для которого равенство $Vr = \{0\}$ влечёт равенство $mr = 0$ при любом однородном r. $\square$

Мы также покажем, что существует базис из однородных элементов модуля M над телом $C(M)$. Действительно, пусть $m \in M$ — такой однородный элемент, что $mf = 0$ для некоторого $f \in C(M)$. Так как $C(M)$ — тело, то $f = 0$. Существование однородного базиса теперь следует из леммы Цорна.

Исследуем кольцо матриц над параградуированным кольцом.

6. Параградуированное матричное кольцо

Пусть R — параградуированное кольцо типа Δ с параградуировкой π. Обозначим его однородную часть через H. Исследуем вопрос, существует ли параградуировка на кольце матриц

$$\mathrm{M}_n(R) = \{(a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in R\},$$

индуцированная параградуировкой π.

Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Delta^n$ — такой набор, что $R_{\delta_j} \neq R_0$ для всех j и что уравнение $x\delta_j = \delta_i y$ имеет решение в $\Delta \times \Delta$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Определим отображение $\pi_M \colon \Delta \to \mathrm{Sg}(\mathrm{M}_n(R), +)$:

$$\pi_M(\xi) = \mathrm{M}_n(R)_\xi(\delta) := \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in R_{\delta_{ij}},\ \delta_{ij}\delta_j = \delta_i\xi,\ \delta_{ij} \in \Delta\} \quad (\xi \in \Delta). \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Если R — область целостности, то отображение* (6.1) *задаёт параградуировку на кольце $\mathrm{M}_n(R)$. В этом случае будем обозначать параградуированное кольцо $\mathrm{M}_n(R)$ через $\mathrm{M}_n(R)(\delta)$.*

Доказательство. Если $\xi = 0$, то

$$\pi_M(\xi) = \mathrm{M}_n(R)_0(\delta) = \{(a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in R_{\delta_{ij}},\ \delta_{ij}\delta_j = \delta_i 0,\ \delta_{ij} \in \Delta\} = \\ = \{(a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in R_{\delta_{ij}},\ \delta_{ij}\delta_j = 0,\ \delta_{ij} \in \Delta\}.$$

Так как $R_{\delta_{ij}}R_{\delta_j} \subseteq R_{\delta_{ij}\delta_j}$ и $\delta_{ij}\delta_j = 0$, то $R_{\delta_{ij}}R_{\delta_j} \subseteq R_0 = \{0\}$, т. е. $R_{\delta_{ij}}R_{\delta_j} = 0$. Набор $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ выбран так, что $R_{\delta_j} \neq \{0\}$ для всех j и по предположению R — область целостности, следовательно, $R_{\delta_{ij}} = \{0\}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Значит, $\mathrm{M}_n(R)_0(\delta) = \{O\}$, где O — нулевая матрица. Пусть $\xi_1 < \xi_2$. Тогда

$$\delta_i\xi_1 < \delta_i\xi_2. \tag{6.2}$$

Если $(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(R)_{\xi_1}(\delta)$, то для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое $\delta^1_{ij} \in \Delta$, что $a_{ij} \in R_{\delta^1_{ij}}$ и $\delta^1_{ij}\delta_j = \delta_i\xi_1$. Из (6.2) следует, что $\delta^1_{ij}\delta_j < \delta_i\xi_2$. Далее, пусть $\delta^2_{ij} \in \Delta$ — такой элемент, что $\delta^2_{ij}\delta_j = \delta_i\xi_2$. Тогда $a_{ij} \in R_{\delta^2_{ij}}$, и поэтому $\mathrm{M}_n(R)_{\xi_1}(\delta) \subseteq \mathrm{M}_n(R)_{\xi_2}(\delta)$. Таким образом, первая аксиома параградуировки проверена.

Пусть $\theta \subseteq \Delta$ и

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \in \bigcap_{\xi\in\theta} \mathrm{M}_n(R)_\xi(\delta).$$

Тогда $A \in \mathrm{M}_n(R)_\xi(\delta)$ для всех $\xi \in \theta$. Следовательно, для всех $\xi \in \theta$ существует такое δ^ξ_{ij}, что $a_{ij} \in R_{\delta^\xi_{ij}}$ и $\delta^\xi_{ij}\delta_j = \delta_i\xi$, следовательно,

$$a_{ij} \in \bigcap_{\xi\in\theta} R_{\delta^\xi_{ij}} = R_{\inf\limits_{\xi\in\theta}\delta^\xi_{ij}}.$$

Итак, вторая аксиома параградуировки проверена.

