Ортогональное градуированное пополнение градуированных модулей

А. Л. КАНУННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца и модули, ортогональная полнота.

Аннотация

Важным этапом в теории ортогональной полноты К. И. Бейдара и А. В. Михалёва является построение и исследование функтора ортогонального пополнения. В данной работе продолжено начатое автором исследование ортогонального градуированного пополнения. Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей и градуируются некоторой группой, а модули над такими кольцами градуируются полигоном над этой группой. Отметим, что градуировка модуля по самой группе оказывается частным случаем более общей и естественной конструкции.

В статье для каждой градуированной топологии $\mathcal{F}$ gr-полупервичного кольца R, состоящей только из gr-плотных правых идеалов и содержащей все плотные градуированные двусторонние идеалы, построен функтор $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ ортогонального градуированного пополнения, переводящий категорию правых градуированных R-модулей в категорию правых градуированных $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$-модулей. Важной особенностью градуированного случая является то обстоятельство, что для правого градуированного R-модуля M модуль $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ (а с ним и модуль $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$) может не быть ортогонально полным. В работе доказан критерий его ортогональной полноты, из которого, в частности, следует, что ортогональная полнота имеет место в случае градуировки по конечному полигону. Также исследованы свойства функтора $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ и установлен критерий его точности.

Abstract

A. L. Kanunnikov, Orthogonal graded completion of modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 141—152.

The construction and study of the orthogonal completion functor is an important step in the orthogonal completeness theory developed by K. I. Beidar and A. V. Mikhalev. The research of the graded orthogonal completion begun by the author is continued in this work. We consider associative rings graded by a group and modules over such rings graded by a polygon over the same group. Note that the graduation of a module by a group is a partial case of a more general and natural construction.

For any topology $\mathcal{F}$ of a graded ring R consisting of graded right dense ideals and containing all two-sided graded dense ideals, the functor $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ of the graded orthogonal completion is constructed and studied in this paper. This functor maps the category of right graded R-modules into the category of right graded $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$-modules. The important feature of the graded case is that the graded modules $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ and $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ (where M is a right graded R-module) may not be orthogonal complete. A criterion for the orthogonal completeness is proved. As a corollary we get that these modules are orthogonal complete in the case of a finite polygon. The properties of the functor $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ and a criterion of its exactness are also established.

1. Градуированные модули частных

Определение 1. Кольцо R называется *градуированным по группе* G, если R — прямая сумма своих аддитивных подгрупп R_g, $g \in G$:

$$R = \bigoplus_{g\in G} R_g, \quad \text{причём} \quad R_g R_h \subseteq R_{gh} \quad \text{для всех} \quad g, h \in G.$$

Элементы множества

$$h(R) := \bigcup_{g\in G} R_g$$

называются *однородными*.

Напомним, что непустое множество S называется *правым полигоном* над группой G с единицей e, если на S задано действие группы G, т. е. такое отображение $S \times G \to S$, $(s, g) \mapsto sg$, что $(sg)h = s(gh)$ и $se = s$ для всех $s \in S$, $g, h \in G$.

Модули над кольцом, градуированным по группе, естественно градуировать полигоном над этой группой.

Определение 2. Пусть R — G-градуированное кольцо, S — правый G-полигон. Правый R-модуль M называется S-градуированным, если M — прямая сумма своих аддитивных подгрупп M_s, $s \in S$:

$$M = \bigoplus_{s\in S} M_s, \quad \text{причём} \quad M_s R_g \subseteq M_{sg} \quad \text{для всех} \quad g \in G, s \in S.$$

В частности, если $S_G = G_G$, то говорят о модуле M, градуированном по группе G.

Определение 3. Непустое семейство $\mathcal{F}$ градуированных правых идеалов градуированного кольца R называется *градуированной топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если $I \in \mathcal{F}$ и $r \in h(R)$, то $r^{-1}I := \{x \in R \mid rx \in I\} \in \mathcal{F}$;
2) если I — правый градуированный идеал кольца R, $J \in \mathcal{F}$ и $r^{-1}I \in \mathcal{F}$ для всех $r \in h(J)$, то $I \in \mathcal{F}$;
3) если I — правый градуированный идеал кольца R, $J \in \mathcal{F}$ и $J \subseteq I$, то $I \in \mathcal{F}$;
4) если $I, J \in \mathcal{F}$, то $I \cap J \in \mathcal{F}$.

