Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с max-сложением*

В. В. СИДОРОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: подалгебра полукольца непрерывных функций, решётка подалгебр, решёточный изоморфизм, хьюиттовское пространство, max-сложение.

Аннотация

Описаны изоморфизмы φ полуколец $C^{\vee}(X)$ непрерывных неотрицательных функций над произвольным хьюиттовским пространством X с условием $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Доказано, что любой изоморфизм решёток всех подалгебр полуколец $C^{\vee}(X)$ и $C^{\vee}(Y)$ индуцируется однозначно определённым изоморфизмом самих полуколец, за исключением случая одно- и двухточечной тихоновизации пространств.

Abstract

V. V. Sidorov, Isomorphisms of lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions with the max-plus, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 153—189.

Isomorphisms φ of semirings $C^{\vee}(X)$ of continuous nonnegative functions over an arbitrary Hewitt space X with the condition $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ are characterized in this work. It is proved that any isomorphism of lattices of all subalgebras of semirings $C^{\vee}(X)$ and $C^{\vee}(Y)$ is induced by a unique isomorphism of semirings excepting the case of one- and two-point Tychonovization of spaces.

Введение

В настоящей работе два главных результата. Во-первых, мы доказываем, что произвольное хьюиттовское пространство X определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ всех подалгебр полукольца $C^{\vee}(X)$ непрерывных неотрицательных функций, заданных на X (теорема 2.15). Во-вторых, мы описываем изоморфизмы решёток подалгебр $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ (теорема 4.1).

Говорят, что пространство X из класса K топологических пространств определяется алгебраической системой $A(X)$, если для любого пространства $Y \in K$ изоморфизм систем $A(X)$ и $A(Y)$ влечёт гомеоморфизм пространств X и Y.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки, проект № 1.1375.2014/K.

© 2014 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Одной из первых теорем определяемости является результат И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [6] об определяемости компактов X кольцом $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций, заданных на X. Этот результат послужил источником и образцом для многочисленных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры кольца $C(X)$ и привлечения новых функционально-алгебраических объектов $A(X)$, связанных с X (см. обзоры [1, 2]).

В 1997 г. Е. М. Вечтомовым [3] была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решёткой подалгебр $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ кольца функций $C(X)$, а в 2010 г. В. В. Сидоров и Е. М. Вечтомов [5] перенесли этот результат на случай решётки подалгебр $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ полукольца функций $C^+(X)$. Таким образом, этой работой мы продолжаем исследование [5], но уже для полуколец $C^\vee(X)$, когда обычное сложение заменяется max-сложением $\vee$ (взятием максимума).

1. Предварительные сведения

Введём обозначения и определения, используемые в дальнейшем.

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения и $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\mathbb{R}^+(\mathbb{P})$ — множество всех неотрицательных (положительных) действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями max-сложения $\vee$,

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

и умножения функций образует коммутативное полукольцо $C^\vee(X)$ с единицей.

Подалгеброй в полукольце $C^\vee(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ и само полукольцо $C^\vee(X)$.

Обозначим через $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ *решётку всех подалгебр полукольца* $C^\vee(X)$ относительно включения $\subseteq$ (символ $\subset$ означает у нас строгое включение), а через $\mathbb{A}_1\big(C^\vee(X)\big)$ — *подрешётку всех подалгебр с единицей*. Данные решётки являются алгебраическими, т. е. полными компактно порождёнными решётками [7, с. 111]. Решёточными операциями в $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ служат

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = A \vee B \vee AB$$

для любых $A, B \in \mathbb{A}^\vee(X)$, где

$$AB = \Big\{\text{max-сумма конечного числа произведений} \bigvee f_i g_i \colon f_i \in A,\ g_i \in B\Big\}.$$

Минимальные (ненулевые) *подалгебры* в $C^\vee(X)$ — это атомы решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$, а *максимальные* (собственные) *подалгебры* — её коатомы.

Элемент A решётки с нулём 0 будем называть *предатомом*, если в ней существует ровно два элемента, меньших A: 0 и некоторый атом решётки.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $V \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus V$ найдётся функция $\lambda \in C(X)$ (или, что равносильно, $\lambda \in C^\vee(X)$), такая что $\lambda(V) = \{0\}$ и $\lambda(x) = 1$. Тихоновские пространства — это, с точностью до гомеоморфизма, подпространства тихоновских степеней числовой прямой $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется *хьюиттовским*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Известно [10, теоремы 3.9 и 8.7], что для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX, называемое иногда *тихоновизацией* пространства X, и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C^\vee(X)$, $C^\vee(\tau Z)$ и $C^\vee(\nu\tau X)$.

Все рассматриваемые нами топологические пространства считаем тихоновскими: $X = \tau X$.

Множества

$$\mathrm{Z}(f) = \{x \in X\colon f(x) = 0\}, \quad \operatorname{coz} f = X \setminus Z(f), \quad f \in C(X),$$

называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* соответственно.

Другие специальные термины и обозначения будут вводится по ходу изложения.

2. Определяемость хьюиттовских пространств решётками подалгебр полуколец $C^\vee(X)$

В этой части работы доказывается, что произвольное хьюиттовское пространство X определяется решёткой подалгебр $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ всех подалгебр полукольца $C^\vee(X)$. Доказательство использует технику однопорождённых подалгебр.

2.1. Однопорождённые подалгебры

Наименьшую подалгебру A полукольца $C^\vee(X)$, содержащую функцию f, назовём *однопорождённой* и обозначим через $\langle f\rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f над $\mathbb{R}^+$ без свободного члена (с операциями max-сложения и умножения). Для обозначения коэффициентов многочленов будем использовать буквы a, b, c и d (чаще индексированные). Именно однопорождённым подалгебрам принадлежит ключевая роль в работе.

Лемма 2.1. *Для произвольной функции $f \in C^{\vee}(X)$, $1 \in \operatorname{Im} f$, равенство*

$$f = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \tag{2.1}$$

означает, что $a_1 = 1$ или $\operatorname{Im} f \subseteq \{0, 1\}$.

Доказательство. Так как $1 \in \operatorname{Im} f$, то $a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1$. Следовательно, $a_1 \leqslant 1, \ldots, a_n \leqslant 1$. Допустим, $a_1 < 1$. Тогда $a_i f^i(x) < f(x)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ при $0 < f(x) < 1$. Кроме того, поскольку $a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1$, то $(a_2 f^2 \vee \ldots \vee a_n f^n)(x) > f(x)$ при $f(x) > 1$. Значит, $\operatorname{Im} f \subseteq \{0, 1\}$. □

Аналогично [3, лемма 1] устроены минимальные подалгебры в $C^{\vee}(X)$, т. е. атомы решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$.

Лемма 2.2. *Подалгебра $A \in \mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ минимальна тогда и только тогда, когда $A = \langle e \rangle$ для некоторого ненулевого идемпотента $e \in C^{\vee}(X)$.*

Доказательство. Ясно, что подалгебра $\langle e \rangle$, где $e \in C^{\vee}(X)$ — ненулевой идемпотент, включает единственную собственную подалгебру — нулевую, т. е. $\langle e \rangle$ — атом решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$.

Обратно, пусть A — минимальная подалгебра. Возьмём произвольную ненулевую функцию $f \in A$ и рассмотрим подалгебру $\langle f^2 \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $1 \in \operatorname{Im} f$. Так как A минимальна, имеем $\langle f \rangle = A = \langle f^2 \rangle$, т. е. функция f имеет вид

$$f = a_2 f^2 \vee \ldots \vee a_{2n} f^{2n}, \quad a_{2n} > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда $\operatorname{Im} f \subseteq \{0, 1\}$ по лемме 2.1. □

Предложение 2.3. *Минимальная подалгебра $A \in \mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ совпадает с подалгеброй констант $\mathbb{R}^+$ тогда и только тогда, когда для любой минимальной подалгебры $B \in \mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$, отличной от A, подалгебра $A \vee B$ включает ровно две минимальные подалгебры решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$: A и B.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность следует из того, что подалгебра $\langle e \rangle \vee \langle 1 - e \rangle$ включает три различные минимальные подалгебры $\langle e \rangle$, $\langle 1 - e \rangle$ и $\mathbb{R}^+$ для любого идемпотента $e \in C^{\vee}(X)$, отличного от 0 и 1. □

Будем говорить, что в решётке имеется *решёточная характеризация* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решётки. Например, предложение 2.3 позволяет утверждать, что в $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ имеется решёточная характеризация подалгебры $\mathbb{R}^+$, а значит решёточно характеризуется подрешётка $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big)$.

Элемент A решётки называется $\vee$-*неразложимым* [7, с. 75], если из того, что $A = B \vee C$ для некоторых элементов B и C этой решётки, следует, что $A = B$ или $A = C$. Элемент A полной решётки называется *компактным* [7, с. 110], если для любого непустого семейства $(A_i)_{i \in J}$ её элементов $A \leqslant \bigvee_{j \in J} A_j$ влечёт $A \leqslant \bigvee_{i \in I} A_i$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$. Очевидно, в решётке $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ компактность элемента равносильна его конечнопорождённости.

Следующая теорема содержит решёточную характеризацию однопорождённых подалгебр полукольца $C^\vee(X)$.

Теорема 2.4. *Однопорождённые подалгебры полукольца $C^\vee(X)$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$.*

Доказательство. Установим $\vee$-неразложимость однопорождённых подалгебр.

Допустим, это не так, и нашлась однопорождённая подалгебра $\langle f\rangle$, такая что $\langle f\rangle = A\vee B$ для некоторых подалгебр $A, B\subset\langle f\rangle$. Ясно, что $\langle f\rangle$ не может быть минимальной или нулевой подалгеброй в $C^\vee(X)$. Поэтому (см. лемму 2.2) можно считать, что $|\operatorname{Im} f\setminus\{0\}|\geqslant 2$ и $1\in\operatorname{Im} f$. Функция f как элемент подалгебры $A\vee B$ имеет вид

$$f = P_0(f)\vee Q_0(f)\vee P_1(f)Q_1(f)\vee\ldots\vee P_m(f)Q_m(f) = a_0 + a_1 f + \ldots, \qquad (2.2)$$

где $P_i\in A$, $Q_i\in B$ — многочлены от f, причём если многочлен P_i или Q_i ненулевой, то он без свободного члена и не ниже второй степени. Следовательно, если

$$P_1(f)Q_1(f)\vee\ldots\vee P_m(f)Q_m(f) = b_0 + b_1 f + \ldots,$$

то $b_0 = b_1 = 0$. Кроме того, по лемме 2.1 в равенстве (2.2) $a_1 = 1$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что многочлен P_0 имеет вид

$$P_0 = f\vee c_2 f^2\vee\ldots\vee c_n f^n.$$

Далее, поскольку $A\subset\langle f\rangle$ и $P_0\geqslant f$, то $f\neq P_0\in A$. Следовательно, $P_0\big(f(x)\big) > f(x)$ для некоторой точки $x\in X$, что противоречит равенству (2.2). Значит, любая подалгебра $\langle f\rangle$ $\vee$-неразложима. Её компактность очевидна.

Для завершения доказательства осталось заметить, что если любая система образующих конечно порождённой подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$-разложима. □

Подалгебру $[f] = \langle f\rangle\vee\mathbb{R}^+$ с единицей будем называть *однопорождённой подалгеброй с единицей*.

Непосредственно из предложения 2.3 и теоремы 2.4 получаем следствие.

Следствие 2.5. *Однопорождённые подалгебры с единицей имеют решёточную характеризацию в $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$.*

Лемма 2.6.

1. *Для произвольных функций $f, g\in C^\vee(X)$, $|\operatorname{Im} f\setminus\{0\}|\geqslant 2$, $|\operatorname{Im} g\setminus\{0\}|\geqslant 2$, $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ тогда и только тогда, когда f и g — пропорциональные функции.*
2. *Для произвольных функций $f, g\in C^\vee(X)$, $|\operatorname{Im} f|\geqslant 3$, $|\operatorname{Im} g|\geqslant 3$, $[f] = [g]$ тогда и только тогда, когда f и g — пропорциональные функции.*

Доказательство. Импликации в одну сторону очевидны.

1. Пусть $\langle f\rangle = \langle g\rangle$, причём функции $f, g\in C^\vee(X)$ таковы, что $|\operatorname{Im} f\setminus\{0\}|\geqslant 2$, $|\operatorname{Im} g\setminus\{0\}|\geqslant 2$. Очевидно, $\operatorname{coz} f = \operatorname{coz} g$. Выберем $x\in\operatorname{coz} f\cap\operatorname{coz} g$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x) = g(x) = 1$. Воспользуемся тем, что

$f \in \langle g \rangle$ и $g \in \langle f \rangle$, и представим функции f и g в следующем виде:

$$\begin{aligned} f &= a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n, \quad a_n > 0, \\ g &= b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m, \quad b_m > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда

$$f = c_1 f \vee \ldots \vee c_k f^k, \quad c_k = a_n b_m^n > 0, \quad k = nm. \tag{2.4}$$

Рассматривая выражения (2.3) и (2.4) в точке x, находим, что

$$a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1, \quad b_1 \vee \ldots \vee b_m = 1, \quad c_1 \vee \ldots \vee c_k = 1.$$

Следовательно,

$$a_1 \leqslant 1, \quad b_1 \leqslant 1, \quad c_1 = a_1 b_1 \leqslant 1.$$

Кроме того, по лемме 2.1 равенство (2.4) влечёт $c_1 = 1$, что возможно лишь при $a_1 = b_1 = 1$. Значит (см. (2.3)), $f \geqslant g$ и $g \geqslant f$. Тогда $f = g$.

2. Пусть $[f] = [g]$, где $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$, $|\operatorname{Im} g| \geqslant 3$. Поскольку $f \in [g]$ и $g \in [f]$, то функции f и g представимы в виде

$$\begin{aligned} f &= a_0 \vee a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 1, \\ g &= b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m, \quad b_m > 0, \quad m \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда

$$f = (a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n) \vee c_1 f \vee \ldots \vee c_k f^k, \quad c_k = a_n b_m^n > 0, \quad k = nm \geqslant 1. \tag{2.6}$$

Очевидно, $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$. Если нуль-множества функций f и g не пусты, то $a_0 = b_0 = 0$, и дальше можно рассуждать как в пункте 1. В итоге получим, что функции f и g пропорциональны.