Третья аксиома, очевидно, выполнена, пятая аксиома легко проверяется. Также ясно, что множество $\bigcup\limits_{\xi\in\Delta} \mathrm{M}_n(R)_\xi(\delta)$ порождает аддитивную группу кольца $\mathrm{M}_n(R)$. Действительно, каждую матрицу из $\mathrm{M}_n(R)$ можно записать в виде суммы матриц, для каждой из которых один из элементов однороден, а остальные равны 0 (так как R порождается своей однородной частью). Если указанный однородный элемент принадлежит подгруппе R_ξ, $\xi \in \Delta$, то соответствующая матрица принадлежит $\mathrm{M}_n(R)_\lambda(\delta)$, где $\lambda \in \Delta$ — такой элемент, для которого $\xi\delta_j = \delta_i\lambda$. Несложно показать, что для всех $\xi, \eta \in \Delta$ найдётся такое $\zeta \in \Delta$, что $\mathrm{M}_n(R)_\xi(\delta)\mathrm{M}_n(R)_\eta(\delta) \subseteq \mathrm{M}_n(R)_\zeta(\delta)$. □

Следующая теорема нам не понадобится, но представляет самостоятельный интерес.

Теорема 6.2. *Пусть R — область целостности. Если для всех $\lambda \in \Delta$ подгруппа R_λ содержит обратимый элемент, то подгруппа $\mathrm{M}_n(R)_\lambda(\delta)$ матричного кольца $\mathrm{M}_n(R)(\delta)$ содержит регулярную матрицу.*

Доказательство. Пусть $(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(R)_\lambda(\delta)$. Тогда $a_{ij} \in R_{\delta_{ij}}$ для некоторого $\delta_{ij} \in \Delta$, причём $\delta_{ij}\delta_j = \delta_i\lambda$. По предположению подгруппа $R_{\delta_{ij}}$ содержит обратимый элемент, скажем $r_{\delta_{ij}}$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} r_{\delta_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{\delta_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{\delta_{nn}} \end{pmatrix}$$

регулярна. □

7. Теорема Веддербёрна—Артина

В этом разделе мы предполагаем выполненными условия теоремы 6.1.

Предложение 7.1. *Пусть M — свободный параградуированный правый R-модуль типа Δ с однородным базисом $e_1, \dots, e_n$, $\delta(e_i) = \delta_i$, $i = 1, \dots, n$, и пусть минимальное умножение коммутативно. Тогда $\mathrm{END}(M) \cong \mathrm{M}_n(R)(\delta)$, где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.*

Доказательство. Пусть $f_\lambda \in \mathrm{END}(M)_\lambda$, где $\lambda \in \Delta$. Тогда $f_\lambda(M_\xi) \subseteq M_{\xi\lambda}$ для всех $\xi \in \Delta$. Обозначив $\delta_i := \delta(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, получим, что $f_\lambda(e_i) \in M_{\delta_i\lambda}$. Таким образом, $f_\lambda(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j a_{ij}$, причём $\delta(a_{ij})\delta_j \leqslant \delta_i\lambda$, следовательно, $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(R)_\lambda(\delta)$. □

Применяя доказанное предложение к случаю примитивного параградуированного кольца типа Δ, мы получим следующую теорему.

Теорема 7.2. *Пусть R — примитивное параградуированное кольцо типа Δ и M — точный неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ, конечномерный над $C(M)$. Тогда $\mathrm{END}(M) \cong \mathrm{M}_n\big(C(M)\big)(\delta)$ для некоторого $\delta \in \Delta^n$, где $n = \dim M$.*

Замечание 7.3. Набор $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Delta^n$ можно выбрать так, что $\delta_i = \delta(e_i)$, где (e_i) — однородный базис.

Теорема 7.4. *Пусть R — примитивное параградуированное кольцо типа Δ, причём минимальное умножение ассоциативно и коммутативно. Тогда либо $R \cong \mathrm{M}_n(D)(\delta)$ для некоторого $\delta \in \Delta^n$, либо для некоторого натурального m и для некоторого параградуированного тела D типа Δ существует однородное подкольцо S_m в R, которое можно гомоморфно отобразить на $\mathrm{M}_m(D)(\delta)$.*

Доказательство. Пусть M — точный неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ. Тогда M является векторным пространством над $D = C(M)$. Если $\dim M = n < \infty$, то по теоремам 5.3, 7.2 получаем, что $R \cong \mathrm{M}_n(D)(\delta)$ для некоторого $\delta \in \Delta^n$. Предположим теперь, что M бесконечномерно над D. Найдём однородный базис $v_1, \ldots, v_m, \ldots$ в M. Если $M_m = v_1 D + \ldots + v_m D$, то рассмотрим

$$(S_m)_\lambda = \{x \in R_\lambda \mid M_m x \subseteq M_m\}$$

и

$$(W_m)_\lambda = \big\{x \in R_\lambda \mid M_m x = \{0\}\big\},$$

где $\lambda \in \Delta$. Тогда

$$\Big\langle \bigcup_{\lambda\in\Delta} (S_m)_\lambda \Big\rangle \Big/ \Big\langle \bigcup_{\lambda\in\Delta} (W_m)_\lambda \Big\rangle \cong \mathrm{M}_m(D)(\delta)$$

для некоторого $\delta \in \Delta^n$. По построению

$$S_m = \Big\langle \bigcup_{\lambda\in\Delta} (S_m)_\lambda \Big\rangle -$$

однородное подкольцо в R. □

Теперь мы готовы применить полученные результаты для доказательства параградуированного аналога теоремы Веддербёрна—Артина.