Замечание 1. Условия 3) и 4) вытекают из условий 1) и 2) (см. [11, лемма 3.1]).

Определение 4. Пусть M — правый S-градуированный R-модуль, где R — G-градуированное кольцо, S — правый G-полигон, $\mathcal{F}$ — градуированная топология на R. Определим градуированные модули

$$t_{\mathcal{F}}(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}_R(m) \in \mathcal{F}\}, \quad Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) = \varinjlim_{I\in\mathcal{F}} \mathrm{HOM}_R\big(I, M/t_{\mathcal{F}}(M)\big)$$

и отображение

$$\varphi_M\colon M \to Q_{\mathcal{F}}(M), \quad m \mapsto \hat{m}\colon I \to M/t_{\mathcal{F}}(M), \quad \hat{m}(x) = mx + t_{\mathcal{F}}(M).$$

Замечание 2. Следующие утверждения вытекают из определений аналогично неградуированному случаю (см. [11, с. 33—36]). Поясним только специфику градуированного случая.

1. $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$ — G-градуированное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ — правый S-градуированный $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$-модуль. Именно, градуировка модуля M по полигону S индуцирует S-градуировку на $\mathrm{HOM}_R(I, \bar{M})$, где $\bar{M} := M/t_{\mathcal{F}}(M)$:
$$\mathrm{HOM}_R(I, \bar{M})_s = \{f \in \mathrm{Hom}_R(I, \bar{M}) \mid \forall\, g \in G\ \forall\, x \in I_g\ f(x) \in \bar{M}_{sg}\},$$
а значит, и на $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$-модуле $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$. В случае $S_G = G_G$ и $M = R$ получаем G-градуировку на кольце $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$.
2. Отображение φ_M является однородным степени e гомоморфизмом S-градуированных R-модулей, и $\mathrm{Ker}\,\varphi_M = t_{\mathcal{F}}(M)$; отображение φ_R является гомоморфизмом градуированных колец.
3. $\mathrm{HOM}_R\big(I, Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ для всех $I \in \mathcal{F}$, следовательно, $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)\big) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$.
4. $\forall m \in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) \setminus 0\ \exists\, I \in \mathcal{F}\ 0 \neq mI \in \varphi_M(M)$.
5. Для G-градуированного кольца A через $\mathrm{gr.\,mod}_S\text{-}A$ обозначена категория правых S-градуированных A-модулей. Тогда $t_{\mathcal{F}}$ — жёсткое кручение в категории $\mathrm{gr.\,mod}\,R$, т. е. идемпотентный точный слева функтор (в [10, лемма II.9.4] это доказано в случае $S = G$), и
$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}\colon\ \mathrm{gr.\,mod}_S\text{-}R \to \mathrm{gr.\,mod}_S\text{-}Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) \text{ —}$$
точный слева функтор.

Определение 5. Градуированный правый идеал I градуированного кольца R называется *gr-плотным,* если выполнено следующее условие:

$$\forall\, r_1 \in h(R) \setminus 0\ \forall\, r_2 \in h(R)\ \exists\, r \in h(R)\ r_1 r \neq 0,\ r_2 r \in I.$$

Предложение 1 [1]. *Правый gr-плотный идеал является плотным* (*как правый идеал кольца, рассматриваемого без градуировки*).

Далее через $\mathcal{D}$ обозначена совокупность всех gr-плотных правых идеалов градуированного кольца R.

Предложение 2. *Верны следующие утверждения*:

1) *совокупность $\mathcal{D}$ является градуированной топологией на R*;

2) $t_{\mathcal{F}}(R)=0$, *если и только если* $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}$ *для любой градуированной топологии* $\mathcal{F}$ *на* R;
3) *если* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{F}$ — *градуированные топологии на* R, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{T}$ *и* $t_{\mathcal{T}}(M)=0$, *то* $t_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big)=0$, $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M)$ *и* $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M)=Q_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из [5, пункт 1.10] и предложения 1.

Докажем второе утверждение. Пусть $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}$. Тогда для всех $r\in h(R)\setminus 0$ и всех $I\in\mathcal{F}$ имеем $rI\neq 0$, следовательно, $t_{\mathcal{F}}(R)=0$. Обратно, предположим, что $t_{\mathcal{F}}(R)=0$. Пусть градуированный правый идеал $I\in\mathcal{F}$ и элементы $a,b,c\in h(R)$ таковы, что $aI=0$ и $b(c^{-1}I)=0$. Поскольку $c^{-1}I\in\mathcal{F}$, то $a,b\in t_{\mathcal{F}}(R)=0$. Поэтому правый градуированный идеал I является gr-плотным и $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{D}$.