Пусть $f > 0$, $g > 0$. По условию $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$. Следовательно,

$$f(x) > f(y) > f(z) > 0$$

для некоторых точек $x, y, z \in X$. Можно считать, что $f(x) = g(x) = 1$. Тогда равенства (2.5) и (2.6) в точке x дадут

$$\begin{aligned} &a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1, \\ &b_0 \vee b_1 \vee \ldots \vee b_m = 1, \\ &(a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n) \vee c_1 \vee \ldots \vee c_k = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, если $f(y) = a > b = f(z)$, то из (2.6) получаем, что

$$\begin{aligned} a &= (a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n) \vee c_1 a \vee c_2 a^2 \vee \ldots \vee c_k a^k, \\ b &= (a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n) \vee c_1 b \vee c_2 b^2 \vee \ldots \vee c_k b^k. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тогда

$$a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n \leqslant b,$$

а поскольку $a > b$, то

$$a = c_1 a \vee c_2 a^2 \vee \ldots \vee c_k a^k.$$

У нас $0 < a < 1$ и $c_1 \vee \ldots \vee c_k \leqslant 1$. Поэтому $c_1 = 1$.

Далее,

$$c_1 = a_1 b_1 \vee a_2 b_0 b_1 \vee a_3 b_0^2 b_1 \vee \ldots \vee a_n b_0^{n-1} b_1,$$

что в силу (2.7) означает, что

$$1 = c_1 \leqslant a_1 b_1 \vee b_0.$$

Допустим, что $b_0 = 1$. Тогда, учитывая (2.5) и соотношения $1 = f(x) > > f(y) > f(z)$, получаем

$$g(x) = g(y) = g(z) = b_0 = 1.$$

Обращаясь к выражению f через g в (2.5), находим, что $f(x) = f(y) = f(z)$. Противоречие. Значит, $b_0 < 1$, а потому $a_1 b_1 = 1$. Последнее возможно лишь при $a_1 = b_1 = 1$. Значит, ввиду (2.5) $f \geqslant g$ и $g \geqslant f$, т. е. $f = g$. □

Функцию $f \in C^{\vee}(X)$ будем называть *нормированной*, если $\sup f = 1$.

Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, \ldots, r_n\}$, где $r_1 > \ldots > r_n \geqslant 0$. Тогда открыто-замкнутые множества

$$X_1 = f^{-1}(r_1), \ldots, X_n = f^{-1}(r_n)$$

образуют разбиение множества X и любая функция $g \in [f]$ постоянна на каждом из этих множеств, причём если

$$g(X_1) = \{r'_1\}, \ldots, g(X_n) = \{r'_n\},$$

то $r'_1 \geqslant \ldots \geqslant r'_n \geqslant 0$.

Таким образом, для произвольной ненулевой подалгебры $\langle g \rangle \subseteq [f]$ функцию $g \in [f]$ без ограничения общности можно считать нормированной ($r'_1 = 1$) и записывать упорядоченной n-кой $g = (r'_1, \ldots, r'_n)$. Например, если функция f равна 2 на $X_1 \subset X$ и 1 на $X \setminus X_1$, то

$$\langle f \rangle = \left\langle \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\rangle, \quad \left[f \vee \frac{3}{2}\right] = \left[\left(1, \frac{3}{4}\right)\right].$$

Для произвольной функции $f \in C^{\vee}(X)$ обозначим через $\mathbb{A}_f$ решётку всех подалгебр с единицей, которые включены в $[f]$.

Предложение 2.7. *Для произвольной функции $f \in C^{\vee}(X)$ верны следующие утверждения*:

1) $f \in \mathbb{R}^+$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}_f = \{\mathbb{R}^+\}$;
2) $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2\}$, $r_1 > r_2 > 0$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}_f$ *— двухэлементная цепь* $\mathbb{R}^+ \subset [f]$;
3) $\operatorname{Im} f = \{r, 0\}$, $r > 0$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}_f$ *— трёхэлементная цепь* $\mathbb{R}^+ \subset [f \vee r'] \subset [f]$, *где* $0 < r' < r$;
4) $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}_f$ *— бесконечная решётка.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, r_2\}$, где $r_1 > r_2 > 0$. Докажем, что $[g] = [f]$ для любой функции $g \in [f] \setminus \mathbb{R}^+$. Очевидно, $[g] \subseteq [f]$. Покажем справедливость обратного включения $[f] \subseteq [g]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$f = (1, a), \quad g = (1, b), \quad 1 > a > 0, \quad 1 > b > 0.$$

Если $a = b$, то $[g] = [f]$. Пусть $a < b$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $b^n \leqslant a$. Тогда

$$f = (1, a) = (1, b^n) \vee (a, a) = g^n \vee a \cdot 1 \in [g].$$

Наконец, если $a > b$, то

$$f = (1, a) = (1, b) \vee (a, a) = g \vee a \cdot 1 \in [g].$$

Во всех случаях $f \in [g]$, т. е. $[f] \subseteq [g]$.

Получается, что все подалгебры полукольца $[f]$, отличные от $\mathbb{R}^+$, совпадают с $[f]$. Значит, решётка $\mathbb{A}_f$ — двухэлементная цепь $\mathbb{R}^+ \subset [f]$.

Пусть $\operatorname{Im} f = \{r, 0\}$, $r > 0$. Очевидно, $\mathbb{R}^+ \subset [f \vee r'] \subset [f]$, где $0 < r' < r$. Кроме того, для любой функции $g \in [f] \setminus \mathbb{R}^+$ имеем, что $[g] = [f]$, если $\mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$, и $[g] = [f \vee r']$, если $\mathrm{Z}(g) = \varnothing$ (по доказанному выше). Поэтому решётка $\mathbb{A}_f$ — трёхэлементная цепь $\mathbb{R}^+ \subset [f \vee r'] \subset [f]$.

Наконец, если $|\operatorname{Im} f| \geqslant 3$, то по лемме 2.6 включение $[f^{2n}] \subseteq [f^n]$ строгое для всех $n \in \mathbb{N}$, а потому число элементов решётки $\mathbb{A}_f$ бесконечно. $\square$

2.2. Подалгебры специального типа

С каждой точкой $x \in X$ естественным образом связана подалгебра

$$M_x = \{f \in C^{\vee}(X) \colon f(x) = 0\}$$

всех функций из $C^{\vee}(X)$, равных нулю в этой точке. Получим решёточную характеризацию подалгебр M_x в $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ для случая, когда X — компакт. Для этого нам понадобится несколько новых типов подалгебр.

Подалгебру A полукольца $C^{\vee}(X)$ назовём

— *sp-подалгеброй*, если любая ненулевая функция $f \in A$ строго положительна, т. е. $\inf f > 0$;
— *b-подалгеброй*, если все её функции ограничены сверху;
— *u-подалгеброй*, если нуль-множества всех её ненулевых функций пусты;
— *z-подалгеброй*, если каждая её функция имеет непустое нуль-множество.

Ясно, что все sp-подалгебры являются u-подалгебрами, а в случае компакта X верно и обратное, при этом все подалгебры будут b-подалгебрами. Заметим также, что подалгебра A обладает свойством P (быть sp-, b-, u- или z-подалгеброй) тогда и только тогда, когда любая подалгебра $\langle f \rangle \subseteq A$ обладает свойством P. Подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ является sp-, b- и u-подалгеброй, но не является z-подалгеброй. Таким образом, для решёточной характеризации sp-, b-, u- или z-подалгебр в $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ можно ограничиться однопорождёнными подалгебрами, отличными от $\mathbb{R}^+$.

Дадим решёточную характеризацию sp-подалгебр.

Лемма 2.8. *Произвольная подалгебра $\langle f\rangle \neq \mathbb{R}^+$ является sp-подалгеброй тогда и только тогда, когда $\langle f\rangle \subseteq \langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$ для некоторых подалгебр $\langle g'\rangle$, $\langle h'\rangle$, $\langle g\rangle$ и $\langle h\rangle$, таких что*

$$\begin{aligned} &\langle g'\rangle \subseteq \langle g\rangle \vee \mathbb{R}^+, \quad \langle g'\rangle \nsubseteq \langle g\rangle,\\ &\langle h'\rangle \subseteq \langle h\rangle \vee \mathbb{R}^+, \quad \langle h'\rangle \nsubseteq \langle h\rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра, отличная от $\mathbb{R}^+$. Можно считать, что $f>1$. Выберем точки $x_0, y_0 \in X$ и числа $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, такие что

$$a < f(x_0) < b < f(y_0) < c.$$

Тогда множества

$$A = \{x \in X : f(x) \notin (a,b)\}, \quad B = \{x \in X : f(x) \notin (b,c)\}$$

будут непустыми ($y_0 \in A$, $x_0 \in B$) и замкнутыми. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и рассмотрим пару функций $\lambda_A, \lambda_B \in C^{\vee}(X)$, таких что

$$\lambda_A\colon \begin{cases} A \mapsto \{1\},\\ x_0 \mapsto 0,\\ \lambda_A \leqslant 1, \end{cases} \qquad \lambda_B\colon \begin{cases} B \mapsto \{1\},\\ y_0 \mapsto 0,\\ \lambda_B \leqslant 1. \end{cases}$$

Положим

$$g = f\lambda_B, \quad g' = f\lambda_B \vee 1, \quad h = f\lambda_A, \quad h' = f\lambda_A \vee 1.$$

Тогда $\langle g'\rangle \subseteq \langle g\rangle \vee \mathbb{R}^+$, но $\langle g'\rangle \nsubseteq \langle g\rangle$, так как $g'(y_0)=1$, $g(y_0)=0$. Аналогично $\langle h'\rangle \subseteq \langle h\rangle \vee \mathbb{R}^+$, но $\langle h'\rangle \nsubseteq \langle h\rangle$. Кроме того,

$$g' \vee h' = f(\lambda_A \vee \lambda_B) \vee 1 = f \vee 1 = f.$$

Обратно, пусть $\langle f\rangle \subseteq \langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$. Включения (2.9) показывают, что $\langle g'\rangle$ и $\langle h'\rangle$ — sp-подалгебры. Поэтому любая ненулевая функция подалгебры $\langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$ также будет строго положительной. В частности, такова f. Следовательно, $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра. □

Решёточно охарактеризуем однопорождённые b-подалгебры.

Лемма 2.9. *Произвольная подалгебра $\langle f\rangle \neq \mathbb{R}^+$ является b-подалгеброй тогда и только тогда, когда для любой ненулевой sp-подалгебры $\langle g\rangle \subseteq [f]$ найдётся sp-подалгебра $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$, такая что $\mathbb{R}^+ \subseteq \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — b-подалгебра и $\langle g\rangle \subseteq [f]$ — ненулевая sp-подалгебра. Если $\langle g\rangle = \mathbb{R}^+$, то $\mathbb{R}^+ \subset \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ для любой sp-подалгебры $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$.

В случае когда $\langle g\rangle \neq \mathbb{R}^+$, достаточно положить $h = g^{-1}$. Действительно, функция h строго положительна в силу ограниченности сверху функции $g \in [f]$. Кроме того, $\mathbb{R}^+ \subseteq \langle g\rangle \vee \langle g^{-1}\rangle$.

Обратно, включение $\mathbb{R}^+ \subset \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ означает, что

$$1 = P_0(g) \vee Q_0(h) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \ldots \vee P_m(g)Q_m(h),$$

где $P_i \in \langle g\rangle$, $Q_i \in \langle h\rangle$ — многочлены без свободных членов. Допустим, что $\langle g\rangle$ не b-подалгебра. Тогда функция $P_i(g)$ либо нулевая, либо неограниченная сверху. Поэтому функция $P_0(g)$ необходимо нулевая. Так как $\langle h\rangle \neq \mathbb{R}^+$, то $P_j(g)Q_j(h) \neq 0$ для некоторого $j \geqslant 1$. Поскольку $\langle h\rangle$ — sp-подалгебра, то функция $Q_j(h) \neq 0$ ограничена снизу положительным числом. Поэтому функция $P_j(g)Q_j(h)$ является неограниченной сверху, хотя $P_j(g)Q_j(h) \leqslant 1$. Противоречие. Следовательно, $\langle g\rangle$ — b-подалгебра.

Получается, что любая sp-подалгебра $\langle g\rangle$, включённая в $[f]$, является b-подалгеброй. В частности, $\langle f \vee 1\rangle$. Значит, $\langle f\rangle$ — b-подалгебра. $\square$

Получим решёточную характеризацию однопорождённых z-подалгебр.

Лемма 2.10. *Произвольная не sp-подалгебра $\langle f\rangle \neq \mathbb{R}^+$ является z-подалгеброй тогда и только тогда, когда включение $\mathbb{R}^+ \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$ означает, что $\langle g\rangle$ — b-подалгебра.*

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — z-подалгебра и $x_0 \in \mathrm{Z}(f)$. Включение $\mathbb{R}^+ \subset \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$ означает, что

$$1 = P_0(f) \vee Q_0(g) \vee P_1(f)Q_1(g) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(g),$$

где $P_i \in \langle f\rangle$, $Q_i \in \langle g\rangle$ — многочлены без свободных членов. Так как

$$\big(P_0(f) \vee Q_0(g) \vee P_1(f)Q_1(g) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(g)\big)(x_0) = Q_0(g)(x_0) = 1,$$

то многочлен Q_0 ненулевой. Кроме того, $Q_0(g) \leqslant 1$. Следовательно, функция g ограниченная сверху, т. е. $\langle g\rangle$ — b-подалгебра.

Обратно, если функция f всюду положительна, то, принимая во внимание, что $\inf f = 0$, получаем, что подалгебра $\langle g\rangle = \langle f^{-1}\rangle$ не b-подалгебра, и $\mathbb{R}^+ \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$. Противоречие. Значит, $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$, т. е. $\langle f\rangle$ — z-подалгебра. $\square$

Лемма 2.10 позволяет охарактеризовать однопорождённые u-подалгебры.

Лемма 2.11. *Произвольная подалгебра $\langle f\rangle$ является u-подалгеброй тогда и только тогда, когда $\langle f\rangle$ не z-подалгебра.*

Итогом лемм 2.8—2.11 служит следующая лемма.