Теорема 7.5. *Пусть R — простое параградуированное артиново кольцо типа Δ, и пусть минимальное умножение ассоциативно и коммутативно. Тогда R изоморфно кольцу матриц $\mathrm{M}_n\big(C(M)\big)(\delta)$ для некоторого $\delta \in \Delta^n$, где число n определено однозначно и тело $C(M)$ определено однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Как и в неградуированном случае [5], из полученных результатов можно вывести, что кольцо R примитивно. Пусть M — точный неприводимый параградуированный R-модуль типа Δ. Докажем, что M конечномерен над $D = C(M)$. Если $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ линейно независимы над D, положим

$$(A_m)_\lambda = \{x \in R_\lambda \mid v_i x = 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}.$$

Тогда

$$A_m = \Big\langle \bigcup_{\lambda\in\Delta} (A_m)_\lambda \Big\rangle -$$

однородный правый идеал в R. По теореме 5.3 все включения

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

строгие. Так как кольцо R артиново, то существует такое n, что $A_n = A_{n+k}$ для всех $k \geqslant 1$. Оставшиеся утверждения следуют из теорем 5.3 и 7.2.

Утверждения об однозначности числа n и тела D доказываются аналогично неградуированному случаю. □

Теперь легко получить следующую теорему.

Теорема 7.6. *Параградуированное полупростое артиново кольцо является прямой суммой конечного числа параградуированных простых артиновых колец.*

Из двух последних теорем вытекает следующий результат.

Теорема 7.7. *Пусть R — полупростое параградуированное артиново кольцо типа Δ, причём минимальное умножение ассоциативно и коммутативно. Тогда существуют такие натуральные числа $k, n_1, \ldots, n_k$, параградуированные тела $D_1, \ldots, D_k$ и наборы $\delta_1 \in \Delta^{n_1}, \ldots, \delta_k \in \Delta^{n_k}$, для которых*

$$R \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1)(\delta_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_{n_k}(D_k)(\delta_k).$$

Литература

[1] Вукович М., Илич-Георгиевич Э. Параградуированные кольца и их идеалы // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 83—93.

[2] Bourbaki N. Algèbre. Chap. II. — Paris: Hermann, 1962.

[3] Chadeyras M. Essai d'une théorie noetherienne pour les anneaux commutatifs, dont la graduation est aussi générale que possible // Suppl. Bull. Soc. Math. Fr. Mémoire. — 1970. — Vol. 22. — P. 1—143.

[4] Halberstadt E. Théorie artinienne homogène des anneaux gradués à grades non commutatifs réguliers: Thèse doct. sci. math. Arch. orig. Cent. Doc. C. N. R. S., no. 5962. — Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1971.

[5] Herstein I. N. Noncommutative Rings. — The Mathematical Association of America, 2005. — (Carus Math. Monographs, Mathematical Association of America Textbooks; Vol. 15).

[6] Ilić-Georgijević E. On the categories of paragraded groups and modules of type Δ // Sarajevo J. Math. — 2012. — Vol. 8 (21). — P. 193—202.

[7] Krasner M. Hypergroupes moduliformes et extramoduliformes. — C. R. Acad. Sci. Paris. — 1944. — Vol. 219. — P. 473—476.

[8] Krasner M. Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1944. — Vol. 219. — P. 345—347.

[9] Krasner M. Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps valués: Hypergroupe d'inertie et de ramification; théorie extrinsèque de la ramification. — C. R. Acad. Sci. Paris. — 1945. — Vol. 220. — P. 28—30.

[10] Krasner M. Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps valués complets // Algèbre et théorie des nombres (Colloque Int. du C. N. R. S. No. 24, Paris 1949). — Paris: C. N. R. S., 1950.

[11] Krasner M. Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes // Séminaire Krasner, 1953—1954. Vol. 1, exp. 4. — Sécr. Math. Fac. Sc. Paris. — P. 39.

[12] Krasner M. Théorie élémentaire des corpoïdes commutatifs sans torsion // Séminaire Krasner, 1953—1954. Vol. 2, exp. 5. — Sécr. Math. Fac. Sc. Paris, 1956.

[13] Krasner M. Anneaux gradués généraux // Colloque d'Algébre Rennes. — 1980. — P. 209—308.

[14] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). I // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 9. — P. 350—352.

[15] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). II // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 10. — P. 389—391.

[16] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). III // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1987. — Vol. 63, no. 1. — P. 10—12.

[17] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules) // Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. No. 77. — Kingston, Ontario, Canada: Queen's University, 1987.

[18] Vuković M. Structures graduées et paragraduées: Prepublication de l'Institut Fourier. Université de Grenoble I. No. 536. — 2001.

[19] Vuković M. About Krasner's and Vuković's paragraduations // Int. Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 19—27 August 2010.

[20] Vuković M., Ilić-Georgijević E. Paragraded Structures. — Book in preparation.