Докажем третье утверждение. Сначала докажем, что $t_{\mathcal{F}}(M)=0$. Так как $t_{\mathcal{F}}(M)\subseteq t_{\mathcal{T}}(M)=0$, то по утверждению 2 замечания 2 получаем, что φ_M — мономорфизм правых градуированных R-модулей. Возьмём элемент $0\neq m\in h\Big(t_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big)\Big)$. Тогда $mI=0$ для некоторого правого градуированного идеала $I\in\mathcal{T}$, а значит, $0\neq mr\in\varphi_M(M)$ для некоторого $r\in h(R)$ по утверждению 4 замечания 2. Поскольку $r^{-1}I\subseteq\mathcal{T}$ и $mr(r^{-1}I)\subseteq mI=0$, то $mr\in t_{\mathcal{T}}\big(\varphi_M(M)\big)$. Но φ_M — мономорфизм, следовательно, $t_{\mathcal{T}}\big(\varphi_M(M)\big)=0$, а тогда $mr=0$. Полученное противоречие показывает, что $t_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big)=0$.

Далее рассмотрим канонический (однородный степени e) гомоморфизм градуированных модулей

$$\alpha\colon \varinjlim_{I\in\mathcal{F}}\mathrm{HOM}_R(I,M)\to\varinjlim_{I\in\mathcal{T}}\mathrm{HOM}_R(I,M).$$

и докажем, что α — мономорфизм. Если это не так, то найдутся такие градуированные правые идеалы $I\in\mathcal{F}$, $J\in\mathcal{T}$ и такой гомоморфизм $f\colon I\to M$, что $f(I)\neq 0$, но $f(I\cap J)=0$.

Зафиксируем такой элемент $r\in h(I)$, что $f(a)\neq 0$, и положим $K:=$ $:=(J\cap r^{-1}I)=0$. Тогда $K\in\mathcal{T}$ и

$$f(r)K=f(rK)\subseteq f(J\cap I)=0,$$

откуда следует, что $f(r)\in t_{\mathcal{T}}(M)$. Но $f(r)\neq 0$. Получили противоречие. Итак, α — мономорфизм. Отождествляя модуль $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ с его образом при мономорфизме α, получаем требуемое включение $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M)$.

Наконец, так как $t_{\mathcal{F}}(M)=t_{\mathcal{T}}(M)=0$, то можно считать, что $M\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M)$. Тогда по утверждению 3 замечания 2 получаем, что

$$Q^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}(M)\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big)\subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M)\big)=Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{T}}(M). \qquad \square$$

Отметим, что $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)=Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — полное правое градуированное кольцо частных кольца R.

Определение 6. Градуированное кольцо R называется *gr-полупервичным,* если оно удовлетворяет любому из следующих равносильных условий:

1) R не содержит ненулевых нильпотентных градуированных идеалов;

2) R не содержит ненулевых нильпотентных правых (левых) градуированных идеалов;
3) если $a \in h(R)$ и $aRa = 0$, то $a = 0$.

Отметим хорошо известный факт об аннуляторах градуированных идеалов gr-полупервичных колец (см., например, [2]).

Предложение 3. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, I — градуированный идеал в R. Тогда верны следующие утверждения*:

1) $r_R(I) = l_R(I)$;
2) $I \in \mathcal{D}$ *тогда и только тогда, когда* $r_R(I) = 0$;
3) $I \cap r_R(I) = 0$;
4) $I \oplus r_R(I) \in \mathcal{D}$.

В [1, 2, 6] изучался градуированный расширенный центроид $C^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервичного кольца R — максимальное градуированное подкольцо центра полного градуированного кольца частных $Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)$ кольца R.

Предложение 4 [1, 2, 6]. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, $C := C^{\mathrm{gr}}(R)$, $B = \{u \in C_e \mid u^2 = u\}$. Тогда верны следующие утверждения*:

1) *кольцо C gr-регулярно и gr-самоинъективно*;
2) *кольцо C_e регулярно и самоинъективно*;
3) *кольцо R gr-первично тогда и только тогда, когда $B \cong \mathbb{Z}_2$.*

Обозначим через $\mathcal{P}$ градуированную топологию, состоящую из всех двусторонних идеалов кольца R, принадлежащих $\mathcal{D}$.