Предложение 2.12. *Свойство подалгебры A полукольца $C^{\vee}(X)$ быть sp-подалгеброй, b-подалгеброй, u-подалгеброй или z-подалгеброй решёточно характеризуется в $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$.*

Дадим решёточную характеризацию подалгебр M_x для случая, когда X — компакт.

Теорема 2.13. *Для произвольного компакта X в $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ имеется решёточная характеризация подалгебр M_x, $x \in X$.*

Доказательство. Пусть X — компакт. Докажем, что произвольная подалгебра A совпадает с подалгеброй M_x для некоторой точки $x \in X$ тогда и только тогда, когда A — максимальная z-подалгебра.

Для начала покажем, что M_x — максимальная z-подалгебра.

Предположим противное: $M_x \subset M$ для некоторой z-подалгебры M. Выберем произвольную функцию $f \in M \setminus M_x$. Тогда $f(x) > 0$ и $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$. Так как пространство X тихоновское, то найдётся функция $g \in C^\vee(X)$, такая что $g(x) = 0$ и $g\colon \mathrm{Z}(f) \mapsto \{1\}$. Тогда $g \in M_x \subset M$, а потому z-подалгебра M содержит положительную функцию $f+g$. Противоречие. Значит, M_x — максимальная z-подалгебра.

Обратно, пусть A — максимальная z-подалгебра. Докажем существование точки $x \in X$, в которой все функции из A обращаются в нуль. Предположим противное: для каждой точки $x \in X$ существует функция $f_x \in A$, такая что $f_x(x) > 0$. Тогда и в некоторой открытой окрестности V_x точки x функция f_x будет положительна. Открытые множества вида V_x покрывают компакт X. Поэтому найдётся конечное число точек $x, y, \ldots, z$ в X, для которых множества $V_x, V_y, \ldots, V_z$ также будут покрывать X. Функция $f_x \vee f_y \vee \ldots \vee f_z \in A$ строго положительна на X, что невозможно, так как A — z-подалгебра. Полученное противоречие означает, что есть точка x, в которой все функции из A обращаются в нуль, т. е. $A \subseteq M_x$. Поскольку A — максимальная z-подалгебра, то $A = M_x$. □

2.3. Доказательство теоремы определяемости

С этого момента считаем тихоновское пространство X хьюиттовским, т. е. $X = \nu X$. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация хьюиттовского пространства X. Множество всех ограниченных сверху функций полукольца $C^\vee(X)$ образует b-подалгебру $bC^\vee(X)$, канонически изоморфную $\mathbb{R}^+$-алгебре $C^\vee(\beta X)$. Поэтому решётка $\mathbb{A}\big(bC^\vee(X)\big)$ канонически изоморфна решётке $\mathbb{A}\big(C^\vee(\beta X)\big)$.

Лемма 2.14. *Точка $x \in \beta X$ лежит в X тогда и только тогда, когда прообраз подалгебры $M_x \in \mathbb{A}\big(C^\vee(\beta X)\big)$ при каноническом изоморфизме решётки $\mathbb{A}\big(bC^\vee(X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(C^\vee(\beta X)\big)$ не содержит однопорождённых не sp- и-подалгебр.*

Доказательство. Если $x \in X$, то прообразом подалгебры M_x полукольца $C^\vee(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решётки $\mathbb{A}\big(bC^\vee(X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(C^\vee(\beta X)\big)$ служит подалгебра $M_x \cap bC^\vee(X)$, где M_x — подалгебра полукольца $C^\vee(X)$.

Пусть $x \in \beta X \setminus X$. Тогда согласно [8, теорема 3.11.10] найдётся функция $f \in C^\vee(\beta X)$, такая что $f(x) = 0$ и $f > 0$ на X (для неё $\inf f = 0$ на X). Значит, прообраз подалгебры M_x полукольца $C^\vee(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решётки $\mathbb{A}\big(bC^\vee(X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(C^\vee(\beta X)\big)$ содержит не sp- u-подалгебру $[f|_X]$. □

Следующий результат является одним из главных в работе.

Теорема 2.15. *Всякое хьюиттовское пространство X определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$.*

Доказательство. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y имеется изоморфизм α решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(Y)\big)$. По предложению 2.12 α изоморфно отображает решётку $\mathbb{A}\big(bC^{\vee}(X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(bC^{\vee}(Y)\big)$. Если ψ_X и ψ_Y — канонические изоморфизмы решёток $\mathbb{A}\big(bC^{\vee}(X)\big)$ и $\mathbb{A}\big(bC^{\vee}(Y)\big)$ на решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(\beta X)\big)$ и $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(\beta Y)\big)$ соответственно, то отображение $\gamma = \psi_Y \circ \alpha \circ \psi_X^{-1}$ является изоморфизмом решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(\beta X)\big)$ на решётку $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(\beta Y)\big)$. Тогда соответствие $\varphi\colon \beta X \to \beta Y$, заданное правилом

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \gamma(M_x) = M_y \text{ для любых } x \in \beta X \text{ и } y \in \beta Y,$$

по теореме 2.13 будет биекцией пространств βX и βY.

Докажем, что φ — гомеоморфизм. Покажем, что φ сохраняет нуль-множества. Для этого возьмём произвольную функцию $f \in C^{\vee}(\beta X)$. Тогда $\gamma(\langle f\rangle) = \langle g\rangle$ для некоторой $g \in C^{\vee}(\beta Y)$ и

$$\varphi\big(\mathrm{Z}(f)\big) = \varphi(\{x \in \beta X : \langle f\rangle \text{ — z-подалгебра из } M_x\}) = \\ = \{y \in \beta Y : \langle g\rangle \text{ — z-подалгебра из } M_y\} = \mathrm{Z}(g).$$

Аналогично получаем, что φ^{-1} сохраняет нуль-множества. Поскольку нуль-множества образуют базу замкнутых множеств в любом тихоновском пространстве, то φ — гомеоморфизм пространств βX и βY. По лемме 2.14 ограничение $\varphi|_X$ гомеоморфно отображает X на Y. □

3. Изоморфизмы полуколец $C^{\vee}(X)$

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства и α — изоморфизм полукольца $C^{\vee}(X)$ на $C^{\vee}(Y)$. Следующий пример показывает, что образ подалгебры полукольца $C^{\vee}(X)$ не обязан быть подалгеброй полукольца $C^{\vee}(Y)$.

Пример 3.1. Пусть $X = \{x, y\}$ — двухточечное дискретное пространство. Тогда $C^{\vee}(X) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Рассмотрим отображение

$$\alpha\colon C^{\vee}(X) \to C^{\vee}(X), \quad \alpha\colon (a, b) \mapsto (a, b^2).$$

Легко убедиться, что α — автоморфизм полукольца $C^{\vee}(X)$.

Допустим, что $\alpha(\mathbb{R}^+)$ — подалгебра. Тогда вместе с функцией $(2,4) = \alpha\big((2,2)\big)$ подалгебра $\alpha(\mathbb{R}^+)$ обязана содержать функцию $2 \cdot (2,4) = (4,8)$. Последнее невозможно, так как

$$\alpha\colon (r, r) \mapsto (r, r^2) \neq (4, 8)$$

для всех $r \in \mathbb{R}^+$. Значит, образ $\alpha(\mathbb{R}^+)$ не будет подалгеброй полукольца $C^{\vee}(X)$.

Предложение 3.2. *Пусть α — изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$. Тогда α отображает множество подалгебр полукольца $C^\vee(X)$ на множество подалгебр полукольца $C^\vee(Y)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.*

Доказательство. Пусть α — изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$, который отображает множество подалгебр полукольца $C^\vee(X)$ на множество подалгебр полукольца $C^\vee(Y)$. Докажем, что $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Выберем $f \in C^\vee(X)$, такую что $\alpha(f) > 0$. Тогда

$$\alpha(f) = \alpha(f \cdot 1) = \alpha(f) \cdot \alpha(1).$$

Значит, $\alpha(1) = 1$. Поэтому

$$1 = \alpha(1) \in \alpha(\mathbb{R}^+), \quad 1 = \alpha^{-1}(1) \in \alpha^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Кроме того, $\alpha(\mathbb{R}^+)$, $\alpha^{-1}(\mathbb{R}^+)$ — подалгебры. Следовательно,

$$\mathbb{R}^+ \subseteq \alpha(\mathbb{R}^+), \quad \mathbb{R}^+ \subseteq \alpha^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Значит, $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Обратно, пусть $\alpha\colon C^\vee(X) \to C^\vee(Y)$ — изоморфизм и $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Докажем, что если A — подалгебра в $C^\vee(X)$, то $\alpha(A)$ — подалгебра в $C^\vee(Y)$.

Ясно, что $\alpha(A)$ — подполукольцо в $C^\vee(Y)$. Остаётся показать, что

$$rf \in \alpha(A) \text{ для любых } f \in \alpha(A),\ r \in \mathbb{R}^+,$$

или, что то же самое,

$$\alpha^{-1}(rf) = \alpha^{-1}(r)\alpha^{-1}(f) \in A.$$

Последнее верно, так как $\alpha^{-1}(r) \in \mathbb{R}^+$, $\alpha^{-1}(f) \in A$ и A — подалгебра. □

Теорема 3.3. *Для произвольных топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\nu\tau X \approx \nu\tau Y$;
2) *существует изоморфизм* $\alpha\colon C^\vee(X) \to C^\vee(Y)$, *причём* $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$;
3) $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big) \cong \mathbb{A}\big(C^\vee(Y)\big)$.

Доказательство. Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Воспользуемся [10, теоремы 3.9 и 8.7] и рассмотрим хьюиттовские пространства $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$, для которых канонически изоморфны кольца функций $C(X)$ и $C(\nu\tau X)$, $C(Y)$ и $C(\nu\tau Y)$, а значит, и соответствующие им полукольца и их решётки подалгебр:

$$C^\vee(X) \overset{\mathscr{L}}{\cong} C^\vee(\nu\tau X), \quad \mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big) \cong \mathbb{A}\big(C^\vee(\nu\tau X)\big),$$
$$C^\vee(Y) \overset{\mathscr{L}}{\cong} C^\vee(\nu\tau Y), \quad \mathbb{A}\big(C^\vee(Y)\big) \cong \mathbb{A}\big(C^\vee(\nu\tau Y)\big).$$

Теперь если существует гомеоморфизм пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$ и $\omega\colon C^\vee(\nu\tau X) \to C^\vee(\nu\tau Y)$ — соответствующий естественный изоморфизм, то отображение $\alpha = \psi^{-1} \circ \omega \circ \varphi$ будет изоморфизмом полукольца $C^\vee(X)$ на полукольцо $C^\vee(Y)$, причём $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, так как $\psi^{-1}(\mathbb{R}^+) = \omega(\mathbb{R}^+) = \varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) установлена.

Справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из предложения 3.2 и теоремы 2.15. $\square$

Далее опишем изоморфизмы $\alpha\colon C^\vee(X) \to C^\vee(Y)$ со свойством $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 3.3, пространства X и Y можно считать хьюиттовскими.

Пусть
$$C^\vee(X, \mathbb{I}) = \{f \in C^\vee(X)\colon \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{I}\} -$$
подполукольцо полукольца $C^\vee(X)$, где $\mathbb{I} = [0,1]$ — единичный отрезок. Следующее предложение является прямым следствием [9, предложение 2].

Предложение 3.4. *Пусть X и Y — произвольные хьюиттовские пространства и α — изоморфизм полуколец $C^\vee(X, \mathbb{I})$ и $C^\vee(Y, \mathbb{I})$, причём $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu\colon Y \to X$, такие что $\alpha(f) = f^t \circ \mu$ для всех $f \in C^\vee(X, \mathbb{I})$.*

Теорема 3.5. *Пусть X и Y — произвольные хьюиттовские пространства и α — изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$, причём $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu\colon Y \to X$, такие что $\alpha(f) = f^t \circ \mu$ для всех $f \in C^\vee(X)$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha(1) = 1$ (см. доказательство предложения 3.2) и для любой $f \in C^\vee(X)$ равенство $f \vee 1 = 1$ равносильно $f \leqslant 1$, то ограничение изоморфизма α на полукольцо $C^\vee(X, \mathbb{I})$ будет изоморфизмом полуколец $C^\vee(X, \mathbb{I})$ и $C^\vee(Y, \mathbb{I})$. Согласно предложению 3.4 найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu\colon Y \to X$, такие что
$$\alpha(g) = g^t \circ \mu$$
для любой $g \in C^\vee(X, \mathbb{I})$. В частности,
$$\alpha(f \wedge 1) = (f \wedge 1)^t \circ \mu$$
и
$$1 = \alpha(1) = \alpha\left((f \vee 1) \cdot \frac{1}{f \vee 1}\right) = \alpha(f \vee 1)\alpha\left(\frac{1}{f \vee 1}\right) = \alpha(f \vee 1)\left(\frac{1}{f \vee 1}\right)^t \circ \mu$$
для любой $f \in C^\vee(X)$. Последнее означает, что
$$\alpha(f \vee 1) = (f \vee 1)^t \circ \mu.$$
Наконец,
$$\begin{aligned}\alpha(f) = \alpha\big((f \vee 1) \cdot (f \wedge 1)\big) = \alpha(f \vee 1)\alpha(f \wedge 1) = \\ = \big((f \vee 1)^t \circ \mu\big) \cdot \big((f \wedge 1)^t \circ \mu\big) = \big((f \vee 1) \cdot (f \wedge 1)\big)^t \circ \mu = f^t \circ \mu\end{aligned}$$
для любой $f \in C^\vee(X)$. Теорема доказана. $\square$

4. Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец $C^\vee(X)$

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Выясним, как устроены изоморфизмы решёток $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(Y))$ всех подалгебр полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 3.3, пространства X и Y можно считать хьюиттовскими.

Теорема 4.1.

1. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y любой изоморфизм $\alpha\colon \mathbb{A}(C^\vee(X)) \to \mathbb{A}(C^\vee(Y))$ порождается однозначно определённым изоморфизмом $\varphi\colon C^\vee(X) \to C^\vee(Y)$, а именно найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu\colon Y \to X$, такие что $\alpha\colon \langle f\rangle \mapsto \langle f^t \circ \mu\rangle$, т. е. порождающий изоморфизм $\varphi\colon C^\vee(X) \to C^\vee(Y)$ задаётся правилом $\varphi\colon f \mapsto f^t \circ \mu$.*

   Исключение составляет случай, когда $|X| \leqslant 2$.
2. *Если $X = \{x\}$, то существует единственный изоморфизм α и континуум порождающих изоморфизмов φ.*
3. *Если $X = \{x, y\}$, то с точностью до перестановок точек x и y имеется взаимно-однозначное соответствие между изоморфизмами α и парами автоморфизмов цепи $\mathbb{I} = [0,1]$, причём не все α порождаются изоморфизмами φ.*

Доказательство теоремы опирается на следующие соображения.