Определение 7. Для любой градуированной топологии $\mathcal{F}$, для которой $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, определим кольцо $C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$ — максимальное градуированное подкольцо центра кольца $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$.

Предложение 5. *Для любой градуированной топологии $\mathcal{F}$, такой что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, справедливы равенства*

$$C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R) = C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) = C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R).$$

Доказательство. Включения $\subseteq$ следуют из того, что

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R) \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)$$

и

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}\big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)\big).$$

Обратно, пусть $a \in h(C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R))$. Тогда $D := a^{-1}R$ — gr-плотный двусторонний идеал в R и $D \in \mathcal{P}$. Отображение $D \ni x \mapsto ax$ определяет однородный элемент c кольца $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R)$. Так как $(a-c)x = 0$ для всех $x \in D$ и $D \in \mathcal{D}$, то $a = c \in C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R)$.

Таким образом, $h(C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R)) = h\big(C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)\big)$, а значит, $C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{P}}(R) = C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) = C^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)$. $\square$

2. Ортогональное градуированное пополнение относительно топологии

Теорема 1 [2, следствие 8.5; 8, теорема 2.3.9, с. 98]. *Пусть C — коммутативное регулярное самоинъективное кольцо, B — булево кольцо его идемпотентов со сложением*

$$u \oplus v = u + v - 2uv$$

и порядком

$$u \leqslant v \iff uv = u.$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *полное кольцо частных $Q(C)$ кольца C совпадает с C;*
2) *идеал $\operatorname{Ann}_C(T)$ является главным для любого подмножества $T \subseteq C$, причём порождающий этого идеала можно выбрать в B;*
3) *булево кольцо B ортогонально полно.*

Определение 8. Сохраним предположения теоремы 1. Подмножество M несингулярного C-модуля X называется *ортогонально полным относительно булева кольца B*, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий [3, с. 36; 8, с. 100]:

1) для любой плотной ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в M существует такой элемент $x \in M$, что $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$;
2) для любой ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в M существует такой элемент $x \in M$, что $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $vx = 0$, где элемент $v \in B$ однозначно определён условием
$$\operatorname{Ann}_C\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma C\right) = vC$$
(второе утверждение теоремы 1).

Замечание 3.

1. Из несингулярности C-модуля X следует, что элемент x в данном выше определении определён однозначно [8, с. 100]. Этот элемент обозначается через $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma$.
2. Если кольцо B конечно, то ортогональные суммы $\sum^{\perp}$ совпадают с обычными конечными суммами $\sum$.

В [6] автор ввёл понятие ортогональной gr-полноты градуированного подмножества T кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и построил ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(T)$ для любого градуированного подмножества $T \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$. В частности, было построено ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервичного кольца R, являющееся градуированным правым кольцом частных кольца R.

Всюду далее R — gr-полупервичное кольцо, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ — градуированные топологии на R:

$\mathcal{D}$ состоит из gr-плотных правых идеалов,

$\mathcal{P}$ состоит из двусторонних градуированных идеалов, принадлежащих $\mathcal{D}$;

$$C := C_{\mathcal{P}}^{\mathrm{gr}}(R), \quad B := \{u \in C_e \mid u^2 = u\}; \tag{1}$$

S_G — G-полигон, M_R — S-градуированный R-модуль.

Теорема 2. *Во введённых обозначениях верны следующие утверждения*:

1) C_e*-модуль* $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$ *несингулярен и ортогонально gr-полон* (*относительно* B), *т. е. все* C_e*-модули* $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$, $s \in S$, *ортогонально полны*;
2) C_e*-модуль* $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$ *ортогонально полон тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие*:

для любой бесконечной ортогональной системы идемпотентов $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *в* B *существуют такие конечные подмножества* $S_0 \subseteq S$ *и* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, *что* $u_\gamma M_s = 0$ *для всех пар* $(s, \gamma) \in (S \setminus S_0) \times (\Gamma \setminus \Gamma_0)$. (∗)

Доказательство. 1. Покажем, что $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$ — несингулярный C_e-модуль при всех $s \in S$. Пусть $x \in \mathrm{Sing}_{C_e}(Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s)$. Тогда $\mathrm{Ann}_{C_e}(x) = (1 - E[x])C_e$ — gr-существенный идеал в C_e и, поскольку $(1-E[x])C_e \cap E[x]C_e = 0$, то $E[x] = 0$, откуда следует, что $x = 0$.