Пусть α — произвольный изоморфизм решёток $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(Y))$. Ранее было установлено (см. доказательство теоремы 2.15), что α определяет гомеоморфизм φ хьюиттовских пространств X и Y, действующий по правилу

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \alpha(bM_x) = bM_y \text{ для любых } x \in X,\ y \in Y.$$

(Здесь $bM_x = M_x \cap bC^\vee(X)$ и $bM_y = M_y \cap bC^\vee(Y)$.) Отождествляя точки пространств X и Y посредством гомеоморфизма φ, получаем тождественный автоморфизм полукольца $C^\vee(X)$, порождающий тождественный автоморфизм решётки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$. После этого отождествления изоморфизм α становится автоморфизмом решётки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$, оставляющим на месте подалгебры bM_x, $x \in X$.

Предложение 4.2. *$\alpha(M_x) = M_x$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Случай $M_x = bM_x$ очевиден.

Если $M_x \neq bM_x$, то достаточно показать, что для произвольной не b- z-подалгебры $\langle f\rangle$ равносильны следующие утверждения:

1) $\langle f\rangle \subseteq M_x$;

2) если $\langle h\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$, где $\langle g\rangle \subseteq bM_x$, то $\langle h\rangle$ — z-подалгебра.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Обратно, пусть $f(x) > 0$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и рассмотрим функцию $g \in C^\vee(X)$, такую что $g = 1$ на $\mathrm{Z}(f)$, $g(x) = 0$ и $g \leqslant 1$. Очевидно, $\langle g\rangle \subseteq bM_x$, но $\langle f\vee g\rangle$ — u-подалгебра, хотя $\langle f\vee g\rangle \subseteq \langle f\rangle\vee\langle g\rangle$. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Aut}_{M_x}(\mathrm{A}(C^\vee(X)))$ множество автоморфизмов α решётки $\mathrm{A}(C^\vee(X))$, таких что $\alpha(M_x) = M_x$ для всех $x \in X$. По предложению 4.2 при доказательстве теоремы 4.1 можно считать, что $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$.

Дальнейшие рассуждения зависят от мощности пространства X.

4.1. Случай $|X| \leqslant 2$

Пусть $X = \{x\}$. Тогда в полукольце $C^\vee(X) = \mathbb{R}^+$ всего две подалгебры: нулевая подалгебра и подалгебра констант $\mathbb{R}^+$. Поэтому существуют лишь тождественные автоморфизмы решёток $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1(C^\vee(X)\big)$.

Для произвольного $t > 0$ отображение $\varphi_t\colon C^\vee(X) \to C^\vee(X)$, заданное правилом $f \mapsto f^t$, является автоморфизмом полукольца $C^\vee(X)$, порождающим тождественный автоморфизм α решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$, так как

$$\alpha(0) = \langle 0^t \rangle = 0, \quad \alpha_t(\mathbb{R}^+) = \alpha_t(\langle 1 \rangle) = \langle 1^t \rangle = \mathbb{R}^+.$$

Кроме того, по теореме 3.5 любой автоморфизм полукольца $C^\vee(X)$ задаётся правилом $f \mapsto f^t$ для некоторого $t > 0$. Поэтому в случае $X = \{x\}$ существуют единственный автоморфизм α решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ и, напротив, континуум порождающих его автоморфизмов φ полукольца $C^\vee(X)$. Пункт 2 теоремы 4.1 доказан.

Если $X = \{x, y\}$, то $C^\vee(X) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и решётка $\mathbb{A}_1(C^\vee(X)\big)$ конечная, так как в силу утверждения 3) предложения 2.7 в полукольце $C^\vee(X)$ имеется пять однопорождённых подалгебр с единицей:

$$\mathbb{R}^+, \quad \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right], \quad \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right], \quad [(1,0)], \quad [(0,1)],$$

причём

$$\mathbb{R}^+ \subset \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right] \subset [(1,0)], \quad \mathbb{R}^+ \subset \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] \subset [(0,1)]. \tag{4.1}$$

Заметим, что

$$(a, b) \in \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right] \vee \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$$

для любых $a > 0$, $b > 0$. В самом деле, выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \max\{a, b\} \leqslant \min\{a, b\}.$$

Тогда

$$(a, b) = a \cdot \left(1, \frac{1}{2}\right)^m \vee b \cdot \left(\frac{1}{2}, 1\right)^m \in \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right] \vee \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right].$$

Из приведённых рассуждений следует, что решётка $\mathbb{A}_1(C^\vee(X)\big)$ содержит четыре двухпорождённые подалгебры:

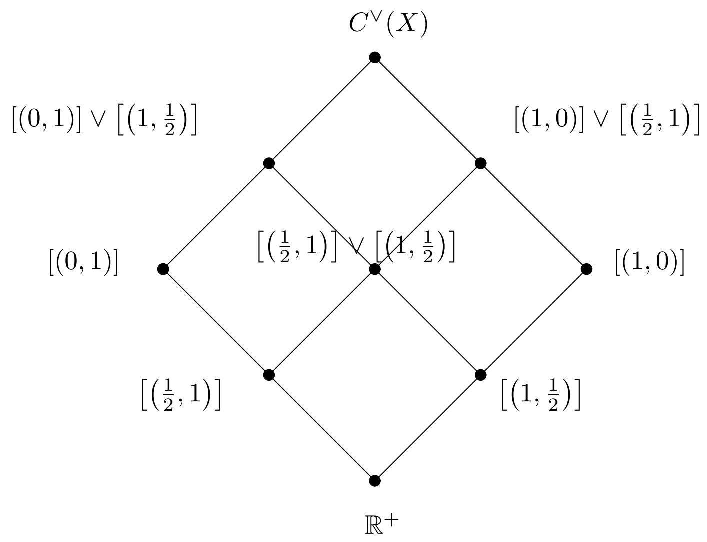

Рис. 1. Диаграмма Хассе решётки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, $|X| = 2$

$$\left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\right] \vee \left[\left(\frac{1}{2},1\right)\right], \quad \left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\right] \vee [(0,1)], \quad \left[\left(\frac{1}{2},1\right)\right] \vee [(1,0)],$$
$$[(1,0)] \vee [(0,1)] = C^\vee(X).$$

Таким образом, в случае $X = \{x, y\}$ решётка $\mathbb{A}_1\big(C^\vee(X)\big)$ образована пятью однопорождёнными и четырьмя двухпорождёнными подалгебрами и является прямым произведением двух трёхэлементных цепей (4.1).

Приступим к описанию решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ в случае $X = \{x, y\}$. Для начала перечислим однопорождённые подалгебры полукольца $C^\vee(X)$:

$$\langle(0,0)\rangle, \quad \langle(1,1)\rangle = \mathbb{R}^+, \quad \langle(1,r)\rangle, \quad \langle(r,1)\rangle, \quad \langle(1,0)\rangle, \quad \langle(0,1)\rangle,$$

где $0 < r < 1$.

Для перечисления двухпорождённых подалгебр понадобится следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть $f, g \in C^\vee(X)$ и множества X_1, X_2, X_3 (возможно, $X_3 = \varnothing$) образуют разбиение X, причём*

$$f(X_1) = g(X_1) = \{1\}, \quad f(X_2) = \{a\}, \quad g(X_2) = \{b\}, \quad f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = X_3,$$

где $1 > a > 0$, $1 > b > 0$. Тогда

$$\langle f\rangle \subset \langle g\rangle \Longleftrightarrow a < b. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $a < b$ и $b^n \leqslant a$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f = \frac{a}{b} \cdot g \vee g^n \in \langle g \rangle.$$

Значит, $\langle f \rangle \subseteq \langle g \rangle$.

Допустим, что $\langle f \rangle = \langle g \rangle$. Тогда функция g имеет вид

$$g = a_1 f \vee \ldots \vee a_m f^m,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a_1 \vee \ldots \vee a_m = 1, \\ a_1 a \vee \ldots \vee a_m a^m = b, \end{cases}$$

которая несовместна, так как $a_i a^i < b$ при $a_i \leqslant 1$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\langle f \rangle \subset \langle g \rangle$.

Обратная импликация очевидна. □

Пусть a и b — положительные числа, меньшие единицы. Тогда

$$\begin{aligned} (1,1) &= (1,a) \vee (b,1) \in \langle (1,a) \rangle \vee \langle (b,1) \rangle, \\ (1,1) &= (1,a) \vee (0,1) \in \langle (1,a) \rangle \vee \langle (0,1) \rangle, \\ (1,1) &= (a,1) \vee (1,0) \in \langle (a,1) \rangle \vee \langle (1,0) \rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Учитывая соотношения (4.3) и уже известное описание однопорождённых и двухпорождённых подалгебр с единицей, получаем, что двухпорождённые подалгебры полукольца $C^{\vee}(X)$ имеют следующий вид:

1) $\langle (1,a) \rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(1,1/2)]$;
2) $\langle (a,1) \rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(1/2,1)]$;
3) $\langle (1,0) \rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(1,0)]$;
4) $\langle (0,1) \rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(0,1)]$;
5) $\langle (1,a) \rangle \vee \langle (b,1) \rangle = [(1,1/2)] \vee [(1/2,1)]$;
6) $\langle (1,a) \rangle \vee \langle (0,1) \rangle = [(1,1/2)] \vee [(0,1)]$;
7) $\langle (a,1) \rangle \vee \langle (1,0) \rangle = [(1/2,1)] \vee [(1,0)]$;
8) $\langle (1,a) \rangle \vee \langle (1,0) \rangle$;
9) $\langle (a,1) \rangle \vee \langle (0,1) \rangle$;
10) $\langle (1,0) \rangle \vee \langle (0,1) \rangle = [(1,0)] \vee [(0,1)]$.

Видим, что если произвольная подалгебра A содержит пару функций (a,b) и (c,d), где $0 \leqslant a \leqslant b$ и $c \geqslant d \geqslant 0$, то она является одно- или двухпорождённой подалгеброй.

Полученные результаты позволяют описать подалгебры, отличные от одно- и двухпорождённых подалгебр ($0 < a < 1$):

$$
\begin{aligned}
A_{(1,a),\,>} &= \bigcup_{0<b<a} \langle (1,b)\rangle,\\
A_{(a,1),\,>} &= \bigcup_{0<b<a} \langle (b,1)\rangle,\\
A_{(1,a),\,\geqslant} &= \bigcup_{0\leqslant b<a} \langle (1,b)\rangle,\\
A_{(a,1),\,\geqslant} &= \bigcup_{0\leqslant b<a} \langle (b,1)\rangle.
\end{aligned}
$$

При этом

$$
\begin{aligned}
&A_{(1,a),\,>} \subset \langle (1,b)\rangle \subset A_{(1,c),\,>} \Longleftrightarrow a \leqslant b < c,\\
&A_{(1,a),\,\geqslant} \subset \langle (1,b)\rangle \vee \langle (1,0)\rangle \subset A_{(1,c),\,\geqslant} \Longleftrightarrow a \leqslant b < c,\\
&A_{(a,1),\,>} \subset \langle (b,1)\rangle \subset A_{(c,1),\,>} \Longleftrightarrow a \leqslant b < c,\\
&A_{(a,1),\,\geqslant} \subset \langle (b,1)\rangle \vee \langle (0,1)\rangle \subset A_{(c,1),\,\geqslant} \Longleftrightarrow a \leqslant b < c.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Таким образом, решётка $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$, в отличие от $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big)$, бесконечна.

Замечание 4.4. Пусть X — произвольное $\mathbb{R}^{+}$-отделимое пространство, т. е. для любых двух его различных точек x и y существует функция $f \in C^{\vee}(X)$, для которой $f(x) \neq f(y)$. Докажем, что для любого $\mathbb{R}^{+}$-отделимого пространства X имеют место следующие утверждения:

1) решётка $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$ модулярна (дистрибутивна) тогда и только тогда, когда $|X| = 1$;
2) решётка $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big)$ модулярна (дистрибутивна) тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant 2$.

Действительно, если $|X| = 1$, то получаем цепи $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big) = \{0, \mathbb{R}^{+}\}$ и $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big) = \{\mathbb{R}^{+}\}$.

Если $X = \{x, y\}$, то решётка $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big)$, как было показано ранее, является прямым произведением двух трёхэлементных цепей, а потому модулярна и дистрибутивна. Решётка $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$, напротив, немодулярна, так как содержит немодулярную пятиэлементную подрешётку

$$\{0,\ \langle (0,1)\rangle,\ \langle (1,0)\rangle,\ [(1,0)],\ C^{\vee}(X)\}.$$

Пусть $|X| \geqslant 3$ и $x \neq y \in X$. Тогда подалгебры

$$\mathbb{R}^{+},\quad A_{f(x)\leqslant f(y)},\quad A_{f(x)\geqslant f(y)},\quad A_{f(x)>f(y)},\quad C^{\vee}(X),$$

где

$$
\begin{aligned}
A_{f(x)\leqslant f(y)} &= \{f \in C^{\vee}(X)\colon f(x) \leqslant f(y)\},\\
A_{f(x)\geqslant f(y)} &= \{f \in C^{\vee}(X)\colon f(x) \geqslant f(y)\},\\
A_{f(x)>f(y)} &= \{f \in C^{\vee}(X)\colon f(x) > f(y) \text{ или } f \in \mathbb{R}^{+}\},
\end{aligned}
$$

образуют немодулярную пятиэлементную подрешётку решёток $\mathbb{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big)$ и $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$. Следовательно, эти решётки немодулярны.