2. Пусть $s \in S$, $\{u_\gamma\}_\gamma \subseteq B$ — плотное ортогональное подмножество, $\{t_\gamma\}_\gamma \subseteq Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$. Тогда градуированный идеал $\sum\limits_\gamma u_\gamma Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$ плотный, а отображение

$$f\colon \begin{cases} \sum\limits_\gamma u_\gamma Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M) \to Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M), \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{\gamma_i} u_{\gamma_i} \mapsto \sum\limits_{i=1}^n t_{\gamma_i} a_{\gamma_i} u_{\gamma_i} \end{cases}$$

корректно и задаёт однородный степени s гомоморфизм правых $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$-модулей, который определяет элемент $t \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Поскольку $f(u_\gamma) = t_\gamma u_\gamma$, то $t_\gamma u_\gamma = t u_\gamma$.

3. Пусть $s \in S$, $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — плотная ортогональная система в B, $x_\gamma \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда, поскольку модуль $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$ ортогонально полный, существует такой элемент $x \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$, что $x u_\gamma = x_\gamma u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $x_\gamma u_\gamma \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$, то элемент x в последнем равенстве можно заменить на его компоненту x_s. Но из несингулярности модуля $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$ следует, что элемент x определяется однозначно. Значит, $x = x_s$. Таким образом, если $x_\gamma \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$, то

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}{}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s.$$

Поэтому все модули $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)_s$, $s \in S$, ортогонально полны.

Если кольцо B конечно или полигон S конечен, то утверждение $(*)$ верно. Иначе в B найдётся бесконечная ортогональная система $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Если для неё утверждение неверно, то найдутся такие счётные множества $\{\gamma_k\in\Gamma \mid k\in\mathbb{N}\}$ и $\{s_k\in S \mid k\in\mathbb{N}\}$, что $u_{\gamma_k}Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)_{s_k}\neq 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Рассмотрим в $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ систему элементов

$$x_\gamma=\begin{cases}x_{s_k}, & \gamma=\gamma_k,\\ 0, & \gamma\notin\{\gamma_k \mid k\in\mathbb{N}\},\end{cases}$$

где $x_{s_k}\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)_{s_k}$ такие, что $u_{\gamma_k}x_{s_k}\neq 0$. По $(*)$ для систем $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ существует такой элемент $x\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$, что $u_\gamma x=u_\gamma x_\gamma$ для всех $\gamma\in\Gamma$, в частности, $u_{\gamma_k}x=u_{\gamma_k}x_{s_k}$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Так как множество $\{s_k\in S \mid k\in\mathbb{N}\}$ бесконечно, то существует элемент $s_m\in S\setminus\operatorname{Supp}(x)$. Тогда $0=(u_{\gamma_m}x)_{s_m}=u_{\gamma_m}x_{s_m}\neq 0$. Получено противоречие.

4. Возьмём произвольную плотную ортогональную систему $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и произвольную систему $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$. По $(*)$ для каждого $s\in S$ существует однозначно определённый элемент

$$x^{(s)}:=\sum_{\gamma}^{\perp}u_\gamma x_\gamma^{(s)}\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)_s,$$

а требуется найти такой элемент $x\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$, что $u_\gamma x_\gamma=u_\gamma x$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Если множество Γ конечно, то все $x^{(s)}$, кроме конечного числа, равны 0, поэтому подойдёт элемент $x=\sum\limits_{s\in S}x^{(s)}$. Если множество Γ бесконечно, то по условию найдутся такие конечные множества $S_0\subseteq S$ и $\Gamma_0\subseteq\Gamma$, что $u_\gamma Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)_s=0$ для всех пар $(s,\gamma)\in(S\setminus S_0)\times(\Gamma\setminus\Gamma_0)$. Множество

$$J:=\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0}\operatorname{Supp}(x_\gamma)\cup S_0$$

конечно (так как множества S_0, Γ_0 и $\operatorname{Supp}(x_\gamma)$ при всех $\gamma\in\Gamma$ конечны) и обладает тем свойством, что $u_\gamma x_\gamma^{(s)}=0$ для всех пар $(s,\gamma)\in(S\setminus J)\times\Gamma$. Поэтому в качестве x подходит элемент $\sum\limits_{j\in J}x^{(j)}$. $\square$