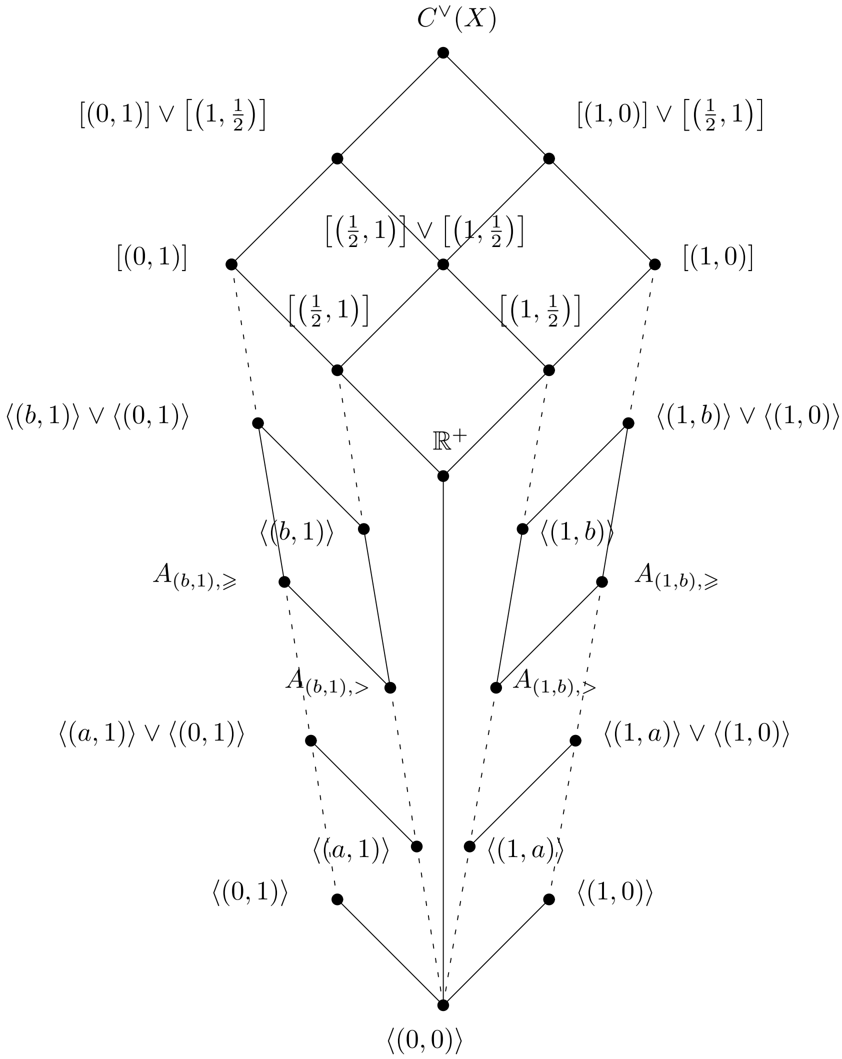

Рис. 2. Диаграмма Хассе решётки $\mathbb{A}\big(C^{\vee}(X)\big)$, $|X| = 2$, $0 < a < b < 1$

Завершим доказательство пункта 3 теоремы 4.1.
Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^{\vee}(X)\big)\Big)$, где $X = \{x, y\}$. Тогда

$$\alpha\colon M_x \mapsto M_x,\ M_y \mapsto M_y,\ A \mapsto A \text{ для всех } A \in \mathrm{A}_1\big(C^{\vee}(X)\big).$$

Остаётся выяснить, как выглядят образы подалгебр $\langle(1,r)\rangle$ и $\langle(r,1)\rangle$, где $0<r<1$.

Рассмотрим соответствие $\gamma_x\colon[0,1]\to[0,1]$, действующее по правилу

$$\gamma_x(r)=r', \text{ если } \alpha\colon\langle(r,1)\rangle\mapsto\langle(r',1)\rangle.$$

По лемме 4.3 соответствие γ_x является порядковым автоморфизмом цепи $[0,1]$. Аналогично определяется автоморфизм γ_y. Таким образом, с каждым автоморфизмом $\alpha\in\mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$ можно связать пару (γ_x,γ_y) порядковых автоморфизмов цепи $[0,1]$. Покажем, что верно и обратное.

Для произвольной пары (γ_x,γ_y) порядковых автоморфизмов цепи $[0,1]$ рассмотрим соответствие $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}$, действующее на множестве однопорождённых подалгебр полукольца $C^\vee(X)$ следующим образом:

$$\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}\colon\begin{cases}\langle(0,0)\rangle\mapsto\langle(0,0)\rangle,\\ \langle(r,1)\rangle\mapsto\langle(\gamma_x(r),1)\rangle,\\ \langle(1,r)\rangle\mapsto\langle(1,\gamma_y(r))\rangle\end{cases}$$

для всех $r\in[0,1]$. Легко убедиться (см. диаграмму Хассе решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$, $|X|=2$), что соответствие $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}$ продолжается до некоторого (единственного) автоморфизма из $\mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$. Обозначим этот автоморфизм также через $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}$.

Выясним, когда $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}$ порождается некоторым автоморфизмом φ полукольца $C^\vee(X)$. Пусть $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}(A)=\varphi(A)$ для любой подалгебры $A\in\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$. В частности, $\varphi(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$. Тогда по теореме 3.5 найдётся число $t>0$, такое что $\varphi(f)=f^t$ для любой $f\in C^\vee(X)$. Следовательно, $\gamma_x(r)=\gamma_y(r)=r^t$ для всех $r\in[0,1]$. Видим, что автоморфизм $\alpha_{(\gamma_x,\gamma_y)}$ порождается некоторым (единственным) автоморфизмом полукольца $C^\vee(X)$ лишь тогда, когда найдётся число $t>0$, такое что $\gamma_x(r)=\gamma_y(r)=r^t$ для всех $r\in[0,1]$. Это наблюдение завершает доказательство пункта 3 теоремы 4.1

4.2. Случай $|X|=3$

Будем говорить, что *автоморфизм* $\alpha\in\mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$ *сохраняет отношение для функций* $f,g\in C^\vee(X)$, если то же самое отношение верно для функций f', g', отвечающих образам $\alpha(\langle f\rangle)=\langle f'\rangle$ и $\alpha(\langle g\rangle)=\langle g'\rangle$ (если f, g — нормированные функции, то f', g' также нормированные).

Предложение 4.5. *Для произвольных подалгебры* $\langle f\rangle$ *и точек* $x\neq y\in X$ *автоморфизм* $\alpha\in\mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$ *сохраняет отношения*

$$f(x)=f(y),\quad f(x)<f(y),\quad f(x)>f(y).$$

Доказательство. Случай $\langle f\rangle=\mathbb{R}^+$ очевиден.

Докажем, что для произвольной подалгебры $\langle f\rangle\neq\mathbb{R}^+$ равносильны следующие утверждения.

1. $f(x) > f(y)$.
2. Пусть

$$A = (\langle f\rangle \vee \mathbb{R}^{+}) \cap (M_x \vee \mathbb{R}^{+}), \quad B = (\langle f\rangle \vee \mathbb{R}^{+}) \cap (M_y \vee \mathbb{R}^{+}).$$

Тогда выполняются следующие условия:

2.1) $A \subset B$;

2.2) существует подалгебра $\langle u\rangle$, где $\langle u\rangle \subseteq B$ и $\langle u\rangle \nsubseteq A$, для которой найдётся подалгебра $\langle v\rangle$, такая что

а) $\langle v\rangle \subseteq \langle u\rangle \vee \mathbb{R}^{+}$;

б) $\langle v\rangle \nsubseteq \langle u\rangle$;

в) $\langle v\rangle \subseteq B$, но $\langle u\rangle \nsubseteq A$.

Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Пусть $f(x) > f(y)$. Докажем, что $g \in B$ для произвольной функции $g \in A$.

Поскольку $g \in \langle f\rangle \vee \mathbb{R}^{+}$, то функция g имеет вид

$$g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n.$$

Если $g \in \mathbb{R}^{+}$, то $g \in B$.

Пусть $g \notin \mathbb{R}^{+}$. Тогда среди коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ имеются положительные. Положим

$$l = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n.$$

Поскольку $f(x) > f(y)$, то $l(x) > l(y)$, причём $l(x) \leqslant a_0$, так как в противном случае $g(x) > g(y)$, что противоречит тому, что $g \in M_x \vee \mathbb{R}^{+}$.

Пусть $l(x) = a$, $l(y) = b$, где $a_0 \geqslant a > b$. Рассмотрим функцию

$$h = l \vee \frac{a+b}{2}.$$

Ясно, что

$$h(x) = a, \quad h(y) = \frac{a+b}{2}, \quad h \geqslant \frac{a+b}{2},$$

т. е. в точке y функция h принимает наименьшее значение.

Докажем, что $h \in M_y \vee \mathbb{R}^{+}$. Пусть

$$L = \left\{x \in X : l(x) \geqslant \frac{a+b}{2}\right\}.$$

Тогда L — замкнутое множество, причём $y \notin L$. Воспользуемся тем, что X — тихоновское пространство и рассмотрим функцию $\lambda \in C^{\vee}(X)$, такую что

$$\lambda\colon \begin{cases} L \mapsto \{1\}, \\ y \mapsto 0, \\ \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $(\lambda l)(y) = 0$, то $\lambda l \in M_y$. Кроме того, $\lambda l = l$ на L. Отметим также, что

$$\lambda l \vee \frac{a+b}{2} \in M_y \vee \mathbb{R}^{+},$$

но
$$\lambda l \vee \frac{a+b}{2} = l \vee \frac{a+b}{2} = h \in M_y \vee \mathbb{R}^+$$
($\lambda \leqslant 1$ и $l < \frac{a+b}{2}$ вне L). Значит, $g = h \vee a_0 \in B$, а потому $L \subseteq B$.

Докажем, что включение $A \subseteq B$ строгое. Для этого рассмотрим функцию u:
$$u = f \vee \frac{a+b}{2} \in \langle f \rangle \vee \mathbb{R}^+, \text{ где } f(x) = a,\ f(y) = b,\ a > b.$$
Покажем, что $u \in B \setminus A$. Функция u не лежит в A, так как
$$u(x) = a > \frac{a+b}{2} = u(y).$$

Докажем, что $u \in M_y \vee \mathbb{R}^+$. Рассмотрим непустое замкнутое множество
$$U = \left\{ x \in X \colon f(x) \geqslant \frac{a+b}{2} \right\}$$
($x \in U$, $y \notin U$). Воспользуемся тем, что X — тихоновское пространство, и рассмотрим функцию $\lambda \in C^{\vee}(X)$, такую что
$$\lambda\colon \begin{cases} U \mapsto \{1\}, \\ y \mapsto 0, \\ \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$
Тогда $\lambda f \in M_y$, так как $(\lambda f)(y) = 0$. Значит,
$$\lambda f \vee \frac{a+b}{2} \in M_y \vee \mathbb{R}^+,$$
а потому
$$\lambda f \vee \frac{a+b}{2} = f \vee \frac{a+b}{2} = u \in M_y \vee \mathbb{R}^+.$$
Итак, $u \in B \setminus A$. Импликация $1 \Longrightarrow 2.1)$ установлена.

Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2.2)$. Для этого рассмотрим функцию
$$v = u \vee \frac{2a+b}{3}.$$
Как и для u, устанавливается, что $v \in B \setminus A$. Включение $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \vee \mathbb{R}^+$ очевидно. Докажем, что $\langle v \rangle \nsubseteq \langle u \rangle$. Предположим обратное. Тогда функция v имеет вид
$$v = a_1 u \vee a_2 u^2 \vee \ldots \vee a_n u^n.$$
Пусть $v(y) = a_i u^i(y)$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда
$$v(y) a^i = a_i a^i u^i(y) \leqslant a u^i(y),$$
так как $a_i a^i \leqslant a$. Следовательно, $v(y) a^{i-1} \leqslant u^i(y)$, что противоречит тому, что $a > v(y) > u(y) > 0$.

Итак, $\langle v \rangle \nsubseteq \langle u \rangle$. Импликация $1 \Longrightarrow 2.2)$ установлена.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. Поскольку $A \subset B$, то $f(x) \geqslant f(y)$, так как если $f(x) < f(y)$, то в силу установленного ранее имели бы $B \subset A$.

Предположим, что $f(x) = f(y)$. Обратимся к утверждению 2.2) и рассмотрим функцию u, такую что $u \in B \setminus A$. Так как $u \in B$, то функция u имеет вид

$$u = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n$$

и принимает в точке y наименьшее значение, скажем c (ясно, что $c \geqslant a_0$). Поскольку $f(x) = f(y)$, то и $u(x) = c$. Так как $u \in M_y \vee \mathbb{R}^+$, то $u = g \vee c$ для некоторой функции $g \in M_y$. Вновь обратимся к утверждению 2.2) и рассмотрим подалгебру $\langle v \rangle$. По условию $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \vee \mathbb{R}^+$. Значит,

$$v = b_0 \vee b_1 u \vee \ldots \vee b_m u^m,$$

причём среди коэффициентов $b_1, \ldots, b_m$ есть положительные, так как $v \notin A$, а значит, $v \notin \mathbb{R}^+$. Поскольку $\langle v \rangle \nsubseteq \langle u \rangle$, то в некоторых точках функция

$$v' = b_1 u \vee \ldots \vee b_m u^m \in \langle u \rangle$$

принимает значения, меньшие b_0, так как в противном случае $v = v' \in \langle u \rangle$. В точках x и y функция u принимает наименьшее значение. Следовательно, функция v' также принимает в этих точках наименьшее значение, т. е. $v'(x) = v'(y) < b_0$.

Докажем, что $v \in A \cap B$, и тем самым получим противоречие с условием 2.2 в). Так как $v \in \langle u \rangle \vee \mathbb{R}^+ \subseteq \langle f \rangle \vee \mathbb{R}^+$, то достаточно показать, что $v \in (M_x \vee \mathbb{R}^+) \cap (M_y \vee \mathbb{R}^+)$. С этой целью рассмотрим множество

$$V' = \{x \in X : v' \geqslant b_0\}.$$

Оно замкнуто, непусто (если $v' < b_0$, то $v = b_0$, но $v \notin \mathbb{R}^+$), и $x, y \notin V'$. Вновь воспользуемся тем, что X — тихоновское пространство, и рассмотрим функции $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\vee(X)$, такие что

$$\lambda_1 \colon \begin{cases} V' \mapsto \{1\}, \\ x \mapsto 0, \\ \lambda_1 \leqslant 1, \end{cases} \qquad \lambda_2 \colon \begin{cases} V' \mapsto \{1\}, \\ y \mapsto 0, \\ \lambda_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда функция $\lambda_1 \lambda_2 v'$ принадлежит подалгебрам M_x и M_y. Кроме того, $\lambda_1 \lambda_2 v' \vee b_0 = v$. Получается, что $\langle v \rangle \subseteq A \cap B$. Противоречие. Значит, $f(x) \neq f(y)$. $\square$

Пусть $X = \{x, y, z\}$ — трёхточечное дискретное пространство. Функции $f \in C^\vee(X)$ часто будем записывать как тройки: $f = \big(f(x), f(y), f(z)\big)$.

Лемма 4.6. *Для произвольных подалгебр $\langle f \rangle \neq \langle g \rangle$, где*

$$f = (1, a, b_f), \quad 1 > a > b_f \geqslant 0, \quad g = (1, a, b_g), \quad a > b_g \geqslant 0,$$

имеем, что $\langle f \rangle \subseteq [g]$ тогда и только тогда, когда $b_g < b_f$.

Доказательство. Пусть $b_g < b_f$. Тогда $f = g \vee b_f \in [g]$.

Обратно, пусть $\langle f\rangle \subseteq [g]$. Тогда функция f имеет вид

$$f = a_0 \vee a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1, \\ a_0 \vee a_1 a \vee \ldots \vee a_n a^n = a, \\ a_0 \vee a_1 b_g \vee \ldots \vee a_n b_g^n = b_f. \end{cases}$$

Из последнего равенства получаем, что $a_0 \leqslant b_f$. Кроме того, $b_f < a$. Следовательно,

$$a_1 a \vee \ldots \vee a_n a^n = a,$$

что ввиду $a_i \leqslant 1$ возможно лишь при $a_1 = 1$. Поэтому $f = a_0 \vee g$. В частности, $b_f = a_0 \vee b_g$. По условию $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$. Значит, $b_f = a_0 > b_g$. □

Лемма 4.7. *Для произвольной подалгебры $\langle f\rangle$ имеется решёточная характеризация подалгебры $\langle g\rangle$, где*

1) $f = (1, a, 0)$, $g = (1, a, b)$;
2) $f = (1, a, b)$, $g = (1, a, 0)$;
3) $f = (1, a, b)$, $g = (1, a, a)$;
4) $f = (1, a, a)$, $g = (1, 1, a)$;
5) $f = (1, 1, a)$, $g = (1, a, a)$;
6) $f = (1, a, b)$, $g = (1, 1, b)$.

Здесь $1 > a > b \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим вариант 1). Случай $b = 0$ очевиден. Докажем, что для произвольной трёхзначной sp-подалгебры $\langle g\rangle \subset [f]$, где функция g нормированная, равносильны следующие условия:

1.1) $g = (1, a, b)$ для некоторого b, $1 > a > b > 0$;
1.2) $\langle g\rangle \nsubseteq [h]$ для любой z-подалгебры $\langle h\rangle \subset \langle f\rangle$, где $h = (1, a_h, 0)$, $1 > a_h > 0$.

Докажем импликацию 1.1) $\Longrightarrow$ 1.2). Допустим, что $\langle g\rangle \subseteq [h]$ для некоторой z-подалгебры $\langle h\rangle \subset \langle f\rangle$, где $h = (1, a_h, 0)$, $1 > a_h > 0$. Поскольку $h \in \langle f\rangle$, то функция h имеет вид

$$h = a_1 f \vee a_2 f^2 \vee \ldots \vee a_n f^n,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1, \\ a_1 a \vee a_2 a^2 \vee \ldots \vee a_n a^n = a_h. \end{cases}$$

Если $a_1 = 1$, то $a_h = a$ и $f = h$, но $\langle h\rangle \subset \langle f\rangle$. Поэтому $a_1 < 1$ и, следовательно, $a_h < a$. Далее, поскольку $g \in [h]$, то функция g имеет вид

$$g = b_0 \vee b_1 h \vee \ldots \vee b_m h^m,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} b_0 \vee b_1 \vee \ldots \vee b_m = 1, \\ b_0 \vee b_1 a_h \vee b_2 a_h^2 \vee \ldots \vee b_m a_h^m = a, \\ b_0 = b. \end{cases}$$

Поскольку $b_0 = b < a$, то

$$b_1 \vee \ldots \vee b_m = 1, \quad b_0 \vee b_1 a_h \vee b_2 a_h^2 \vee \ldots \vee b_m a_h^m \leqslant a_h < a.$$

Противоречие. Значит, такой z-подалгебры $\langle h \rangle$ не существует.

Докажем импликацию 1.2) $\Longrightarrow$ 1.1). По условию функция g нормированная и задаёт трёхзначную sp-подалгебру $\langle g \rangle \subset [f]$. Поэтому, с одной стороны, функция g имеет вид $g = (1, a_g, b_g)$, где $1 > a_g > b_g$, а с другой стороны,

$$g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1, \\ a_0 \vee a_1 a \vee \ldots \vee a_n a^n = a_g, \\ a_0 = b_g. \end{cases}$$

Положим

$$h = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n.$$

Тогда $\langle h \rangle$ — z-подалгебра и $\langle g \rangle \subset [h] \subseteq [f]$. Заметим, что если $a_1 < 1$, то $h(y) < a$. По лемме 2.6 это означает, что $\langle h \rangle \neq \langle f \rangle$, а потому $\langle h \rangle \subset \langle f \rangle$. Противоречие с условием 2.2). Значит, $a_1 = 1$ и $a_g = a$.

Рассмотрим случай 2). Воспользуемся пунктом 1) и рассмотрим трёхзначную z-подалгебру $\langle g \rangle$, где $g = \langle (1, a_g, 0) \rangle$, $1 > a_g > 0$, такую что $\langle f \rangle = \langle (1, a_g, b_g) \rangle$ для некоторого $b_g < a_g$. Тогда по лемме 2.6 $a_g = a$.

Рассмотрим случай 3). Заметим, что подалгебра $\langle (1, a, a) \rangle$ служит минимальным элементом цепи подалгебр M, где

$$M = \{ \langle g \rangle \colon g = (1, a_g, a_g),\ 1 > a_g \geqslant a \}.$$

Остаётся получить решёточную характеризацию множества подалгебр M.

Докажем, что для произвольной подалгебры $\langle g \rangle$, где $g = (1, a_g, a_g)$, $1 > a_g > 0$, равносильны следующие условия:

3.1) $a_g \geqslant a$;

3.2) $\langle h \rangle \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ для любой подалгебры $\langle h \rangle$, где $h = (1, a, b_h)$, $a > b_h \geqslant b$ (подалгебры $\langle h \rangle$ решёточно характеризуются по лемме 4.6).

Докажем импликацию 3.1) $\Longrightarrow$ 3.2). Действительно,

$$h = f \vee \frac{b_h}{a_g} \cdot g \in \langle f \rangle \vee \langle g \rangle.$$

Докажем импликацию 3.2) $\Longrightarrow$ 3.1). Предположим, что $a_g < a$. Рассмотрим функцию $h = (1, a, b_h)$, где $a > b_h > a_g \vee b$. Поскольку $h \in \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$, то функция h имеет вид

$$h = a_{10} f \vee a_{01} g \vee \ldots \vee a_{mn} f^m g^n.$$

Следовательно,

$$a_{10} \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{mn} = 1, \quad a_{10} b \vee a_{01} a_g \vee \ldots \vee a_{mn} b^m a_g^n = b_h.$$

Видим, что $a_{ij} \leqslant 1$. Следовательно,

$$a_{ij} b^i a_g^j \leqslant b^i a_g^j < b_h^i b_h^j \leqslant b_h.$$

Поэтому второе равенство невозможно. Значит, $a_g \geqslant a$.

Рассмотрим случай 4). Заметим, что подалгебра $\langle (1, 1, a) \rangle$ служит минимальным элементом цепи подалгебр M, где

$$M = \{ \langle g \rangle \colon g = (1, 1, b_g),\ 1 > b_g \geqslant a \}.$$

Остаётся получить решёточную характеризацию множества подалгебр M.

Докажем, что для произвольной подалгебры $\langle g \rangle$, где $g = (1, 1, b_g)$, $1 > b_g > 0$, равносильны следующие условия:

4.1) $b_g \geqslant a$;

4.2) $\langle h \rangle \nsubseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ для любой подалгебры $\langle h \rangle$, где $h = (1, 1, b_h)$, $1 > b_h > b_g$ (подалгебры $\langle h \rangle$ имеют решёточную характеризацию по лемме 4.6).

Докажем импликацию 4.2) $\Longrightarrow$ 4.1). Если $b_g < a$, то $h = f \vee g \in \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$, хотя $b_h = a > b_g$. Значит, условие 4.2) влечёт $b_g \geqslant a$.

Докажем импликацию 4.1) $\Longrightarrow$ 4.2). Пусть $b_g \geqslant a$. Допустим, что $\langle h \rangle \subseteq \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ для некоторой подалгебры $\langle h \rangle$, где $h = (1, 1, b_h)$, $1 > b_h > b_g$. Функция h как элемент подалгебры $\langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ имеет вид

$$h = a_{10} f \vee a_{01} g \vee \ldots \vee a_{mn} f^m g^n.$$

Значит,

$$a_{10} \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{mn} = 1, \quad a_{10} b \vee a_{01} b_g \vee \ldots \vee a_{mn} b^m b_g^n = b_h.$$

Видим, что $a_{ij} \leqslant 1$. Следовательно,

$$a_{ij} b^i b_g^j \leqslant b_i b_g^j \leqslant a^i b_g^j \leqslant b_g^i b_g^j \leqslant b_g < b_h.$$

Поэтому второе равенство невозможно. Значит, такой подалгебры $\langle h \rangle$ не существует.

Рассмотрим случай 5). Воспользуемся пунктом 4) и рассмотрим подалгебру $\langle g \rangle$, где $g = (1, a_g, a_g)$, $1 > a_g > 0$, такую что $\langle f \rangle = \langle (1, 1, a_g) \rangle$. Тогда по лемме 2.6 $a_g = a$.

Пункт 6) доказывается аналогично пункту 4). □

Предложение 4.8. *Для произвольных точки $x \in X$ и подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$, где $f, g \notin \mathbb{R}^+$ — нормированные функции, автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$ сохраняет отношения*

$$f(x) = g(x), \quad f(x) < g(x), \quad f(x) > g(x).$$

Доказательство. Если одно из сравниваемых значений равно 0 или 1, то достаточно воспользоваться предложением 4.5.

Пусть сравниваемые значения положительны и меньше 1. Воспользуемся леммой 4.7 и от подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ перейдём к подалгебрам $\langle f' \rangle$ и $\langle g' \rangle$, где $f' = (f(x), 1, 1)$, $g' = (g(x), 1, 1)$. Тогда по лемме 4.3 $\langle f' \rangle = \langle g' \rangle$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$, и $\langle f' \rangle \subset \langle g' \rangle$ тогда и только тогда, когда $f(x) < g(x)$. □

Лемма 4.9. *Для произвольной нормированной функции $f \in C^\vee(X)$, $|\operatorname{Im} f \setminus \{0\}| \geqslant 3$, $1 \in \operatorname{Im} f$, равенство*

$$f^k = a_1 f \vee \ldots \vee a_{n-1} f^{n-1} \vee f^n, \tag{4.5}$$

где $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1} < 1$, $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, возможно лишь при $k = n$.

Доказательство. Поскольку $|\operatorname{Im} f \setminus \{0\}| \geqslant 3$, то $1 = f(x) > f(y) > f(z) > 0$ для некоторых $x, y, z \in X$.

Если $k > n$, то $f^k(y) < f^n(y)$, но $f^k(y) \geqslant f^n(y)$ в силу (4.5). Значит, $k \leqslant n$.

Допустим, что $k < n$. Тогда из (4.5) получаем

$$\begin{cases} a_1 f(y) \vee \ldots \vee a_{n-1} f^{n-1}(y) \vee f^n(y) = f^k(y), \\ a_1 f(z) \vee \ldots \vee a_{n-1} f^{n-1}(z) \vee f^n(z) = f^k(z). \end{cases} \tag{4.6}$$

Поскольку $a_k \vee \ldots \vee a_{n-1} < 1$, то

$$\begin{cases} a_k f^k(y) \vee \ldots \vee a_{n-1} f^{n-1}(y) \vee f^n(y) < f^k(y), \\ a_k f^k(z) \vee \ldots \vee a_{n-1} f^{n-1}(z) \vee f^n(z) < f^k(z). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} a_1 f(y) \vee \ldots \vee a_{k-1} f^{k-1}(y) = f^k(y), \\ a_1 f(z) \vee \ldots \vee a_{k-1} f^{k-1}(z) = f^k(z). \end{cases} \tag{4.7}$$

Значит, $a_i f^i(y) = f^k(y)$ для некоторого i, где $k-1 \geqslant i \geqslant 1$, или $a_i = f^{k-i}(y)$. Тогда

$$a_i f^i(z) = f^{k-i}(y) f^i(z) > f^k(z),$$

что противоречит (4.7). Значит, $k = n$. □

Лемма 4.10. *Пусть $f \in C^\vee(X)$ — нормированная функция, причём $|\operatorname{Im} f \setminus \{0\}| \geqslant 3$, $1 \in \operatorname{Im} f$. Тогда для произвольной подалгебры $\langle g \rangle$, где $\langle g \rangle \subset \langle f \rangle$ и $\langle g \rangle \neq \langle f^k \rangle$ для всех $k \in \mathbb{N}$, найдутся подалгебры $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$, включённые в $\langle f \rangle$ и отличные от $\langle g \rangle$ и $\langle f^k \rangle$ для всех $k \in \mathbb{N}$, такие что $\langle g \rangle \subset \langle u \rangle \vee \langle v \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle$ и $\langle g\rangle \neq \langle f^k\rangle$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда функция g имеет вид
$$g = a_i f^i \vee \ldots \vee a_{j-1} f^{j-1} \vee a_j f^j,$$
где $a_i > 0$, $a_j > 0$, $j > i \geqslant 1$. Без ограничения общности будем считать функцию g нормированной. Поскольку $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle$ и $1 \in \operatorname{Im} f$, то $f(x) = g(x) = 1$ для некоторой точки $x \in X$. Следовательно, $a_i \vee \ldots \vee a_{j-1} \vee a_j = 1$ и $f^k \geqslant f^{k+1}$ на X для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому можно считать, что $a_j = 1$ и $a_p > a_q$ для любого $a_p \neq 0$ при $j \geqslant p > q \geqslant i$.