Следствие 1. *В обозначениях теоремы 2 предположим, что группа G конечна или полигон S конечен. Тогда C_e-модуль $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ ортогонально полон.*

Предложение 6. *В обозначениях теоремы 2 предположим, что $x,y\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$, $r\in Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$,*

$$x=\sum_{\gamma}^{\perp}x_\gamma u_\gamma,\quad y=\sum_{\delta}^{\perp}y_\delta v_\delta,\quad r=\sum_{\delta}^{\perp}r_\delta v_\delta,$$

где $(u_\gamma)_\gamma$ и $(v_\delta)_\delta$ — плотные ортогональные системы кольца B (см. (1)). *Тогда $(u_\gamma v_\delta)_{(\gamma,\delta)}$ — плотная ортогональная система в B и*

$$x+y=\sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp}(x_\gamma+y_\delta)u_\gamma v_\delta,\quad xr=\sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp}(x_\gamma r_\delta)u_\gamma v_\delta.$$

Кроме того, для всех $s \in S$

$$O^{\mathrm{gr}}(M)_s =$$
$$= \left\{ \sum_{\gamma}^{\perp} t_\gamma v_\gamma \;\middle|\; \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq M_s,\ \{u_\gamma\}_\gamma \text{ — плотная ортогональная система в } B \right\}.$$

Доказательство. Плотность и ортогональность системы $(u_\gamma v_\delta)_{(\gamma,\delta)}$ ясна. Далее,

$$(x+y)u_\gamma v_\delta = (xu_\gamma)v_\delta + (yv_\delta)u_\gamma) = (x_\gamma u_\gamma)v_\delta + (y_\delta v_\delta)u_\gamma) = (x_\gamma + y_\delta)u_\gamma v_\delta,$$
$$(xr)u_\gamma v_\delta = (xu_\gamma)(rv_\delta) = (x_\gamma u_\gamma)(r_\delta v_\delta) = (x_\gamma r_\delta)u_\gamma v_\delta,$$

откуда следуют первые два равенства. Последнее равенство доказывается так же, как предложение 7 в [6]. □

3. Функтор ортогонального градуированного пополнения

Определение 9. Сохраним обозначения теоремы 2 и назовём $\mathcal{F}$-ортогональным градуированным пополнением $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ модуля M ортогональное градуированное пополнение подмножества $M/t_{\mathcal{F}}(M)$ в правом $C^{\mathrm{gr}}(R)$-модуле $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$.

Отметим, что построенное в [6] ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервичного кольца R есть $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}}(R)$.

Теорема 3. *В условиях определения* 9

$$O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}\colon\ \mathrm{gr.\,mod}_S\text{-}R \to \mathrm{gr.\,mod}_S\text{-}O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) \text{ —}$$

аддитивный функтор, переводящий мономорфизмы (эпиморфизмы) в мономорфизмы (эпиморфизмы). Кроме того, если $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(M,N)$ и $x = \sum_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma$, где $x_\gamma \in \bar{M} := M/t_{\mathcal{F}}(M)$ и $(u_\gamma)_\gamma$ — плотная ортогональная система в B, то

$$O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(\varphi)(x) = \sum_{\gamma}^{\perp} \bar{\varphi}(x_\gamma)u_\gamma \in \bar{N} := N/t_{\mathcal{F}}(N),$$

где $\bar{\varphi} \in \mathrm{HOM}_R(\bar{M},\bar{N})$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом φ.

Доказательство. Поскольку $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ — функтор, то отображение

$$\psi := Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(\varphi)\colon Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) \to Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(N) \text{ —}$$

гомоморфизм правых $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$-модулей, причём ограничение ψ на $\bar{M}$ совпадает с $\bar{\varphi}$. Покажем, что $\psi\big(O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)\big) \subseteq O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(N)$. Пусть

$$x = \sum_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M),$$

где $(u_\gamma)_\gamma$ — плотная ортогональная система в B, $x_\gamma \in \bar{M}$. Тогда для всех γ

$$\varphi(x)u_\gamma = \varphi(xu_\gamma) = \psi(x_\gamma u_\gamma) = \psi(x_\gamma)u_\gamma = \bar{\varphi}(x_\gamma)u_\gamma.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = \sum_\gamma^{\perp} \bar{\varphi}(x_\gamma)u_\gamma \in O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(N).$$

Итак, если $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ — ограничение гомоморфизма ψ на $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(R)$-модуль $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$, то образ ограничения отображения $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ содержится в $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(R)$-модуле $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(N)$.