Рассмотрим функцию $l = a_i f^i \vee \ldots \vee a_{j-1} f^{j-1}$. Поскольку $g \geqslant f^j$ и $g \neq f^j$ (иначе $\langle g\rangle = \langle f^j\rangle$), то $l(x_0) > f^j(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Если $l(x_0) = a$, $f^j(x_0) = b$, то положим
$$u = \frac{a+b}{2a} l \vee f^j, \quad v = \frac{2}{\max+1} l \vee f^j,$$
где $\max = a_i \vee \ldots \vee a_{j-1}$. Ясно, что $\max < 1$. Докажем, что функции u и v искомые.

Заметим, что
$$u \vee \frac{\max+1}{2} v = \left(\frac{a+b}{2a} l \vee l\right) \vee \left(f^j \vee \frac{\max+1}{2} f^j\right) = l \vee f^j = g,$$
так как
$$\frac{a+b}{2a} < 1, \quad \frac{\max+1}{2} < 1.$$
Следовательно, $\langle g\rangle \subseteq \langle u\rangle \vee \langle v\rangle$.

Допустим, что $\langle u\rangle = \langle f^k\rangle$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $u = f^k$ по лемме 2.6:
$$\frac{a+b}{2a} \left(a_i f^i \vee \ldots \vee a_{j-1} f^{j-1}\right) \vee f^j = f^k. \tag{4.8}$$
Значит, $k = j$ по лемме 4.9. С другой стороны,
$$u(x_0) = \frac{a+b}{2a} a \vee b > b = f^k(x_0).$$
Поэтому равенство (4.8) неверно.

Допустим, что $\langle v\rangle = \langle f^k\rangle$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $v = f^k$ по лемме 2.6, т. е.
$$\frac{2}{\max+1} (a_i f^i \vee \ldots \vee a_{j-1} f^{j-1}) \vee f^j = f^k. \tag{4.9}$$
Поскольку
$$\frac{2a_t}{\max+1} < 1 \text{ для всех } i \leqslant t \leqslant j-1,$$
то $k = j$ по лемме 4.9. С другой стороны,
$$v(x_0) = \frac{2a}{\max+1} \vee b > b.$$
Значит, равенство (4.9) неверно.

Докажем, что подалгебры $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$ отличны от $\langle g\rangle$. Предположим обратное: $\langle u\rangle = \langle g\rangle$ или $\langle v\rangle = \langle g\rangle$. Тогда по лемме 2.6 $g = u$ или $g = v$ соответственно, но

$$g(x_0) = a \vee b = a, \quad u(x_0) = \frac{a+b}{2a}a = \frac{a+b}{2} < a, \quad v(x_0) = \frac{2}{\max+1}a > a.$$

Противоречие. Лемма доказана. □

Предложение 4.11. *Пусть* $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^{\vee}(X)\big)\Big)$. *Тогда для произвольных* $n \in \mathbb{N}$ *и трёхзначной подалгебры* $\langle f\rangle$ *получаем, что* $\alpha(\langle f^n\rangle) = \langle (f')^n\rangle$, *где* $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f'\rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра, где $f = (1, a, b)$, $1 > a > b > 0$. Положим

$$M_{f,n} = \{\langle f^k\rangle \colon 1 \leqslant k \leqslant n\}, \quad M_f = \{\langle f^k\rangle \colon k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда по лемме 2.6 $\langle f^i\rangle \neq \langle f^j\rangle$ при $i \neq j$. Следовательно,

$$M_{f,n} = \{\langle f\rangle, \langle f^2\rangle, \ldots, \langle f^n\rangle\}, \quad M_f \setminus M_{f,n} = \{\langle f^{n+1}\rangle, \langle f^{n+2}, \ldots\}.$$

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ докажем, что $\alpha(\langle f^n\rangle) = \langle (f')^n\rangle$.

Случай $n = 1$ очевиден, так как $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f'\rangle$.

Пусть $\alpha(\langle f^k\rangle) = \langle (f')^k\rangle$ для всех $k \leqslant n$. Докажем, что $\alpha(\langle f^{n+1}\rangle) = \langle (f')^{n+1}\rangle$.

Обозначим через $M'_{f,n}$ множество подалгебр $\langle g\rangle$, таких что

а) $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle$;

б) $\langle g\rangle \notin M_{f,n}$;

в) если $\langle g\rangle \subseteq \langle u\rangle \vee \langle v\rangle$ для некоторых подалгебр $\langle u\rangle, \langle v\rangle \subseteq \langle f\rangle$, отличных от $\langle g\rangle$, то $\langle u\rangle \in M_{f,n}$ или $\langle v\rangle \in M_{f,n}$.

Тогда по лемме 4.10 $M'_{f,n} \subseteq M_f \setminus M_{f,n}$. Докажем, что $\langle f^{n+1}\rangle \in M'_{f,n}$. Рассуждая от противного, получаем, что условие в) нарушено для некоторых подалгебр $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$, где $u, v \in \langle f\rangle$ — нормированные функции, причём

$$u = b_1 \vee \ldots \vee b_s f^s, \quad v = c_1 \vee \ldots \vee c_t f^t, \quad f^{n+1} = a_{10}u \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{mq}u^m v^q. \quad (4.10)$$

Пусть $f(x) = 1$. Тогда $f^{n+1}(x) = u(x) = v(x) = 1$. Следовательно,

$$b_1 \vee \ldots \vee b_s, \quad c_1 \vee \ldots \vee c_t = 1, \quad a_{10} \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{mq} = 1,$$

причём можно считать, что

$$b_1 \vee \ldots \vee b_{s-1} < 1 = b_s, \quad c_1 \vee \ldots \vee c_{t-1} < 1 = c_t,$$

так как $f \leqslant 1$.

По лемме 4.9 найдётся max-слагаемое $a_{ij}u^i v^j$, такое что

$$a_{ij}u^i v^j = d_1 f \vee \ldots \vee d_n f^n \vee f^{n+1}.$$

Ясно, что $a_i j = 1$, где для определённости $i \geqslant 1$, и $f^{is} f^{jt} = f^{n+1}$. Значит, $s \leqslant n + 1$.

По условию $\langle u\rangle \notin M_{f,n}$ и $\langle u\rangle \neq \langle f^{n+1}\rangle$. Следовательно, $u(y) > f^s(y)$ для некоторой точки $y \in X$. Тогда

$$(u^i v^j)(y) > (f^{is} f^{jt})(y) = f^{n+1}(y),$$

что противоречит (4.10). Значит, $\langle f^{n+1}\rangle \in M'_{f,n}$.

Поскольку $\alpha(M_{f,n}) = M_{f',n}$, то по предложению 4.8 $\alpha(M'_{f,n}) = M'_{f',n}$. Кроме того, если $\langle h\rangle \in M_{f,n}$, где h — нормированная функция, то

$$\langle h\rangle = \langle f^{n+1}\rangle \text{ тогда и только тогда, когда } h(y) \geqslant l(y) \tag{4.11}$$

для произвольной подалгебры $\langle h\rangle \in M'_{f,n}$, где l — нормированная функция. Поэтому по предложению 4.8 $\alpha(\langle f^{n+1}\rangle) = \langle (f')^{n+1}\rangle$. □

Опишем автоморфизмы решётки $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$, $|X| = 3$.

Предложение 4.12. *Пусть* $\alpha \operatorname{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$, $|X| = 3$. *Тогда найдётся число* $t > 0$, *такое что* $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f^t\rangle$ *для любой* $f \in C^\vee(X)$.

Доказательство. Пусть $\alpha(\langle g\rangle) = \langle g'\rangle$, где g, g' — нормированные трёхзначные функции и $g(y) = 1/2$, $g'(y) = 1/2^t$ для некоторого $t > 0$. Докажем, что если $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f'\rangle$, где f, f' — нормированные трёхзначные функции и $f(y) = a$, $0 < a < 1$, то $f'(y) = a^t$.

В самом деле, для любого a, $0 < a < 1$, существует единственная последовательность $(t_m)_{a,\,1/2}$ неотрицательных целых чисел, для которой

$$\frac{1}{2^{t_m+1}} < a^m \leqslant \frac{1}{2^{t_m}} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N},$$

что равносильно

$$g^{t_m+1}(y) < f^m(y) \leqslant g^{t_m}(y).$$

Тогда по предложениям 4.5 и 4.11 для подалгебр $\langle f'\rangle$ и $\langle g'\rangle$ последовательность $(t_m)_{f'(y),\,1/2^t}$ совпадает с $(t_m)_{a,\,1/2}$. Последнее верно при $f'(y) = a^t$. Остаётся показать, что $(t_m)_{b,\,1/2} \neq (t_m)_{a,\,1/2}$ для любого $b \neq a$, $1 > b > 0$.

Действительно, без ограничения общности считая $b > a$, выберем числа $i, j \in \mathbb{N}$, такие что

$$\frac{\ln a}{\ln 1/2} > \frac{j}{i} > \frac{\ln b}{\ln 1/2}.$$

Тогда $a^i < 1/2^j < b^i$. Значит, $t_i \leqslant j - 1$ для последовательности $(t_m)_{b,\,1/2}$, но $t_i \geqslant j$ для последовательности $(t_m)_{a,\,1/2}$.

По предложению 4.8 с учётом предыдущих рассуждений получаем, что для любой нормированной функции $f \in C^\vee(X)$ и нормированной функции f', где $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f'\rangle$, найдётся $t_y > 0$, такое что $f(y) = a$ тогда и только тогда, когда $f'(y) = a^t$ для всех a, $1 \geqslant a \geqslant 0$. Аналогичное верно и для точек x и z.

Докажем, что $t_x = t_y = t_z$. Пусть

$$\left\langle\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle \mapsto \left\langle\left(1, \frac{1}{2^{t_y}}, \frac{1}{2^{t_z}}\right)\right\rangle, \quad \left\langle\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\rangle \mapsto \left\langle\left(\frac{1}{2^{t_x}}, 1, \frac{1}{2^{t_z}}\right)\right\rangle.$$

Тогда $1/2^{t_y} = 1/2^{t_z}$ и $1/2^{t_x} = 1/2^{t_z}$ согласно предложению 4.5. Следовательно, $t_y = t_z$ и $t_x = t_y$.

Таким образом, если $t = t_x = t_y = t_z$, то $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f^t\rangle$ для любой подалгебры $\langle f\rangle$. $\square$

4.3. Случай $|X| \geqslant 4$

Лемма 4.13. *Для произвольной трёх- и более значной подалгебры $\langle f\rangle$ имеется решёточная характеризация подалгебр $\langle f \vee r\rangle$, где $r > 0$, $|\operatorname{Im} f \vee r| \geqslant 3$.*

Доказательство. Докажем, что для произвольных трёх- и более значных подалгебр $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$, где $\langle g\rangle \subset [f]$, равносильны следующие условия:

1) $\langle g\rangle = \langle f \vee r\rangle$ для некоторого $r > 0$;
2) $\langle g\rangle \nsubseteq A \vee \mathbb{R}^+$ для любой подалгебры $A \subset \langle f\rangle$.

Рассмотрим произвольную трёх- и более значную подалгебру $\langle f \vee r\rangle \neq \langle f\rangle$. Допустим, что $\langle f \vee r\rangle \subseteq A \vee \mathbb{R}^+$ для некоторой подалгебры $A \subset \langle f\rangle$. Тогда $f \vee r = f' \vee r'$, где

$$f' = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \in A, \quad r' \geqslant 0.$$

По условию $|\operatorname{Im} f \vee r| \geqslant 3$ и $f \vee r \neq f$. Значит, $f(y) > f(z) > r > f(w)$ для некоторых $y, z, w \in X$. Без ограничения общности можно считать, что $f(y) = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 1 = r' \vee a_1 \vee \ldots a_n, \\ a = r' \vee a_1 a \vee \ldots a_n a^n, \\ r = r' \vee a_1 b \vee \ldots a_n b^n, \end{cases}$$

где $f(z) = a$, $f(w) = b$, $1 > a > r > b \geqslant 0$. Следовательно, $a_i \leqslant 1$. В частности, $a_1 b \vee \ldots \vee a_n b^n \leqslant b$. Кроме того, $r > b$. Следовательно, $r = r'$, а потому $a = a_1 a \vee \ldots a_n a^n$. Значит, $a_1 = 1$.

По условию $f' \neq f$. Поэтому $a_k f^k(x) > f(x)$ для некоторых $x \in X$ и k, $k \geqslant 2$. Значит, $f(x) > 1 > r$. Следовательно, $(f \vee r)(x) < (f' \vee r')(x)$. Противоречие. Поэтому $\langle f \vee r\rangle \nsubseteq A \vee \mathbb{R}^+$ для любой подалгебры $A \subset \langle f\rangle$.

Обратно, пусть выполняется условие 2). Поскольку $g \in [f]$, то функция g имеет вид

$$g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n. \tag{4.12}$$

Тогда $g \in [h]$, где $h = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n$. Согласно условию 2) это означает, что $\langle h\rangle = \langle f\rangle$. Тогда по лемме 2.6 $h = fc$ для некоторого $c > 0$. Таким образом, $g = a_0 \vee cf$, причём $a_0 \neq 0$, так как $\langle g\rangle \neq \langle f\rangle$. Значит, $\langle g\rangle = \langle f \vee r\rangle$, где $r = a_0/c > 0$. $\square$

Лемма 4.14. *Для произвольных точек $x \neq y \in X$ и трёх- или более значных подалгебр $\langle f\rangle$, $\langle g\rangle$, где $1 = f(x) > f(y)$ и $1 = g(x) > g(y)$, автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$ сохраняет равенство $f(y) = g(y)$, т. е. $f'(y) = g'(y)$, где $\langle f'\rangle = \alpha(\langle f\rangle)$, $f'(x) = 1$ и $\langle g'\rangle = \alpha(\langle g\rangle)$, $g'(x) = 1$.*

Доказательство. Поскольку

$$f(y) = g(y) = 0 \iff \langle f\rangle,\ \langle g\rangle \subseteq M_y \iff \\ \iff \langle f'\rangle,\ \langle g'\rangle \subseteq \alpha(M_y) = M_y \iff f'(y) = g'(y),$$

то в случае $f(y) = g(y) = 0$ утверждение верно.

Пусть $f(y) > 0, g(y) > 0$.

Если $f(z) = 0$ для некоторой точки $z \in X$, то рассмотрим произвольную трёх- и более значную подалгебру $\langle f \vee r\rangle$, где $r > 0$ и $\langle (f \vee r)(y) = f(y)$. По лемме 4.13 $\alpha(\langle f \vee r\rangle) = \langle f' \vee r'\rangle$, где $r' > 0$ и $\langle f' \vee r'\rangle$ — трёх- или более значная подалгебра. Тогда (см. предложение 4.5)

$$f(y) = (f \vee r)(y) \iff (f \vee r)(y) > (f \vee r)(z) \iff \\ \iff (f' \vee r')(y) > (f' \vee r')(z) \iff f'(y) = (f' \vee r')(y).$$

Таким образом, без ограничения общности подалгебру $\langle f\rangle$ можно считать sp-подалгеброй. Аналогичное верно и для подалгебры $\langle g\rangle$.

I. Пусть $f(y) > f(z)$ и $g(y) > g(w)$ для некоторых $z, w \in X$.

а) Рассмотрим случай, когда $z \neq w$.

Докажем, что следующие условия равносильны:

1) $f(y) = g(y)$;

2) существует трёх- и более значная подалгебра $\langle l\rangle$, для которой

   2.1) $l(x) > l(y) > l(z)$, $l(y) > l(w)$;

   2.2) $\langle f\rangle \subseteq \langle l\rangle \vee \langle h_f\rangle$ и $\langle l\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle h'_f\rangle$ для некоторых подалгебр $\langle h_f\rangle$ и $\langle h'_f\rangle$, таких что $h_f(x) = h_f(y) = h_f(z) > 0$ и $h'_f(x) = h'_f(y) = h'_f(z) > 0$;

   2.3) $\langle g\rangle \subseteq \langle l\rangle \vee \langle h_g\rangle$ и $\langle l\rangle \subseteq \langle g\rangle \vee \langle h'_g\rangle$ для некоторых подалгебр $\langle h_g\rangle$ и $\langle h'_g\rangle$, таких что $h_g(x) = h_g(y) = h_g(z) > 0$ и $h'_g(x) = h'_g(y) = h'_g(z) > 0$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $f(y) = g(y)$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и рассмотрим положительную функцию $l \in C^{\vee}(X)$, такую что $l = f$ на $\{x, y, z\}$ и $l(w) = g(w)$. Тогда условия 2.2) и 2.3) выполняются для функций $h_f = f/l$, $h'_f = l/f$ и $h_g = g/l$, $h'_g = l/g$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Без ограничения общности можно считать, что $l(x) = f(x) = h_f(x) = 1$. В частности, $l(z) < l(y) < 1$, $h_f(z) = h_f(y) = 1$. Докажем, что $f(y) = l(y) = g(y)$.

Поскольку $\langle f\rangle \subseteq \langle l\rangle \vee \langle h_f\rangle$, то функция f имеет вид

$$f = (a_{01}h_f \vee \ldots \vee a_{0q}h_f^q) \vee l(a_{10} \vee a_{11}h_f \vee \ldots \vee a_{mn}l^{m-1}h_f^n). \tag{4.13}$$

Подставляя x, находим, что $a_{ij} \leqslant 1$. Поскольку $f(y) > f(z)$, то

$$f(y) = l(y)\big(a_{10} \vee a_{11} \vee \ldots \vee a_{mn}l^{m-1}(y)\big) \leqslant l(y).$$

Аналогично из $\langle l\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle h'_f\rangle$ получаем, что $l(y) \leqslant f(y)$. Значит, $f(y) = l(y)$. По тем же причинам $g(y) = l(y)$.

По предложению 4.5 условие 2) выполняется для функции f тогда и только тогда, когда оно выполняется для функции f'. Следовательно, α сохраняет равенство $f(y) = g(y)$.

б) Пусть $z = w$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и рассмотрим положительную функцию $l \in C^{\vee}(X)$, такую что $l = f$ на $\{x, y, z\}$ и $l(w') = g(w)$ для некоторой точки $w' \notin \{x, y, z\}$. Тогда согласно пункту а) α сохраняет равенства $l(y) = f(y)$ и $l(y) = g(y)$, а значит, и $f(y) = g(y)$.

II. Покажем, что случай, когда $f(y) = \min f$ или $g(y) = \min g$, сводится к случаю I: докажем, что для некоторой трёх- и более значной z-подалгебры $\langle u_f \rangle$, где $u_f = f$ на $\{x, y\}$, α сохраняет равенство $u_f(y) = f(y)$.

Пусть $f(y) = \min f$. Поскольку $\langle f \rangle$ — трёх- или более значная подалгебра и $|X| \geqslant 4$, то

$$1 = f(x) > f(z) > f(y), \quad f(w) > 0$$

для некоторых $z, w \in X$. Рассмотрим произвольную функцию $u_f \in C^{\vee}(X)$, такую что $u_f = f$ на $\{x, y, z\}$ и $u_f(w) = 0$. Тогда если $\langle u'_f \rangle = \alpha(\langle u_f \rangle)$, где $u'_f(x) = 1$, то $u'_f(z) = f'(z) = f(z)$, $u'_f(w) = 0$ и $u'_f(y) = u_f(y)$ по предложению 4.5 и пункту I.

Докажем, что $u'_f(y) = f'(y)$ Обозначим через M_f множество подалгебр $\langle l \rangle$, таких что

$$l(x) = 1, \quad l(y) < l(z), \quad l(z) = f(z), \quad l(w) = 0$$

и $\langle l \rangle \subseteq \langle f \rangle \vee \langle h \rangle$ для некоторой подалгебры $\langle h \rangle$, где $h(x) = h(y) = h(z) = 1$, $h(w) = 0$. Тогда $l(y) = f(y)$ для любой подалгебры $\langle l \rangle \in M_f$, где $\langle l \rangle = \langle fh \rangle$. Покажем, что $l(y) \geqslant f(y)$.

Поскольку $l \in \langle f \rangle \vee \langle h \rangle$, $l(w) = 0$ и $f(w) > 0$, то функция l имеет вид

$$l = (a_{01}h \vee \ldots \vee a_{0q}h^q) \vee fh(b_{10}f \vee b_{01}h \vee \ldots \vee b_{mn}f^m h^n).$$

Тогда

$$\begin{cases} 1 = r \vee b_{10} \vee b_{01} \vee \ldots \vee b_{mn}, \\ l(y) = r \vee f(y)\bigl(b_{10}f(y) \vee b_{01} \vee \ldots \vee b_{mn}f^m(y)\bigr), \\ l(z) = r \vee f(z)\bigl(b_{10}f(z) \vee b_{01} \vee \ldots \vee b_{mn}f^m(z)\bigr), \end{cases}$$

где $r = a_{01} \vee \ldots \vee a_{0q}$.

Поскольку $l(y) < l(z)$, то $l(z) > r$. Кроме того, $l(z) = f(z) < 1$. Следовательно, $b_{0i} = 1$ для некоторого i. Поэтому $l(y) = r \vee f(y) \geqslant f(y)$.

Таким образом,

$$f(y) = u_f(y) = \inf\{l(y)\}, \quad \langle l \rangle \in M_f.$$

По предложению 4.5 и пункту I α сохраняет равенства

$$u_f(y) = \inf\{l(y)\}, \quad \langle l \rangle \in M_f$$

и $\alpha(M_f) = M_{f'}$. Значит, α сохраняет равенство $f(y) = u_f(y)$. □

Предложение 4.15. *Пусть X — компакт, $|X| \geqslant 4$. Тогда для произвольных точки $y \in X$ и подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$, где $f, g \notin \mathbb{R}^+$ — нормированные функции, автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Bigl(\mathrm{A}\bigl(C^{\vee}(X)\bigr)\Bigr)$ сохраняет отношения*

$$f(y) = g(y), \quad f(y) < g(y), \quad f(y) > g(y).$$

Доказательство. В случае когда $f(y) \in \{0,1\}$ или $g(y) \in \{0,1\}$, утверждение следует из предложения 4.5. Поэтому можно считать, что $0 < f(y) < 1$, $0 < g(y) < 1$.

I. Пусть $\langle f \rangle$, $\langle g \rangle$ — трёх- и более значные подалгебры, где

$$1 = f(x) > f(y), \quad 1 = g(x') > g(y)$$

для некоторых $x, x' \in X$.

1. Докажем, что α сохраняет равенство $f(y) = g(y)$. Рассмотрим произвольную z-подалгебру $\langle h \rangle$, где $h = f \vee g$ на $\{x, x', y\}$. Тогда по лемме 4.14 α сохраняет равенства $f(y) = h(y)$ и $g(y) = h(y)$, а значит, и равенство $f(y) = g(y)$.

2. Докажем, что α сохраняет неравенство $f(y) < g(y)$. Рассмотрим произвольные z-подалгебры $\langle h \rangle$ и $\langle l \rangle$, где

$$h(x) = 1, \quad h(y) = f(y), \quad h(z) = f(y), \quad l(x) = 1, \quad l(y) = g(y), \quad l(z) = h(z).$$

Тогда согласно пункту 1 и предложению 4.5 α сохраняет отношения

$$f(y) = h(y) = h(z), \quad l(y) = g(y), \quad l(z) = h(z), \quad l(y) > l(z),$$

а значит, и неравенство $f(y) < g(y)$.

II. Покажем, что случай, когда $|\operatorname{Im} f| = 2$ или $|\operatorname{Im} g| = 2$, сводится к пункту I.

Достаточно показать, что для произвольной трёх- и более значной подалгебры $\langle u_f \rangle$, где $u_f = f$ на $\{x, y\}$, α сохраняет равенство $u_f(y) = f(y)$.

Обозначим через M_f множество подалгебр $\langle l \rangle$, где l — нормированная функция, $1 = l(z) > l(x) > l(y) > 0$, $z \in X \setminus \{x, y\}$, и $\langle l \rangle \subseteq \langle f \rangle \vee \langle h \rangle$ для некоторой подалгебры $\langle h \rangle$, где $h(x) = h(y) = 0$, $h(z) = 1$.

Поскольку $l \in \langle f \rangle \vee \langle h \rangle$, то функция l имеет вид

$$l = a_{10} f \vee a_{01} h \vee \ldots \vee a_{mn} f^m h^n.$$

Тогда поскольку $0 < l(x) < f(x) = 1$ и $h(x) = h(y) = 0$, то $a_{i0} < 1$. Следовательно, $l(y) < f(y)$. Кроме того, для любого $a \in \big(0, f(y)\big)$ найдётся подалгебра $\langle l \rangle \in M_f$, такая что $l(y) = a$. Подойдёт $l = cf \vee h$, где $c = a/f(y)$. Таким образом, с учётом пункта I получаем, что

$$f(y) = \sup\{l(y)\}, \quad \langle l \rangle \in M_f,$$

и α сохраняет равенство

$$u_f(y) = \sup\{l(y)\}, \quad \langle l \rangle \in M_f.$$

Кроме того, в силу предложения 4.5 $\alpha(M_f) = M_{f'}$. Значит, α сохраняет равенство $f(y) = u_f(y)$. □

Предложение 4.16. *Пусть* $\alpha \in \operatorname{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^{\vee}(X)\big)\Big)$, *где* X — *компакт,* $|X| \geqslant 4$. *Тогда для произвольных* $n \in \mathbb{N}$ *и трёх- и более значной подалгебры* $\langle f \rangle$ *получаем, что* $\alpha(\langle f^n \rangle) = \langle (f')^n \rangle$, *где* $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f' \rangle$.

Доказательство повторяет доказательство предложения 4.11 с той лишь разницей, что индукцией по $n \in \mathbb{N}$, опираясь на предложение 4.8, доказываем, что $\alpha(M_n) = M'_n$, где

$$M_n = \{\langle f\rangle, \ldots, \langle f^n\rangle\}, \quad M'_n = \{\langle f'\rangle, \ldots, \langle (f')^n\rangle\}. \qquad \square$$

Аналогично предложению 4.12 доказывается следующее утверждение.

Предложение 4.17. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$, где X — компакт, $|X| \geqslant 4$. Тогда найдётся $t > 0$, такое что $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f^t\rangle$ для любой $f \in C^\vee(X)$.*

Завершим доказательство теоремы 4.1.

Пусть X — произвольное хьюиттовское пространство, $|X| \geqslant 4$, $\alpha \in \mathrm{Aut}_{M_x}\Big(\mathrm{A}\big(C^\vee(X)\big)\Big)$. По предложению 4.17 найдётся такое $t > 0$, что $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f^t\rangle$ для любой b-подалгебры $\langle f\rangle$.

Допустим, что $\langle f\rangle$ не b-подалгебра. Выберем точку $x \in X$, где $f(x) > 0$, и для произвольной точки $y \in X$ рассмотрим произвольную трёх- и более значную b-подалгебру $\langle g\rangle$, где $g = f$ на $\{x, y\}$. Тогда по лемме 4.14 получаем, что

$$\frac{f'(y)}{f'(x)} = \frac{g'(y)}{g'(x)} = \frac{g^t(y)}{g^t(x)} = \frac{f^t(y)}{f^t(x)}.$$

Следовательно,

$$f'(y) = f^t(y) \cdot \frac{f'(x)}{f^t(x)}$$

для всех $y \in X$. Значит, $\alpha(\langle f\rangle) = \langle f^t\rangle$. Теорема 4.1 доказана.

Литература

[1] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1990. — Т. 28. — С. 3—46.

[2] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1991. — Т. 29. — С. 119—191.

[3] Вечтомов Е. М. Решётка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, № 5. — С. 687—693.

[4] Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: ВГПУ, 2000.

[5] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 63—103.

[6] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // ДАН СССР. — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 11—15.

[7] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[8] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[9] Cabello Sánchez F., Cabello Sánchez J., Ercan Z., Önal S. Memorandum on multiplicative bijections and order // Semigroup Forum. — 2009. — Vol. 79. — P. 193—209.

[10] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. — New York: Springer, 1976.
[11] Golan J. F. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
[12] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 1. — P. 45—99.
[13] Marovt J. Multiplicative bijections of $C(X, I)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 134, no. 4. — P. 1065—1075.