Чтобы доказать, что $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}$ — функтор, остаётся проверить равенство

$$O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\chi)O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi) = O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\chi\varphi)$$

для всех гомоморфизмов $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(M,N)$ и $\chi \in \mathrm{HOM}_R(N,K)$. Но это равенство сразу следует из равенства

$$Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\chi)Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi) = Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\chi\varphi).$$

Далее,

$$Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M') = Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M) \oplus Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M'),$$

поэтому $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$, $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M')$, $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M') \subseteq Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M')$. Из поэлементного описания ортогонального градуированного пополнения (см. предложение 6) следует, что $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M)$, $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M') \subseteq O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M')$. Если теперь

$$x = \sum_\gamma^{\perp} (x_\gamma + x'_\gamma)u_\gamma \in O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M'),$$

где $x_\gamma \in \bar{M}$, $x'_\gamma \in \bar{M}'$, то

$$x = \sum_\gamma^{\perp} x_\gamma u_\gamma + \sum_\gamma^{\perp} x'_\gamma u_\gamma.$$

Значит, $x \in O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M) \oplus O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M')$ и $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M \oplus M') = O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M) \oplus O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(M')$. Итак, $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}$ — аддитивный функтор.

Если φ — мономорфизм, то $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ — мономорфизм, поскольку $Q_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}$ — точный слева функтор. Поэтому $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ — мономорфизм.

Пусть теперь φ — эпиморфизм и

$$y = \sum_\gamma^{\perp} y_\gamma u_\gamma \in O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(N),$$

где $y_\gamma \in \bar{N}$. Так как $\bar{\varphi}$ тоже эпиморфизм, то $y_\gamma = \varphi(x_\gamma)$ для некоторых $x_\gamma \in \bar{M}$. По доказанному

$$O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)\left(\sum_\gamma^{\perp} x_\gamma u_\gamma\right) = \sum_\gamma^{\perp} \bar{\varphi}(x_\gamma)u_\gamma = y.$$

Таким образом, $O_{\mathcal{F}}^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ — эпиморфизм. □

Замечание 4. Как показано в [5, пример 2.12], функтор $O_{\mathcal{F}}$, вообще говоря, не является точным.

Теорема 4. *В предположениях определения* 9 *следующие условия равносильны*:

1) $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ *— точный функтор*;
2) $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$ *для любого правого градуированного модуля* M.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Положим

$$\bar{M} := M/t_{\mathcal{F}}(M), \quad \bar{Q} := Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)/\bar{M}.$$

Тогда $t_{\mathcal{F}}(Q) = Q$, и следовательно, $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(Q) = 0$. Применив функтор $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ к точной последовательности

$$0 \to \bar{M} \to Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) \to Q \to 0,$$

получим, что последовательность

$$0 \to O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(\bar{M}) \to Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) \to 0 \to 0$$

тоже является точной. Значит, $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(\bar{M}) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$. Но $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(\bar{M}) = O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$, поэтому $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(M)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Функтор $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ является точным слева вместе с функтором $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$. Поскольку по теореме 3 функтор $O^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}$ переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы, он является точным. $\square$

Автор выражает благодарность профессору А. В. Михалёву за постановку задач и ценные замечания.

Литература

[1] Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Тр. междунар. сем. «Универсальная алгебра и приложения». — Волгоград, 2000. — С. 21—28.

[2] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Градуированные кольца частных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 3—74.

[3] Бейдар К. И. Кольца частных полупервичных колец // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1978. — № 5. — С. 36—43.

[4] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // УМН. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.

[5] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Функтор ортогонального пополнения // Абелевы группы и модули. Вып. 4. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1986. — С. 3—19.

[6] Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 117—150.

[7] Михалёв А. В. Ортогонально полные многосортные системы // ДАН СССР. — 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1304—1308.

[8] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1995.

[9] Chen-Lian Chuang. Boolean valued models and semiprime rings // Rings and Near-rings: Proc. Int. Conf. on Algebra in Memory of Prof. K. I. Beidar. — 2005. — P. 23—53.

[10] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[11] Stenström B. Rings and Modules of Quotients. — Berlin: Springer, 1971. — (Lect. Notes Math; Vol. 237).